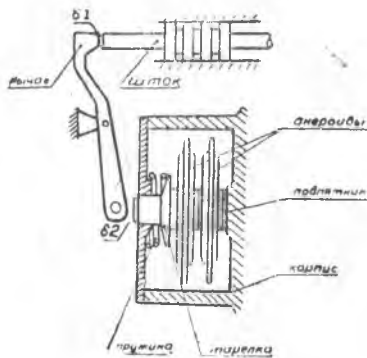


**В. И. БАВЫКИН**, **М. К. СИДОРЕНКО**

## О ВИБРАЦИЯХ АНЕРОИДОВ

В системах регулирования двигателей и в измерительных приборах нашли широкое применение пакеты, состоящие из одной, двух и более последовательно включенных мембранных коробок, предназначенных для замеров как абсолютных давлений (анероиды), так и их перепадов (манометрические мембранные коробки).

На фиг. 1 приведена одна из распространенных схем включения в систему регулирования пакета из двух анероидов, вставленных в корпус и сжатых пружиной. Пакет из нескольких анероидов является многомассовой колебательной системой; характерной особенностью его вибраций является возможность появления «отрывных» колебаний, при которых происходит периодический отрыв деталей пакета друг от друга, обусловленный местной потерей предварительной затяжки при колебаниях, и их износ. Это приводит к нарушению нормальной работы системы регулирования.



Фиг. 1.

Так, например, при доводке системы регулирования одного двигателя наблюдалось смещение высотной характеристики его по расходу топлива после некоторой наработки двигателя на земле. Дефект был вызван повышенными вибрациями элементов пакета высотных анероидов, первая собственная частота которых оказалась лишь на 10 ÷ 20% выше частоты вибраций двигателя на рабочих оборотах.

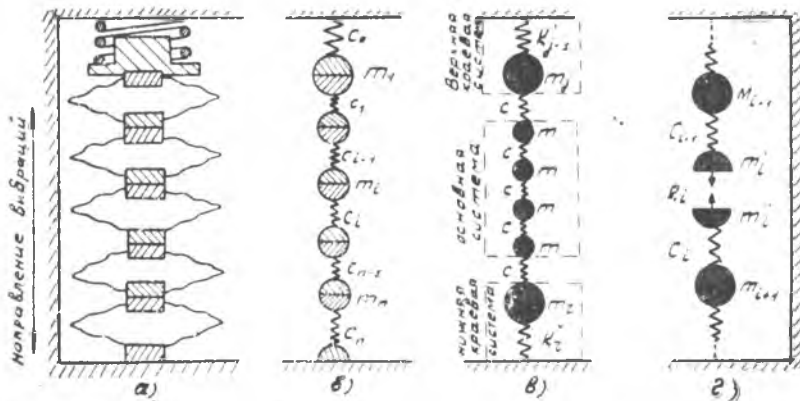
Этот же дефект повторился при применении такого же пакета АДТ-2А на другом, более высокооборотном двигателе, где первая

собственная частота пакета оказалась примерно на 10% ниже частоты вибраций двигателя на оборотах холостого хода.

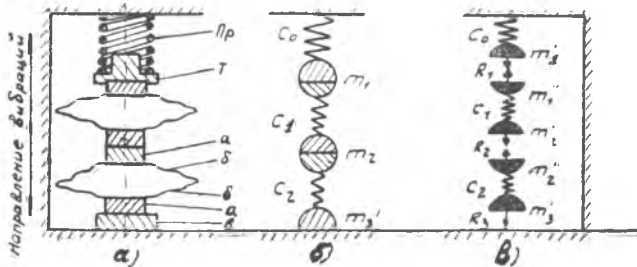
Ниже излагается методика, результаты теоретического и экспериментального исследований вибрационных характеристик пакета анероидов и способы устранения их вибраций.

### РАСЧЕТНАЯ СХЕМА

В обычном диапазоне частот возбуждения ( $0 \div 500$  гц) можно с достаточной для практики точностью пренебречь, как более высокочастотными, собственными колебаниями отдельных мембран анероидов. Это допущение позволяет представить пакет из  $n$  анероидов (фиг. 2а) в виде системы из  $n$  сосредоточенных масс  $m$  и  $n+1$  сосредоточенных жесткостей  $c$ , вставленных в абсолютно жесткий корпус (фиг. 2-б). В качестве жесткостей  $c$  принимаются жесткости на сжатие-растяжение элементов пакета (анероиды, пружины и т. п.), которые обычно известны для каждой конструктивной схемы пакета. В качестве масс принимаются сосредоточенные



Фиг. 2.



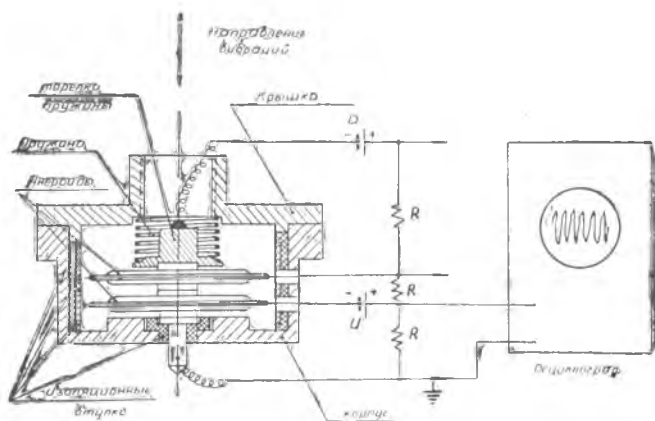
Фиг. 3.

массы пакета плюс распределенные массы деталей, находящихся с ним в контакте (для крайних упругих элементов учитывается лишь их массы).

Так, для пакета из двух анероидов (фиг. 3-а).

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= m_r + m_a + m_b + \frac{1}{3} m_{пр}; \\ m_2 &= m_b + 2m_a + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot m_b; \\ m_3' &= m_a + m_b. \\ C_0 &= C \text{ пружины}; \\ C_1 &= C_2 = C \text{ анероида}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

В общем случае пакет анероидов может включаться в схему регулирования через систему жесткостей и масс на двух концах пакета (фиг. 3в). Влияние верхней и нижней краевых систем можно учесть, заменив их соответствующими динамическими жесткостями  $K_{j-1}''(\omega)$  и  $K_r''(\omega)$ .



Фиг. 4.

Если отрыва не происходит, то систему можно полагать линейной и вести расчет известными методами теории линейных колебаний.

При наступлении отрывов система становится нелинейной и ее расчет следует вести по схеме фиг. 2г (3в). Здесь  $R_i$  — динамические реакции в местах потери контакта (в разъемах). Разделение приведенных масс делается по разъему между двумя анероидами, при этом  $m_i' + m_i'' = m_j$ .

## ВИБРАЦИИ ПАКЕТА ИЗ ДВУХ АНЕРОИДОВ

Все экспериментальные и основные расчетные работы проводились с пакетом из двух анероидов (фиг. 1).

Линейная часть задачи легко решается обычным способом. При движении корпуса пакета по закону  $U_k = A \sin \omega t$  система линейных уравнений вынужденных продольных колебаний масс для схемы фиг. 2-в такова:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{U}_1(t) + C_0 \cdot U_1(t) + C_1[U_1(t) - U_2(t)] &= m_1 \omega^2 A \sin \omega t; \\ m_2 \cdot \ddot{U}_2(t) + C_1 \cdot [U_1(t) - U_2(t)] + C_2 \cdot U_2(t) &= m_2 \omega^2 \cdot A \cdot \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь  $m_1 \omega^2 A$  и  $m_2 \omega^2 A$  — амплитудные значения возбуждающих сил инерции масс  $m_1$  и  $m_2$ .

Отсюда получаем соответствующую систему двух уравнений в амплитудах:

$$\left. \begin{aligned} [C_0 + C_1 - m_1 \omega^2] U_1 - C_1 \cdot U_2 &= m_1 \omega^2 A; \\ [C_1 + C_2 - m_2 \omega^2] U_2 - C_1 \cdot U_1 &= m_2 \omega^2 A. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Далее находим:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= A \cdot \frac{\omega^2 \left[ \left( \frac{C_1 + C_2}{m_2} + \frac{C_1}{m_1} \right) - \omega^2 \right]}{\omega^4 - \left( \frac{C_0 + C_1}{m_1} + \frac{C_1 + C_2}{m_2} \right) \omega^2 + \frac{1}{m_1 m_2} (C_0 \cdot C_1 + C_0 \cdot C_2 + C_1 \cdot C_2)}; \\ U_2 &= A \cdot \frac{\omega^3 \left[ \left( \frac{C_0 + C_1}{m_1} + \frac{C_2}{m_2} \right) - \omega^2 \right]}{\omega^4 - \left( \frac{C_0 + C_1}{m_1} + \frac{C_1 + C_2}{m_2} \right) \omega^2 + \frac{1}{m_1 m_2} (C_0 \cdot C_1 + C_0 \cdot C_2 + C_1 \cdot C_2)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Для практических вычислений целесообразно систему (4) преобразовать к виду:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= A \cdot \beta_1(\omega); \\ U_2 &= A \cdot \beta_2(\omega), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где  $\beta_1(\omega)$  и  $\beta_2(\omega)$  — частотно-амплитудные характеристики системы, имеющие вид:

$$\left. \begin{aligned} \beta_1(\omega) &= \frac{\omega^2 (\omega_{11}^{*2} - \omega^2)}{(\omega_1^2 - \omega^2) (\omega_2^2 - \omega^2)}; \\ \beta_2(\omega) &= \frac{\omega^2 (\omega_{21}^{*2} - \omega^2)}{(\omega_1^2 - \omega^2) (\omega_2^2 - \omega^2)}; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$\omega_{11}^*$  и  $\omega_{21}^*$  — антирезонансные частоты системы, являющиеся корнями числителей в формулах (4), при которых амплитуды соответственно 1-й и 2-й масс равны нулю при любом уровне возбуждения;

$\omega_1$  и  $\omega_2$  — резонансные частоты системы, являющиеся корнями знаменателя в формулах (4), при которых амплитуды масс одновременно беспредельно возрастают.

Причем,

$$\left. \begin{aligned} \omega_{11}^* &= \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{m_2} + \frac{C_1}{m_1}}; \\ \omega_{21}^* &= \sqrt{\frac{C_0 + C_1}{m_1} + \frac{C_1}{m_2}}; \\ \omega_1 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{C_0 + C_1}{m_1} + \frac{C_1 + C_2}{m_2} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{C_0 + C_1}{m_1} + \frac{C_1 + C_2}{m_2} \right)^2 - \frac{1}{m_1 m_2} (C_0 C_1 + C_0 C_2 + C_1 C_2)}}; \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{C_0 + C_1}{m_1} + \frac{C_1 + C_2}{m_2} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{C_0 + C_1}{m_1} + \frac{C_1 + C_2}{m_2} \right)^2 - \frac{1}{m_1 m_2} (C_0 C_1 + C_0 C_2 + C_1 C_2)}} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Теперь найдем условия, при которых возможен отрыв деталей пакета друг от друга. Согласно схеме фиг. 2 г отрыв масс в данном разъеме произойдет при

$$R_i \gg P_{\text{затяжки}}, \quad (3)$$

то есть, когда динамическая реакция связи  $R_i$  превысит усилие статического прижатия анероидов.

Для определения динамических реакций  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  составляем систему уравнений движения масс  $m_1'$ ,  $m_2'$  и  $m_3'$  (неодновременное возникновение отрывов в различных контактах).

$$\left. \begin{aligned} m_1' \cdot \ddot{U}_1(t) &= m_1' \omega^2 \cdot A \cdot \sin \omega t - C_0 \cdot U_1(t) - R_1(t); \\ m_2' \cdot \ddot{U}_2(t) &= m_2' \omega^2 \cdot A \cdot \sin \omega t + C_1 [U_1(t) - U_2(t)] - R_2(t); \\ 0 &= m_3' \cdot \omega^2 \cdot A \sin \omega t + C_2 \cdot U_2(t) - R_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

После определения по системе (5) амплитуд масс  $m_1$  и  $m_2$  относительно корпуса при их безотрывных колебаниях находим из системы уравнений (9) амплитудные значения динамических реакций:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= A \cdot \{ m_1' \cdot \omega^2 [1 + \beta_1(\omega)] - C_0 \cdot \beta_1(\omega) \}; \\ R_2 &= A \cdot \{ m_2' \cdot \omega^2 [1 + \beta_2(\omega)] - C_1 \cdot [ \beta_1(\omega) - \beta_2(\omega) ] \}; \\ R_3 &= A \cdot [ m_3' \omega^2 + C_2 \cdot \beta_2(\omega) ]. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Подчиняя уравнения системы (10) поочередно условию (8), получим зависимость от частоты  $\omega$  предельных амплитуд возбуждения, при которых наступает отрыв в разъемах 1, 2 и 3:

отрыв тарелки (точка 1 на фиг. 3в)

$$A_1 = A_1(\omega) = \frac{P_{\text{затяжки}}}{m_1' \omega^2 [1 + \beta_1(\omega)] - C_0 \beta_1(\omega)},$$

где  $m_1' = m_T$  — масса тарелки;  
 $C_0 = C_{\text{пр}}$  — жесткость пружины;

отрыв между анероидами (точка 2)

$$A_2 = A_2(\omega) = \frac{P_{\text{затяжки}}}{m_2' \omega^2 [1 + \beta_2(\omega)] + C_1 [\beta_1(\omega) - \beta_2(\omega)]};$$

отрыв всего пакета от дна корпуса (точка 3)

$$A_3 = A_3(\omega) = \frac{P_{\text{затяжки}}}{m_3' \omega^2 + C_2 \cdot \beta_2(\omega)},$$

где  $m_2' = \frac{1}{2} m_2$ , причем  $m_2$  и  $m_3'$  определяется по системе (1);

$C_1 = C_2 = C_{\text{анер}}$  — жесткость анероида.

На основании полученных формул (4÷11) определены вибрационные характеристики пакета и исследовано влияние некоторых факторов на эти характеристики.

Расчеты проведены при следующих исходных данных (анероиды типа АДТ-2А):

Вес	}	анероида $G_{\text{анер}} = 11$ г; его элементов $G_a = 2,3$ г; $G_b = 3,2$ г; $G_v = 2,2$ г; тарелки $G_T = 22,6$ г; пружины $G_{\text{пр}} = 1,5$ г.	}	(12)
Жесткость	}	анероида $G_{\text{анер}} = 40$ кг/см; пружины $G_{\text{пр}} = 0,14 \div 0,28$ кг/см.	}	

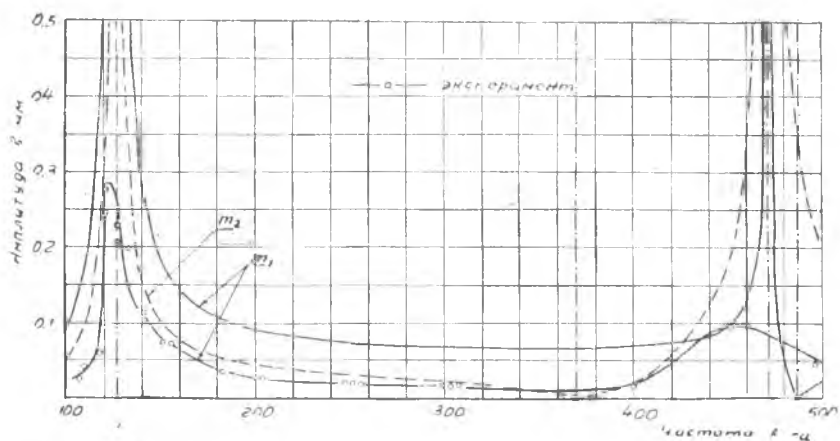
Приведенные массы в кг.сек<sup>2</sup>/см (по формулам (1) с учетом (12)  
 $m_1 = 28,6 \cdot 10^{-6}$ ;  $m_2 = 10,7 \cdot 10^{-6}$ ;  $m_3' = 4,6 \cdot 10^{-6}$ .

Все расчеты были подвергнуты экспериментальной проверке.

При экспериментах пакет анероидов помещался в приспособление (фиг. 4), которое воспроизводило закрепление его в рабочих условиях. Приспособление устанавливалось на электродинамический вибратор, которым задавались необходимые в опытах вибрации.

Экспериментальные исследования производились двумя способами: по перемещениям тарелки относительно корпуса и по отрывным колебаниям. При исследованиях по отрывным колебаниям детали пакета включались в цепь постоянного тока последовательно со шлейфом или низкоомным нагрузочным сопротивлением (фиг. 4). Изменение контактного сопротивления деталей пакета вследствие вибраций вызывало появление переменной составляющей тока с частотой вибрации.

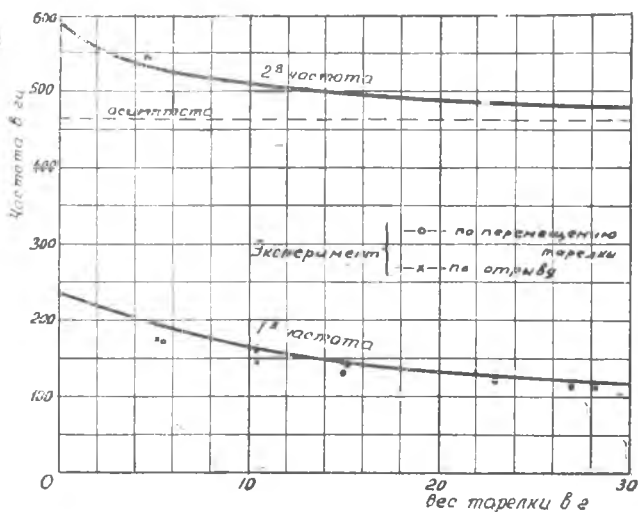
Отрывные колебания, вызывающие полный разрыв электрической цепи, определялись по виду кривой на экране осциллографа и



Фиг. 5.

по характерному звуку — дребезжанию анероидов. Границы отрывных колебаний определялись путем постепенного увеличения амплитуды возбуждения при постоянной частоте до появления отрывов, после чего возбуждение уменьшалось до исчезновения отрывов. Затем изменялась частота и эксперимент повторялся в той же последовательности.

Определение последовательности отрывов деталей проводилось одновременно по 3-м катодным осциллографам (на схеме показан только один осциллограф).

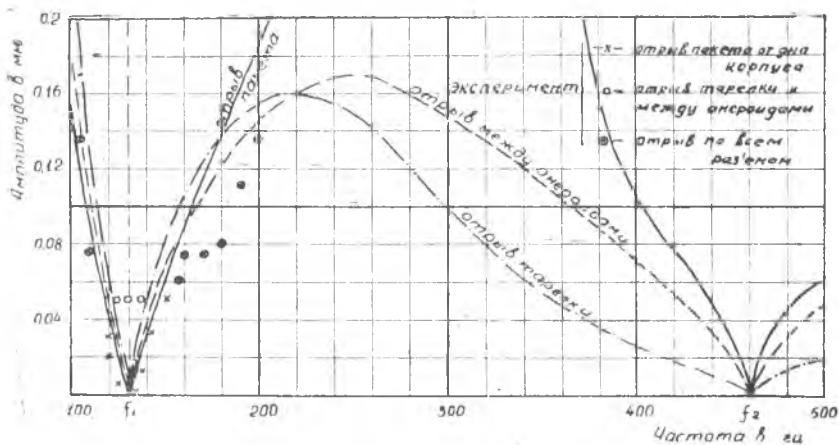


Фиг. 6.

Следует отметить, что достаточно точное определение момента наступления отрывных колебаний возможно только вблизи резонанса.

Исследования в более широком диапазоне проводились по перемещению тарелки, измеряемому индуктивным датчиком. Датчик ввертывался в крышку приспособления. Сигнал датчика после необходимого усиления записывался на шлейфовом осциллографе. Резонансная кривая тарелка снята при возбуждении  $\pm 0,05$  мм в диапазоне 100—350 гц и при возбуждении  $\pm 0,01$  мм в диапазоне 350—500 гц. Перемещения тарелки при возбуждении  $\pm 0,01$  мм нанесены на график увеличенными в 5 раз. Результаты расчетов на всех графиках изображены сплошными линиями без точек.

Как следует из (4) и фиг. 5, пакет анероидов имеет две резонансные (собственные) частоты, соответствующие синфазному и противофазному движению масс  $m_1$  и  $m_2$ , и две антирезонансные частоты, на одной из которых равны нулю перемещения масс  $m_1$ , а на другой — массы  $m_2$ . Изменять собственные частоты пакета практически оказалось возможным лишь массой тарелки. Экспериментально определено влияние веса тарелки только на первую собственную частоту (фиг. 6).



Фиг. 7.

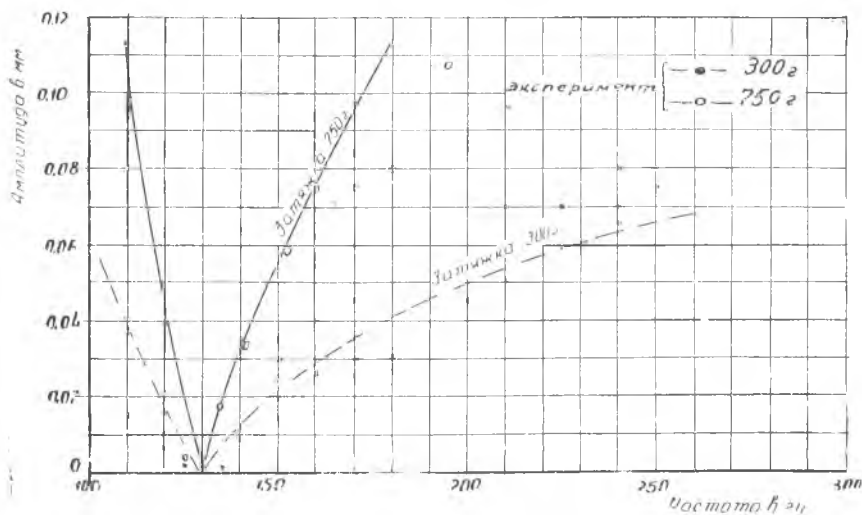
Совпадение расчета и эксперимента по первой частоте удовлетворительно, т. е. принятые формулы приведения масс (1) являются достаточно точными. Точное значение второй частоты определить экспериментально не удалось из-за недостаточного возбуждения корпуса.

Как следует из (7) и графиков фиг. 6, с увеличением веса тарелки 1-я собственная частота уменьшается с 235 гц до 0, вторая



же изменяется очень мало, приближаясь к асимптоте  $f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{m_2}}$ .

Для анероидов с приведенными данными асимптотой является частота 450 гц. Следовательно, в большинстве практических случаев необходимо учитывать только первую собственную частоту, так как вторая при всех возможных вариантах будет оставаться выше частот вибраций корпусов двигателей.



Фиг. 8.

Из расчетных зависимостей фиг. 7, где по оси ординат отложены амплитуды вибраций корпуса, соответствующие отрыву деталей пакета, видно, что вблизи резонанса отрывы возникают почти одновременно по всем разъемам при незначительных амплитудах возбуждения. С удалением от резонанса отрывы наступают при более высоких уровнях возбуждения, различных для разных разъемов.

На частоте 285 гц пакет не отрывается от корпуса при любом возбуждении («антиотрывная» частота).

Экспериментом проверена последовательность отрывов только вблизи 1-го резонанса. В резонансе сначала происходит отрыв пакета, а затем отрыв по остальным разъемам. С удалением от резонанса отрывы наступают практически одновременно по всем разъемам. Для устранения отрывов вблизи резонансов необходимо закреплять к корпусу все элементы пакета, т. к. закрепление одного и двух анероидов не дало эффекта. Необходимость закрепления всех или части элементов пакета на частотах между резонансами определяется в каждом конкретном случае уровнем возбуждения и

характером протекания кривых предельных амплитуд в рабочем диапазоне частот.

Весьма эффективным способом устранения отрывов, наряду с изменением собственных частот, является увеличение предварительной затяжки пружины.

### ВИБРАЦИИ ПАКЕТА ИЗ МНОГИХ АНЕРОИДОВ

Задачу о вибрации анероидов обобщим на случай пакета, состоящего из любого числа анероидов с различными присоединенными к ним по концам массам и жесткостями (фиг. 2в).

Линейная часть данной задачи (при отсутствии отрывных колебаний) близка по постановке к задаче, решенной К. Т. Шаталовым (1), но отличается тем, что в нашем случае возбуждающие силы приложены к каждой массе и демпфирование не учитывается. Кроме того, конструктивная особенность пакета анероидов позволяет применить метод конечных разностей в совокупности с методом динамических жесткостей, существенно упрощающим определение амплитуд колебаний многомассовых цепных систем по сравнению с обычно применяемыми методами (Толле, Терский и др.).

Задача о вынужденных колебаниях такого пакета, вызванных гармоническим движением его корпуса, сводится, как это следует из уравнений (2) и (3), к решению системы  $n$  уравнений в амплитудах следующего вида:

$$C_{i-1} \cdot U_{i-1} - (C_i + C_{i-1} - m_i \omega^2) U_i + C_i \cdot U_{i+1} = -F_i, \quad (13)$$

где  $F_i = m_i \omega^2 \cdot A$ ;  $i = 1, 2, 3 \dots n$ .

Это соотношение представляет собой неоднородное уравнение амплитуд второго порядка в форме конечных разностей с переменными в общем случае по индексу  $i$  коэффициентами  $C_i$ ,  $m_i$ ,  $F_i$ , решение которого связано со значительными трудностями в расчетах. Так как пакет обычно состоит из одинаковых анероидов, включенных в систему через несколько промежуточных элементов с другими массами и жесткостями, то задача разыскания амплитуд  $U_i$  всех масс системы может быть существенно упрощена.

Пусть имеем (фиг. 2в) на верхнем конце  $j$ , а на нижнем  $s$  масс, отличающихся по своей величине от масс основной системы или имеющих неоднократные жесткости слева и справа от себя. Тогда уравнение (13) будет давать связь амплитуд масс для верхнего конца системы при  $i = 1, 2, 3 \dots j$ , и для нижнего конца при  $i = r, r+1, \dots n$ , где  $j$  — порядковый номер последней массы верхней краевой системы;  $r = n - s + 1$  порядковый номер первой массы нижней краевой системы.

Уравнение основной части системы, характеризуемой постоянными параметрами  $m$  и  $C$ , справедливое для масс  $i = j+1, j+2 \dots r-1$ , получит вид:

$$U_{i-1} - (2 - \alpha^2) \cdot U_i + U_{i+1} = f_0, \quad (14)$$

где

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2}{p^2}; \quad p^2 = \frac{c}{m} \text{ и } f_0 = -\alpha^2 \cdot A.$$

Общее решение уравнения (14):

$$U_i = f_0 + B_1 \cdot E^{\lambda_1 \cdot i} + B_2 \cdot E^{\lambda_2 \cdot i}, \quad (15)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — корни характеристического уравнения [3], [2]

$$Ch \lambda = 1 - \frac{\alpha^2}{2},$$

получаемого при подстановке частного решения вида

$$U_i = B \cdot E^{\lambda i} \text{ в уравнение (14) без правой части;}$$

$B_1$  и  $B_2$  — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий на концах основной системы при  $i = j$  и  $i = r$ .

Для получения граничных условий задачи, полагая в уравнении (13) для верхней и нижней краевых систем соответственно  $i = 1, 2, \dots, j$  и  $i = r, r + 1, \dots, n$ , и пользуясь приемом последовательного выражения одних амплитуд через другие, составим следующие необходимые в дальнейшем краевые соотношения, связывающие амплитуды двух соседних масс:

верхней краевой системы:

$$C_i U_{i+1} - [C_i + K'_{i-1}(\omega) - m_i \omega^2] U_i = -\Phi'_i(\omega)$$

при  $i = 1, 2, \dots, j$ ;

нижней краевой системы:

$$C_{i-1} \cdot U_{i-1} - [C_{i-1} + K''_{i-1}(\omega) - m_i \omega^2] U_i = -\Phi'_i(\omega)$$

при  $i = r, r + 1, \dots, n$ ,

где обозначено:

для верхней краевой системы (при  $i = 1, 2, \dots, j$ )

$$K'_{i-1}(\omega) = C_{i-1} \left[ 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{K'_{i-1}(\omega)}{C_{i-1}}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{P'_{i-1}}\right)} \right];$$

$$\Phi'_i(\omega) = F_i + \frac{\Phi'_{i-1}(\omega)}{\left(1 + \frac{K'_{i-2}(\omega)}{C_{i-1}}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{P'_{i-1}}\right)};$$

$$P'_{i-1} = \frac{C_{i-1} + K'_{i-2}(\omega)}{m_{i-1}}, \text{ причем при } i=1; K'_0 = C_0 \text{ и } \Phi'_1 = F_1,$$

для нижней краевой системы (при  $i=n, n-1, \dots, r+1, r$ ).

$$K_i''(\omega) = C_i \left[ 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{K_{i+1}''(\omega)}{C_i}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{P_{i+1}''^2}\right)} \right] \text{ и} \quad (18)$$

$$\Phi_i''(\omega) = F_i + \frac{\Phi_{i+1}''(\omega)}{\left(1 + \frac{K_{i+1}''(\omega)}{C_i}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{P_{i+1}''^2}\right)};$$

$$P_{i+1}''^2 = \frac{C_i + K_{i+1}''(\omega)}{m_{i+1}}; \text{ причем при } i=n, K_n'' = C_n \text{ и } \Phi_n'' = F_n.$$

Здесь и далее одним штрихом отмечены приведенные параметры верхней, двумя штрихами — параметры нижней краевой системы. Тогда искомые граничные условия основной системы получим из соотношений (16), полагая для краевых масс  $m_j$  и  $m_r$  соответственно  $i=j$  и  $i=r$  и учитывая, что  $C_{j+1} = C_{r-1} = C$  (фиг. 3а);

$$\left. \begin{aligned} CU_{j+1} - [C + K_{j-1}'(\omega) - m_j \omega^2] U_j &= -\Phi_j'(\omega); \\ CU_{r+1} - [C + K_r''(\omega) - m_r \omega^2] U_r &= -\Phi_r''(\omega), \end{aligned} \right\} (19)$$

где  $K_{j-1}'$ ;  $K_r''$ ;  $\Phi_j'$  и  $\Phi_r''$  — эквивалентные динамические жесткости в точках присоединения масс  $m_j$ ,  $m_r$  и приведенные к этим массам амплитуды возмущающих сил соответственно верхней и нижней краевых систем, вычисляемые по формулам (17) и (18).

Для определения произвольных постоянных  $B_1$  и  $B_2$  общего решения основной системы предварительно составляются по (15) необходимые выражения для  $U_j$ ;  $U_{j+1}$ ;  $U_{r-1}$  и  $U_r$  согласно условиям (9), после подстановки которых и граничные условия (19) получим следующую систему двух алгебраических уравнений относительно  $B_1$  и  $B_2$ :

$$\left. \begin{aligned} B_1 \cdot [c \cdot e^{\lambda_1} - (C + K_{j+1}' - m_j \omega^2)] e^{\lambda_1 j} + B_2 [c \cdot e^{\lambda_2} - (C + K_{j-1}' - m_j \omega^2)] e^{\lambda_2 j} &= f_0 \cdot (K_{j-1}' - m_j \omega^2) - \Phi_j'; \\ B_1 [C \cdot e^{-\lambda_1} - (C + K_r'' - m_r \omega^2)] e^{\lambda_1 r} + B_2 [C e^{-\lambda_2} - (C + K_r'' - m_r \omega^2)] e^{\lambda_2 r} &= f_0 \cdot (K_r'' - m_r \omega^2) - \Phi_r'', \end{aligned} \right\} (20)$$

$$\text{откуда находим } B_1 = \frac{\Delta_1(\omega)}{\Delta(\omega)} \text{ и } B_2 = \frac{\Delta_2(\omega)}{\Delta(\omega)},$$

где обозначено:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1(\omega) &= [f_0(K_{j-1}' - m_j \omega^2) - \Phi_j'] \cdot [C \cdot e^{-\lambda_2} - (C + K_r'' - m_r \omega^2)] e^{\lambda_2 r} - \\ &\quad - [f_0(K_r'' - m_r \omega^2) - \Phi_r''] \cdot [C \cdot e^{\lambda_2} - (C + K_{j-1}' - m_j \omega^2)] e^{\lambda_2 j}; \\ \Delta_2(\omega) &= [f_0(K_r'' - m_r \omega^2) - \Phi_r''] \cdot [C \cdot e^{\lambda_1} - (C + K_{j-1}' - m_j \omega^2)] e^{\lambda_1 j} - \\ &\quad - [f_0(K_{j-1}' - m_j \omega^2) - \Phi_j'] \cdot [C \cdot e^{-\lambda_1} - (C + K_r'' - m_r \omega^2)] e^{\lambda_1 r}. \end{aligned} \right\} (21)$$

$$\Delta(\omega) = (C + K'_{i-1} - m_j \omega^2)(C + K''_r - m_r \omega^2) [e^{\lambda_1 j + \lambda_2 r} - e^{\lambda_1 r + \lambda_2 j}] +$$

$$+ C \cdot (C + K_{j-1} - m_j \omega^2) [e^{\lambda_1(r-1) + \lambda_2 j} - e^{\lambda_1 j + \lambda_2(r-1)}] +$$

$$+ C \cdot (C + K''_r - m_r \omega^2) \cdot [e^{\lambda_1 r + \lambda_2 \cdot (j+1)} - e^{\lambda_1 \cdot (j+1) + \lambda_2 \cdot r}] +$$

$$+ C^2 \cdot [e^{\lambda_1(j+1) + \lambda_2(r-1)} - e^{\lambda_1(r-1) + \lambda_2(j+1)}]. \quad (21)$$

Следовательно, амплитуды масс основной системы для  $i=j; j+1, \dots, r-1, r$  окончательно определяются по формуле

$$U_i = \frac{f_0 \cdot \Delta(\omega) + \Delta_1(\omega) \cdot e^{\lambda_1 i} + \Delta_2(\omega) \cdot e^{\lambda_2 i}}{\Delta(\omega)}. \quad (21)$$

Для практических вычислений формулу (22) целесообразно преобразовать к виду:

$$U_i = A \cdot \beta_i(\omega), \quad (23)$$

где  $\beta_i(\omega)$  — частотно-амплитудная характеристика системы, имеющая обычно вид:

$$\beta_i(\omega) = \frac{\omega^2 \prod_{v=1}^{n-1} (\omega_{iv}^{*2} - \omega^2)}{\prod_{v=1}^n (\omega_v^2 - \omega^2)}, \quad (24)$$

для  $i = j, j+1, \dots, r-1, r$ .

$\omega_v$  — резонансные (собственные) частоты всей системы, т. е. корни частотного уравнения  $\Delta(\omega) = 0$ , при которых амплитуды системы без учета демпфирования одновременно беспредельно возрастают;

$\omega_{iv}^*$  — антирезонансные частоты системы, являющиеся корнями числителя в формуле (23), на которых амплитуда  $i$ -ой массы равна нулю при любом уровне возбуждения.

Чтобы затем, зная уже по (23)  $U_j$  и  $U_r$ , найти амплитуды остальных масс, входящих в крайние системы, необходимо воспользоваться соотношениями (19):

для верхней краевой системы (при  $i=j-1, j-2, \dots$ ).

$$U_i = \frac{\Phi'_i + C_i U_{i+1}}{C_i + K'_{i-1} - m_i \omega^2} \equiv A \cdot \beta'_i(\omega); \quad (25)$$

для нижней краевой системы (при  $i=r+1, r+2, \dots, n$ .)

$$U_i = \frac{\Phi''_{i-1} + C_{i-1} \cdot U_{i-1}}{C_{i-1} + K''_{i-1} - m_i \omega^2} \equiv A \beta''_i(\omega),$$

где  $\beta'_i(\omega)$  и  $\beta''_i(\omega)$  имеют структуру, аналогичную (24).

Обычно антирезонансные  $\omega_{iv}^*$  и резонансные  $\omega_v$  частоты сложных систем находятся графически. При этом необходимо в окончательных общих формулах (21) и (22) произвести следующие тождественные замены (см. [3]):

в интервале  $0 \leq \alpha < 2$

$e^{\lambda_1 i}$  через  $\cos \mu i$

$e^{\lambda_2 i}$  через  $\sin \mu i$ , где  $\mu = \arccos \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)$ ;

в интервале  $\alpha > 2$

$e^{\lambda_1 i}$  через  $(-1)^i \cdot \operatorname{ch} \mu i$ ;

$e^{\lambda_2 i}$  через  $(-1)^i \operatorname{Sh} \mu i$ , где  $\mu = \operatorname{arccosh} \left(\frac{\alpha^2}{2} - 1\right)$ ;

при  $\alpha = 2$ ;

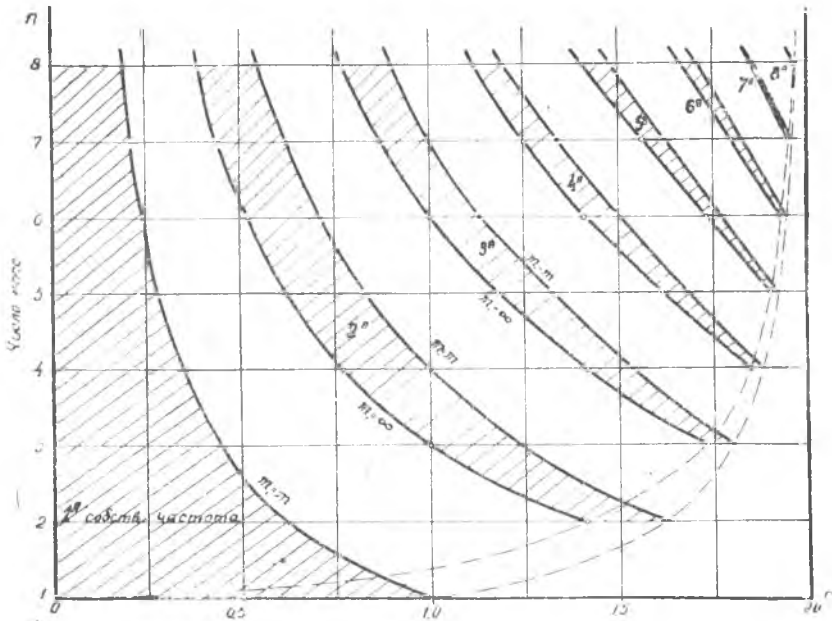
$e^{\lambda_1 i}$  через  $(-1)^i$ ;

$e^{\lambda_2 i}$  через  $(-1)^i \cdot i$ .

Таким образом, задача определения частот  $\omega_v$ ,  $\omega_{iv}^*$  и амплитуд вынужденных колебаний системы по (23) и (24) для схемы фиг. 2в (с произвольными краевыми условиями) может быть сравнительно просто решена изложенным способом.

Частый случай этой задачи — определение собственных частот системы, состоящей из одинаковых элементов ( $m, C$ ) — как механического фильтра, — рассмотрен Стрелковым [4]. Таким фильтром является пакет анероидов, показанный на фиг. 2а.

Обычно  $C_0 \ll C$ , а нижнее значение  $m_1$  (фиг. 3б) близко к  $m$ . На фиг. 9 показаны собственные частоты этой системы при  $C_0 = 0$



Фиг. 9.

и  $m \leq m_1 \leq \infty$ . При крайних значениях  $m_1$  задача решается аналитически:

$$\text{при } m_1 = m; \alpha_\nu = 2 \cdot \sin \frac{2\nu-1}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ где } \nu = 1, 2, 3 \dots n;$$

$$\text{при } m_1 = \infty; \alpha_\nu = 2 \cdot \sin \frac{\nu}{n} \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ где } \nu = 1, 2, 3 \dots n-1,$$

а при всех промежуточных значениях собственные частоты находятся в заштрихованных полосах. Собственные частоты этой системы имеют верхний предел, равный  $2\sqrt{\frac{c}{m}}$ .

Как видно из графика, массой  $m_1$  можно эффективно изменять только низшие собственные частоты при небольшом числе масс. Структура полученных выше формул (5, 6, 23 и 24) для амплитуд относительных перемещений масс позволяет сделать следующие замечания. Путем соответствующего выбора параметров системы можно:

во-первых, добиться нулевых перемещений интересующей нас  $i$ -ой массы в заданном (рабочем) диапазоне частот независимо от уровня возмущающих сил путем сближения рабочих и антирезонансных частот  $\omega_{\text{рабоч.}} \approx \omega_{i\nu}$ ;

во-вторых, за счет максимально возможного приближения соседних антирезонансных и резонансных частот  $\omega_{i\nu}^* \approx \omega_\nu$  сколь угодно снизить уровень амплитуд на этих резонансных частотах, т. е. в принципе — уничтожить таким способом некоторые резонансы, затрудняющие работу в заданном диапазоне частот.

Согласно схеме фиг. 2г, отрыв масс в  $i$ -ом разъеме произойдет, как указывалось выше, при

$$R_i \geq P_{\text{затяжки}}, \quad (26)$$

т. е. когда динамическая реакция связи  $R_i$  превысит усилие статического прижатия элементов друг к другу.

Динамическую реакцию  $R_i$  найдем из уравнения движения  $i$ -ой массы при ее кинематическом возбуждении:

$$m_i' \cdot U_i(t) = m_i' \omega^2 A \cdot \sin \omega t + C_{i-1}(U_{i-1} - U_i) - R_i, \quad (27)$$

откуда по известным уже из (23) амплитудам безотрывных колебаний масс  $m_i$  и  $m_{i-1}$  получим амплитудное значение реакции

$$R_i = A \{ m_i' \cdot \omega^2 [1 + \beta_i(\omega)] + C_{i-1} [\beta_{i-1}(\omega) - \beta_i(\omega)] \}. \quad (28)$$

Подчиняя (28) равенству (26), получим зависимость предельных амплитуд отрыва  $A_{\text{отр}}$  в  $i$ -ой точке пакета от частоты возбуждения, т. е. по существу границу отрывных колебаний

$$A_{\text{отр}}(\omega) = \frac{P_{\text{затяжки}}}{m_i' \omega^2 [1 + \beta_i(\omega)] + C_{i-1} [\beta_{i-1}(\omega) - \beta_i(\omega)]}, \quad (29)$$

где  $m_i'$  — верхняя часть массы  $m_i$

$\beta_i(\omega)$ ,  $\beta_{i-1}(\omega)$  — определяется по одной из формул (23) или (25).

## ВЫВОДЫ

1. Изложенная методика позволяет с достаточной точностью определять расчетным и экспериментальным путем вибрационные характеристики пакета анероидов, необходимые для выбора режимов нормальной работы в условиях вибраций.

2. Для пакетов из нескольких анероидов (фиг. 2а) отстройка от резонансов с низкими частотами и устранение отрывных колебаний эффективно достигается изменением массы  $m_r$  и жесткости  $C_0$  промежуточных элементов.

3. На пакетах из многих анероидов можно достигнуть устранения вибраций какого-либо элемента путем сближения соответствующей антирезонансной частоты с частотой возбуждения или с резонансной частотой данного элемента.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *К. Т. Шаталов*. Новые приемы расчета колебаний цепных систем с учетом трения. Сборник 2 «Динамика и прочность коленчатых валов», АН СССР, М., 1950.
2. *Ф. Блейх, Е. Мелан*, «Уравнения в конечных разностях статики сооружений», ОНТИ, 1936.
3. *Т. Карман, М. Био*, «Математические методы в инженерном деле», ОГИЗ, 1948.
4. *С. П. Стрелков*, Введение в теорию колебаний, 1950.