

мыми изделиями и моделями. Простой вид обобщенных УФХ в свою очередь позволил значительно упростить решение целого ряда вопросов, указанных в п. 1.

3. Даны простые соотношения, позволившие без изменения вида УФХ получить достаточно точные значения для величин  $\mu_p$ ,  $\beta_p$ ,  $\omega_p$  в значительно более широкой области значений параметра  $\beta$ , чем при решении методом Пановко—Страхова.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Эскин И. Д. Исследование обобщенных упруго-фрикционных характеристик демпферов и амортизаторов авиационных двигателей. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. КуАИ, 1973.

2. Эскин И. Д., Пономарев Ю. К. К вопросу подбора систем конструкционного демпфирования по упруго-фрикционным свойствам. В сб.: «Вопросы виброизоляции оборудования и приборов», Ульяновский политехнический институт, Ульяновск, 1974.

3. Эскин И. Д., Пономарев Ю. К. Классификация систем конструкционного демпфирования и определение свойств, присущих отдельным классам этих систем. В сб.: «Вопросы виброизоляции оборудования и приборов», Ульяновский политехнический институт, Ульяновск, 1974.

4. Пановко Я. Г., Страхов Г. И. Приближенное исследование вынужденных колебаний упругих систем с конструкционным демпфированием. В сб. «Вопросы динамики и прочности», изд-во АН Лат. ССР, Рига, 1962, вып. 8.

5. Эскин И. Д., Панин Е. А. Метод расчета вынужденных колебаний трубопровода с упруго-демпфирующей опорой в виде многослойного пакета. Труды КуАИ, 1969, вып. 36.

Ю. К. ПОНОМАРЕВ, И. Д. ЭСКИН

#### ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ МНОГОСЛОЙНОГО КОЛЬЦЕВОГО ДЕМПФЕРА, СЖАТОГО РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СДАВЛИВАЮЩЕЙ НАГРУЗКОЙ

Рассмотрим задачу о циклическом деформировании многослойного многопролетного кольцевого демпфера, пакет которого сжат равномерно распределенной сдавливающей нагрузкой (рис. 1). Равномерное сжатие слоев в демпфере обеспечено с помощью специально профилированных упругих колец (рис. 1),

которые служат одновременно и опорами демпфера. Пакет демпфера набран из нечетного числа  $n$  одинаковых прокладок толщиной  $h$  и двух одинаковых накладок толщиной  $h_n = h \cdot \frac{k}{2}$ , где  $k$  — относительная толщина накладки. Прокладки и накладки изготовлены из одного материала с модулем упругости  $E$  и имеют одинаковую ширину  $b$ . Все пролеты демпфера имеют одинаковую длину  $l = R\psi$ , где  $R$  — средний радиус пакета, а  $\psi$  — угол между соседними опорами.

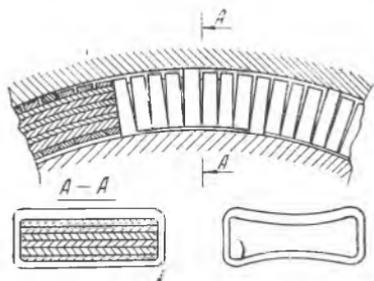


Рис. 1

Примем отношение толщины пакета к его среднему радиусу малым. В этом случае демпфер можно считать стержнем малой кривизны\*. Кроме того, будем считать, что демпфер имеет на горизонтальной оси разъем, и на каждой его половине число пролетов равно  $m$ .

Расчетная схема демпфера с указанными упрощениями примет вид, показанный на рис. 2. Отметим, что к такой расчетной схеме в первом приближении можно свести конструкции демпферов, разработанные авторами в работах [1, 2].

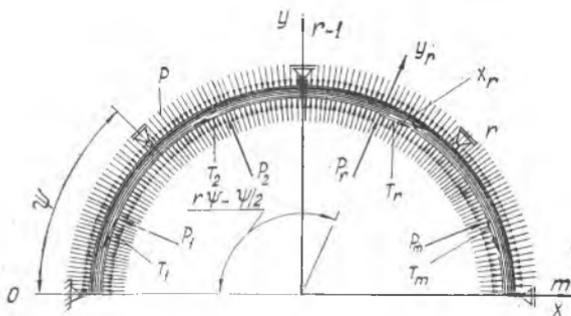


Рис. 2

\* В связи с этим влиянием тангенциальных сил на изгиб пакета можно пренебречь.

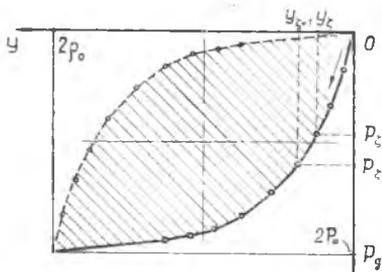


Рис. 3

Поскольку демпфер деформируется кольцевой цилиндрической поверхностью центрального тела (рис. 1), прогиб произвольного  $r$ -того пролета выразится в виде

$$y_r = \alpha \rho_0 \sin(r\psi - \psi/2) \quad (r = 1, 2, 3, \dots, m), \quad (1)$$

где  $\alpha$  — коэффициент деформации,  $\rho_0$  — амплитуда перемещения центрального тела.

Вполне очевидно, что обе половины демпфера за цикл проходят одинаковые этапы нагружения. Поэтому ограничимся в рассуждениях рассмотрением только одной половины. Присвоим прокладкам нижней половины пакета, начиная со средней, нечетные номера  $j = 1, 3, 5, \dots, n$ . Кроме того, для простоты рассуждений примем за начало координат точку начала повторного нагружения (разгрузки) (рис. 3). В этом случае коэффициент деформации будет изменяться в интервале  $[0, 2]$ . Задача решается методом сил в приращениях. Условимся под этапом разгрузки понимать процесс разгрузки между двумя последовательными расслоениями, которые происходят либо в одном, либо в разных пролетах демпфера. Тогда на любом  $\zeta$ -том этапе демпфер можно рассматривать как многопролетную балку со ступенчатым законом распределения изгибных жесткостей  $EI(x, j)$  по длине, неизменным в течение данного этапа разгрузки, который будет определяться числом проскользнувших слоев в каждой из половин пролетов.

Пусть под действием некоторого приращения нагрузки на демпфер  $\Delta P_d$  каждый пролет балки прогнется на величину

$$\Delta y_{r\zeta} = \sum_{i=1}^m \delta_{ir}(\zeta) \cdot \Delta P_{r\zeta} \quad (r = 1, 2, 3, \dots, m), \quad (2)$$

где  $i$  и  $r$  — порядковые номера пролетов;

$\delta_{ir}(\zeta)$  — податливость  $i$ -того пролета от единичной силы, приложенной в  $r$ -том пролете;

$\Delta P_r$  — радиальная составляющая приращения силы, действующей на  $r$ -тый пролет.

Записав выражение (1) в приращениях и приравняв его к (2), получим систему канонических уравнений вида

$$\sum_{i=1}^m \delta_{ir}(\zeta) \cdot \Delta P_{r\zeta} = \Delta \alpha_{\zeta} \rho_0 \sin \left( r\psi - \frac{\psi}{2} \right) \quad (3)$$

$$(r = 1, 2, 3, \dots, m).$$

Решая систему (3), можно найти распределение приращений неизвестных сил на данном этапе нагружения в любом пролете балки по известным формулам (формулы Крамера), если известны линейные податливости  $\delta_{ir}(\zeta)$ :

$$\Delta P_{r\zeta} = \frac{D_{r\zeta}}{D}, \quad (r = 1, 2, 3, \dots, m). \quad (4)$$

Для удобства дальнейших рассуждений целесообразно вынести  $\Delta \alpha_{\zeta}$ , как величину постоянную в данный момент нагружения, за знак определителя  $D_{r\zeta}$ . Тогда будем иметь

$$\Delta P_{r\zeta} = \Delta \alpha_{\zeta} N_{r\zeta}, \quad (r = 1, 2, 3, \dots, m), \quad (4a)$$

где

$$N_{r\zeta} = \frac{D_{r\zeta}}{\Delta \alpha_{\zeta} \cdot D}. \quad (4б)$$

Для определения линейных податливостей предварительно необходимо с помощью уравнений трех моментов найти реактивные моменты от единичных сил, приложенных в серединах пролетов балки. Записав систему уравнений трех моментов в виде метода сил [3] и определив в ней угловые податливости по способу Мора, получим систему уравнений трех моментов для вышеуказанного закона распределения изгибных жесткостей по длине пролетов:

$$4\beta_{i-1} M_{i-1, r} + 2\beta_i M_{i, r} + 4\beta_{i+1} M_{i+1, r} = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq r \text{ и } i \neq r-1 \\ -\beta_{i1} l & \text{при } i = r \\ -\beta_{i+1,1} & \text{при } i = r-1 \end{cases} \quad (5)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, m-1; \quad r = 1, 2, 3, \dots, m),$$

где  $M_{ir}$  — реактивный момент в  $i$ -том опорном сечении от единичной силы, приложенной к середине  $r$ -того пролета,

$$\beta_{i-1} = I_0/I_{i1} + I_0/I_{i2}, \quad (6)$$

$$\beta_i = I_0/I_{i1} + 7I_0/I_{i2} + 7I_0/I_{i+1,1} + I_0/I_{i+1,2}, \quad (7)$$

$$\beta_{i+1} = I_0/I_{i+1,1} + I_0/I_{i+1,2}, \quad (8)$$

$$\beta_{i1} = I_0/I_{i1} + 2I_0/I_{i2}. \quad (9)$$

В формулах (6), (7), (8), (9)  $I_0$  — момент инерции сечения нерасслоенного пакета, определяется по формуле

$$I_0 = \frac{bh^3}{12} (n + k)^3, \quad (10)$$

а моменты инерции сечений левой и правой половин  $i$ -того пролета, соответственно  $I_{i1}(j_1)$  и  $I_{i2}(j_2)$ , зависят от числа проскользнувших слоев  $j_1$  и  $j_2$  и имеют вид

$$I_{ia}(j_a) = \frac{bh^3}{48} [(n+k-j_a)^3 + 4j_a] \quad (11)$$

$$(a = 1, 2; \quad j_a = 1, 3, 5, \dots, n).$$

Учитывая при решении системы (5) граничные условия

$$\begin{cases} M_{0r} = 0 \\ M_{mr} = 0 \end{cases} \quad (r = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (12)$$

и решив (5) и (12) совместно, определим реактивные моменты в  $i$ -том опорном сечении от единичной силы, приложенной к середине  $r$ -того пролета, из формулы

$$M_{ir} = \frac{D_{ir}^*}{D^*} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m-1; \quad r = 1, 2, 3, \dots, m). \quad (13)$$

Здесь  $D^*$  — определитель систем (5) и (12), а  $D_{ir}^*$  — определитель, полученный из определителя  $D^*$  заменой  $r$ -того столбца столбцом членов правых частей уравнений этих систем.

Зная реактивные моменты от единичных сил, с помощью интеграла Мора находим линейные податливости в серединах пролетов балки:

$$\delta_{ir} = \frac{l^2}{48 EI_0 D^*} (\beta_{i2} D_{i-1r}^* + \beta_{i1} D_{ir}^*), \quad \text{если } i \neq r, \quad (14)$$

$$\delta_{ir} = \frac{l^3}{96 EI_0} \left[ \beta_{i-1} + \frac{2}{D^* l} (\beta_{i2} D_{i-1, r}^* + \beta_{i1} D_{ir}^*) \right], \quad \text{если } i = r, \quad (15)$$

$$\text{где } \beta_{i2} = 2I_0/I_{i1} + I_0/I_{i2}. \quad (16)$$

Подставив в (4) найденные из выражений (14) и (15) значения линейных податливостей, найдем приращения сил в любом пролете демпфера на данном этапе нагружения, а затем и действительные приращения реактивных моментов от внешней нагрузки:

$$\Delta M_{i\zeta}^p = \sum_{r=1}^m M_{ir} \Delta P_{r\zeta} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m-1). \quad (17)$$

Зная приращения нагрузок и моментов в опорных сечениях и рассматривая в отдельности каждый пролет демпфера, найдем опорные реакции. Для  $r$ -того пролета левая и правая опорные реакции соответственно равны

$$\Delta A_{i-1,z} = \frac{1}{l} \left( \Delta M_{i,z}^p + \Delta P_r \cdot \frac{l}{2} - \Delta M_{i-1,z}^p \right), \quad (18)$$

$$\Delta B_{i,z} = \frac{1}{l} \left( \Delta M_{i-1,z}^p + \Delta P_r \cdot \frac{l}{2} - \Delta M_{i,z}^p \right), \quad (19)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, m; \quad r = 1, 2, 3, \dots, m).$$

После раскрытия для произвольного этапа нагружения статической неопределенности задачи, необходимо рассмотреть вопрос об очередности проскальзывания слоев в пакете пластин демпфера.

При равномерном сдавливании по длине в высоте пакета на контактных поверхностях пластин действуют погонные силы трения, равные по абсолютной величине  $q_{\text{тр}} = fpb$  и направленные противоположно скольжению ( $f$  — коэффициент трения скольжения). Под действием приращения перерезывающих сил  $\Delta Q$  в пакете возникают касательные усилия  $q$ , зависящие от абсолютной величины перерезывающих сил, геометрии пакета и числа проскользнувших слоев. Так, для первого этапа повторного нагружения, когда пакет демпфера изгибается как монолитная балка во всех пролетах, приращение касательных усилий имеет вид

$$\Delta q = \frac{3}{2} \frac{\Delta Q}{(n+k)h} \left[ 1 - \frac{4z^2}{(n+k)^2 h^2} \right]. \quad (20)$$

Так как мы рассматриваем повторный процесс нагружения, то, очевидно, в начальный момент погонные силы трения на контактных поверхностях направлены противоположно будущему скольжению. В связи с этим первый этап повторного нагружения закончится в тот момент, когда приращения касательных сил на контактных поверхностях первого слоя достигнут по абсолютной величине удвоенного значения погонных сил трения:

$$|\Delta q|_{z=\frac{h}{2}} = 2q_{\text{тр}}. \quad (21)$$

Приравняв (20) к (21), получим приращение перерезывающей силы в конце первого этапа нагружения:

$$\Delta Q_{j=1} = \frac{4q_{\text{тр}} h (n+k)^3}{3[(n+k)^2 - 1]}. \quad (22)$$

Перерезывающие силы в левой и правой частях любого пролета численно равны соответствующим реакциям опор (18) и (19). Поэтому, приравняв наибольшие из значений реакции опор, например, (18) к выражению (22), и учтя (4а) и (17), найдем приращение коэффициента деформации, соответствующее концу первого этапа нагружения:

$$\Delta\alpha_1 = \frac{4q_{\text{TP}} h (n+k)^3}{3[(n+k)^2 - 1]} \cdot \frac{l}{\sum_{r=1}^m M_{ir} N_{r1} + \frac{l}{2} N_{r,1} - \sum_{r=1}^m M_{i-1,r} N_{r1}} \cdot \quad (23)$$

Значения приращений нагрузок и прогибов в серединах пролетов демпфера в конце первого этапа следующие:

$$\Delta P_{r1} = \Delta\alpha_1 N_{r1}, \quad (24)$$

$$\Delta y_{r1} = \Delta\alpha_1 \rho_0 \sin\left(r\psi - \frac{\psi}{2}\right), \quad (25)$$

$$(r = 1, 2, 3, \dots, m).$$

Спроектировав все силы (в том числе и силы трения на опорных поверхностях) на ось  $y$  (рис. 1), получим суммарное приращение нагрузок в демпфере в конце первого этапа:

$$\Delta P_{\text{д1}} = 2 \Delta\alpha_1 \sum_{r=1}^m N_{r1} \left[ \sin\left(r\psi - \frac{\psi}{2}\right) + f \cos\left(r\psi - \frac{\psi}{2}\right) \right]. \quad (26)$$

При этом наибольший прогиб демпфера будет равен

$$\Delta y_1 = \Delta\alpha_1 \rho_0. \quad (27)$$

Как только нагрузка на демпфер станет больше, чем  $\Delta P_{\text{д1}}$ , в пролете с наибольшей перерезывающей силой произойдет проскальзывание по контактным поверхностям первого слоя. При дальнейшем возрастании нагрузки проскальзывание в пролетах будет распространяться от средних контактных поверхностей к крайним.

Прежде чем выяснить вопрос об очередности проскальзывания слоев по пролетам, рассмотрим процесс распространения проскальзываний в одном пролете. Пусть некоторый  $\zeta$ -тый этап нагружения демпфера начинается в момент, когда в одном из пролетов проскальзывания достигают  $j$ -той контактной поверхности, лежащей между  $j$ -тым и  $j+2$ -м слоями, и заканчивается в момент, когда проскальзывания достигли  $j+2$ -й контактной поверхности.

Приращение перерезывающей силы в пакете непроскользнувших слоев на данном этапе нагружения вычислится как равнодействующая приращений касательных усилий в виде

$$\Delta Q_{\zeta, n} = \frac{2q_{\text{тр}} h (n+k-j)^2}{3[(n+k-j)^2 - 4]} \quad (28)$$

Распределение приращений перерезывающих сил между проскользнувшими слоями и пакетом непроскользнувших слоев найдем из условий

$$y_1(x) = y_n(x), \quad \Theta_1(x) = \Theta_n(x) \quad (29)$$

в виде

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_{\zeta, n} \cdot \frac{8}{(n+k-j)^3}, \quad (30)$$

где  $y_1(x)$ ,  $\Theta_1(x)$ ,  $y_n(x)$  и  $\Theta_n(x)$  — соответственно формы упругих линий и распределение углов поворота сечений по пролету одного из проскользнувших и пакета непроскользнувших слоев, а  $\Delta Q_1$  — приращение перерезывающей силы в одном проскользнувшем слое.

Тогда полное приращение перерезывающей силы в пролете на  $\zeta$ -том этапе нагружения будет равно

$$\Delta Q_{\zeta} = 2 \Delta Q_{\zeta, n} + j \Delta Q_1 = \frac{4q_{\text{тр}} h}{3} \left[ \frac{(n+k-j)^3 + 4j}{(n+k-j)[(n+k-j)^2 - 4]} \right], \quad (31)$$

а приращение коэффициента деформации выразится следующим образом

$$\Delta \alpha_{\zeta} = \begin{cases} \frac{\Delta Q_{\zeta} l}{\sum_{r=1}^m M_{ir} N_{r,\zeta} + \frac{l}{2} N_{r\zeta} - \sum_{r=1}^m M_{i-1,r} N_{r,\zeta}}, & \text{если } A_{i-1,\zeta} = \Delta Q_{\zeta} \\ \frac{\Delta Q_{\zeta} l}{\sum_{r=1}^m M_{i-1,r} N_{r\zeta} + \frac{l}{2} N_{r\zeta} - \sum_{r=1}^m M_{ir} N_{r\zeta}}, & \text{если } B_{i\zeta} = \Delta Q_{\zeta}. \end{cases} \quad (32)$$

Полное значение коэффициента нагрузки на  $\zeta$ -том этапе нагружения (когда в некотором  $r$ -том пролете проскользнуло  $j_0$  слоев) будет равно

$$\alpha_{\zeta} = \sum_{\zeta=1}^v \Delta \alpha_{\zeta}, \quad (33)$$

соответствующие этому значению величины полной силы, действующей на демпфер, и наибольшего перемещения найдутся в виде

$$P_{л\zeta} = 2\alpha_{\zeta} \sum_{r=1}^m N_{r\zeta} \left[ \sin \left( r\psi - \frac{\psi}{2} \right) + f \cos \left( r\psi - \frac{\psi}{2} \right) \right], \quad (34)$$

$$y_{\zeta} = \alpha_{\zeta} \rho_0. \quad (35)$$

По формулам (34) и (35) можно построить петлю гистерезиса для случая, когда ни в одном пролете не произошло полного расслоения пакета демпфера. Площадь петли гистерезиса определяет энергию, рассеиваемую демпфером за цикл нагружения (рис. 3):

$$\begin{aligned} \Delta W = 2\rho_0 \sum_{r=1}^m \sum_{\zeta=1}^{\nu} & \left\{ \left[ \alpha_{\zeta} \alpha_{\zeta+1} N_{r\zeta} \sin \left( r\psi - \frac{\psi}{2} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \alpha_{\zeta} \alpha_{\zeta+1} N_{r,\zeta+1} \sin \left( r\psi - \frac{\psi}{2} \right) \right] + f \left[ \alpha_{\zeta} \alpha_{\zeta+1} N_{r\zeta} \cos \left( r\psi - \frac{\psi}{2} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \alpha_{\zeta} \alpha_{\zeta+1} N_{r,\zeta+1} \cos \left( r\psi - \frac{\psi}{2} \right) \right] \right\}, \quad (36) \end{aligned}$$

где  $\nu$  — суммарное число этапов нагружения всего демпфера на ветви разгрузки, а  $\zeta$  — порядковый номер этапа. В формуле (36) учитывается и работа сил трения на выступах демпфера.

Найдем максимальные напряжения в пакете. Очевидно, такие напряжения возникнут в наружном волокне накладок демпфера в сечении с максимальным изгибающим моментом и минимальным моментом сопротивления изгибу в нерасслоенных частях пакета. Пусть в произвольном сечении  $i$ -того пролета, например, на расстоянии  $x$  от левой опоры проскользнуло  $j_0$  слоев. Приращения напряжений в указанном месте данного сечения пакета до момента проскальзывания  $j_0 + 2$ -го слоя найдутся в виде

$$\Delta \sigma_{r\zeta}^{\max}(x, j_0, \Delta \alpha_{\zeta}) = \pm \frac{\Delta M_{i\zeta}^H(x, j_0, \Delta \alpha_{\zeta})}{W_{iH}(x, j_0)}. \quad (37)$$

Момент сопротивления изгибу нерасслоенной части пакета

$$W_{iH}(x, j_0) = I(n+k-j_0)^2/2h, \quad (38)$$

а приращение момента в нерасслоенной части пакета  $\Delta M_{i\zeta}^H(x, j_0, \Delta \alpha_{\zeta})$  найдется из рассмотрения условий совместности деформаций нерасслоенных пакетов и каждого из проскользнувших слоев в виде

$$\Delta M_{i\zeta}^H(x, j_0, \Delta \alpha_{\zeta}) = \Delta M_{i\zeta}^P(x, j_0, \Delta \alpha_{\zeta}) \cdot \frac{(n+k-j_0)^3}{2[(n+k-j_0)^3 + 4j_0]}. \quad (39)$$

Подставив (38) и (39) в (37) и просуммировав приращения напряжений по числу проскользнувших слоев, найдем полные напряжения в пакете:

$$\sigma_{i\zeta}^{\max}(x, j_0, \alpha_\zeta) = \frac{h}{2I} \cdot \frac{\Delta M_{i1}^p(x, \Delta \alpha_1)}{(n+k)^2} + \frac{h}{I} \sum_{j=1}^{j_0} \Delta M_{i\zeta}^p(x, j, \Delta \alpha_\zeta) \times \\ \times \frac{n+k-j}{[(n+k-j)^3+4j]}, \quad (0 \leq x \leq l; \quad i=1, 2, 3, \dots, m; \quad j_0=1, 3, 5, \dots, n; \\ j=1, 3, 5, \dots, j_0). \quad (40)$$

Нетрудно заметить, что наибольшие напряжения по длине  $i$ -того пролета могут оказаться в трех сечениях: на опорах и в середине пролета. Причем, ввиду наличия возможности проскальзывания в двух половинах пролета различного числа слоев, в середине пролета может возникнуть скачок напряжений. Вследствие этого для среднего сечения пролетов необходимо подсчитывать напряжения по минимальному моменту сопротивления изгибу нерасслоенных частей пакета  $W_{iH}^{\min}$ . В случае полного расслоения пакета в  $i$ -том пролете на некотором этапе нагружения (например,  $\zeta=a$ ) при дальнейшем нагружении разбивка процесса на этапы будет определяться только программой расслоений других пролетов. Вычисление максимального прогиба, суммарной силы демпфера, а также энергии, рассеиваемой демпфером за цикл нагружения, производится по формулам (34), (35), (36). Вычисление максимальных напряжений в пакете  $i$ -того пролета на этапе полного расслоения  $\zeta=\varepsilon > a$  необходимо производить по формуле:

$$\sigma_{i\zeta}^{\max}(x, \alpha_\zeta) = \frac{h}{2I} \cdot \frac{\Delta M_{i1}^p(x, \Delta \alpha_1)}{(n+k)^2} + \frac{h}{I} \sum_{j=1}^n \Delta M_{i\zeta}^p(x, j, \Delta \alpha_\zeta) \times \\ \times \frac{(n+k-j)}{[(n+k-j)^3+4j]} + \frac{kh}{I(k^3+4n)} \sum_{\zeta=a}^{\varepsilon} \Delta M_{i\zeta}^p(x, \Delta \alpha_\zeta), \quad (41) \\ (0 \leq x \leq l; \quad i=1, 2, 3, \dots, m).$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Эскин И. Д., Пономарев Ю. К., Лапшов Ю. Н. и Безводин В. А. Пластинчатый демпфер. А. с. № 302529, 1971.
2. Эскин И. Д., Пономарев Ю. К., Ефремов Ю. И. Пластинчатый демпфер. А. с. № 383923, 1973.
3. Рабинович И. М. Строительная механика. Оборонгиз, ч. 2, 1940.