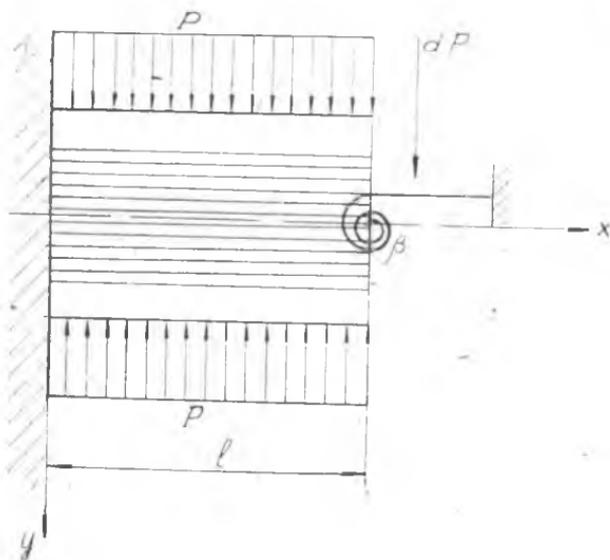


И. Д. ЭСКИН

ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ МНОГОСЛОЙНОГО ПАКЕТА С СУХИМ ТРЕНИЕМ НА КОНТАКТНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ЦИКЛИЧЕСКОЙ СИЛОЙ

Рассмотрим задачу о поперечном изгибе многослойного пакета циклической силой αP , приложенной к подвижному концу. Неподвижный конец многослойного пакета заделан. Подвижный конец защемлен в опоре с бесконечной податливостью к перемещениям u и v и угловой податливостью β (см. фиг. 1).

Пакет набран из нечетного числа n одинаковых прокладок толщиной h и двух одинаковых накладок толщиной $h_n = \frac{k}{2}h$ и сжат



Фиг. 1.

с постоянной интенсивностью p [бар]. Прокладкам нижней половины пакета присвоены нечетные номера $1, 3, 5, \dots, n$, начиная со средней.

Решение этой задачи позволяет построить метод расчета реальных конструкций многослойных демпферов, а также получить, как частные случаи, ранее полученные решения задачи о поперечном изгибе многослойной консоли, стержня с заделанными концами и упруго-подвижной заделкой одного конца, циклической силой αP , приложенной к подвижному концу и шарнирно-опертой балки циклической силой, приложенной в середине пролета [1].

Рассмотрим процесс первого нагружения, когда коэффициент нагрузки изменяется в пределах $0 \leq \alpha \leq 1$. На первом этапе этого процесса пакет изгибается как балка монолитного сечения, т. е. касательные усилия на всех контактных поверхностях меньше предельного значения $q < q_0 = fpb$ [2]. Здесь f — коэффициент трения скольжения на контактных поверхностях пакета, b — ширина пакета. Граничные условия по напряжениям на первом этапе нагружения будут

$$\sigma_y = -p \quad (1)$$

$$\int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_x(l, y) dy = 0 \quad (2)$$

$$\tau_{xy}\left(x, \frac{h_0}{2}\right) = \tau_{xy}\left(x, -\frac{h_0}{2}\right) = 0; \quad (3)$$

$$\int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \tau_{xy}(l, y) dy = \frac{\alpha P}{b}. \quad (4)$$

Здесь $h_0 = (n + k)h$ — толщина пакета, l — длина пакета. Граничные условия по перемещениям будут

$$u\left(0, \frac{h_0}{2}\right) = 0; \quad (5)$$

$$v\left(0, \frac{h_0}{2}\right) = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}\left(0, \frac{h_0}{2}\right) = 0; \quad (7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}\left(l, \frac{h_0}{2}\right) = \beta \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_x(l, y) y dy. \quad (8)$$

Функция напряжений имеет вид

$$\varphi = Axy^3 + By^3 + Cx^2 + Dxy. \quad (9)$$

Отметим, что (9) удовлетворяет уравнению совместности $\nabla^4 (\nabla^2 \varphi) = 0$ при любых значениях коэффициентов.

Напряжения и перемещения пакета на первом этапе нагружения, удовлетворяющие граничным условиям (1) + (8), определяются известным способом [3].

Первый этап закончится в момент, когда касательные усилия на контактных поверхностях первого слоя достигнут величины q_0 . Совершенно очевидно, что предельная величина касательных усилий будет достигнута одновременно на всей длине контактных поверхностей первого слоя [2].

Значение силы $\alpha_{01}P$, соответствующей концу первого этапа, будет

$$\alpha_{01}P = \frac{2}{3} \frac{R(n+k)^3}{(n+k)^2 - 1}. \quad (10)$$

Здесь $R = q_0 h$ [дан] — обобщенная сила трения. Прогиб подвижного конца пакета ($x = l$, $y = \frac{h_0}{2}$) в конце первого этапа будет равен

$$v(\alpha_{01}) = \frac{1}{18} \cdot \frac{Rl^3}{EI} \cdot \frac{4 \frac{\beta EI}{l} (n+k)^3 + 1}{[(n+k)^2 - 1] \cdot \left[\frac{\beta EI}{l} (n+k)^3 + 1 \right]}. \quad (11)$$

Здесь $I = \frac{bh^3}{12}$ — момент инерции поперечного сечения прокладки.

Перемещением от действия сдвигивающей нагрузки p пренебрегаем.

Как только нагрузка станет больше, чем $\alpha_{01}P$, произойдет проскальзывание по контактным поверхностям первого слоя. При дальнейшем возрастании нагрузки проскальзывание будет распространяться от средних контактных поверхностей к крайним. При величине нагрузки $\alpha_{0j}P$ проскальзывание достигнет j -ой контактной поверхности, лежащей между j -ым и $j+1$ -ым слоями. В момент окончания j -ого этапа нагрузки внешняя нагрузка достигнет величины $\alpha_{0j+2}P$ и произойдет проскальзывание между $j+2$ -ым и $j+4$ -ым слоями. Граничные условия по напряжениям в конце j -ого этапа нагрузки, когда внешняя нагрузка возросла на величину $\Delta P_{j+2,j} = \alpha_{0j+2}P - \alpha_{0j}P$ запишутся в следующем виде

$$2 \int_{-\frac{hj+2,j}{2}}^{\frac{hj+2,j}{2}} \sigma_x(l, y) dy + j \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x(l, y) dy = 0; \quad (12)$$

$$\int_{-\frac{hj+2,j}{2}}^{\frac{hj+2,j}{2}} \sigma_x(l, y) y dy = \frac{\Delta m_{j+2,j}}{b}; \quad (13)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ia} (l, y) y dy = \frac{\Delta m_{jc}}{b}; \quad (14)$$

$$2\Delta m_{j+2, j} + j\Delta m_{jc} = \Delta M_j; \quad (15)$$

$$\tau_{jxy} \left(x, \frac{h}{2} \right) = \tau_{jxy} \left(x, -\frac{h}{2} \right) = 0; \quad (16)$$

$$\tau_{xy} \left(x, \frac{hj+2, j}{2} \right) = \tau_{xy} \left(x, -\frac{hj+2, j}{2} \right) = 0; \quad (17)$$

$$\int_{-\frac{hj+2, j}{2}}^{\frac{hj+2, j}{2}} \tau_{xy} (l, y) dy = \frac{\Delta Q_{j+2, j}}{b}; \quad (18)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{jxy} (l, y) dy = \frac{\Delta Q_{j, j}}{b}; \quad (19)$$

$$2\Delta Q_{j+2, j} + j\Delta Q_{jc} = \Delta P_{j+2, j} \quad (20)$$

$$j = 1, 3, 5, \dots, n-2.$$

Здесь j — число сдвинувшихся слоев, $h_{j+2, j}$ — толщина каждого из двух пакетов непроскользнувших слоев, $\Delta m_{j+2, j}$ — приращение изгибающего момента, действующего на пакет непроскользнувших слоев на подвижном конце пакета, Δm_{jc} — приращение изгибающего момента, действующего на каждый из j сдвинувшихся слоев на подвижном конце пакета, ΔM_j — суммарное приращение изгибающего момента, приложенного к подвижному концу пакета, $\Delta Q_{j+2, j}$ — приращение перерезывающей силы в каждом пакете непроскользнувших слоев, ΔQ_{jc} — приращение перерезывающей силы в каждом из j сдвинувшихся слоев.

Граничные условия по перемещениям в конце j -ого этапа на грузки будут:

$$u_{j+2, j} \left(0, \frac{h_{j+2, j}}{2} \right) = 0; \quad (21)$$

$$v_{j+2, j} \left(0, \frac{h_{j+2, j}}{2} \right) = 0; \quad (22)$$

$$\frac{\partial v_{j+2, j} \left(\frac{h_{j+2, j}}{2} \right)}{\partial x} = 0; \quad (23)$$

$$u_j \left(0, -\frac{h}{2} \right) = 0; \quad (24)$$

$$v_j \left(0, -\frac{h}{2} \right) = 0; \quad (25)$$

$$\frac{\partial v_j \left(0, -\frac{h}{2} \right)}{\partial x} = 0; \quad (26)$$

$$\frac{\partial v_{j+2, i} \left(l, \frac{h_{j+2, i}}{2} \right)}{\partial x} = \frac{\partial v_j \left(l, -\frac{h}{2} \right)}{\partial x} = \beta \Delta M_j; \quad (27)$$

$$v_{j+2, i} \left(x, \frac{h_{j+2, i}}{2} \right) = v_j \left(x, -\frac{h}{2} \right). \quad (28)$$

$$j = 1, 3, 5, \dots, n-2.$$

Здесь $v_{j+2, i}$ — приращение перемещения вдоль оси y пакета непроскользнувших слоев, v_j — приращение перемещения вдоль оси каждого из j сдвинувшихся слоев, $u_{j+2, i}$ — приращение перемещения вдоль оси x пакета непроскользнувших слоев, u_j — приращение перемещения вдоль оси x каждого из j сдвинувшихся слоев. Функция напряжений для каждого из двух пакетов непроскользнувших слоев имеет вид

$$\varphi_1 = Exy^3 + Fy^3 + Kx^2 + Gxy; \quad (29)$$

и для каждого из j проскользнувших слоев

$$\varphi_2 = E_1 xy^3 + F_1 y^3 + K_1 x^2 + G_1 xy; \quad (30)$$

(29) и (30) также удовлетворяют уравнению совместности деформаций при произвольных значениях коэффициентов. Известным способом [3] найдем приращения напряжений и перемещений в каждом из двух пакетов непроскользнувших слоев от приращения нагрузки на каждый пакет на величину $\Delta Q_{j+2, j}$ и приращения напряжений и перемещений в каждом из j сдвинувшихся слоев при возрастании нагрузки на сдвинувшийся слой на величину ΔQ_j , удовлетворяющие граничным условиям (12) ÷ (28). Используя условие равенства прогибов пакета непроскользнувших слоев и одного сдвинувшегося слоя (28), найдем связь между величинами приращений нагрузок $\Delta Q_{j+2, j}$ и ΔQ_j . Приращение перерезывающей силы $\Delta Q_{j+2, j}$ определим как равнодействующую приращений касательных усилий в пакете непроскользнувших слоев.

Тогда зависимость между величинами внешней нагрузки на концах двух соседних этапов нагружения выразится следующим образом

$$\sigma_{0j+2} P = \sigma_{0j} P + \frac{2}{3} R \frac{(n+k-j)^3 + 4j}{(n+k-j)[(n+k-j)^2 - 4]}. \quad (31)$$

Наибольший прогиб пакета в момент проскальзывания $j+2$ -го слоя будет равен

$$v(\sigma_{0j+2}) = v(\sigma_{0j}) + \frac{8}{9} \frac{Rl^3}{EI} \times \\ \times \frac{\frac{\beta EI}{l} [(n+k-j)^3 + 4j] + 1}{(n+k-j)[(n+k-j)^2 - 4] \left\{ \frac{\beta EI}{l} (n+k-j)^3 + 4j \right\}}. \quad (32)$$

Рекуррентные зависимости (51), (52) позволяют получить значения нагрузок и соответствующих им прогибов последовательно в конце второго, третьего, ... и предпоследнего этапов. Предпоследним будет этап, соответствующий $j=n-2$, когда проскальзывание достигнет крайних слоев балки.

При дальнейшем возрастании внешней нагрузки на величину $\Delta P_{n+2, n} = P - \sigma_{on} P$ пакет будет изгибаться как $n+2$ отдельных слоя, имеющих одинаковые прогибы. Просуммировав приращение прогибов подвижного конца пакета на всех этапах процесса нагружения, получим величину наибольшего прогиба в процессе циклического деформирования пакета в виде

$$v(1) = \frac{2}{9} \frac{P^3}{EI} D_1 [A_4 P - R (\frac{2}{3} A_4 A_8 - D_2)]. \quad (33)$$

Значение функций, обозначенных индексами A и D , встречающихся в формуле (33) и последующих формулах см. в приложении. На каждом этапе нагружения наибольшее приращение нормального напряжения возникло в наружном волокне накладки у заделки. Просуммировав эти приращения, найдем наибольшее напряжение пакета в процессе его циклического деформирования в виде

$$\sigma_n = \frac{hl}{I} D_3 \left[A_6 P - \frac{2}{3} R \cdot (A_2 A_6 + A_6 A_9 - D_4) \right]. \quad (34)$$

Когда величина наибольшей внешней нагрузки такова, что взаимные скольжения в процессе первого нагружения достигнут только j -ой контактной поверхности, лежащей между j -ым и $j+2$ -ым слоями, наибольший прогиб пакета будет равен

$$v_j(1) = \frac{2}{9} \cdot \frac{Rl^3}{EI} \cdot j^{-2}; \quad (35)$$

и наибольшее напряжение в пакете будет равно

$$\sigma_{nj} = \frac{2}{3} \frac{Rhl}{I} \cdot j^{-2}. \quad (36)$$

Номер контактной поверхности j , в которой при данной величине силы P начнутся взаимные скольжения, определяется из следующего равенства

$$P = \frac{2}{3} R A_8^{j-2}. \quad (37)$$

Теперь рассмотрим период разгрузки. Коэффициент нагрузки, обозначим его α^* , будет меняться в течение периода разгрузки в следующих пределах $1 > \alpha^* > -1$. Этапы периода разгрузки аналогичны рассмотренным в периоде нагружения, но направление взаимных смещений слоев будет обратным и величина приращения внешней нагрузки, смещающая проскальзывание на один слой, здесь в два раза больше [2] и, следовательно, приращение перемещений вдоль осей y и x пакетов непроскользнувших слоев и сдвинувшихся слоев на каждом этапе разгрузки в два раза

больше, чем на соответствующих этапах первого нагружения. Поэтому рекуррентные соотношения, связывающие величины внешней нагрузки, а также величины наибольшего прогиба на концах двух соседних этапов разгрузки будут иметь вид

$$\alpha_{0j+2}^* P = \alpha_{0j}^* P + \frac{4}{3} R \cdot \frac{(n+k-j)^3 + 4j}{(n+k-j)[(n+k-j)^2 - 4]}; \quad (38)$$

$$v(\alpha_{0j+2}^*) = v(\alpha_{0j}^*) + \frac{16}{9} \frac{Rl^3}{EI} \times \\ \times \frac{\beta \frac{EI}{l} [(n+k-j)^3 + 4j] + 1}{(n+k-j)[(n+k-j)^2 - 4] \left\{ \beta \frac{EI}{l} [(n+k-j)^3 + 4j] + 4 \right\}} \quad (39)$$

Пользуясь выражениями (38), (39) и тем, что в конце последнего этапа разгрузки при наименьшем значении нагрузки, равном $-P$, наименьший прогиб $|v(-1)| = v(1)$, можно построить кривую процессов разгрузки. Процесс повторной нагрузки полностью повторяет процесс разгрузки. Поэтому, чтобы получить величину энергии, рассеянной в пакете за один нагрузочный цикл, достаточно определить энергию, рассеянную в процессе разгрузки и удвоить эту величину. Циклическая энергия рассеивания численно равна работе, совершенной силами трения на пути, равном сумме взаимных скольжений, происходящих на контактных поверхностях в течение одного нагрузочного цикла. Эту работу можно выразить интегралом [1]

$$\Delta W = 2q_0 l \int_0^1 U(\xi) d\xi. \quad (40)$$

Здесь $U(\xi)$ — сумма взаимных скольжений по всем контактным поверхностям пакета в поперечном сечении, расположенном на расстоянии $\xi = \frac{x}{l}$ от заделки, происшедших в процессе разгрузки. Тогда энергия, рассеянная пакетом за цикл, запишется в следующем виде

$$\Delta W = \frac{8Rl^3}{3EI} \left\{ D_1 \left[A_1 P - \frac{2}{3} R [A_1 (A_2 + A_9) - D_5] \right] + \right. \\ \left. + \frac{\Delta^2}{2} (2 + \sigma) \left(\frac{2}{3} R A_{12} - P A_{11} \right) \right\}, \quad (41)$$

где $\Delta = \frac{h}{l}$ и σ — коэффициенты Пуассона.

Коэффициент поглощения будет равен:

$$\phi = \frac{24 \left\{ A_1 \tau - \frac{2}{3} [A_1 (A_2 + A_9) - D_5] + \frac{\Delta^2}{2 D_1} (2 + \sigma) \left(\frac{2}{3} A_{12} - A_{11} \tau \right) \right\}}{\tau (A_4 \tau - \frac{2}{3} A_4 A_8 + D_2)}. \quad (42)$$

Здесь $\eta_1 = \frac{P}{R}$.

Если в процессе циклического деформирования взаимные скольжения достигают только j -ой контактной поверхности, циклическая энергия рассеивания запишется в следующем виде

$$\Delta W_j = \frac{16}{9} \frac{R^{3/2}}{EI} \cdot \left[D_5^{j-2} - \frac{\Delta^2}{2} (2 + \sigma) A_{13}^{j-2} \right] \quad (43)$$

и коэффициент поглощения будет равен

$$\psi_j = \frac{24 \left[D_5^{j-2} - \frac{\Delta^2}{2} (2 + \sigma) A_{13}^{j-2} \right]}{D_2 \cdot A_8^{j-2}} \quad (44)$$

Положив в выражениях (33), (34), (35), (36), (41), (42), (43), (44) $\beta = \infty$ и $\beta = 0$ получим соответственно значения всех основных параметров многослойных пакетов, выполненных в виде консоли и стержня с заделанными концами и упруго-подвижной заделкой одного конца, деформируемых силой αP , приложенной к подвижному концу пакета.

Так как для многослойных демпфирующих пакетов величина $\Delta = \frac{h}{l} \ll 1$, для расчета основных параметров пакета можно применять нижеприведенные формулы.

Наибольший прогиб пакета равен

$$v(1) = \frac{1}{C_{1n}} (P - T), \quad (45)$$

где $T = R \frac{A_7}{A_4}$ — обобщенная сила трения [дан], равная силе, действующей на консольный пакет в момент, когда прогиб пакета равен 0 и C_{1n} — жесткость расслоенного пакета, равна

$$C_{1n} = \frac{3EI}{4l^3} \frac{(k^3 + 4n)}{D_1}. \quad (46)$$

Наибольшее напряжение пакета равно

$$\sigma_n = \frac{hl}{I} D_3 \left(A_6 P - T \frac{A_7 A_4}{A_5} \right). \quad (47)$$

Рассеянная циклическая энергия равна

$$\Delta W = \frac{12T}{C_{1n} A_5} \left[A_1 P - \frac{2}{3} T \frac{A_4}{A_5} (A_1 A_2 + A_3) \right]. \quad (48)$$

Коэффициент поглощения равен

$$\psi = 24 \frac{1}{A_5} \frac{A_1 \eta_1 - \frac{2}{3} \frac{A_4}{A_5} (A_1 A_2 + A_3)}{\eta_1 (\eta_1 - 1)}, \quad (49)$$

где $\eta_1 = \frac{P}{T}$.

Формулы (45), (48) дают заниженные значения параметров, а (47) — завышенные. Наибольшая ошибка получается при вычислении величины рассеянной циклической энергии, но в рабочем диапазоне значений относительных толщин накладок $k=2 \div 6$ и числа прокладок $n=19 \div 51$ она мала, т. е. мало отличается от единицы отношение

$$\Theta = \frac{\sum_{i=1}^{i=n-2} (n+k+i) \left\{ \beta_{0i} \frac{EI}{l} [(n+k-i)^3 + 4i] + 1 \right\} \left[\beta_{0i} \frac{EI}{l} (k^3 + 4n) + 4 \right]}{\sum_{i=1}^{i=n-2} \frac{n+k+i}{(n+k-i) [(n+k-i)^2 - 4]} \left\{ \beta_{0i} \frac{EI}{l} [(n+k-i)^3 + 4i] + 4 \right\} \left[\beta_{0i} \frac{EI}{l} (k^3 + 4n) + 4 \right]} \quad (50)$$

где

$$\beta_{0i} = \frac{2}{\frac{EI}{l} \sqrt{(k^3 + 4n) [(n+k-i)^3 + 4i]}}$$

значение угловой податливости, соответствующее максимальному значению каждого члена суммы, стоящей в числителе. Так для $n=25; k=2; \Theta=1,31$, а для $n=51; k=2; \Theta=1,15$. В случае, когда взаимные скольжения в процессе циклического нагружения достигают только j -ой контактной поверхности, наибольший прогиб пакета можно определять из следующего приближенного равенства

$$\vartheta_j(1) = \frac{T}{C_{1n}} \frac{A_5^{j-2}}{A_5} \quad j = 1, 3, 5, \dots, n. \quad (51)$$

Наибольшее напряжение в пакете определяется из равенства

$$\sigma_{jn} = \frac{1}{3} \frac{hl}{l} T \frac{A_4}{A_5} A_{10}^{j-2} D_3 \quad j = 1, 3, 5, \dots, n. \quad (52)$$

Рассеянная циклическая энергия будет равна

$$\Delta W_j = \frac{8T^2}{C_{1n}} \frac{A_9^{j-2}}{A_5^2} A_4 \quad j = 1, 3, 5, \dots, n \quad (53)$$

Коэффициент поглощения будет равен

$$\psi_j = 24 \frac{A_9^{j-2}}{A_8 A_5} \quad j = 1, 3, 5, \dots, n. \quad (54)$$

С уменьшением числа проскользнувших слоев j возрастает ошибка параметров, подсчитанных по формулам (51) — (54).

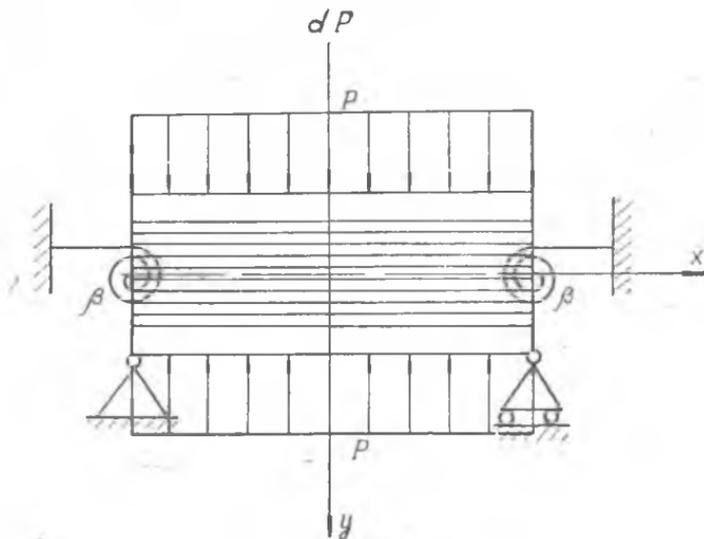
Проанализировав отношения

$$\theta_j = \frac{\sum_{i=1}^{i=j-2} (n+k+i) \left\{ \beta_{0i} \frac{EI}{l} [(n+k-i)^3 + 4i] + 1 \right\} \left[\beta_{0i} \frac{EI}{l} (k^3 + 4n) + 4 \right]}{(n+k-i) [(n+k-i)^2 - 4] \left\{ \beta_{0i} \frac{EI}{l} [(n+k-i)^3 + 4i + 4] \right\} \left[\beta_{0i} \frac{EI}{l} (k^3 + 4n) + 1 \right]} \cdot \sum_{i=1}^{i=j-2} \frac{n+k+i}{(n+k-i) [(n+k-i)^2 - 4]} \quad (55)$$

$$i = 1, 3, 5, \dots, j-2$$

$$j = 3, 5, \dots, n$$

можно выбрать предельное значение j , при котором формулы (51) — (54) еще достаточно точны.



Фиг. 2.

На фиг. 2 показан многослойный пакет, часто встречающийся в конструкциях реальных демпферов. Наибольшее напряжение в этом пакете для случаев $\sigma_{0n} < 1$ и $\sigma_{0j} = 1$ получим, подставив в формулы (47) и (52) вместо l величину $\frac{l}{2}$ и учтя, что в данном случае

$$T = 2R \frac{A_5}{A_4}. \quad (a)$$

Учтя (a) из формул (45), (51), (48), (53), (49), (54), найдем наибольший прогиб, рассеянную циклическую энергию и коэффициент поглощения пакета, показанного на фиг. 2. Положив, кроме того, в вышеперечисленных формулах $\beta = \sigma_0$, найдем все параметры пакета для шарнирно-опертой балки [1].

Для решения задачи о колебаниях системы с демпферами, выполненными в виде многослойных пакетов, необходимо знать зависимости средней жесткости цикла $\gamma = \frac{P}{\rho}$ и коэффициента поглощения ϕ демпфера от амплитуды колебания в демпфере $\rho = v(1)$. Для случая $\alpha_{0n} < 1$

$$\gamma = C_{1n} + \frac{T}{\rho}; \quad (56)$$

$$\phi = \frac{24T [A_1(\rho C_{1n} + T) - \frac{2}{3} T \frac{A_4}{A_5} (A_3 + A_1 A_2)]}{C_{1n} A_5 \rho (\rho C_{1n} + T)}. \quad (57)$$

Для случая $\alpha_{0j} = 1$

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{T}{\rho_j} A_8 \frac{A_4}{A_5}; \quad (58)$$

$$\phi = 24 \frac{T}{C_{1n} \rho_j} \cdot \frac{A_8^{j-2}}{A_8 \cdot A_5^{j-2}}. \quad (59)$$

Формулы (56) — (59) справедливы во всех вышеописанных случаях.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Соيفер, И. Д. Эскин. Поперечный изгиб многослойной консоли. Вибрационная прочность и надежность авиационных двигателей. Труды КуАИ, выпуск XIX, 1965.
2. Н. Г. Калинин и др. Конструкционное демпфирование в неподвижных соеднениях. АН Лат. ССР, Рига 1960 г.
3. М. М. Филоненко-Бородич. Теория упругости, ОГИЗ. Гостехиздат, 1947.

ПРИЛОЖЕНИЕ

$$D_1 = \frac{\beta \frac{EI}{l} (k^3 + 4n) + 1}{\beta \frac{EI}{l} (k^3 + 4n) + 4};$$

$$D_2 = \frac{1}{D_1} \left\{ \frac{4\beta \frac{EI}{l} (n+k)^3 + 1}{[(n+k)^2 - 1] \left[\beta \frac{EI}{l} (n+k)^3 + 1 \right] 4} \right\};$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^{i=n-2} \frac{\beta \frac{EI}{l} [(n+k-i)^3 + 4i] + 1}{(n+k-i) [(n+k-i)^2 - 4] \left\{ \beta \frac{EI}{l} [(n+k-i)^3 + 4i] + 4 \right\}} \right\}$$

$$i = 1, 3, 5, \dots, n-2$$

$$D_3 = \frac{\beta \frac{EI}{l} (k^3 + 4n) + 2}{\beta \frac{EI}{l} (k^3 + 4n) + 4}$$

$$D_4 = \frac{1}{D_3} \left\{ \frac{(n+k) \left[2\beta \frac{EI}{l} (n+k)^3 + 1 \right]}{4 [(n+k)^2 - 1] \left[\beta \frac{EI}{l} (n+k)^3 + 1 \right]} \right\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=n-2} \frac{\beta \frac{EI}{l} [(n+k-i)^3 + 4i] + 2}{[(n+k-i)^2 - 4] \left\{ \beta \frac{EI}{l} [(n+k-i)^3 + 4i] + 4 \right\}}$$

$$i = 1, 3, 5, \dots, n-2$$

$$D_5 = \frac{1}{D_1} \sum_{i=1}^{i=n-2} \frac{(n+k+i) \left\{ \beta \frac{EI}{l} [(n+k-i)^3 + 4i] + 1 \right\}}{\beta \frac{EI}{l} [(n+k-i)^3 + 4i] + 4 [(n+k-i)[(n+k-i)^2 - 4]}$$

$$i = 1, 3, 5, \dots, n-2$$

$$D_2 = \frac{4\beta \frac{EI}{l} (n+k)^3 + 1}{4 [(n+k)^2 - 1] \left[\beta \frac{EI}{l} (n+k)^3 + 1 \right]} +$$

$$+ 4 \sum_{i=1}^{i=j-2} \frac{\beta \frac{EI}{l} [(n+k-i)^3 + 4i] + 1}{(n+k-i) [(n+k-i)^2 - 4] \left\{ \beta \frac{EI}{l} [(n+k-i)^3 + 4i] + 4 \right\}}$$

$$j = 3, 5, \dots, n; \quad i = 1, 3, 5, \dots, j-2$$

$$D_4 = \frac{(n+k) \left[2\beta \frac{EI}{l} (n+k)^3 + 1 \right]}{4 [(n+k)^2 - 1] \left[\beta \frac{EI}{l} (n+k)^3 + 1 \right]} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=j-2} \frac{\beta \frac{EI}{l} [(n+k-i)^3 + 4i] + 2}{\left\{ \beta \frac{EI}{l} [(n+k-i)^3 + 4i] + 4 \right\} [(n+k-i)^2 - 4]}$$

$$j = 3, 5, \dots, n; \quad i = 1, 3, 5, \dots, j-2$$

$$D_5 = \sum_{i=1}^{i=j-2} \frac{n+k+i}{(n+k-i) [(n+k-i)^2 - 4]} \cdot \frac{\beta \frac{EI}{l} [(n+k-i)^3 + 4i] + 1}{\beta \frac{EI}{l} [(n+k-i)^3 + 4i] + 4}$$

$$j = 3, 5, \dots, n; \quad i = 1, 3, 5, \dots, j-2$$

$$A_1 = \frac{2n+k}{k^3+4n}; \quad A_2 = \frac{(n+k)^3}{(n+k)^2-1}$$

$$A_3 = \frac{1}{k^3 + 4n} \sum_{i=1}^{i=n-2} \frac{(2n+k)[(n+k-i)^3 + 4i] - (4n+k^3)(n+k+i)}{(n+k-i)[(n+k-i)^2 - 4]}$$

$$i = 1, 3, 5, 7, \dots, n-2$$

$$A_4 = \frac{6}{k^3 + 4n}$$

$$A_5 = \frac{1}{k^3 + 4n} \left[\frac{4(n+k)^3 - k^3 - 4n}{(n+k)^2 - 1} + \right.$$

$$\left. + 4 \sum_{i=1}^{i=n-2} \frac{(n+k-i)^3 + 4i - k^3 - 4n}{(n+k-i)[(n+k-i)^2 - 4]} \right]$$

$$i = 1, 3, 5, 7, \dots, n-2$$

$$A_6 = \frac{k}{k^3 + 4n}$$

$$A_7 = \frac{n+k}{3[(n+k)^2 - 1]} \left[\frac{2(n+k)^2 k}{k^3 + 4n} - 1 \right] +$$

$$+ \frac{2}{3(k^3 + 4n)} \sum_{i=1}^{i=n-2} \frac{k[(n+k-i)^3 + 4i] - (k^3 + 4n)(n+k-i)}{(n+k-i)[(n+k-i)^2 - 4]}$$

$$i = 1, 3, 5, \dots, n-2$$

$$A_9 = \sum_{i=1}^{i=n-2} \frac{(n+k-i)^3 + 4i}{(n+k-i)[(n+k-i)^2 - 4]}$$

$$i = 1, 3, 5, \dots, n-2$$

$$A_{11} = \frac{n-1}{k^3 + 4n}$$

$$A_{12} = A_{11} \left\{ \frac{(n+k)^3}{(n+k)^2 - 1} + \frac{(n+k-1)^3 + 4}{(n+k-1)[(n+k-1)^2 - 4]} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=3}^{i=n-2} \frac{(n+k-i)^3 + 4i - \frac{i-1}{n-1} k^3}{(n+k-i)[(n+k-i)^2 - 4]} \right\}$$

$$i = 3, 5, \dots, n-2$$

$$A_5^{j-2} = \frac{1}{(n+k)^2 - 1} + 4 \sum_{i=1}^{i=j-2} \frac{1}{(n+k-i)[(n+k-i)^2 - 4]}$$

$$j = 3, 5, 7, \dots, n; \quad i = 1, 3, 5, \dots, j-2$$

$$A_8^{j-2} = \frac{(n+k)^3}{(n+k)^2 - 1} + \sum_{i=1}^{i=j-2} \frac{(n+k-i)^3 + 4i}{(n+k-i)[(n+k-i)^2 - 4]}$$

$$j = 3, 5, 7, \dots, n; \quad i = 1, 3, 5, \dots, j-2$$

$$A_9 = \sum_{i=1}^{j-2} \frac{n+k+i}{(n+k-i)[(n+k-i)^2-4]}$$

$$j = 3, 5, 7, \dots, n; \quad i = 1, 3, 5, \dots, j-2$$

$$A_{10} = \frac{n+k}{(n+k)^2-1} + 2 \sum_{i=1}^{i=j-2} \frac{1}{(n+k-i)^2-4}$$

$$j = 3, 5, 7, \dots, n; \quad i = 1, 3, 5, \dots, j-2$$

$$A_{13} = \sum_{i=3}^{i=j-2} \frac{i-1}{(n+k-i)[(n+k-i)^2-4]}$$

$$j = 3, 5, 7, \dots, n; \quad i = 3, 5, \dots, j-2$$