КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
ТРУДЫ, ВЫПУСК XIX. 1965 г.
Вибрационная прочность и надежность авиационных двигателей

П. Д. ВИЛЬНЕР

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ УРАВНОВЕШИВАНИЯ РОТОРОВ

Известно, что гибкие роторы, даже будучи отбалансированы в двух плоскостях, часто вызывают повышенную вибрацию машины. Уравновешивание на обычных балансировочных станках оказывается для них недостаточно эффективным. Обычно предлагается специальный метод балансировки, заключающийся в том, что уравновешивание гибких роторов производят, руководствуясь значением и фазой прогиба вала при оборотах его, близких к рабочим и к критическим [1, 2].

Для некоторых типов роторов устранение так называемого «скрытого» дисбаланса можно произвести и на обычных балансировочных станках, применив специальные схемы балансировки. Примеры построения таких схем рассмотрены в § 2.

С другой стороны, как показывает опыт, не для всех гибких роторов такая методика является обязательной. Условия, при выполнении которых можно воспользоваться обычными методами балансировки выясняются в § 1.

Кроме неуравновешенности, обусловленной неточностью изготовления, сборки и балансировки, для ряда роторов существенное значение имеет неуравновешенность, вызванная искривлением в процессе работы. Некоторые экспериментальные работы по этому вопросу изложены в § 3.

§ 1. УСЛОВИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ БАЛАНСИРОВКИ

Эффективность балансировки естественно оценивать отношением амплитуд отбалансированного и неотбалансированного роторов при прохождении соответствующей критической скорости.

$$K = \frac{y}{y_б},$$

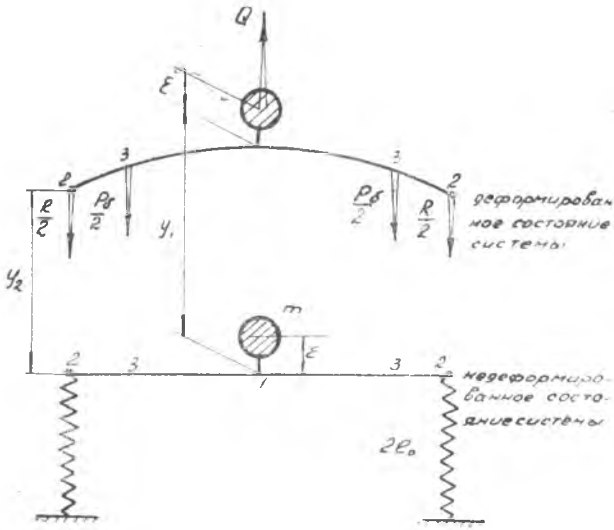
где y — амплитуда неотбалансированного ротора;
$y_б$ — амплитуда отбалансированного ротора.

Коэффициент эффективности показывает, во сколько раз балансировка уменьшает вибрацию. Если $K<1$, то балансировка не уменьшает, а увеличивает вибрацию.

Рассмотрим движение системы «ротор — корпус», когда ротор с некоторой исходной неуравновешенностью (которая всегда имеется вследствие неточностей изготовления и сборки его деталей) идеально отбалансирован в двух плоскостях, не совпадающих с плоскостями исходной неуравновешенности.

С целью упрощения анализа заменим ротор невесомым валом с сосредоточенной посредине массой m, которая установлена на нем с эксцентриситетом ε. Будем считать, что при балансировке на ротор устанавливается два уравновешивающих груза, равноудаленных от его концов, каждый из которых создает дибаланс $\frac{1}{2}mg\varepsilon$. Влиянием их масс на формы и частоты колебаний системы можно пренебречь.

Для вала на податливых опорах (фиг. 1), отбалансированного в плоскостях 3, получим уравнения равновесия:



Фиг. 1.

$$\left.\begin{aligned} Q &= m\omega^2(y_1+\varepsilon) \\ P_б &= m\omega^2\varepsilon \end{aligned}\right\}; \tag{1}$$

$$R = Q - P_б; \tag{2}$$

$$Re_0 = y_2; \tag{3}$$

$$y_1 - y_2 = Q\,\alpha_{11} - P_б\,\alpha_{13}. \tag{4}$$

Здесь и далее обозначено:

m — масса, сосредоточенная на валу;

ω — угловая скорость вращения;

y_1 — перемещение точки вала, на которой закреплена масса;

y_2 — перемещение подшипника;

$\frac{R}{2}$ — реакция опоры;

$\frac{R_б}{2}$ — центробежная сила балансирующего груза;

Q — центробежная сила массы, сосредоточенной на валу;

$2e_0$ — податливость опоры вала;

$e_в$ — податливость вала;

α_{11}, α_{13} — коэффициенты влияния (см. фиг. 2).

Подставляя (1) в (4) и (1) и (2) в (3), получим после преобразований:

$$\left.\begin{aligned} &m\omega^2 e_0 y_1 - y_2 = 0, \\ &(m\omega^2\alpha_{11} - 1)\, y_1 + y_2 = \\ &= -m\omega^2\varepsilon(\alpha_{11} - \alpha_{13}). \end{aligned}\right| . \quad (5)$$

Решая (5) и вводя обозначение

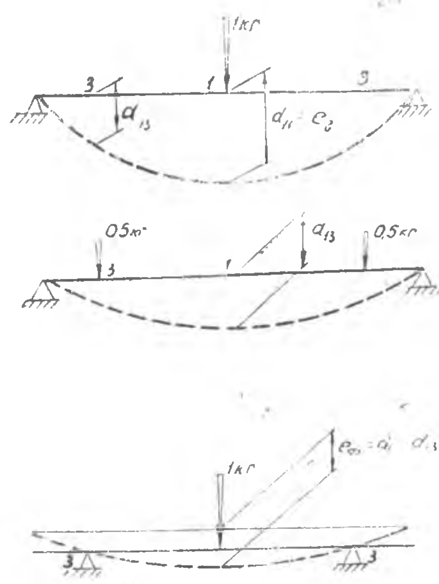
$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11} &= e_в \\ \alpha_{11} - \alpha_{12} &= e_ф \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$p^2 = \frac{1}{m(e_в + e_0)}, \quad (7)$$

получим:

$$y_1 = \varepsilon \frac{e_ф}{e_0 + e_в} \cdot \frac{\frac{\omega^2}{p^2}}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}}; \quad (8)$$

$$y_2 = \varepsilon \frac{e_ф e_0}{(e_0 + e_в)^2} \cdot \frac{\left(\frac{\omega^2}{p^2}\right)^2}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}}. \quad (9)$$



Фиг. 2.

Для случая, когда точки *3* совпадают с точками *2*, формулы (8) и (9) получают вид:

$$y_1 = \varepsilon \frac{e_в}{e_0 + e_в} \cdot \frac{\frac{\omega^2}{p^2}}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}}; \quad (10)$$

$$y_2 = \varepsilon \frac{e_0 e_в}{(e_0 + e_в)^2} \cdot \frac{\left(\frac{\omega^2}{p^2}\right)^2}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}}. \quad (11)$$

Для неотбалансированного ротора $P_б = 0$. Поэтому

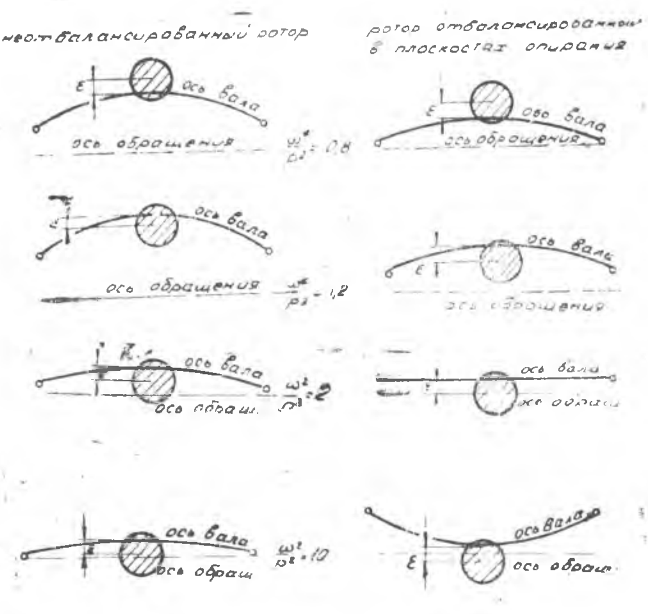
$$y_1 = \varepsilon \frac{\frac{\omega^2}{p^2}}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}}; \tag{12}$$

$$y_2 = \varepsilon \frac{e_0}{e_0 + e_в} \cdot \frac{\frac{\omega^2}{p^2}}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}}. \tag{13}$$

Сравнивая (8) и (12), получим

$$K = \frac{e_0 + e_в}{e_ф}. \tag{14}$$

Следовательно, чем жестче участок вала между плоскостями балансировки, чем податливее его цапфы, находящиеся вне участка между плоскостями балансировки и, наконец, чем податливее опоры ротора, тем больше будет величина K, т. е. тем эффективнее будет балансировка.

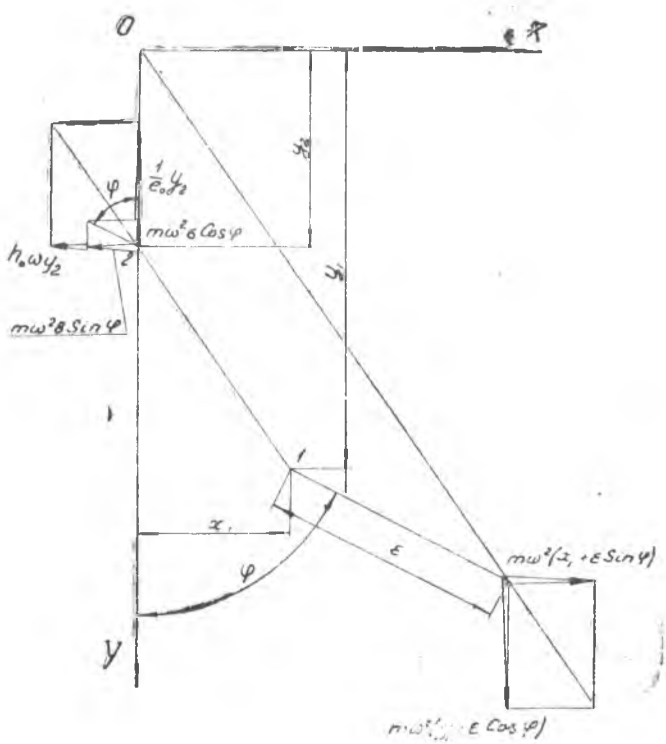


Фиг. 3.

Формы колебаний отбалансированного и неотбалансированного роторов в закритической области существенно отличаются. На фиг. 3 показаны формы колебаний по формулам (10), (11) и (12), (13) при $e_0 = e_в$ для ряда частот. Видно, что на больших закритических частотах центр тяжести массы m отбалансированного ротора не стремится к оси обращения, а переходит через нее, так что эксцентриситет делится осью обращения на две части. Вибрация подшипников становится очень большой ввиду того, что на цапфах вала установлены балансирующие грузы, дающие значительные силы.

Для того, чтобы показать неизменность приведенных выше результатов и при учете демпфирования, можно решить задачу фиг. 1 для случая, когда точки *3* совпадают с точками *2*, т. е. когда балансировочные грузы установлены на цапфах вала в плоскостях опирания.

Решение проводится в координатных осях XOY, связанных с валом, т. е. вращающихся вместе с ним с угловой скоростью ω, причем точка O совпадает с осью вращения, а ось Y совпадает с направлением деформации опор (см. фиг. 4).



Фиг. 4.

Будем считать, что демпфирование сосредоточено в опорах и сила трения, приложенная со стороны опор к точке 2, пропорциональна скорости: $F_{\text{тр}} = h_0 \omega y_2$.

Это — один из наиболее вероятных и простых случаев.

Уравнения равновесия точек 1 и 2 в проекциях на координатные оси:

$$m\omega^2(y_1+\varepsilon\cos\varphi)-\frac{1}{e_в}(y_1-y_2)=0. \quad (15$$

$$m\omega^2(x_1+\varepsilon\sin\varphi)-\frac{1}{e_в}x_1=0. \quad (16$$

$$\frac{1}{e_0}y_2-\frac{1}{e_в}(y_1-y_2)+m\omega^2\varepsilon\cos\varphi=0 \quad (17$$

$$h_0\omega y_2+m\omega^2\varepsilon\sin\varphi-\frac{1}{e_в}x_1=0. \quad (18$$

Решая систему (15)—(18) и введя обозначения (7) и

$$p_в^2=\frac{1}{me_в}, \quad (19$$

получим

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\omega e_0h_0\left(1-\frac{\omega^2}{p_в^2}\right)}{1-\frac{\omega^2}{p^2}}; \quad (20)$$

$$y_1=\varepsilon\cdot\frac{e_в}{e_0+e_в}\frac{\frac{\omega^2}{p^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{p^2}\right)^2+h_0^2\omega^2e_0^2\left(1-\frac{\omega^2}{p_в^2}\right)^2}}. \quad (21)$$

Так как выражения для x_1 и y_2 получаются очень громоздкими, рассмотрим их только для прохождения критической скорости, то есть для $\omega=p$.

$$x_1=\frac{e_в}{e_0}\varepsilon. \quad (22)$$

$$y_2=\frac{e_0}{e_0+e_в}y_1. \quad (23)$$

Сравнивая y_1 по (21) и (10) видим, что они отличаются только наличием демпфирующего члена в (21). Следовательно, введение демфирования не меняет выводов о влиянии соотношений между податливостями на эффективность балансировки.

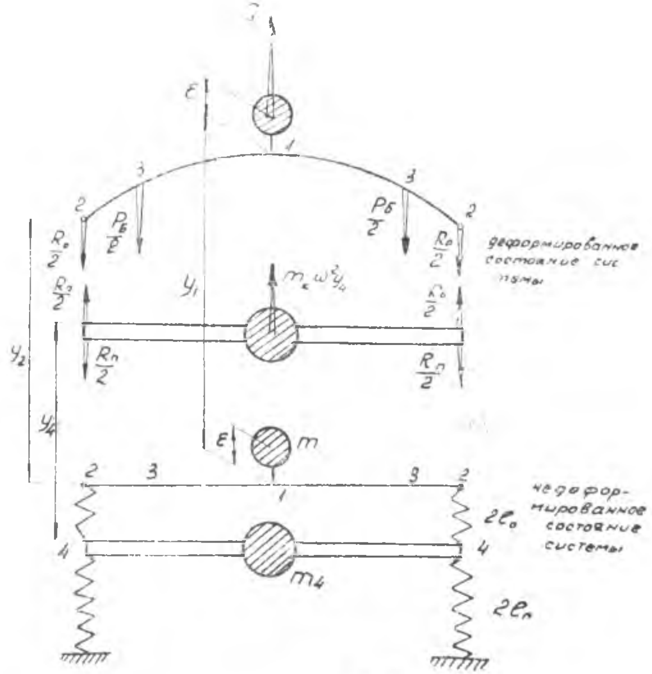
Определение перемещения точки 1 величиной y_1 не совсем точно. Более верным будет $r_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$, но поправка получается несущественной. Для широкого диапазона значений демпфирования (коэффициент усиления на критической скорости в пределах 5÷20) и соотношений податливостей опор и вала $\left(\frac{e_0}{e_в}=0{,}25\div4{,}0\right)$ ошибка приближенного определения эффективности балансировки по величине y_1 превышает 2%.

Для выявления влияния массы корпуса и податливости подвески рассмотрим систему на фиг. 5. Корпус для простоты примят недеформируемым. Уравнения равновесия

$$R_0 = Q - P_б . \tag{24}$$

$$R_0 e_0 = y_1 - y_4. \tag{25}$$

$$Q\alpha_{11} - P_б\, \alpha_{13} = y_1 - y_2. \tag{26}$$



Фиг. 5.

$$Q = m\omega^2 (y_1 + \varepsilon). \tag{27}$$

$$P_б = m\omega^2\varepsilon. \tag{28}$$

$$R_0 + m_к\, \omega^2 y_4 - R_п = 0. \tag{29}$$

$$R_п\, e_п = y_4, \tag{30}$$

где y_4 — перемещение массы корпуса;

$m_к$ — масса корпуса;

$e_п$ — податливость подвески;

$\frac{R_0}{2}$ — реакция опоры вала;

$R_п$ — реакция подвески.

Остальные обозначения те же, что и для системы уравнений (1)—(4). Подставляя (24), (27), (28) в (25); (27), (28) в (26); (30), (25) в (29) получим после преобразований с учетом (6) следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\left(m\omega^2-\frac{1}{e_в}\right)y_1+\frac{1}{e_в}\,y_2=-\,m\omega^2\varepsilon\,\frac{e_ф}{e_в}\\ m\omega^2y_1-\frac{1}{e_0}\,y_2+\frac{1}{e_0}\,y_4=0\\ \frac{1}{e_0}\,y_2+\left(m_к\,\omega^2-\frac{e_0+e_п}{e_0e_п}\right)y_4=0\end{aligned}\right\}. \tag{31}$$

Решая (31), найдем:

$$y_1=\varepsilon\,\frac{e_ф}{e_в}\cdot\frac{\dfrac{\omega^2}{p_в^2}\left(1-\dfrac{\omega^2}{p_к^2}\right)}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{p_1{}^2}\right)\left(1-\dfrac{\omega^2}{p_2{}^2}\right)}. \tag{32}$$

$$y_2=\varepsilon\,\frac{e_ф}{e_в}\cdot\frac{\dfrac{\omega^2}{p_0{}^2}\cdot\dfrac{\omega^2}{p_в^2}\left(1-\dfrac{\omega^2}{p_к^2}\cdot\dfrac{e_0}{e_0+e_п}\right)}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{p_1{}^2}\right)\left(1-\dfrac{\omega^2}{p_2{}^2}\right)}. \tag{33}$$

$$y_4=\varepsilon\,\frac{e_ф}{e_в}\cdot\frac{\dfrac{\omega^2}{p_в^2}\cdot\dfrac{\omega^2}{p_п^2}}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{p_1{}^2}\right)\left(1-\dfrac{\omega^2}{p_2{}^2}\right)}, \tag{34}$$

где $p_1{}^2$ и $p_2{}^2$ — корни уравнения $\Delta=0$ — квадраты критических скоростей системы.

$$\Delta=-\frac{1}{e_в\;e_0e_п}\left\{1-\omega^2\left[m\left(e_в+e_0+e_п\right)+m_к\,e_п\right]+\right.$$

$\left.+\,\omega^4mm_к\left(e_в+e_0\right)e_п\right\}$ — определитель системы уравнений (31);

(35)

$p_в^2=\dfrac{1}{me_в}$ — квадрат собственной частоты колебаний вала на жестких опорах;

$p_к^2=\dfrac{1}{m_к\;e_п}$ — квадрат собственной частоты колебаний корпуса на подвеске.

$$p_0{}^2=\frac{1}{m\left(e_0+e_п\right)};\quad p_п^2=\frac{1}{me_п}.$$

Решая задачу о неотбалансированном роторе, положим в уравнениях (24) и (26) $P_б=0$, а уравнение (28) исключим.

Получим

$$y_1=\varepsilon\,\frac{e_в+e_0+e_п}{e_в}\cdot\frac{\dfrac{\omega^2}{p_в^2}\left(1-\dfrac{\omega^2}{p_к^2}\cdot\dfrac{e_0+e_в}{e_0+e_в+e_п}\right)}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{p_1{}^2}\right)\left(1-\dfrac{\omega^2}{p_2{}^2}\right)}. \tag{36}$$

$$y_2 = \varepsilon \frac{\frac{\omega^2}{p_0^2}\left(1 - \frac{\omega^2}{p_{\text{К}}^2} \cdot \frac{e_0}{e_0 + e_{\text{п}}}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{p_1^2}\right)\left(1 - \frac{\omega^2}{p_2^2}\right)}. \tag{37}$$

$$y_4 = \varepsilon \frac{\frac{\omega^2}{p_{\text{п}}^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{p_1^2}\right)\left(1 - \frac{\omega^2}{p_2^2}\right)}. \tag{38}$$

Эффективность балансировки определяется по изменению зазора между ротором и корпусов для отбалансированного и неотбалансированного роторов:

$$K = \frac{y_1 - y_4}{y_{1б} - y_{4б}} = \frac{e_{\text{в}} + e_0}{e_{\text{ф}}} \cdot \frac{1 - m_{\text{к}}\, \omega^2 e_{\text{п}}}{1 - (m + m_{\text{к}})\, \omega^2 e_{\text{п}}}. \tag{39}$$

Из формулы (39) видно, что в области первой критической скорости, где $1 - (m + m_{\text{к}})\, \omega^2 e_{\text{п}} \ll 1 - m_{\text{к}}\, \omega^2 e_{\text{п}}$, балансировка очень эффективна, а в области высоких оборотов, где $m_{\text{к}}\, \omega^2 e_{\text{п}} \gg 1$, эффективность балансировки можно определить приближенной формулой

$$K \approx \frac{e_{\text{в}} + e_0}{e_{\text{ф}}} \cdot \frac{m_{\text{к}}}{m + m_{\text{к}}}. \tag{40}$$

Формула (40) показывает, что учет вибрации корпуса дает некоторое снижение эффективности балансировки по сравнению со схемой на неподвижном фундаменте (см. формулу (14), но величиной, определяющей эффективность балансировки, остается то же соотношение между податливостями элементов ротора и опор. Формула является точной при $e_{\text{п}} = \infty$.

Во всех рассмотренных ранее задачах предполагалось, что балансировка проведена идеально, то есть дисбалансы, введенные на ротор, в точности равны по величине исходному и противоположно ему направлены.

В действительности для роторов ГТД остаточная неуравновешенность может составлять 5—400 *гсм* на опору (в зависимости от типа и состояния балансировочного оборудования, квалификации обслуживающего персонала и технических требований к ротору, установленных чертежом).

Естественно возникает вопрос: какая неуравновешенность определяет в основном уровень вибрации, «скрытая», т. е. исходная между плоскостями балансировки, или остаточная, в плоскостях балансировки?

Для выяснения этого рассмотрим схему фиг. 1 и примем, что исходная неуравновешенность устраняется в плоскостях балансировки *3* с точностью $\pm 10\%$. Исходными уравнениями для расчета будут (1) — (4), причем второе уравнение (1) следует переписать в виде

$$P_б = \lambda m \omega^2 \varepsilon \tag{41}$$

где коэффициент λ показывает, какая доля исходного дисбаланса устраняется на опорах. Таким образом, в нашем примере $\lambda=0{,}9$; $1{,}0$; $1{,}1$.

Уравнения (5) с учетом (41) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} m\omega^2 e_0 y_1 - y_2 &= -\, m\omega^2 e_0 \varepsilon\,(1-\lambda) \\ (m\omega^2 e_в - 1)\, y_1 + y_2 &= -\, m\omega^2 \varepsilon\,[e_в\,(1-\lambda) + e_ф\,\lambda] \end{aligned}\right\}. \tag{42}$$

Решая (42), получим

$$y_1 = \varepsilon\left[\frac{e_ф}{e_0 + e_в}\,\lambda + (1-\lambda)\right] \cdot \frac{\dfrac{\omega^2}{p^2}}{1-\dfrac{\omega^2}{p^2}}. \tag{43}$$

Рассмотрим два ротора, для которых величина K по формуле (14) составляет

$K=10$ — эффективно балансируемый ротор,

$K=1{,}25$ — ротор с малоэффективной балансировкой.

Значение квадратной скобки формулы (43) для названных выше величин λ отображено ниже в таблице 1.

Таблица 1

Остаточный дисбаланс / $K=\dfrac{e_в + e_0}{e_ф}$	λ	0,9	1,0	1,1
	%	−10,0	0	+10,0
10		0,19	0,10	0,01
1,25		0,82	0,80	0,78

Таким образом видно, что ротор с эффективной балансировкой, в отличие от ротора с малоэффективной балансировкой очень чувствителен к величине и направлению остаточного дисбаланса на опорах; при небольшом изменении разбалансировки вибрация может измениться в несколько раз. Видно также, что небольшая «перебалансировка» полезна, так как она может существенно снизить вибрацию. Из формулы (43) можно получить оптимальное значение «перебалансировки»; положив квадратную скобку равной нулю, получим:

$$\lambda = \frac{e_0 + e_в}{e_0 + e_в - e_ф} = \frac{1}{1-K}. \tag{44}$$

Из равенства (44) следует, что для эффективно балансируемых роторов оптимальная «перебалансировка» невелика и составляет несколько процентов от исходной неуравновешенности.

Ротор с малоэффективной балансировкой ошибок балансировки практически не чувствует, так как даже точная балансировка почти не уменьшает вибрации такой схемы.

Выше, на решении ряда упрощенных задач были выявлены причины, влияющие на уровень вибрации системы с отбалансированным ротором.

Однако для более сложных схем непосредственное применение полученных ранее формул не представляется возможным, так как массы и дисбалансы реальных роторов произвольным образом распределены вдоль их длины, а не сосредоточены в одной точке, отсутствует предполагавшаяся всюду симметрия, корпусы значительно более сложны, чем предполагалось.

Рассмотрим прохождение критической скорости в связанной системе «ротор — корпус». Для упрощения анализа предположим, что характеристики жесткости и демпфирования всех элементов двигателя одинаковы во всех радиальных направлениях; тогда движение всех элементов будет круговым. Поэтому дальнейшее рассмотрение ведется в проекции всех сил и перемещений на произвольную плоскость, содержащую ось обращения ротора.

Возбуждающими силами являются дисбалансы ротора

$$P(x, t) = \frac{\omega^2}{g} u(x) \sin \omega t, \tag{45}$$

где x — координата вдоль оси ротора;
t — время;
ω — угловая скорость вращения ро ора;
$u(x)$ — погонный дисбаланс на роторе;т
g — ускорение силы тяжести.

Так как в режиме критической скорости (или резонанса) перемещения отстают от возбуждающих сил на $\frac{\pi}{2}$ движение ротора и остальных элементов двигателя происходит по закону:

$$\left.\begin{aligned} y(x,t) &= -y_0 \eta(x) \cos \omega t \\ y_к(t) &= -y_0 \eta_к \cos \omega t \end{aligned}\right\}, \tag{46}$$

где $y(x, t)$ — упругая линия ротора;
y_0 — амплитуда колебаний некоторой точки ротора — масштаб формы колебаний;
$\eta(x)$ — форма колебаний ротора в системе двигателя при рассматриваемой критической скорости;
$y_к$ — смещение k-ой точки корпуса, опор или подвески;
$\eta_к$ — перемещение точки k корпуса или опор в форме колебаний системы двигателя при рассматриваемой критической скорости — форма колебаний корпуса.

Как установлено по одностороннему износу торцов рабочих лопаток на роторах, проходивших критические скорости с большими прогибами, ротор в процессе прохождения критической скорости не испытывает переменной деформации резонансного характера. Поэтому примем, что силы демпфирования имеются только в корпусах, опорах и подвеске и меняются по закону.

$$F_к(t) = \frac{1}{\omega} h_к \frac{d}{dt}(y_к - y_{к+1}) = h_к\, y_0(\eta_к - \eta_{к+1}) \sin \omega t, \qquad (47)$$

где $F_к(t)$ — демпфирующая сила в элементе k, $k+1$;

$h_к$ — коэффициент пропорциональности;

$y_к - y_{к+1}$ — деформация элемента k, $k+1$.

Формула дает линейную зависимость силы демпфирования от амплитуды деформации и независимость — от частоты. Более сложные зависимости сил демпфирования от амплитуд не изменят принципиально дальнейших выводов.

В режиме резонанса работа сил, возбуждающих вибрацию системы и демпфирующих ее, должна быть одинакова.

Работа сил возбуждения за один цикл колебаний:

$$W = \int_0^{2\pi}\int_0^{l} P(x,t) \frac{dy(x,t)}{d(\omega t)}\, d(\omega t)\, dx =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{l} \frac{\omega^2}{g} u(x) \sin^2 \omega t \cdot y_0 \eta(x)\, d(\omega t)\, dx =$$

$$= \frac{\omega^2}{g} \pi y_0 \int_0^{l} u(x)\, \eta(x)\, dx, \qquad (48)$$

где l — длина ротора.

Работа сил демпфирования за один цикл колебаний:

$$W_д = \sum_к \int_0^{2\pi} F_к(t) \frac{d(y_к - y_{к+1})}{d(\omega t)}\, d(\omega t) =$$

$$= \sum_к \int_0^{2\pi} h_к\, y_0^2 (\eta_к - \eta_{к+1})^2 \sin^2 \omega t\, d(\omega t) =$$

$$= \pi y_0^2 \sum_к h_к (\eta_к - \eta_{к+1})^2, \qquad (49)$$

где суммирование ведется по всем элементам корпуса, опор и подвески, в которых имеются демпфирующие силы. Приравнивая работу сил демпфирования и возбуждения по (48) и (49)

$$W = W_д,$$

получим

$$y_0 = \frac{\omega^2}{g} \cdot \frac{\int_0^{l} u(x)\, \eta(x)\, dx}{\sum_к (\eta_к - \eta_{к+1})^2 h_к}. \qquad (50)$$

Если $u(x)$ — исходная неуравновешенность ротора, а в процессе балансировки в точки x_1 и x_2 ротора введены дисбалансы

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{x_1-x_2}\int_0^l u(x)(x-x_2)\,dx \\ U_2 &= -\frac{1}{x_1-x_2}\int_0^l u(x)(x-x_1)\,dx \end{aligned}\right\}, \tag{51}$$

то аналогично (50) получим для отбалансированного ротора

$$y_{об} = \frac{\omega^2}{g}\cdot\frac{\int_0^l u(x)\,\eta(x)\,dx + U_1\eta(x_1) + U_2\eta(x_2)}{\sum\limits_{\kappa} h_\kappa(\eta_\kappa - \eta_{\kappa+1})^2}. \tag{52}$$

Эффективность балансировки определится очевидным отношением

$$K = \frac{y_0}{y_{об}} = \frac{1}{1 + \dfrac{U_1\,\eta(x_1) + U_2\,\eta(x_2)}{\int_0^l u(x)\,\eta(x)\,dx}}. \tag{53}$$

Таким образом, если имеется расчет критических скоростей и соответствующих им собственных форм системы «ротор — корпус», то, задаваясь вероятными формами распределения неуравновешенности по длине ротора, можно определить по отношению (53) эффективность балансировки ротора для этих критических скоростей и возможного распределения неуравновешенности.

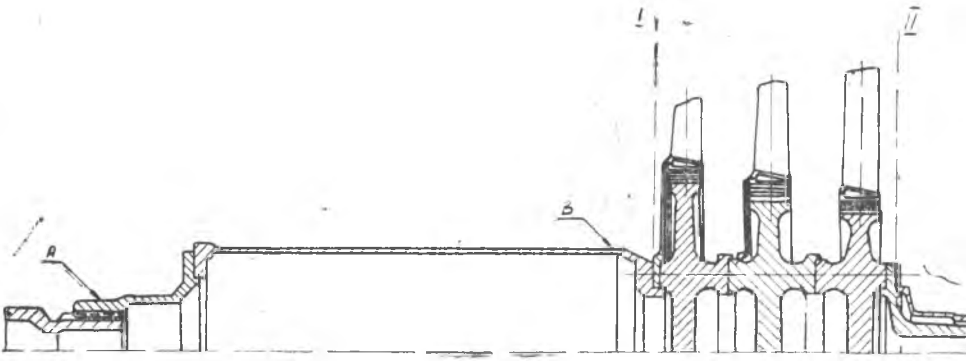
§ 2. ПРИМЕРЫ УСТРАНЕНИЯ «СКРЫТОГО» ДИСБАЛАНСА НА ОБЫЧНЫХ БАЛАНСИРОВОЧНЫХ МАШИНАХ

Так как балансировочные машины дают значение и направление дисбаланса в двух произвольных плоскостях ротора, то для устранения скрытого дисбаланса приходится строить схему балансировки с определенной последовательностью устранения дисбаланса отдельных частей ротора.

Ротор турбины двигателя А (фиг. 6)

Наиболее массивными деталями являются диски. Следовательно плоскостями балансировки должны быть I и II. Однако при выборе этих плоскостей существенное влияние на балансировку окажет дисбаланс переднего вала. При имеющемся соотношении длин наличие дисбаланса 50 *гсм* на переднем конце переднего вала приведет к ошибке 120 *гсм* в плоскости первого рабочего колеса. Поэтому необходимо предварительно отбалансировать передний вал. Он балансируется на базах А и Б с точностью 10 гсм. Производящаяся затем балансировка собранного ротора в плоскостях I и II почти полностью устраняет скрытый дисбаланс в середине ротора.

При такой балансировке остается неустраненной неуравновешенность, обусловленная биением рабочих профилей шлиц переднего вала относительно балансировочной базы А, которое по допускам может достигать 0,04 мм. Поэтому замеряется биение



Фиг. 6.

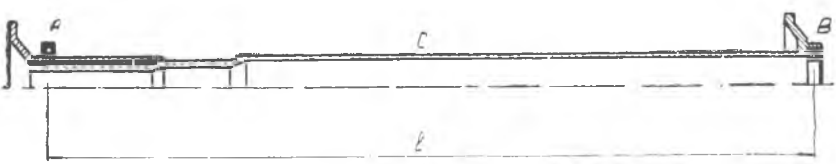
этих шлиц и сопряженных шлиц ротора компрессора относительно своих балансировочных баз, и при сборке шлицы устанавливаются в такое взаимное положение, при котором биение балансировочной базы А — минимально.

Валы ротора двигателя Б (фиг. 7)

Эти два вала балансируются в собранном виде на базах А и Б. Принято, что неуравновешенность валов обусловлена двумя причинами:

1. Биением поверхностей вала относительно шеек подшипников. Так как вал имеет практически постоянную на длине площадь сечения то это биение создает в большинстве случаев практически линейно распределенный по длине дисбаланс.

2. Разностенностью вала, т. е. биением внутренней поверхности его относительно наружной. Здесь предполагается, что обе

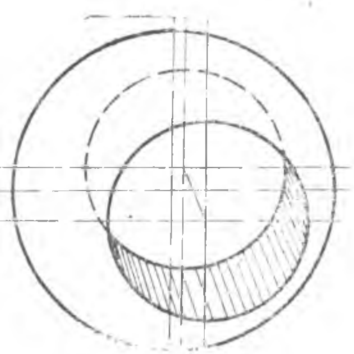


Фиг. 7.

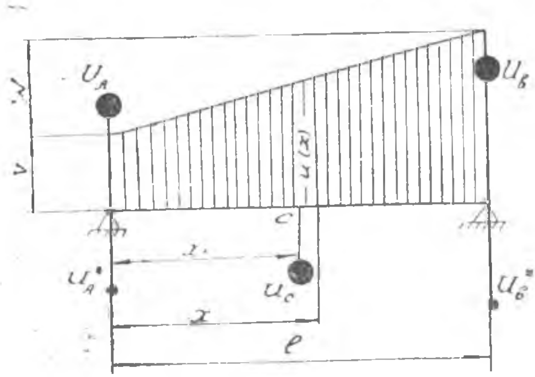
оси, как наружной, так и внутренней цилиндрических поверхностей — прямолинейны, но каким-то образом произвольно смещены одна относительно другой (фиг. 8). В этом случае распределение дисбалансов по длине вала также будет линейным.

Для выяснения связи между распределением дисбаланса по длине вала и замеряемым на его концах дисбалансами рассмотрим сначала плоскую задачу.

Пусть (фиг. 9) дисбаланс распределен вдоль вала по линейному закону:



Фиг. 8.



Фиг. 9.

$$u(x) = v + \frac{w}{l} x. \tag{54}$$

Вычислим дисбалансы U_A и U_B, замеренные на опорах:

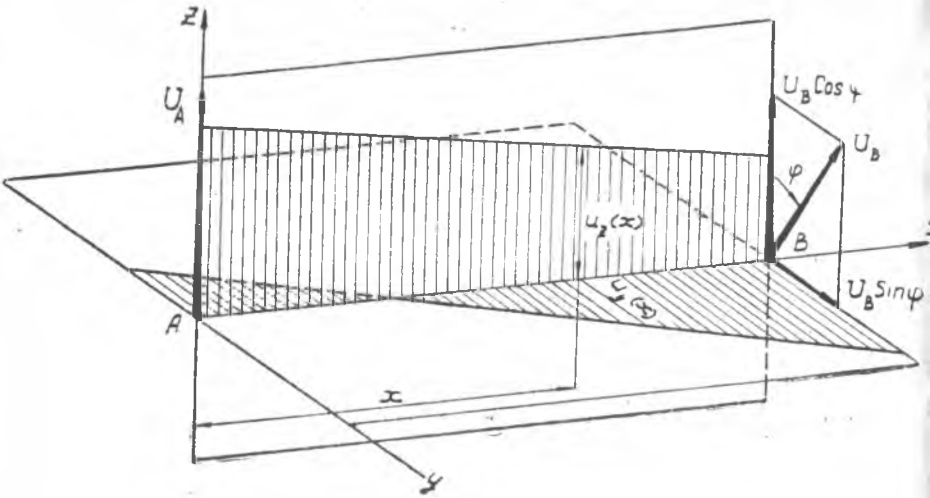
$$\left. \begin{aligned} U_A\, l &= \int_0^l u(x)(l - x)\, dx; \\ U_B\, l &= \int_0^l u(x)\, x dx. \end{aligned} \right| \tag{55}$$

Из (55) с учетом (54) найдем

$$\left. \begin{aligned} U_A &= l\left(\frac{v}{2} + \frac{w}{6}\right); \\ U_B &= l\left(\frac{v}{2} + \frac{w}{6}\right). \end{aligned} \right| \tag{56}$$

Решая систему уравнений (56) относительно v и w найдем

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{2}{l}(2U_A - U_B) \\ w &= \frac{6}{l}(U_B - U_A) \end{aligned} \right| \tag{57}$$



Фиг. 10.

Теперь перейдем к рассмотрению пространственной задачи. Пусть на концах вала замерены дисбалансы U_A и U_B, смещенные один относительно другого на угол φ (см. фиг. 10). Координатные оси ZAXY расположим так, чтобы ось AX совпала с осью вала, а ось AZ с вектором замеренного дисбаланса на опоре A. Проектируя замеренные дисбалансы на координатные оси получим

$$\left.\begin{aligned} U_{AZ} = U_A;\ U_{BZ} = U_B \cos\varphi; \\ U_{AY} = 0;\ U_{BY} = U_B \sin\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

Таким образом, распределение дисбаланса вдоль вала через замеренные дисбалансы на опорах и угол между ними полностью определены формулами (53), (57), (58).

Для определения величины дисбалансов U_c, U^*_A, U^*_B которые нужно ввести в какой либо точке C вала и на его опорах A и B при балансировке на станке (см. фиг. 9), будем исходить из следующих положений (рассмаривая сначала плоскую задачу):

а) При форме колебаний вала $y(x)$ дисбалансы $u(x)$ и U_c должны производить одинаковую работу противоположного знака, т. е.

$$\int_0^l u(x)\, y(x)\, dx = -U_c y(x_c) \qquad (59)$$

б) Вал с введенными дисбалансами U^*_A, U^*_B и U_c должен быть динамически уравновешенным:

$$\left.\begin{aligned} (U_A + U^*_A)\, l + U_c\,(l - x_c) = 0 \\ (U_B + U^*_B)\, l + U_c x_c = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

В положении a предполагается, что форма колебаний $y(x)$ характерна для вала на жестких опорах, т. е. U_A^* и U_B^* никакой работы не производят. Нетрудно показать, что при участии опор в колебаниях, уравнения (59) и (60) не меняются.

Действительно, если опоры колеблются, то вместо $y(x)$ форма колебаний получит вид:

$$\left.\begin{aligned} & y^*(x) = a + \frac{b}{l}x + y(x) \\ & y_A = a;\ y_B = a + b \end{aligned}\right\}, \tag{61}$$

а вместо условия (59) придется записать

$$\int_0^l u(x)\left[a + \frac{b}{l}x + y(x)\right]dx = -U_A^* \cdot a - U_B^*(a+b) - \\ - U_c\left[y(x_c) + a + \frac{b}{l}x_c\right]. \tag{62}$$

Подставляя в (62) значение $u\ (x)$ по (54) и (57)

$$u(x) = \frac{2}{l}\ (2U_A - U_B) + \frac{6}{l^2}(U_B - U_A)\,x \tag{63}$$

и значения U_A^* и U_B^*, найденные из формул (60)

$$\left.\begin{aligned} & U_A^* = -U_A - U_c + U_c\frac{x_c}{l} \\ & U_B^* = -U_B - U_c\frac{x_c}{l} \end{aligned}\right\}, \tag{64}$$

получим

$$\int_0^l u(x)\,y\,(x)\,dx + a(U_A - U_B) + bU_B = \\ = -U_c y(x) + a(U_A + U_B) + bU_B. \tag{65}$$

Из формулы (65) видно: если выполнены условия (60), то условие (65) равносильно условию (59) независимо от того, принимают опоры участие в колебаниях или нет. Поэтому в дальнейшем можно рассматривать $y(x)$ как форму колебаний на жестких опорах.

Для выбора формы колебаний вала рассмотрим три случая:

а) $y(x) = \frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)$ — квадратичная парабола. Эта форма возможна при очень большом моментном воздействии со стороны консольных частей ротора.

б) $y(x) = \sin\frac{\pi}{l}x$ — синусоида. Эта форма возможна при свободном опирании.

в) $y(x) = \operatorname{ch} 4{,}73 \frac{x}{l} - \cos 4{,}73 \frac{x}{l} - 0{,}9825 \operatorname{sh} 4{,}73 \frac{x}{l} +$

$+ 0{,}9825 \sin 4{,}73 \frac{x}{l}$ — форма колебаний балки постоянного сечения с защемленными концами.

Случаи а) и в) являются крайними, случай б) — промежуточный. Определим U_c по формуле (59) для всех трех случаев при $x_c = \frac{l}{2}$.

$$\left.\begin{aligned} &\text{а) } U_c = -\frac{1}{3}(2v + w)\,l = -0{,}667\int_0^l u(x)\,dx, \\ &\text{б) } U_c = -\frac{1}{\pi}(2v + w)\,l = -0{,}638\int_0^l u(x)\,dx, \\ &\text{в) } U_c = -\frac{1}{3{,}76}(2v + w)\,l = -0{,}532\int_0^l u(x)\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Как видно из формул (66), крайние случаи отличаются примерно на 25%. Поэтому в дальнейших расчетах будет принят промежуточный случай б).

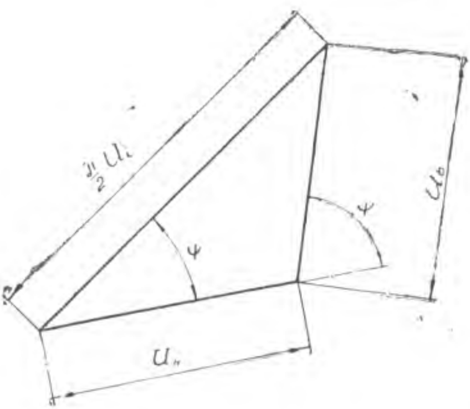
Если дисбаланс распределен не по линейному закону, то величина U_c получится другой.

В таблице 2 приведены четыре случая распределения дисбаланса и получающиеся для них значения U_c при синусоидальной форме колебаний.

Как видно из приведенных в таблице данных, даже такие, менее вероятные законы распределения дисбаланса не приводят к значительным колебаниям величины U_c.

Подставляя (57) в (66б), получим для плоской задачи

$$U_c = -\frac{2}{\pi}(U_A + U_B). \tag{67}$$



Фиг. 11.

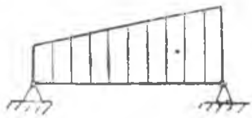
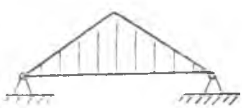
С учетом (58) формула (67) даст для пространственной задачи

$$\left.\begin{aligned} U_{cz} &= -\frac{2}{\pi}(U_A + U_B\cos\varphi), \\ U_{cy} &= -\frac{2}{\pi}U_B\sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Следовательно, для пространственной задачи

$$U_c = \sqrt{U_{cz}^2 + U_{cy}^2} = \frac{2}{\pi}\sqrt{U_A^2 + U_B^2 + 2U_AU_B\cos\varphi}. \tag{69}$$

Таблица 2

Распределение дисбалансов	U_c
	$U_c = -0{,}638 \int\limits_0^e u(x)\,dx$
$u(x) = \sin\frac{\pi x}{e}$ 	$U_c = -0{,}785 \int\limits_0^e u(x)\,dx$
	$U_c = -0{,}815 \int\limits_0^e u(x)\,dx$
	$U_c = -0{,}464 \int\limits_0^e u(x)\,dx$

Геометрически — это сторона треугольника (фиг. 11).

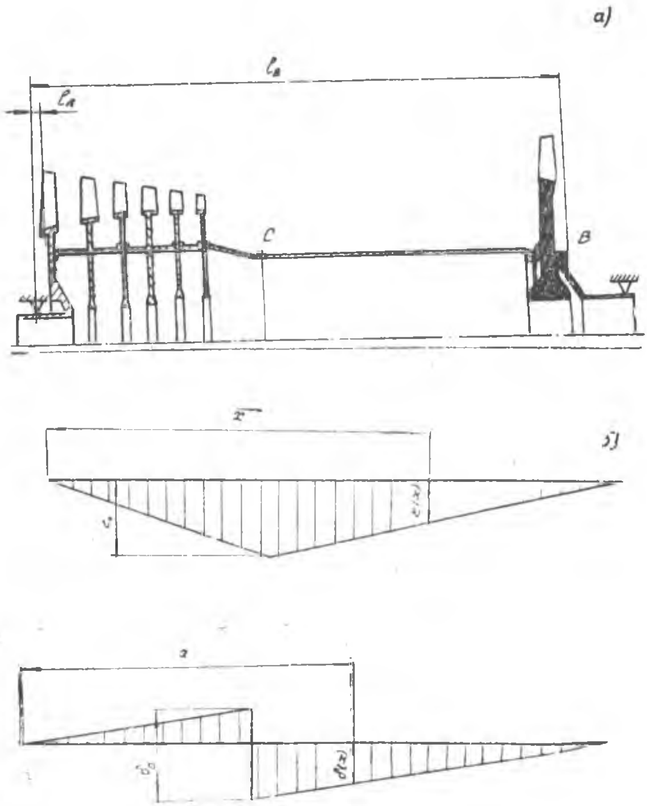
Практическое определение величины можно производить графически, либо построить прибор из трех линеек на ползунах с транспортиром. Угол ψ между вектором дисбаланса U_A и местом на валу, которое нужно облегчать (отсчет в направлении угла φ), определится из формул (68).

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{U_{cv}}{U_{cz}} = \frac{U_B \sin\varphi}{U_A + U_B\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi \frac{1}{1 + \frac{U_A}{U_B}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}}. \qquad (70)$$

Определение можно вести на том же построении. Описанная схема балансировки внедрена. Практически устраняемые дисбалансы имеют порядок $U_c = 500 - 1000$ *гсм.*

Ротор двигателя Б (фиг. 12а)

Последовательность балансировки:



Фиг. 12.

а) Две части ротора балансируются динамически независимо одна от другой: турбинная в плоскостях В и С, компрессорная в плоскостях А и В. При этом к фланцу С крепится балансировочная оправа.

б) В собранном роторе устраняется неуравновешенность в плоскости С.

в) Ротор окончательно балансируется в плоскостях А и В.

Операции а) и в) не представляют труда. Остановимся более подробно на операции б). После а) можно считать, что неуравновешенность ротора обусловлена двумя причинами: изломом оси ротора из-за торцовых перекосов в стыке С (фиг. 12*б*) и смещением осей турбинной и компрессорной частей ротора в стыке С (фиг. 12в). Эту неуравновешенность можно определить по дисбалансам, замеренным в плоскостях А и В.

При изломе оси дисбаланс ротора

$$\left.\begin{aligned} U_{A\varepsilon} + U_{B\varepsilon} &= \int_0^l \varepsilon(x)\, q(x)\, dx, \\ U_{A\varepsilon} l_A + U_{B\varepsilon} l_B &= \int_0^l \varepsilon(x)\, q(x)\, x dx \end{aligned}\right| , \tag{71}$$

где $U_{A\varepsilon}$, $U_{B\varepsilon}$ — дисбалансы, замеренные в плоскостях А и Б;
$q(x)$ — погонный вес ротора.

Численное интегрирование и решение (71) дают

$$\left.\begin{aligned} U_{A\varepsilon} &= 110\,\varepsilon_0 \\ U_{B\varepsilon} &= 100\,\varepsilon_0 \end{aligned}\right\}. \tag{72}$$

Значение компенсирующего дисбаланса $U_{c\varepsilon}$ в плоскости разъема найдем из условия равенства работ

$$\int_0^l \varepsilon(x)\, q(x)\, y(x)\, dx = -U_{c\varepsilon}\, y(x_c), \tag{73}$$

где $y(x)$ — упругая линия ротора при прохождении критической скорости.

Приняв в первом приближении упругую линию, замеренную при статическом нагружении, получим после численного интегрирования (73):

$$U_{c\varepsilon} = -177\,\varepsilon_0$$

или с учетом (72):

$$U_{c\varepsilon} = -0{,}84\,(U_{A\varepsilon} + U_{B\varepsilon}).$$

Аналогично, для случая смещения осей

$$U_{c\delta} = -7{,}4\,\delta_0 = -5{,}7\,(U_{A\delta} - U_{B\delta}).$$

Если плоскости излома и смещения осей совпадают, то

$$\left.\begin{aligned} U_A &= U_{A\varepsilon} + U_{A\delta} \\ U_B &= U_{B\varepsilon} + U_{B\delta} \end{aligned}\right\}$$

и, следовательно,

$$U_c = U_{c\varepsilon} + U_{c\delta} = -0{,}96\,U_A - 0{,}71\,U_B.$$

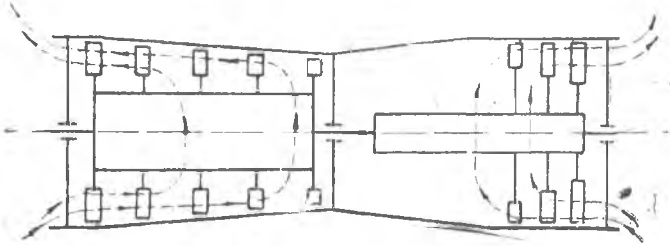
Если же плоскости замеренных U_A и U_B не совпадают и угол между ними равен φ, то аналогично ранее проведенному решению для вала получим

$$\left.\begin{aligned} U_c &= \sqrt{0{,}92\,U_A^2 + 1{,}36\,U_A U_B \cos\varphi + 0{,}5 U_B^2} \\ \operatorname{tg}\psi &= \frac{0{,}71 U_B \sin\varphi}{0{,}96\,U_A + 0{,}71\,U_B \cos\varphi}. \end{aligned}\right| \tag{74}$$

Для нахождения U_c и ψ построены номограммы. Дисбалансы U_c практически достигают значений 400 — 1000 *гсм.*

§ 3. НЕУРАВНОВЕШЕННОСТЬ ВСЛЕДСТВИЕ НЕРАВНОМЕРНОГО ОСТЫВАНИЯ

При испытаниях некоторых газотурбинных двигателей обнаружилась нестабильность амплитуд при прохождении критической скорости турбины. Амплитуды вибрации корпусов на критической скорости при последовательных запусках отличались до 20 раз. Специальные опыты показали, что это различие обусловлено, в основном, различием неуравновешенности ротора турбины, которая возникает при неравномерном его остывании.



Фиг. 13.

Схема движения воздуха, охлаждающего ротор остановленного двигателя, показана на фиг. 13. Очевидно, что более интенсивно охлаждаются нижние волокна ротора, вследствие чего ротор искривляется, выпучиваясь кверху.

Если предположить, что разность температур Δt верхнего и нижнего волокон ротора по длине одинакова, а по вертикальному диаметру меняется линейно, то уравнение искривленной оси ротора [3] по фиг. 14 представляется в виде

$$y_t = \frac{\alpha \Delta t}{2D}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right), \tag{75}$$

где α — коэффициент линейного расширения материала ротора;
D — диаметр вала;
l — длина ротора между опорами.

Это уравнение параболы. Точное решение, очень мало отличающееся от (75) — дуга окружности.

Когда масса ротора равномерно распределена по длине, то его неуравновешенность

$$U = \frac{G\alpha l^2 \Delta t}{12D},$$

где G — вес ротора.

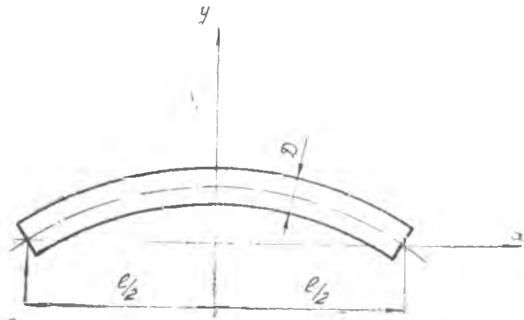
Расчет по (75) и (76) для ротора турбины изделия B при $\Delta t = 10°C$ и следующих исходных данных:

$\alpha = 13 \cdot 10^{-6}$, $D = 240$ *мм*; $l = 722{,}5$ *мм*; $G = 437$ *кг* дает $y_{\max} = 0{,}035$ *мм*;

$U = 1000$ *гсм*.

Этот грубый расчет показывает, что неуравновешенность неравномерно остывающего ротора очень велика.

Рассмотрим экспериментальные данные, показывающие роль неравномерного остывания ротора.



Фиг. 14.

1. В двигателе В с удачно отбалансированной турбиной критическая скорость ($n = 4500 \div 6000$ *об/мин.*) при запуске из холодного состояния проходилась без повышения амплитуд вибрации корпусов. При запусках непосредственно после остановок повышения амплитуд вибрации на критической скорости также не наблюдалось.

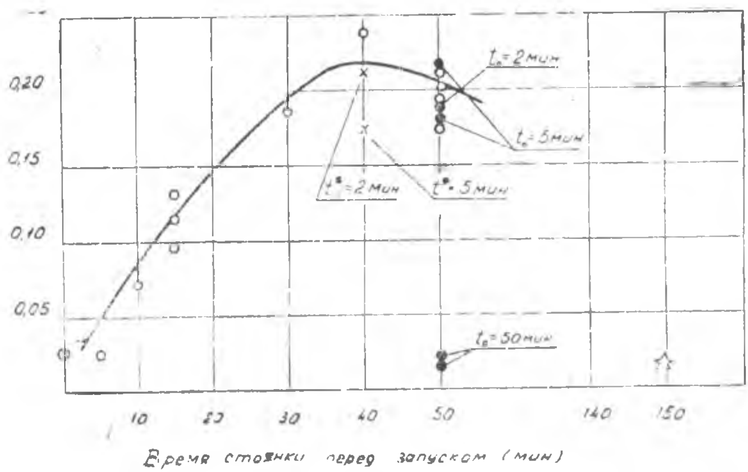
Далее, после стоянки 25 минут было произведено несколько запусков изделия в следующем порядке: запуск, выход через критическую скорость на обороты малого газа в течение 100 *сек*, работа на оборотах малого газа в течение 5 *мин*, выключение топлива и выбег за 150 *сек*., остановка, немедленно следующий запуск и т. д. Амплитуды вибрации задней опоры турбины при проходе через критическую скорость даны ниже в таблице.

Как видно из таблицы, уже через 10 *мин* амплитуда на критической скорости уменьшается почти в 5 раз, а еще через 10 *мин* еще в 3 раза (по амплитудам при наборе оборотов, т. к. вследствие нелинейности системы амплитуды на выбеге обычно в 2—3 раза меньше, чем при наборе оборотов). Это происходит вследствие выравнивания температур по ротору.

Таблица 3

№ запуска	Время после прекращения искривления ротора, *мин*,	Амплитуда при наборе оборотов, *мм*	Амплитуда при выбеге, *мм*
1	1,5	0,450	
	6,5		0,106
2	10,3	0,093	
	15,5		0,040
3	19,5	0,027	
	24,3		0,027
4	28,0	0,020	
	34,0		0,020

2. Двигатель А запускался из холодного состояния (стоянка перед запуском более 2 часов) и после различных по времени стоянок. При всех стоянках ротор устанавливался в одном положении, которое было найдено предварительным опытом так, что-



Фиг. 15.

бы неуравновешенность от неравномерного остывания и остаточная после балансировки складывались. Амплитуды вибрации корпуса на критических оборотах показаны на фиг. 15 (белые точки). Там же нанесены результаты при запуске из холодного состояния (звездочка) и после прокрутки (черные точки).

Прокрутки производились так: после остановки изделия ротор приводился во вращение стартер-генератором в течение t_0 *мин.*, после чего устанавливался в нужное положение и стоянка продолжалась $50—t_0$ *мин.* Времена t_0 приняты 2, 5, 50 *мин.* Нормально при описываемом опыте остановки изделия производились непосредственно после работы на одном из крейсерских режимов. Сделаны также две остановки после кратковременной работы на оборотах малого газа в течение $t^* = 2$ *мин* и $t^* = 5$ *мин*, т. е. с более холодным ротором. Результаты нанесены крестиками. Таким образом, неравномерное остывание ротора является одним из основных факторов, влияющих на амплитуду вибрации при прохождении критической скорости турбины.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. В. Колесник,* Динамическое уравновешивание гибких валов. Вестник машиностроения, № 5, 1952.

2. *А. А. Гусаров* и *Ф. М. Диментберг,* Об уравновешивании гибких валов. Вестник машиностроения № 1, 1959.

3. *Н. Н. Лебедев.* Температурные напряжения в теории упругости, ОНТИ, Л-М., 1937.