В. Н. БУЗИЦКИЙ, В. П. ФИЛЕКИН

СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОЛИГОНАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Собственные частоты (период) колебаний систем с полигональной характеристикой можно определять точным методом припасовывания. Однако при большом числе линейных участков выражение частоты (периода) в этом случае получается весьма громоздким, недоступным для прямого анализа, что снижает также оперативность расчетов. Приближенные решения [5] не всегда дают достаточную точность и мало пригодны для кусочно-линейной аппроксимации криволинейных характеристик.

В данной работе предлагается способ определения частот свободных колебаний консервативных систем с полигональной характеристикой восстанавливающей силы, основанный на разложении характеристики исходной системы на кусочно-линейные составляющие, для каждой из которых известны точные выражения частот. Как будет показано ниже, такой способ дает достаточно точные значения частот в широком диапазоне изменения параметров характеристики, соотношения жесткостей и соотношения амплитуд участков и легко обобщается на случай криволинейных характеристик с помощью кусочно-линейной аппроксимации.

Существо предлагаемого способа изложим на примере полигональной характеристики (рис. 1, *а*) системы с массой m и набором пружин с жесткостями C_1', C_2', ..., C_i'. Повышение (понижение) жесткостей C_1, C_2, ..., C_i на соответствующем участке связано с включением (выключением) параллельно работающих

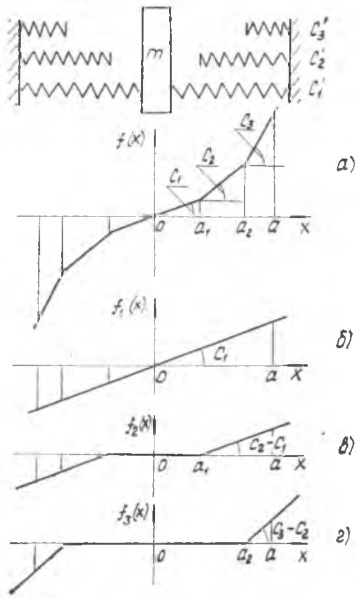

Рис. 1

пружин, часть из которых может иметь предварительное натяжение.

Разложим полигональную характеристику системы (рис. 1, *а*) по участкам на кусочно-линейные составляющие (рис. 1, *б*, *в*, *г*). В результате такого разложения первый участок будет представлен линейной характеристикой с жесткостью C_1 (рис. 1, *б*), а все остальные — кусочно-линейными характеристиками систем с зазорами a_1, a_2, ..., a_i и жесткостями $C_2 - C_1$, $C_3 - C_2$, ..., $C_i - C_{i-1}$ (рис. 1, *в*, *г*). Очевидно, что исходная характеристика в точности соответствует сумме составляющих характеристик.

Для каждой системы с характеристикой, полученной в результате разложения, возможно точно определить значение частоты свободных колебаний [5] — эквивалентной жесткости C_i^*. Для первого участка будем иметь $C_1^* = C_1$, а для всех остальных

$$C_i^* = \frac{C_i - C_{i-1}}{\left[1 + \frac{2}{\pi(\bar{a}_{i-1} - 1)}\right]^2}, \qquad (1)$$

где $\bar{a}_{i-1} = \frac{a_к}{a_{i-1}}$ и $a_к = a$ при $к$ участках.

Определение эквивалентных жесткостей C_i^* для составляющих систем (рис. 1, *б*, *в*, *г*) можно рассматривать как их линеаризацию (рис. 2, *а*, *б*), поэтому эквивалентная жесткость исходной системы может быть определена как сумма эквивалентных жесткостей составляющих систем (рис. 2, *в*)

$$C^* = \sum_{i=1}^{к} C_i^* \qquad (2)$$

или

$$C^* = \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{C_i - C_{i-1}}{\left[1 + \frac{2}{\pi(\bar{a}_{i-1} - 1)}\right]^2}, \tag{3}$$

а при равных участках $| a_i = ia_1 |$

$$C^* = \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{C_i - C_{i-1}}{\left[1 + \frac{2(i-1)}{\pi(\kappa - i + 1)}\right]^2}. \tag{4}$$

Численная оценка точности зависимости (3) на примере билинейной характеристики представлена в табл. 1, где в процентах дается ошибка в определении эквивалентной жесткости по выражению (3) и методом Н. Н. Боголюбова — Н. М. Крылова [1]. Сравнение велось с точным методом припасовывания. Как видно из табл., точность выражения (3) повышается с увеличением отношения жесткостей.

Таблица 1

a/a_1 \ C_2/C_1		0,2	2,0	10,0	100,0
1,5	(3)	+3,000	−1,750	−2,930	−0,620
	Б	+0,504	+0,358	+5,220	+11,870
2,0	(3)	+2,900	−0,940	−0,870	−0,130
	Б	+0,842	+0,330	+2,740	+4,470
5,0	(3)	+1,310	−0,094	−0,045	−0,005
	Б	+0,750	+0,067	+0,284	+0,368

Проведем обобщение предлагаемого способа на случай криволинейных симметричных характеристик. Воспользуемся кусочно-линейной аппроксимацией характеристики $f(x)$. Для этого произвольное значение амплитуды a разделим на $к$ равных участков $a_1, a_2, \ldots, a_к = a$ (рис. 3). Заменяя $f(x)$ в пределах каждого участка прямой, касательной к $f(x)$ при значении абсциссы $x = {}^1/_2(\alpha_i + \alpha_{i-1})$, представим характеристику $f(x)$ в виде ломаной. Тогда, производя разложение ломаной характеристики на кусочно-линейные составляющие способом, описанным выше, с учетом (4) получим выражение эквивалентной жесткости для

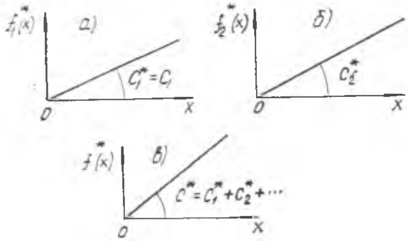

Рис. 2

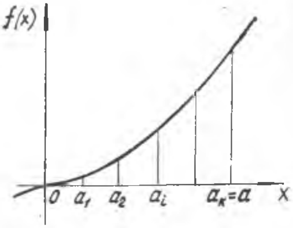

Рис. 3

системы, имеющей криволинейную характеристику $f(x)$ восстанавливающей силы,

$$C^* = \sum_{i=1}^{к} \frac{f'\left(\frac{2i-1}{2к}\,a\right) - f'\left[\frac{2(i-1)-1}{2к}\,a\right]}{\left[1 + \frac{2(i-1)}{\pi(к-i+1)}\right]^2}, \tag{5}$$

где $f'\left(\frac{2i-1}{2к}\,a\right) = \frac{df(x)}{dx}$ при $x = \frac{2i-1}{2к}\,a$,

$$f'\left[\frac{2(i-1)-1}{2к}\,a\right] \equiv 0 \text{ при } i=1.$$

Проведем численное сравнение значений эквивалентных жесткостей для системы с симметричной характеристикой, описываемой законом $f(x) = bx^n$, где $n = 3, 5, 7\ldots$ Для этого выражение эквивалентной жесткости запишем в виде, соответствующем точному решению [5]

$$C^* = B \cdot a^{n-1}.$$

Значения коэффициента B, подсчитанные различными методами, заимствованы из работы [2] и приведены в табл. 2, где

I — точное значение, определяемое по вычислению эллиптического интеграла;
II — метод прямой линеаризации [4];
III — метод Галеркина [5];
IV — метод Н. К. Куликова [3];
V — метод Ю. А. Гоппа [2];
VI — рассматриваемый метод по выражению (5) при разбивке характеристики на пять участков.

Таблица 2

n	I	II	III	IV	V	VI
3	0,718	0,714	0,750	1,000	0,717	0,710
5	0,566	0,556	0,632	1,000	0,570	0,562
7	0,480	0,455	0,570	1,000	0,479	0,472
9	0,420	0,385	0,526	1,000	0,420	0,411
11	0,378	0,334	0,490	1,000	0,379	0,364
13	0,341	0,294	0,464	1,000	0,343	0,325

Из рассмотрения табл. 2 следует, что значения, полученные по выражению (5), ближе к точному решению I, чем значения по методам II, III, IV. Отметим также, что вычисления по выражению (5) значительно проще, чем в методах II, III, IV.

Рассмотрим приложение данного способа к случаю несимметричных криволинейных характеристик. Предварительно для отклонения в правую сторону $a_п$ определяется соответствующее ему отклонение в левую сторону $a_л$ (рис. 4) из выражения

$$\int_{-a_л}^{a_п} f(x)\,dx = 0.$$

Затем для каждой ветви характеристики (правой и левой) могут быть найдены значения $C^*_{п(л)}$ эквивалентных жесткостей

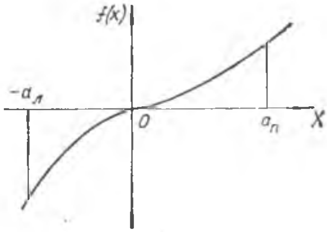

Рис. 4

по выражению (5) в предположении симметричности характеристики, соответствующей отдельной ветви. Рассматривая определение эквивалентной жесткости для каждой ветви характеристики как их линеаризацию, возможно определить эквивалентную жесткость всей системы для характеристики из двух отрезков прямых с изломом в начале координат:

$$C^* = \frac{4C^*_п C^*_л}{(\sqrt{C^*_п} + \sqrt{C^*_л})^2} . \tag{6}$$

В случае, если $f(x)$ полином вида

$$f(x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \ldots ,$$

то выражение эквивалентной жесткости для правой (левой) ветви характеристики запишется

$$C^*_{п(л)} = A + 0{,}831Ba + 0{,}710Ca^2 + 0{,}623Da^3 + 0{,}562Ea^4 + 0{,}512Ga^5 + \\ + 0{,}472Ha^6 + \ldots , \tag{7}$$

где амплитуды a берутся для правой (левой) ветви со своими знаками. Эквивалентная жесткость всей системы определится по выражению (6).

Для сравнения были подсчитаны значения эквивалентных жесткостей по выражению (6, 7) и методом прямой линеаризации [5] для характеристики $f(x) = x + x^2 + x^3$; для амплитуды $a_п = 1$ ($a_л = -1{,}426$) они равны соответственно $C^* = 1{,}734$ и $C^* = 1{,}756$.

ВЫВОДЫ

1. Предлагаемый способ определения собственной частоты (эквивалентной жесткости) колебаний консервативных систем с нелинейной восстанавливающей силой путем разложения характеристики на кусочно-линейные составляющие имеет весьма простую и, по существу, одну и ту же (каноническую) форму отыскания аналитической зависимости частоты от амплитуды для всех типов характеристик.

2. Проверка точности определения собственной частоты предлагаемым способом в сравнении с точными решениями (в тех случаях, где это возможно) показала хорошее совпадение в широком диапазоне изменения параметров характеристики. Точность данного способа в большинстве случаев не уступает точности приближенных методов, а в ряде случаев и превосходит их.

3. Предлагаемый способ, имея стандартную форму определения эквивалентной жесткости, обладает значительно большей простотой и универсальностью для различных типов характеристик (полигональных, криволинейных, несимметричных), чем большинство приближенных методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз. 1958.

2. Гопп Ю. А. Линеаризация позиционной силы методом кусочно-линейной аппроксимации Инженерный сборник, АН СССР, 1954, т. 18.

3. Куликов Н. К. Приближенное определение периода свободных колебаний нелинейной системы с одной степенью свободы. Инженерный сборник, АН СССР, 1952, т. 13.

4. Пановко Я. Г. Способ прямой линеаризации в нелинейных задачах теории упругих колебаний. Инженерный сборник, АН СССР, 1952, т. 13.

5. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. «Машиностроение», 1967.

И. Д. ЭСКИН, Ю. К. ПОНОМАРЕВ

ПРОСТЕЙШАЯ СХЕМА МЕТОДИКИ РАСЧЕТА ДЕМПФЕРОВ И АМОРТИЗАТОРОВ С КОНСТРУКЦИОННЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\eta = \frac{P}{T}$ — безразмерная циклическая сила;

P — текущее значение циклической силы, действующей на демпфирующее устройство;

T — базовое значение силы;

$\varepsilon = \frac{y}{a}$ — безразмерная циклическая деформация;