

А. И. БЕЛОУСОВ

## СТАТИЧЕСКАЯ ЖЕСТКОСТЬ ГИДРОСТАТИЧЕСКИХ ПОДШИПНИКОВ

Одним из параметров, характеризующих работоспособность гидростатических опор, является их жесткость.

Для правильной оценки критических оборотов в период проектирования машин и агрегатов, использующих гидростатические подшипники, нужно знать жесткость или податливость опор, для чего необходимо иметь теоретические зависимости, подтвержденные экспериментально.

В работах [1—3], посвященных жесткостным характеристикам гидростатических опор, рассмотрены плоские (упорные) подшипники, работающие при ламинарном режиме течения смазки в элементах гидравлического тракта опоры.

В нашей работе [4] впервые (насколько это известно автору) получены теоретические зависимости для жесткости опорных гидростатических подшипников, работающих при ламинарном и турбулентном режимах течения жидкости при любых эксцентриситетах. Были приведены формулы для определения жесткости опор без учета перетечек жидкости из камеры в камеру и влияния вращения вала.

В настоящей статье указанные факторы учтены.

Прежде чем переходить к выводу основных уравнений заметим, что при гидродинамическом расчете гидростатических подшипников получаем кривую зависимости грузоподъемности  $R$  (или коэффициента грузоподъемности  $\Theta$ ) от эксцентриситета  $e$  (или относительного эксцентриситета  $\epsilon$ )  $R=f(e)$  (или  $\Theta=f(\epsilon)$ ). Численное значение наклона этой кривой, названное жесткостью (или коэффициентом жесткости), указывает на способность подшипника реагировать на изменение нагрузки соответствующим изменением толщины пленки.

Однако, чтобы определить жесткость гидростатического подшипника при данном эксцентриситете  $e$ , нужно иметь кривую  $R=f(e)$ , тогда как ниже полученные зависимости дают значение жесткости в данной точке (при данном  $e$ ).

При этом предполагается, что в окрестности рассматриваемой точки характеристика  $R=f(e)$  имеет линейный характер, при наличии вращения вал не прецессирует.

Рассмотрим случай (фиг. 1), когда имеется «начальный» относительный эксцентриситет  $\varepsilon = \frac{e}{\delta_0} = \frac{OO'}{\delta_0}$ , а малое смещение  $z$  вала направлено под углом  $\gamma$  к линии  $OO'$ . Тогда центр вала переместится из точки  $O'$  в точку  $O''$ , подшипник будет иметь «новый» относительный эксцентриситет  $\varepsilon_n = \frac{OO''}{\delta_0} = \frac{a}{\delta_0}$ . Здесь  $\delta_0$  — радиальный зазор при концентричном положении вала относительно обоймы подшипника.

Если принять, что давление в  $i$ -ой камере равно  $p_i$  на всем участке от середины перемычек между  $i$ -ой и  $(i \pm 1)$ -ой камерами, то грузоподъемность подшипника в направлении оси  $oy$  будет

$$R_{oy} = L_s \cdot D \cdot \sin \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n p_i \cos(\varphi_i - \gamma), \quad (1)$$

где  $L_s = m + l$  — эффективная длина подшипника;  
 $m$  — осевая длина камеры подшипника;

$l$  — осевая длина торцевой перемычки;

$D$  — диаметр подшипника;

$n$  — число камер гидростатического подшипника;

$\varphi_i$  — угол между серединой  $i$ -ой камеры и осью  $oy$ .

Если ввести обозначение для относительного давления в камере

$$h_i = \frac{P_i}{P_{вх}}, \quad (2)$$

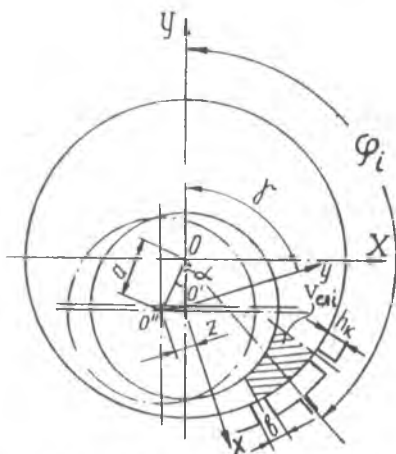
где  $P_{вх}$  — давление подачи,

то коэффициент грузоподъемности на ось  $oy$  будет иметь вид

$$\Theta_{oy} = \sin \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n h_i \cos(\varphi_i - \gamma). \quad (3)$$

После перемещения центра вала из точки  $O'$  в точку  $O''$  относительное давление в  $i$ -ой камере изменится на величину  $\Delta h_i$ , что вызовет изменение коэффициента грузоподъемности

$$\Delta \Theta_{oy} = \sin \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n \Delta h_i \cos(\varphi_i - \gamma). \quad (4)$$



Фиг. 1. Системы координат.

При этом зазор в  $i$ -ой камере изменится на величину

$$\Delta \delta_i = z \cos(\varphi_i - \gamma). \quad (5)$$

Разделив проекцию возмущающей силы на ось  $oy$  на перемещение  $z$ , получим жесткость гидростатического подшипника в направлении оси  $oy$  и коэффициент жесткости

$$c_{oy} = \frac{P_{вх} L_3 D \Delta \theta_{oy}}{z} = P_{вх} L_3 D \sin \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta h_i}{\Delta \delta_i} \cos^2(\varphi_i - \gamma). \quad (6)$$

$$\bar{c} = \delta_0 \sin \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta h_i}{\Delta \delta_i} \cos^2(\varphi_i - \gamma). \quad (7)$$

Таким образом, для определения жесткости гидростатических подшипников необходимо находить производную давления в  $i$ -ой камере по зазору в той же камере.

Для этого можно было бы продифференцировать систему уравнений для гидродинамического расчета гидростатических опор при ламинарном или турбулентном режимах течения жидкости, что привело бы к новым системам уравнений и значительным трудностям.

Нами предложен приближенный, но более простой способ определения  $\frac{dh_i}{d\delta_i}$ .

Запишем уравнение сплошности потока для  $i$ -ой камеры в дифференциальной форме, считая расход зависящим от зазора и давления в камере и ограничиваясь только линейными членами,

$$\begin{aligned} dQ_{вх_i} &= \frac{\partial Q_{вх_i}}{\partial \delta_i} d\delta_i + \frac{\partial Q_{вх_i}}{\partial P_i} dp_i, \\ dQ_{вых_i} &= \frac{\partial Q_{вых_i}}{\partial \delta_i} d\delta_i + \frac{\partial Q_{вых_i}}{\partial P_i} dp_i. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $Q_{вх_i}$  и  $Q_{вых_i}$  количество втекающей в  $i$ -ую камеру и вытекающей из нее жидкости.

Переходя в (8) от дифференциалов к приращениям и приравнивая  $\Delta Q_{вх_i} = \Delta Q_{вых_i}$ , получим с учетом равенства

$$\Delta \delta_i = \delta_0 \cdot \Delta \varepsilon \cdot \cos \varphi_i, \quad (9)$$

где  $\Delta \varepsilon$  — приращение эксцентриситета, выражение для коэффициента статической жесткости  $n$ -камерного гидростатического подшипника:

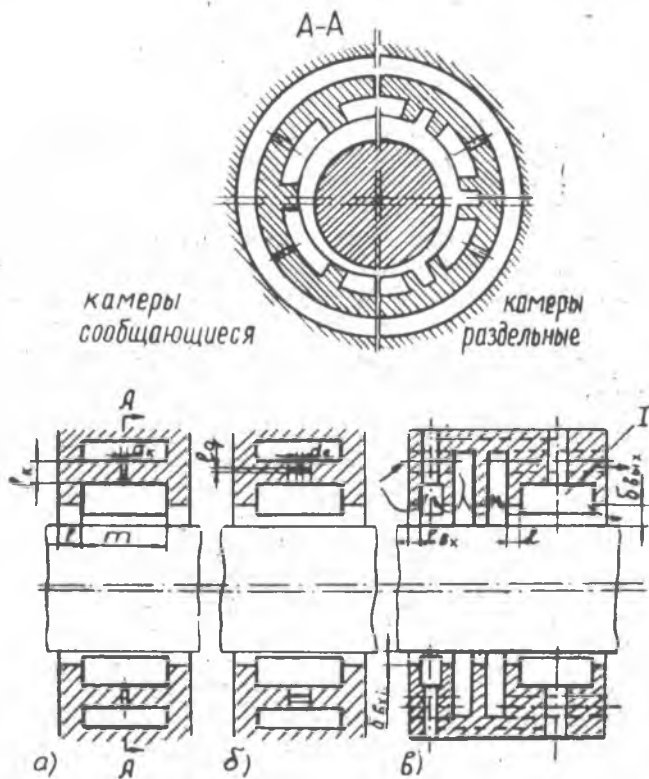
$$\bar{c} = \sin \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n \frac{a_{1i} - a_{2i}}{b_{1i} - b_{2i}} \cdot \frac{\cos^2(\varphi_i - \gamma)}{\cos \varphi_i}, \quad (10)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} a_{1i} &= \frac{\partial Q_{вх_i}}{\partial \varepsilon}, & a_{2i} &= \frac{\partial Q_{вых_i}}{\partial \varepsilon}, \\ b_{1i} &= \frac{\partial Q_{вх_i}}{\partial h_i}, & b_{2i} &= \frac{\partial Q_{вых_i}}{\partial h_i}. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнение (10) является общим уравнением для коэффициента статической жесткости независимо от режима течения смазки, вращения вала и других условий.

При нахождении величин  $b_{1i}$  и  $b_{2i}$  считаем давление в  $(i \pm 1)$ -ой камере не зависящим от давления в  $i$ -ой камере (для этого и необходимы компенсационные элементы (фиг. 2) в виде капилляров,



Фиг. 2. Схемы гидростатических подшипников.

диафрагм, щелей и т. д.), что для подшипников с сообщающимися камерами является допущением, так как наличие перетекания смазки по перемычкам между камерами обуславливает связь давлений в соседних камерах (особенно у малокамерных подшипников и при больших эксцентриситетах). В дальнейшем автор предполагает учесть эту связь.

Рассмотрим ламинарный режим течения смазки. Согласно уравнению сплошности смазки для  $i$ -ой камеры

$$Q_{вхi} = Q_{выхi}, \quad (12)$$

где  $Q_{вхi} = Q_{кэi} + Qi(i+1)$ ;

$Q_{выхi} = 2Qi - Qi(i-1)$ ;

$Q_{кэi}$  — расход жидкости через компенсационный элемент  $i$ -ой камеры;

$Qi(i \pm 1)$  — расход через перемычку длиной  $b$  и шириной  $t$  между  $i$ -ой и  $(i \pm 1)$ -ой камерами;

$Qi$  — расход в осевом направлении через торцовую перемычку длиной  $l$  и шириной  $\frac{\pi D}{n}$ .

Расход смазки через компенсационный элемент определяется следующими зависимостями соответственно для подшипников с капиллярной, диафрагменной и щелевой компенсациями

$$Q_{ки} = \frac{\pi d_k^4 P_{вх}(1-h_i)}{128\nu l_k} \quad (13)$$

$$Q_{ди} = \mu_d \frac{\pi d_d^2}{4} \sqrt{\frac{2P_{вх}}{\rho}} \sqrt{1-h_i} \quad (14)$$

$$Q_{щ} = \frac{\pi D \delta_{вхi}^3 P_{вх}}{6\nu l_{вх}} (1-h_i) \quad (15)$$

Для всех типов компенсации расход через торцовые щели подшипника определяется зависимостью [5]

$$Qi = \frac{D\delta_0^3 P_{вх}}{12\nu l} h_i k_{i\varepsilon} - \delta_0 l U \varepsilon \sin \frac{\pi}{n} \sin \varphi_i \quad (16)$$

а через перемычку между  $i$ -ой и  $(i \pm 1)$ -ой камерами [6]

$$Qi(i \pm 1) = \frac{m\delta_0^3}{12\nu l} P_{вх}(\pm h_{i\pm 1} \mp h_i) k_{i(i\pm 1)}^3 \mp \frac{Um\delta_0}{2} k_{i(i\pm 1)} \quad (17)$$

В уравнениях (13) — (17) обозначено:

$d_k$  и  $l_k$  — диаметр и длина капилляра;

$d_d$  и  $\mu_d$  — диаметр и коэффициент расхода диафрагмы;

$\nu$  и  $\rho$  — вязкость и плотность смазки,

$l_{вх}$  — осевая длина входной торцовой перемычки;

$U$  — окружная скорость вращения вала;

$h_i$  и  $h_{i\pm 1}$  — относительное давление в  $i$ -ой и  $(i \pm 1)$ -ой камерах,

$$k_{i\varepsilon} = \frac{2\pi}{n} \left(1 + \frac{3}{2} \varepsilon^2\right) + 3\varepsilon \left(2 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right) \sin \frac{\pi}{n} \cos \varphi_i + \frac{3}{2} \varepsilon^2 \sin \frac{2\pi}{n} \cos 2\varphi_i + \\ + \frac{\varepsilon^3}{6} \sin \frac{3\pi}{n} \cos 3\varphi_i,$$

$$k_{i(i\pm 1)} = 1 + \varepsilon \cos \left(\varphi_i \pm \frac{\pi}{n}\right).$$

Для подшипников с раздельными камерами (фиг. 2) в  $i$ -ую камеру смазка подается только через компенсационный элемент, а количество вытекающей смазки равно

$$Q_{\text{вых}i} = \frac{\alpha D \delta_0^3 P_{\text{вх}} h_i}{6\nu l} k_i^3 + \frac{m \delta_0^3 P_{\text{вх}}}{12k \cdot b} h_i [\bar{k}_{i(i+1)}^3 + \bar{k}_{i(i-1)}^3] - Um \left(1 + \frac{l}{m}\right) \times \delta_0 \varepsilon \sin \alpha \sin \varphi_i, \quad (18)$$

где  $k_i = 1 + \varepsilon \cos \varphi_i$ ;

$\bar{k}_{i(i \pm 1)} = 1 + \varepsilon \cos(\varphi_i \pm \alpha)$ ;

$\alpha = \frac{\pi}{n} - \frac{b}{D}$  — угол между осями, проходящими через середины камер и перемычки.

Определяя  $a_{1i}$ ,  $a_{2i}$ ,  $b_{1i}$ ,  $b_{2i}$  согласно (11) из (12) — (18), получим следующие выражения для коэффициента жесткости:

а) подшипники с сообщающимися камерами  
капиллярная компенсация

$$\bar{C}_k = 10,2k\Phi \sin \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{(h_{i+1} - h_i) k_{i(i+1)}^2 \cos\left(\varphi_i + \frac{\pi}{n}\right)}{a_{iik}} + \frac{(h_{i-1} - h_i) k_{i(i-1)}^2 \cos\left(\varphi_i - \frac{\pi}{n}\right) + 4a_{\text{вп}} \sin \frac{\pi}{n} \sin \varphi_i - \frac{6,27}{nk} h_i k_i^2 \cos \varphi_i}{a_{iik}} \right\} \times \frac{\cos^2(\varphi_i - \gamma)}{\cos \varphi_i} \quad (19)$$

диафрагменная компенсация

$$\bar{C}_x = \frac{2}{\pi} kA \sin \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{(h_{i+1} - h_i) k_{i(i+1)}^2 \cos\left(\varphi_i + \frac{\pi}{n}\right)}{a_{iig}} + \frac{(h_{i-1} - h_i) k_{i(i-1)}^2 \cos\left(\varphi_i - \frac{\pi}{n}\right) + 4a_{\text{вп}} \sin \frac{\pi}{n} \sin \varphi_i - \frac{2\pi}{nk} h_i k_i^2 \cos \varphi_i}{a_{iig}} \right\} \frac{\cos^2(\varphi_i - \gamma)}{\cos \varphi_i} \quad (20)$$

щелевая компенсация

$$\bar{C}_{\text{ш}} = \sin \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\frac{3n}{2\pi} k_{\text{вх}} [(h_{i+1} - h_i) k_{i(i+1)}^2 \cos\left(\varphi_i + \frac{\pi}{n}\right) + (h_{i-1} - h_i) k_{i(i-1)}^2 \cos\left(\varphi_i - \frac{\pi}{n}\right)] + \frac{6n}{\pi} a_{\text{вп}} \frac{l_{\text{вх}}}{l} \sin \frac{\pi}{n} \sin \varphi_i}{a_{iim}} - \frac{3(1 - h_i)(1 - \varepsilon \cos \varphi_i)^2 \cos \varphi_i - 3 \frac{l_{\text{вх}}}{l} h_i k_i^2 \cos \varphi_i}{a_{iim}} \right\} \frac{\cos^2(\varphi_i - \gamma)}{\cos \varphi_i} \quad (21)$$

б) подшипники с раздельными камерами и капиллярной компенсацией

$$C_p = 10,2 k \Phi \sin \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{h_i [\bar{k}_{i(i+1)}^2 \cos(\varphi_i + \alpha) + k_{i(i-1)}^2 \cos(\varphi_i - \alpha)]}{a_{iip}} + \frac{6,27}{nk} h i k_i^2 \cos \varphi_i - 4a_{вп} \sin \alpha \sin \varphi_i \right\} \frac{\cos^2(\varphi_i - \gamma)}{\cos \varphi_i} \quad (22)$$

В уравнениях (19) — (22) приняты следующие обозначения:

$\Phi = \frac{D_0^3 l_k}{d_k^4 l}$  — параметр конструкции первого рода подшипника с капиллярной компенсацией;

$A = \frac{\mu_g d_n^2 l_v}{D_0^3 \sqrt{\rho P_{вх}}}$  — безразмерный параметр подшипника с диафрагменной компенсацией;

$k = \frac{ml}{Db}$  — параметр конструкции второго рода;

$k_{вх} = \frac{ml_{вх}}{Db}$  — параметр конструкции подшипника со щелевой компенсацией;

$$a_{iik} = 1 + \frac{21,3}{n} k_i^3 \Phi + 3,4k\Phi [k_{i(i+1)}^3 + k_{i(i-1)}^3];$$

$$a_{iig} = \frac{4}{3n} A k_i^3 + \sqrt{\frac{2}{(1-h_i)\rho P_{вх}}} + \frac{2}{3\pi} kA [k_{i(i+1)}^3 + k_{i(i-1)}^3];$$

$$a_{iim} = \frac{l_{вх}}{l} + (1 - \varepsilon \cos \varphi_i)^3 + \frac{n}{2\pi} k_{вх} [k_{i(i+1)}^3 + k_{i(i-1)}^3];$$

$$a_{iip} = 1 + \frac{21,3}{n} k_i^3 \Phi + 3,4k\Phi [k_{i(i+1)}^3 + k_{i(i-1)}^3];$$

$$a_{вп} = \frac{U b_v}{\delta_0^2 P_{вх}} \left( 1 + \frac{l}{m} \right);$$

$$k_i = 1 + \varepsilon \cos \varphi_i \approx \sqrt[3]{k_{ie}}.$$

Из (19) — (22) следует, что коэффициент жесткости гидростатического подшипника зависит от числа камер подшипника, его геометрии, эксцентриситета, физических свойств смазки, скорости вращения вала, давления подачи. Вязкость смазки влияет на коэффициент жесткости для всех рассматриваемых типов компенсации при вращении вала, а при отсутствии вращения — только на жесткость подшипника с диафрагменной компенсацией.

Анализировать в общем случае влияние различных конструктивных параметров на жесткость гидростатических подшипников практически невозможно из-за сложной функциональной связи их с давлениями в камерах.

Практический интерес представляет случай отсутствия эксцентриситета в подшипнике, когда хорошо отбалансированный

ротор расположен вертикально или находится в состоянии неустойчивости.

В этом случае для подшипников с изотропной нагрузочной характеристикой ( $n \geq 6 \div 8$ ),  $\gamma = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ , а коэффициент жесткости

$$\bar{C}_k = \frac{32\Phi h_k}{1 + \frac{21,3}{n}\Phi + 6,8k\Phi} \sin \frac{\pi}{n}; \quad (23)$$

$$\bar{C}_d = \frac{Ah_d}{\frac{4}{3n}A + \frac{4}{3\pi}kA + \sqrt{\frac{2}{(1-h_d)\rho P_{вх}}}} \sin \frac{\pi}{n}; \quad (24)$$

$$\bar{C}_{ш} = \frac{1,5n \left[ 1 - h_{ш} \left( 1 + \frac{l_{вх}}{l} \right) \right]}{1 + \frac{l_{вх}}{l} + \frac{n}{\pi} k_{вх}} \sin \frac{\pi}{n}; \quad (25)$$

$$\bar{C}_p = \frac{10,2k\Phi h_p \left( 2 \cos \alpha + \frac{6,27}{nk} \right) \frac{n}{2}}{1 + \frac{21,3}{n}\Phi + 6,8k\Phi} \sin \frac{\pi}{n}. \quad (26)$$

Здесь  $h_k$ ,  $h_d$ ,  $h_{ш}$ ,  $h_p$  — относительное давление в камере при  $\varepsilon = 0$  подшипников с капиллярной, диафрагменной, щелевой компенсациями и с отдельными камерами.

Сравнивая (23) с (26), видим, что при одинаковой геометрии и относительном давлении коэффициент жесткости подшипника с отдельными камерами больше чем коэффициент жесткости подшипника с сообщающимися камерами.

Если пренебречь перетоком жидкости по окружности (т. е. принять  $k = k_{вх} = 0$ ), то получим [4]

$$\bar{C}_k = 1,5 (h_k - h_k^2) n \sin \frac{\pi}{n}; \quad (27)$$

$$\bar{C}_d = 3 \frac{h_g - h_g^2}{n_g + 1} n \sin \frac{\pi}{n}; \quad (28)$$

$$\bar{C}_{ш} = 3 (h_{ш} - h_{ш}^2) n \sin \frac{\pi}{n}. \quad (29)$$

Максимальное значение коэффициента жесткости при  $\varepsilon = 0$  и  $k = k_{вх} = 0$  достигается при  $h = 0,5$  — для капиллярной и щелевой компенсаций и при  $h = 0,41$  — для диафрагменной компенсации.

Следует заметить, что при одинаковых относительных давлениях в камерах

$$\bar{C}_k < \bar{C}_d < \bar{C}_{ш}. \quad (30)$$

Если параметр конструкции  $k \neq 0$ , то с увеличением его коэффициент жесткости подшипников с сообщающимися камерами уменьшается. Это объясняется тем, что при смещении вала из положения  $\varepsilon = 0$  в сторону какой-либо камеры, из нее через перемычку между камерами будет перетекать тем больше жидкости, чем выше значение  $k = \frac{ml}{Db}$ , «сопротивляемость» смазочного слоя при этом уменьшается и коэффициент жесткости падает.



В шестикамерном подшипнике с капиллярной компенсацией, относительное давление, обеспечивающее максимальное значение коэффициента жесткости при  $k=0; 0,5; 1,56; 2,0; 3,0; 0; 0,5; 1,0; 1,56; 2,0; 3,0$  будет, соответственно,  $h_0 = 0,5; 0,57; 0,63; 0,67; 0,68$  и  $0,7$ .

Таким образом, величина  $h_0$  не является постоянной для опорных гидростатических подшипников, как это утверждает в [2], а зависит от параметра конструкции  $k$ .

На фиг. 3 представлена зависимость коэффициента жесткости 6-камерного гидростатического подшипника с капиллярной компенсацией от параметра конструкции  $\Phi$  при разных  $k$ . Из фиг. 3 следует, что неучет влияния параметра конструкции  $k$  на жесткость ведет к существенным ошибкам (например, при  $k = 1,56$  в два и более раза).

Видно, что при определенных значениях параметра конструкции  $\Phi$  коэффициент жесткости принимает максимальное значение.

Из зависимостей (23) — (26) видно, что зазор  $\delta_0$  в подшипнике при постоянных значениях параметров конструкции не влияет на коэффициент жесткости. Тогда жесткость подшипника

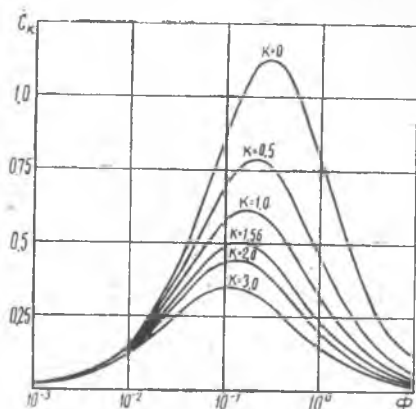
$$C = \frac{L_3 DP_{вх}}{\delta_0} \bar{C} \quad (31)$$

обратно пропорциональна радиальному зазору.

Вращение вала не оказывает влияния на жесткость гидростатических подшипников, работающих при ламинарном режиме и  $\epsilon = 0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Маланоски, Леб. Сравнительная оценка компенсирующих устройств гидростатического подшипника. «Техническая механика». Тр. Американского общ. инж.-мех., с. Д., № 2, 1961.
2. Линг. О выборе оптимальной жесткости подшипника с принудительной подачей смазки. «Техническая механика» Тр. Американского общ. инж.-мех., с. Д., № 1, 1962.
3. R. C. Elwell, B. Sternlicht Theoretical and Experimental analysis of Hydrostatic Thrust Bearings. Trans. ASME, S. D, V, 82, 1960.
4. А. И. Белоусов. К вопросу о жесткости гидростатических подшипников. «Теория трения и износа», изд. «Наука», М., 1965.
5. А. И. Белоусов. Течение вязкой несжимаемой жидкости в коротких подшипниковых щелях. Сб. Трудов МАИ, М., 1967.
6. А. И. Белоусов. Влияние перекоса вала относительно обоемы гидростатического подшипника на его грузоподъемность. Сб. Трудов МАИ, М., 1967.



Фиг. 3. Зависимость коэффициента жесткости от параметра конструкции  $\Phi$  при  $\epsilon=0$  и разных  $k$ .