

2. Блуэр В. О., Шорр Б. Ф. Влияние расстройки частот лопаток на резонансные колебания. В сб.: «Прочность и динамика авиационных двигателей» «Машиностроение», 1971, вып. 6, стр. 75—98.

3. Шипов Р. А. Исследование влияния динамической неоднородности кольцевой решетки на резонансные колебания ее профилей. Там же, стр. 98—113.

4. Иванов В. П. Некоторые вопросы колебаний лопаточных венцов и других упругих тел, обладающих циклической симметрией. Там же, стр. 113—132.

5. Иванов В. П. Исследование колебаний лопаточных венцов авиационных турбомашин. Автореферат докторской диссертации. КуАИ, М., 1970.

6. Сердотецкий А. С. Теоретическое и экспериментальное исследование причин разброса резонансных напряжений у циклически симметричных тел. Труды КуАИ, 1972, вып. 57, стр. 64—76.

7. Стретт Дж. В. (Рэлей). Теория звука. ГИТТЛ, М., 1940, т. 1.

8. Иванов В. П., Сердотецкий А. С. О собственных формах и частотах поворотной-симметричной системы с несовершенствами. В настоящем сборнике.

9. Wagner I. T. Coupling of turbomachine blade vibrations through the rotor. Trans. ASME, ser. A, 1967, vol. 89, No. 4, p. 58—71.

10. Dye R. C. F., Henry T. A. Vibration amplitudes of compressor blades resulting from scatter in blade natural frequencies. Trans. ASME, ser. A, 1967, vol. 89, No. 4, p. 42—50.

В. П. ИВАНОВ, А. С. СЕРДОТЕЦКИЙ

## О СОБСТВЕННЫХ ФОРМАХ И ЧАСТОТАХ ПОВОРОТНО-СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ С НЕСОВЕРШЕНСТВАМИ

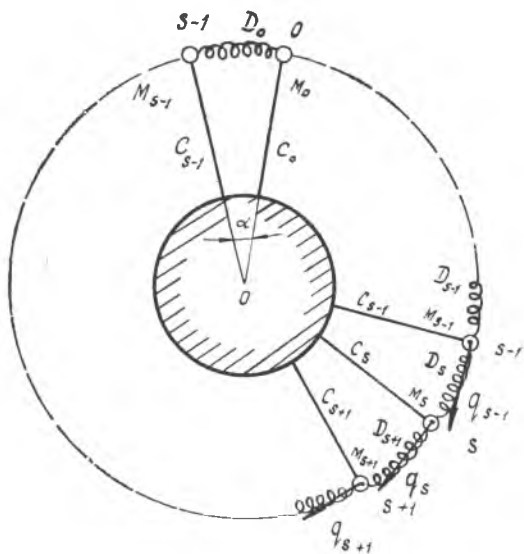
Известно [1], что при свободных колебаниях строго симметричных лопаточных венцов амплитуды сходственных точек описываются в окружном направлении гармонической функцией центрального угла с целым числом волн  $m$ :

$$0 \leq m \leq \frac{S}{2} \text{ для } S \text{ четного;}$$

$$0 \leq m \leq \frac{S-1}{2} \text{ для } S \text{ нечетного,}$$

где  $s$  — число лопаток. Для чисел волн  $m \neq 0$ ,  $\frac{S}{2}$  существуют пары идентичных взаимноортогональных форм с равными, т. е. кратными собственными частотами.

Рис. 1.  
Упругая стержневая система  
с поворотной симметрией



В работе [2] отмечается, что если венец не вполне симметричен, то его собственные формы (в окружном направлении) перестают быть гармоническими, а кратные частоты расщепляются. Эти особенности собственных форм и частот венцов с асимметрией вызывают при работе турбомашин разброс резонансных напряжений по лопаткам.

В настоящей работе исследуется влияние асимметрии, введенной в венец, на искажение его собственных форм и расщепление частот.

Если решается задача о свободных колебаниях строго симметричного венца, то обычно учитываются динамические особенности, присущие телам с поворотной симметрией [1]. Благодаря этому задача фактически сводится к рассмотрению колебаний единичного периода симметрии с соответствующими граничными условиями. Такой подход существенно упрощает решение задачи; без учета свойств симметрии задача становится весьма громоздкой.

Наличие асимметрии в венце не позволяет непосредственно воспользоваться указанными упрощениями. Однако приближенное решение задачи может быть получено достаточно просто, если воспользоваться методом возмущений [3, 5].

Рассмотрим применение этого метода на примере стержневой системы (рис. 1), совершающей свободные колебания в плоскости чертежа. Линейная упругая система образована из  $S$  жестко заделанных радиальных стержней (с изгибными жесткостями  $C_s$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots, S-1$ ) и точечных масс  $M_s$ , соединенных упругими связями (жесткостью  $D_s$ ), которые замыкают стержни в единую упругую систему.

Данная схематизация венца является весьма упрощенной, однако позволяет проследить влияние асимметрии. С другой стороны, для данной системы точное решение может быть получено также достаточно просто, что дает возможность оценить точность приближенного решения задачи методом возмущений.

Согласно методу возмущений рассматриваем систему (рис. 1) как симметричную, невозмущенную, т. е. с идентичными элементами  $C_s = C$ ,  $M_s = M$ ,  $D_s = D$ , на которую накладывается асимметрия — возмущение  $\Delta C_s$ ,  $\Delta M_s$ ,  $\Delta D_s$ .

Решение будем искать в виде суммы решения, соответствующего невозмущенной системе, и поправок, учитывающих возмущение.

Движение  $s$ -й массы (предполагая  $\cos \alpha/2 \approx 1$ ) невозмущенной системы выражается уравнением

$$\ddot{q}_s + cq_s + d(2q_s - q_{s-1} - q_{s+1}) = 0, \quad s = 0, 1, \dots, S-1, \quad (1)$$

где  $d = D/M$ ;  $c = C/M$ ;  $q_s$  — перемещение  $s$ -й массы;  $q_0 = q_{S-1}$ .

Частотное уравнение системы может быть записано в виде

$$A\bar{q} = \lambda^{(0)}\bar{q}, \quad (2)$$

где

$$A = \begin{vmatrix} c+2d & -d & 0\dots & -d \\ -d & c+2d & -d\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -d & 0 & 0\dots & -d & c+2d \end{vmatrix}, \quad (3)$$

$\bar{q} = \{q_0, q_1, \dots, q_s, \dots, q_{S-1}\}$  — собственный вектор матрицы  $A$ ,  $\lambda^{(0)}$  — собственное значение  $A$ . Верхний индекс  $(0)$  здесь и далее означает, что величина соответствует невозмущенной системе. Уравнение (2) имеет  $S$  собственных значений  $\lambda^{(0)}$  и собственных векторов  $\bar{q}$ . Векторы  $\bar{q}$  описывают собственные формы упругой системы (рис. 1) с частотами  $p = \sqrt{\lambda^{(0)}}$ .

Собственные значения уравнения (2) можно представить в виде

$$\lambda_s^{(0)} = c + 2d(1 - \cos \alpha s), \quad s = 0, 1, \dots, S-1.$$

Так как  $\alpha = 2\pi/S$ ,  $\cos \alpha s = \cos \alpha (S - s)$ , то различными собственными значениями будут

$$\lambda_m^{(0)} = c + 2d (1 - \cos \alpha m), \quad (4)$$

$$m = \begin{cases} 0, 1, \dots, \frac{S-1}{2} & \text{при } S \text{ нечетном,} \\ 0, 1, \dots, \frac{S}{2} & \text{при } S \text{ четном,} \end{cases}$$

причем  $\lambda_m^{(0)}$  ( $0 < m < \frac{S}{2}$ ) обладают кратностью два.

Компоненты  $q_{ms}$ ,  $s = 0, 1, \dots, S - 1$  собственных векторов  $\bar{q}_m$  составляют дискретные значения гармонических функций с числом волн  $m$ . При этом кратным  $\lambda_m^{(0)}$  соответствуют пары векторов  $\bar{q}_{mj}$ ,  $j = I, II$ , определенные с точностью до ортогонального преобразования. Будем считать, для определенности, начальную фазу одного из векторов равной нулю. Кроме того, поскольку собственные векторы однородной системы определяются с точностью до постоянного множителя, то для конкретности пронормируем векторы, положив  $(\bar{q}_m, \bar{q}_m) = 1$ . Круглые скобки в данном случае означают скалярное произведение. Векторы с нормирующими множителями могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{q}_0 &= \sqrt{1/S} \{1, 1, \dots, 1\}; \\ \bar{q}_{mI} &= \sqrt{2/S} \{ \dots, \cos \alpha ms, \dots \} \\ &\quad \text{для } 1 \leq m < \frac{S}{2}; \\ \bar{q}_{mII} &= \sqrt{2/S} \{ \dots, \sin \alpha ms, \dots \} \\ \bar{q}_{S/2} &= \sqrt{1/S} \{1, -1, 1, \dots\}, \text{ если } S \text{ четное.} \end{aligned} \quad (5)$$

Для случая симметричной (невозмущенной) системы частоты форм  $\bar{q}_{mI}$  и  $\bar{q}_{mII}$  ( $0 < m < \frac{S}{2}$ ) совпадают. Для указанных  $m$  собственными векторами системы (2) будет также любая линейная комбинация

$$\bar{e}_m^{(0)} = \eta \bar{q}_{mI} + \vartheta \bar{q}_{mII}. \quad (6)$$

Рассмотрим колебания возмущенной упругой системы (с введенной асимметрией), предполагая, что неидентичность величин  $C_s$ ,  $M_s$ ,  $D_s$  мала. Составим уравнения, подобные (1) и (2). Последнее будет иметь вид

$$A' \bar{e} = \lambda \bar{e}, \quad (7)$$

непосредственное решение его, как отмечалось выше, затруднительно. Предположим, что матрицу  $A'$  можно представить суммой

$$A' = A + \varepsilon B, \quad (8)$$

где  $\varepsilon B$  — возмущение;

$\varepsilon$  — достаточно малый параметр;

$B$  — некоторая матрица.

Согласно методу возмущений предположим также, что собственные значения  $\lambda$  и векторы  $\bar{e}$  возмущенной системы можно представить сходящимися степенными рядами:

$$\lambda = \lambda^{(0)} + \varepsilon \lambda^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda^{(2)} + \dots = \sum_{x=0}^{\infty} \varepsilon^x \lambda^{(x)}, \quad (9)$$

$$\bar{e} = \bar{e}^{(0)} + \varepsilon \bar{e}^{(1)} + \varepsilon^2 \bar{e}^{(2)} + \dots = \sum_{x=0}^{\infty} \varepsilon^x \bar{e}^{(x)}, \quad (10)$$

где  $\lambda^{(0)}$  и  $\bar{e}^{(0)}$  — собственные значения (4) и векторы (5) невозмущенной системы;

$\lambda^{(x)}$  и  $\bar{e}^{(x)}$  — поправки  $x$ -го порядка, подлежащие определению.

Определенные особенности решения накладываются кратностью  $\lambda_m^{(0)}$ ,  $0 < m < \frac{S}{2}$ . В результате замены в (2)  $A$  на  $A + \varepsilon B$  в (7) собственные значения в общем случае перестанут быть кратными и расщепятся. Вместо  $\lambda_m^{(0)}$  образуется пара  $\lambda_{mI} \neq \lambda_{mII}$ . Каждому  $\lambda_{mj}$ ,  $j = I, II$  соответствует единственный вектор  $\bar{e}_{mj}$ . Если рассмотреть  $\bar{e}_{mj}^{(0)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{e}_{mj}(\varepsilon)$ , то становится очевидно, что линейная комбинация (6) для возмущенной системы должна быть однозначно определена через коэффициенты  $\eta$  и  $\nu$ .

Учитывая сказанное, в (7) подставим (8), (9) и (10). Формально перемножая ряды и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим систему уравнений:

$$\text{при } \varepsilon^0 = 1 \quad A \bar{e}^{(0)} = \lambda^{(0)} \bar{e}^{(0)}; \quad (11)$$

$$\text{при } \varepsilon^1 \quad A \bar{e}^{(1)} + B \bar{e}^{(0)} = \lambda^{(0)} \bar{e}^{(1)} + \lambda^{(1)} \bar{e}^{(0)}; \quad (12)$$

$$\text{при } \varepsilon^2 \quad A \bar{e}^{(2)} + B \bar{e}^{(1)} = \lambda^{(0)} \bar{e}^{(2)} + \lambda^{(1)} \bar{e}^{(1)} + \lambda^{(2)} \bar{e}^{(0)}. \quad (13)$$

Равенство (11) выполняется автоматически, поскольку совпадает с (2); последующие равенства позволяют получить рекуррентные соотношения для определения поправок  $\bar{e}^{(x)}$  и  $\lambda^{(x)}$ .

Определим коэффициенты  $\eta$  и  $\vartheta$  в (6), т. е. приспособим собственные векторы к данному возмущению. Для этого уравнение (12) умножим скалярно на  $\bar{q}_{mi}$ :

$$(A\bar{e}_{mj}^{(1)}, \bar{q}_{mi}) + (B\bar{e}_{mj}^{(0)}, \bar{q}_{mi}) = (\lambda_m^{(0)}\bar{e}_{mj}^{(1)}, \bar{q}_{mi}) + (\lambda^{(1)}\bar{e}_{mj}^{(0)}, \bar{q}_{mi}), \quad (14)$$

$i, j = I, II.$

Так как матрица  $A$  самосопряженная (см. (3)), то

$$(A\bar{e}_{mj}^{(1)}, \bar{q}_{mi}) = (\bar{e}_{mj}^{(1)}, A\bar{q}_{mi}) = (\bar{e}_{mj}^{(1)}, \lambda_m^{(0)}\bar{q}_{mi}) = \lambda_m^{(0)}(\bar{e}_{mj}^{(1)}, \bar{q}_{mi}),$$

кроме того,

$$(\bar{q}_{mj}, \bar{q}_{mi}) = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ 1 & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Поэтому после подстановки в (14) равенства (6) и последних соотношений, получим для каждого  $m$  ( $0 < m < \frac{S}{2}$ ) систему уравнений

$$\begin{cases} \eta b_{II} + \vartheta b_{I II} = \lambda^{(1)}\eta \\ \eta b_{I I I} + \vartheta b_{II II} = \lambda^{(1)}\vartheta, \end{cases} \quad (15)$$

где

$$b_{ip} = b_{ip}(m) = (B\bar{q}_{mp}, \bar{q}_{mi}), \quad i, p = I, II;$$

$$\eta = \eta(mj); \quad \vartheta = \vartheta(mj); \quad \lambda^{(1)} = \lambda_{mj}^{(1)}.$$

Если рассматривать (15) как систему уравнений относительно неизвестных  $\eta$  и  $\vartheta$ , условием нетривиальности решения будет равенство нулю ее детерминанта. Из этого условия  $\lambda^{(1)}$  определяются как собственные значения (15):

$$\lambda_{mj}^{(1)} = 1/2 [b_{II}(m) + b_{I II}(m) \mp \sqrt{(b_{II}(m) - b_{I II}(m))^2 + 4b_{I II}^2(m)}],$$

$j = I, II.$  (16)

Первые или главные поправки  $\lambda_{mj}^{(1)}$  к  $\lambda_m^{(0)}$  определяют в (9) расщепление спектра собственных значений (и частот).

Коэффициенты  $\eta$  и  $\vartheta$  могут быть определены с точностью до постоянного множителя  $\zeta$ :

$$\eta = \zeta(\lambda_{mj}^{(1)} - b_{II II}(m));$$

$$\vartheta = \zeta b_{I II}(m). \quad (17)$$

Посредством (17) и (6) невозмущенные собственные векторы приспособлены к возмущению:

$$\bar{e}_{mj}^{(0)} = \sqrt{2/S} \{ \dots, \sin(\alpha ms + \delta_{mj}), \dots \}, \quad (18)$$

где

$$0 < m < \frac{S}{2}; \quad s = 0, 1, 2, \dots, S-1; \quad j = I, II;$$

$$\delta_{mj} = \operatorname{arctg} \frac{\eta(mj)}{\vartheta(mj)}.$$

Для  $m=0$  и  $m=S/2$  (при  $S$  четном) получается единственная поправка  $\lambda_m^{(1)}$ , а векторы  $\bar{e}_m^{(0)}$  в приспособлении к возмущению не нуждаются.

Главные поправки  $\bar{e}_{mj}^{(1)}$  ищем по методу Шредингера [4] в виде разложения в ряд по собственным невозмущенным векторам:

$$\bar{e}_{mj}^{(1)} = \sum_{n,i} \xi_{ni}(mj) \bar{e}_{ni}^{(0)}, \quad (19)$$

$$j, i = I, II; \quad m, n = \begin{cases} 0, 1, \dots, \frac{S-1}{2} & \text{при } S \text{ нечетном,} \\ 0, 1, \dots, \frac{S}{2} & \text{при } S \text{ четном.} \end{cases}$$

Для определения коэффициентов  $\xi_{ni}$  вновь воспользуемся уравнением (12), составленным для  $\bar{e}_{mj}^{(0)}$ , и умножим его на  $\bar{e}_{ni}^{(0)}$ . Подставляя вместо  $\bar{e}_{mj}^{(0)}$  его выражение (19), получим

$$\xi_{ni}(mj) = \frac{d_{ni}(mj)}{\lambda_m^{(0)} - \lambda_n^{(0)}}, \quad (20)$$

где  $d_{ni}(mj) = (B\bar{e}_{mj}^{(0)}, \bar{e}_{ni}^{(0)})$ ,  $n \neq m$ .

Коэффициент  $\xi_{mj}(mj)$  определим из условия нормированности  $(\bar{e}_{mj}, \bar{e}_{mj}) = 1$ , откуда

$$\xi_{mi}(mj) = 0. \quad (21)$$

Для определения  $\xi_{mj'}(mj)$ , ( $j, j' = I, II, j' \neq j$ ) уравнение (13), составленное для  $\bar{e}_{mj}$ , умножим на  $\bar{e}_{mj'}^{(0)}$ . Уравнение (11), составленное для  $\bar{e}_{mj'}^{(0)}$ , умножим на  $\bar{e}_{mj}^{(0)}$  и вычтем из предыдущего. После преобразований получим

$$\xi_{mj'}(mj) = \frac{1}{\lambda_m^{(1)} - \lambda_{mj'}^{(1)}} \sum'_{n,i} \frac{d_{mj}(ni) d_{mj'}(ni)}{\lambda_m^{(0)} - \lambda_n^{(0)}}, \quad (22)$$

где штрих у знака суммирования означает, что слагаемые с индексом  $n=m$  пропускаются.

Выражениями (20), (21) и (22) определены все коэффициенты разложения (19) и вместе с тем главные поправки  $\bar{e}_{mj}^{(1)}$  к собственным векторам в рядах (10).

Поступая, как при выводе выражения (22), но положив  $j' = j$ , получим выражение для вторых поправок в рядах (9) к собственным значениям:

$$\lambda_{mj}^{(2)} = \sum_{n, i} \frac{(d_{ni}(mj))^2}{\lambda_m^{(0)} - \lambda_n^{(0)}},$$

$$m, n = 0, 1, \dots, \frac{S-1}{2} \left( \frac{S}{2} \right), \quad i, j = \text{I, II}.$$

Таким образом, полученные формулы позволяют приспособить собственные векторы к возмущению и уточнить их в первом приближении; собственные значения уточнены до второго приближения. Повторяя описанный процесс, можно определить последующие приближения.

Выражения для поправок выведены в предположении самосопряженности матрицы  $B$ . Такое предположение не является необходимым, но упрощает конечные выражения.

Вид матрицы  $B$  определяется характером асимметрии упругой системы. Например, если асимметрия заключается в разбросе жесткостей  $C_s$ , возмущение имеет вид

$$\varepsilon B = \begin{vmatrix} \delta c_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta c_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \delta c_{S-1} \end{vmatrix}, \quad (23)$$

где  $\delta c_s = \frac{C_s - C}{M}$  — относительное отклонение жесткости  $s$ -го стержня от некоторой номинальной жесткости  $C$ ;  $\delta c_s$  совпадает также с квадратическим отклонением парциальной частоты стержня без связей  $D$ .

Приведем результаты расчета для системы (рис. 1) из 12 стержней ( $S=12$ ,  $C=2D$ ,  $m=0, 1, \dots, 6$ ). Рис. 2 иллюстрирует искажение одной из собственных форм ( $m=1$ ) при увеличении жесткости лопатки № 1. Как видно из графиков, искажение может быть существенным. Примечательно, что отстройка одного стержня ведет к перераспределению амплитуд колебаний во всей системе. Так, если увеличение жесткости лопатки № 1 слабо влияет на ее амплитуду, то амплитуды лопаток № 0 и 2 существенно увеличиваются.

Наибольшее влияние на рассматриваемую форму оказывают формы с близкими частотами. На искажение приведенной на рис. 2 формы  $m=1$  доминирующее влияние оказывают формы  $m=0$  и  $m=2$ .



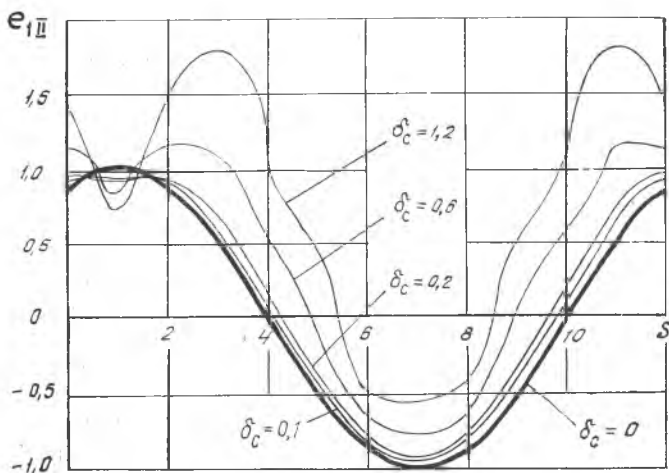


Рис. 2. Искажение собственной формы  $m = 1, j = \text{II}$  при увеличении на  $\delta c_s$  жесткости стержня № 1 ( $s = 1$ )

Особое значение имеет вопрос о применимости метода возмущений в зависимости от степени асимметрии системы, т. е. о границах сходимости рядов (9) и (10). Теория [3] показывает, что для обеспечения их сходимости необходимо, чтобы

$$\|\varepsilon B\| \leq \frac{\Delta \lambda_m}{2},$$

где  $\|\varepsilon B\|$  — норма возмущения,  $\Delta \lambda_m = \min_n |\lambda_n^{(0)} - \lambda_m^{(0)}|$ . Для  $\varepsilon B$  вида (23) наибольшее возмущение, не нарушающее сходимости (9) и (10), ограничивается

$$\max_s |\delta c_s| \leq \Delta \lambda_m / 2. \quad (24)$$

Расчеты показывают, что условие (24) довольно жесткое; в приведенном примере для  $m=1$  возмущение  $\delta c_s$  не должно превышать 7%  $C$ . Здесь не приводятся оценки погрешностей от пренебрежения членами высших порядков малости в рядах (9), (10). Однако можно показать, что в рассмотренном примере для  $m=0$  и  $m=6$  погрешность на границе радиуса сходимости в определении собственных значений не превышает  $6 \cdot 10^{-3}\%$ , а собственного вектора 2,5%.

С решениями, полученными методом возмущений, были сопоставлены точные решения. Последние были найдены путем непосредственного решения системы (7) на ЭЦВМ БЭСМ-4. Сравнение результатов расчетов показало, что в пределах сохранения приемлемой точности решения границы применимости метода возмущений могут быть существенно расширены. Так, в рассмотренном примере при  $\delta c = 0,6$  расхождение компонент собственного вектора с точным решением не превышает 10%.

Точность определения собственных значений методом возмущений весьма высокая даже вне области сходимости, что видно из следующей таблицы (для  $m = 1$ ):

| $\lambda_1/c$ \ $\delta c$ | 0      | 0,001  | 0,01   | 0,1    | 0,2    | 0,6    | 1,2    |
|----------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| По методу возмущений       | 1,1340 | 1,1342 | 1,1357 | 1,1502 | 1,1654 | 1,2171 | 1,2264 |
| Точное решение             | 1,1340 | 1,1341 | 1,1355 | 1,1500 | 1,1645 | 1,2060 | 1,2371 |

Метод возмущений, формально примененный и за пределами сходимости рядов (9) и (10), позволяет, по меньшей мере, качественно оценивать изменение собственных форм и частот упругой системы при введении асимметрии.

Метод возмущений может быть использован для расчета не только упругих систем с дискретными параметрами. Нами получены решения, позволяющие определять расщепление и искажение в линейно-упругих системах с непрерывными параметрами, заданных дифференциальными операторами или динамическими жесткостями.

Приложение метода возмущений к определению расщепления позволяет эффективно и простыми средствами решать задачи об искажении собственных форм и частот упругих тел при введении асимметрии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов В. П. Некоторые вопросы колебаний лопаточных венцов и других упругих тел, обладающих циклической симметрией. В сб.: «Прочность и динамика авиационных двигателей». М., «Машиностроение», 1971, вып. 6, стр. 113—132.

2. Иванов В. П., Сердотецкий А. С. Формирование разброса резонансных напряжений в лопаточных венцах. В настоящем сборнике.
3. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., «МИР», 1972.
4. Маделунг Э. Математический аппарат физики (справочное руководство). М., «Наука», 1968.
5. Reilich F. Störungstheorie der Spektralzerlegung. I—V, Math. Ann. B. 113 (1937), 116 (1939), 117 (1940), 118 (1942).

А. И. КРЮКОВ

### ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СКОМПЕНСИРОВАННОЙ ТРУБОПРОВОДНОЙ СИСТЕМЫ

Одним из распространенных средств повышения надежности трубопроводных систем является применение компенсаторов перемещения, выполненных из гибких металлических или фторопластовых рукавов (МР). Наличие упругой вставки (компенсатора) позволяет устранить монтажные и термические деформации трубопроводов, эффективно воздействовать на частотный спектр коммуникации и в ряде случаев использовать диссипативный эффект проволоочной оплетки компенсатора.

Динамические характеристики таких систем отличаются рядом особенностей, которые можно рассмотреть на расчетной схеме трубопровода с компенсатором (рис. 1).

Полагая, что изгибная жесткость компенсатора и его осевые деформации при колебаниях пренебрежимо малы, а вся система не имеет статического прогиба от силы веса, получаем следующие уравнения упругой линии для жесткого трубопровода МР [1]

$$X_L(x) = A(\operatorname{ch} \gamma x - \cos \gamma x) + B(\operatorname{sh} \gamma x - \sin \gamma x) \quad (1)$$

и для компенсатора  $PN$

$$X_I(x) = K \sin \frac{\omega}{a} (L_c - x), \quad (2)$$

где  $X_L(x)$  и  $X_I(x)$  — функции смещения стержня МР, соответствующего жесткому трубопроводу и нити  $PN$ , моделирующей условия работы компенсатора;