

Р. Н. СТАРОБИНСКИЙ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПОСТРОЕНИЯ РАСЧЕТНЫХ СХЕМ ДЛЯ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В ГИДРАВЛИЧЕСКИХ МАГИСТРАЛЯХ

Для построения расчетных эквивалентных схем магистрали с применением метода Пикара интегрирования линеаризованных дифференциальных уравнений движения жидкости в магистралях в работах [1, 2] была разработана методика моделирования с учетом членов второго приближения.

Рассматриваемая задача соответствует задаче синтеза систем, описываемых дифференциальными уравнениями движения жидкости в магистралях, конечным числом элементов с заданными характеристиками при соблюдении определенных точностных требований.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

Решение для цепочечной матрицы $\|B\|$ для консервативных систем с учетом членов до пятого приближения включительно имеет вид [1]:

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= 1 - \Theta_L^2 \int_{x_1}^{x_2} d\beta \int_{x_1}^x d\gamma + \Theta_L^4 \int_{x_1}^{x_2} d\beta \int_{x_1}^x d\gamma \int_{x_1}^x d\beta \int_{x_1}^x d\gamma - \dots \\
 B_{12} &= -i\omega L \left(1 - \Theta_L^2 \int_{x_1}^{x_2} d\beta \int_{x_1}^x d\gamma \int_{x_1}^x d\beta + \Theta_L^4 \int_{x_1}^{x_2} d\beta \int_{x_1}^x d\gamma \int_{x_1}^x d\beta \int_{x_1}^x d\gamma \int_{x_1}^x d\beta - \dots \right) \\
 B_{21} &= -i\omega C \left(1 - \Theta_L^2 \int_{x_1}^{x_2} d\gamma \int_{x_1}^x d\beta \int_{x_1}^x d\gamma + \Theta_L^4 \int_{x_1}^{x_2} d\gamma \int_{x_1}^x d\beta \int_{x_1}^x d\gamma \int_{x_1}^x d\beta \int_{x_1}^x d\gamma - \dots \right) \\
 B_{22} &= 1 - \Theta_L^2 \int_{x_1}^{x_2} d\gamma \int_{x_1}^x d\beta + \Theta_L^4 \int_{x_1}^{x_2} d\gamma \int_{x_1}^x d\beta \int_{x_1}^x d\gamma \int_{x_1}^x d\beta - \dots
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\text{Здесь } \Theta_L^2 = \omega^2 LC \quad \gamma = \frac{1}{C} \int_{x_1}^x dC \quad \beta = \frac{1}{L} \int_{x_1}^x dL \quad (2)$$

$$\text{при } x = x_2, \quad \gamma = 1; \quad \beta = 1.$$

Введем обозначения:

$$B'_{11} = B_{11}; \quad B'_{12} = -\frac{B_{12}}{R + i\omega L}; \quad B'_{21} = -\frac{B_{21}}{i\omega C}; \quad B'_{22} = B_{22}; \quad (3)$$

$$b = \int_{x_1}^{x_2} d\beta \int_{x_1}^x d\gamma; \quad b_1 = \int_{x_1}^{x_2} d\gamma \int_{x_1}^x d\beta; \quad (4)$$

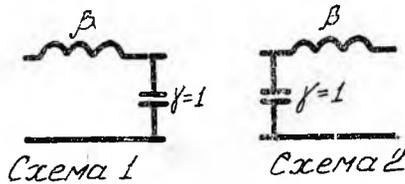
$$B = \int_{x_1}^{x_2} d\gamma \int_{x_1}^x d\beta \int_{x_1}^x d\gamma; \quad B_1 = \int_{x_1}^{x_2} d\beta \int_{x_1}^x d\gamma \int_{x_1}^x d\beta.$$

Точность определения элементов цепочечной матрицы $\|B\|$ будем оценивать по абсолютным погрешностям вычисления рядов B'_{11} ; B'_{12} ; B'_{21} ; B'_{22} .

Моделирование по первому приближению

Для схематизации по первому приближению необходимо выполнение условий [2]:

$$\beta_{cx} = 1 \quad \gamma_{cx} = 1. \quad (5)$$



Фиг. 1.

На фиг. 1 приведены схемы 1 и 2, реализующие эти условия с наименьшим числом элементов. Для схемы 1 элементы матрицы $\|B'\|$ имеют вид:

$$\begin{aligned} B'_{11} &= 1; & B'_{12} &= 1; \\ B'_{21} &= 1; & B'_{22} &= 1 - \Theta_L^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Максимальная ошибка возникает при моделировании схемой 1 системы 2

$$\delta_{11} = \Theta_L^2 \quad \delta_{22} = -\Theta_L^2. \quad (7)$$

Примем для сравнения с другими схемами условие:

$$|\delta_{\max}| \leq 0,05. \quad (8)$$

Максимальное значение Θ_L , при котором выполняется условие 8,
 $\Theta_L = 0,224.$ (9)

«Ориентированная» схема

«Ориентировка» схемы по первому приближению состоит в выборе схемы 1 при $b_1 > b$ и схемы 2 при $b > b_1$. При этом максимальные ошибки возникают при моделировании схемой 1 системы 3 (фиг. 2) с $\beta_1 = \beta_2 = 0,5$ (или системы 4 с $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,5$).

В этом случае

$$\delta_{11} = 0,5\Theta_L^2 \quad \delta_{22} = -0,5\Theta_L^2. \quad (10)$$

Максимальное значение Θ_L , при котором выполняется условие 8,
 $\Theta_L = 0,316.$ (11)

В дальнейшем системы, моделирование которых данной схемой осуществляется с максимальными (или близкими к максимальным) погрешностями, мы будем называть «схемой-антиподом».

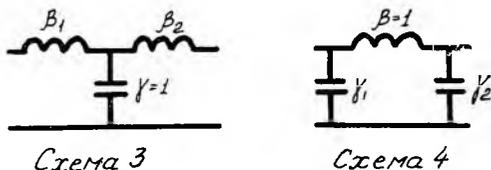
При моделировании по первому приближению могут быть приняты и другие схемы [2].

Моделирование по второму приближению

Дополнительные условия, которые должны быть выполнены при моделировании по второму приближению [2]:

$$b_{сх} = b \quad b_{1сх} = b_1. \quad (12)$$

Заметим, что $b_1 + b = 1$ и условия 12 сводятся к одному дополнительному уравнению и к появлению дополнительного элемента в схемах 1 и 2 для удовлетворения этому уравнению. На фиг. 2 приведены возможные схемы 3 и 4 для выполнения условий вто-



Фиг. 2.

рого приближения, они идентичны и сводятся друг к другу заменой β на γ .

Рассмотрим схему 3. Ее элементы вычисляются по формулам:

$$\beta_2 = b \quad \beta_1 = b_1, \quad (13)$$

для схемы 4:

$$\gamma_1 = b \quad \gamma_2 = b_1. \quad (14)$$

Элементы матрицы $\|B'\|$ для схемы 3 имеют вид:

$$\begin{aligned} B'_{11} &= 1 - b\Theta_L^2; & B'_{12} &= 1 - bb_1\Theta_L^2; \\ B'_{21} &= 1; & B'_{22} &= 1 - b_1\Theta_L^2. \end{aligned} \quad (15)$$

«Схема — антипод» — система 4 с $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,5$ — реализуется схемой 3 с $\beta_1 = \beta_2 = 0,5$. В этом случае:

$$\hat{\epsilon}_{12} = -0,25\Theta_L^2; \quad \delta_{21} = 0,25\Theta_L^2; \quad (16)$$

$$\text{при } |\hat{\delta}_{12}| = 0,05; \quad \Theta_L = 0,448. \quad (17)$$

«Ориентированная» схема по второму приближению

«Ориентировка» схемы по второму приближению состоит в выборе схемы 3 для $V_1 > V$ и схемы 4 для $V > V_1$. За «схему-антипод» в этом случае может быть принята магистраль с равномерно распределенными параметрами. Ниже приведены значения элементов матрицы $\|B'\|$ для схемы 3 с $\beta_1 = \beta_2 = 0,5$ и «схемы-антипода»

для моделируемой магистрали

для модели

$$\begin{aligned} B'_{11} &= 1 - 0,5000\Theta_L^2 + 0,0217\Theta_L^4 - 0,0014\Theta_L^6 & B'_{11} &= 1 - 0,5000\Theta_L^2; \\ B'_{12} &= 1 - 0,1667\Theta_L^2 + 0,0083\Theta_L^4 - 0,0002\Theta_L^6 & B'_{12} &= 1 - 0,2500\Theta_L^2; \\ B'_{21} &= 1 - 0,1667\Theta_L^2 + 0,0083\Theta_L^4 - 0,0002\Theta_L^6 & B'_{21} &= 1; \\ B'_{22} &= 1 - 0,5000\Theta_L^2 + 0,0417\Theta_L^4 - 0,0014\Theta_L^6 & B'_{22} &= 1 - 0,5000\Theta_L^2 \end{aligned} \quad (18)$$

Откуда

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_{11} &\approx -0,0417\Theta_L^4 & \hat{\epsilon}_{12} &\approx -0,0833\Theta_L^2; \\ \hat{\delta}_{21} &\approx -0,1667\Theta_L^2 & \hat{\epsilon}_{22} &\approx -0,0417\Theta_L^4 \end{aligned} \quad (19)$$

Для выполнения условия $|\hat{\epsilon}_{12}| \leq 0,05$ необходимо выбрать

$$\Theta_L \leq 0,552. \quad (20)$$

Другие возможные модели по второму приближению приведены в работе [2].

Моделирование по третьему приближению

Для того, чтобы схема магистрали удовлетворяла условиям третьего приближения, необходимо выполнение дополнительных равенств:

$$B_{сх} = B; \quad B_{1сх} = B_1. \quad (21)$$

Количество независимых уравнений, которым должны удовлетворять элементы схемы по третьему приближению, — 5 (5, 12, 21). Минимально необходимое количество элементов для удовлетворения этим уравнениям — $n=5$. Однако можно показать, что одновременное удовлетворение уравнениям (5, 12 и 21) — пятью элементами, при условиях:

$$\gamma_i \geq 0; \quad \beta_i \geq 0 \quad (22)$$

(эти условия необходимы для физической реализации эквивалентных электрических схем) возможно лишь в некоторых частных случаях. Для случая, когда удовлетворить условиям 21 пятью элементами невозможно, мы будем удовлетворять одному из них с минимизацией невязки по второму.

Возможные схемы пятиэлементников для моделирования по третьему приближению приведены на фиг. 3.

Рассмотрим схему 5 (схема 6 аналогична). Элементы ее определяются уравнениями:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1; \quad (23)$$

$$\beta_2 = \frac{B_{сх}}{\gamma_1 \gamma_2}; \quad (24)$$

$$\beta_1 = b_1 - \beta_2 \gamma_2; \quad (25)$$

$$\beta_3 = b - \beta_2 \gamma_1. \quad (26)$$

Для моделирования по «внутреннему» интегралу (здесь — B)

$$B_{сх} = B,$$

а γ_1 (γ_2) определяются из условия

$$\min |B_{1сх} - B_1|. \quad (27)$$

Для моделирования по «внешнему» интегралу (здесь — B_1) (т. е. при $B_{1сх} = B_1$):

$$B_{сх} = D \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \quad (28)$$

где

$$D^2 = b b_1 - B_1, \quad (29)$$

а γ_1 (γ_2) определяются из условия:

$$\min |B_{сх} - B|. \quad (30)$$

Невязки 27, 30 определяются выражениями

$$\Delta B = D(\sqrt{\gamma_1 \gamma_2} - \sqrt{\gamma_1 \gamma_2 \text{ погр}}), \quad (31)$$

$$\Delta B_1 = B^2 \left(\frac{1}{\gamma_1 \gamma_2 \text{ погр}} - \frac{1}{\gamma_1 \gamma_2} \right), \quad (32)$$

где

$$\gamma_1 \gamma_2 \text{ погр} = \frac{B^2}{D^2}. \quad (33)$$

Порядок определения $\gamma_1 \gamma_2$

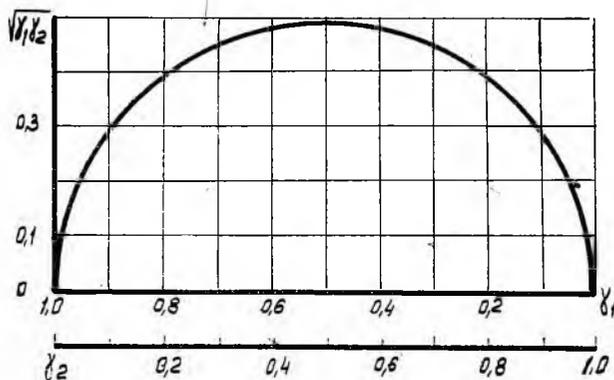
1. Определение пределов допустимого изменения γ для выполнения условий 22:

а) при моделировании по «внешнему» интегралу

$$\gamma_1 \geq \frac{D^2}{b_1 - B_1}; \quad \gamma_2 \geq \frac{D^2}{b - B_1}; \quad (34)$$

б) при моделировании по «внутреннему» интегралу

$$\gamma_1 \geq \frac{B}{b_1}; \quad \gamma_2 \geq \frac{B}{b}. \quad (35)$$



Фиг. 4.

Пределы 34 (35) совместно с уравнением 23 определяют некоторую область изменения γ , целиком лежащую в интервале $0 \leq \gamma \leq 1$ и содержащую по крайней мере одну точку.

2. Определение пределов изменения $\gamma_1 \gamma_2$ по графику $\sqrt{\gamma_1 \gamma_2} = f(\gamma)$ (фиг. 4) (или непосредственным вычислением $\gamma_1 \gamma_2$ в граничных точках и при $\gamma = 0,5$).

Этот график представляет собой полуокружность с центром $\gamma = 0,5$ и радиусом $r = 0,5$.

3. Определение $\gamma_1 \gamma_2 \text{ погр}$ (33).

4. Выбор $\gamma_{сх}$:

Если $\gamma_1 \gamma_2 \text{ погр}$ лежит в пределах изменения $\gamma_1 \gamma_2$ (по пункту 2), то выбирается $\gamma_1 \gamma_2 \text{ сх} = \gamma_1 \gamma_2 \text{ погр}$ и соответствующие γ (по графику или по формуле 36)

$$\gamma_{1,2} = 0,5 \pm 0,5 \sqrt{1 - 4\gamma_1 \gamma_2 \text{ погр}}. \quad (36)$$

Если $\gamma_1 \gamma_2$ потр не попадает в интервал изменения $\gamma_1 \gamma_2$, то выбирается $\gamma_1 \gamma_2$ с_к ближайшее к $\gamma_1 \gamma_2$ потр и соответствующие γ (γ граничи или $\gamma = 0,5$).

5. Определение остальных элементов схемы (24 — 26) с учетом 28 (при моделировании по «внешнему интегралу»).

Элементы матрицы $\|B'\|$ для построенных таким образом схем имеют вид:

$$\begin{aligned} B'_{11} &= 1 - b\theta_L^2 + B_{сх} \beta_3 \theta_L^4; \\ B'_{12} &= 1 - B_{1сх} \theta_L^2 + B_{сх} \beta_1 \beta_3 \theta_L^4; \\ B'_{21} &= 1 - B_{сх} \theta_L^2; \\ B'_{22} &= 1 - b_1 \theta_L^2 + B_{сх} \beta_1 \theta_L^4. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь $B_{сх} = B$ и $B_{1сх} = B_1 + \Delta B_1$ — при моделировании по B и $B_{сх} = B + \Delta B$ и $B_{1сх} = B_1$ — при моделировании по B_1 (ΔB и ΔB_1 определяются из 31, 32).

Определение погрешностей моделирования по третьему приближению

«Схема-антипод» для моделирования по «внутреннему» интегралу — схема 6 с элементами

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0,333 \text{ и } \beta_1 = \beta_2 = 0,5$$

для нее $b = 0,5$; $b_1 = 0,5$; $B = 0,2222$; $B_1 = 0,0833$.

Рассмотрим моделирование этой схемы.

1. Интервал допустимых γ :

$$\gamma_1 \geq 0,444 \quad \gamma_2 \geq 0,444.$$

2. Пределы изменения $\gamma_1 \gamma_2$:

$$0,247 \leq \gamma_1 \gamma_2 \leq 0,250.$$

3. $\gamma_1 \gamma_2$ потр = 0,296.

4. Выбираем $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,5$ с $\gamma_1 \gamma_2 = 0,250$.

5. Элементы схемы:

$$\beta_2 = 0,888 \quad \beta_1 = \beta_3 = 0,056.$$

Элементы матрицы $\|B'\|$:

для исходной схемы

для модели

$$B'_{11} = 1 - 0,5000 \theta_L^2 + 0,0278 \theta_L^4$$

$$B'_{11} = 1 - 0,5000 \theta_L^2 + 0,0124 \theta_L^4$$

$$B'_{12} = 1 - 0,0833 \theta_L^2$$

$$B'_{12} = 1 - 0,0525 \theta_L^2 + 0,0007 \theta_L^4$$

$$B'_{21} = 1 - 0,2222 \theta_L^2 + 0,0093 \theta_L^4$$

$$B'_{21} = 1 - 0,2222 \theta_L^2$$

$$B'_{22} = 1 - 0,5000 \theta_L^2 + 0,0278 \theta_L^4$$

$$B'_{22} = 1 - 0,5000 \theta_L^2 + 0,0124 \theta_L^4$$

$$\text{Откуда } \delta_{11} = -0,0154 \theta_L^4$$

$$\delta_{12} = 0,0308 \theta_L^2 + 0,0007 \theta_L^4 \quad (38)$$

$$\delta_{21} = -0,0093 \theta_L^4$$

$$\delta_{22} = -0,0154 \theta_L^4$$

Для выполнения условия $|\delta_{12}| \leq 0,05$ необходимо выбирать

$$\Theta_L \leq 1,25. \quad (39)$$

Наибольшую ошибку при моделировании по «внешнему» интегралу дает «схема-антипод» с равномерно распределенными параметрами для нее: $b = b_1 = 0,5$ $B = B_1 = 0,1667$.

1. Интервал допустимых γ :

$$\gamma_1 \geq 0,25 \quad \gamma_2 \geq 0,25.$$

2. Пределы изменения $\gamma_1 \gamma_2$:

$$0,188 \leq \gamma_1 \gamma_2 \leq 0,250.$$

3. $\gamma_1 \gamma_2 \text{ потр} = 0,333$.

4. Выбираем $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,5$ ϵ $\gamma_1 \gamma_2 = 0,250$.

5. Элементы схемы:

$$\beta_2 = 0,577 \quad \beta_1 = \beta_3 = 0,2115.$$

Элементы матрицы $\|B'\|$

$$\begin{aligned} B'_{11} &= 1 - 0,5000 \Theta_L^2 + 0,0305 \Theta_L^4 & \delta_{11} &= -0,0112 \Theta_L^4 + 0,0014 \Theta_L^6 \\ B'_{12} &= 1 - 0,1667 \Theta_L^2 + 0,0065 \Theta_L^4 & \delta_{12} &= -0,0018 \Theta_L^4 + 0,0002 \Theta_L^6 \\ B'_{21} &= 1 - 0,1442 \Theta_L^2 & \delta_{21} &= -0,0225 \Theta_L^2 + 0,0083 \Theta_L^4 \\ B'_{22} &= 1 - 0,5000 \Theta_L^2 + 0,0305 \Theta_L^4 & \delta_{22} &= -0,0112 \Theta_L^4 + 0,0014 \Theta_L^6 \end{aligned} \quad (40)$$

Для выполнения условия $|\delta_{11}| \leq 0,05$ необходимо выбирать

$$\Theta_L \leq 1,60. \quad (41)$$

З а м е ч а н и е. Из (41) следует, что при моделировании магистрали с равномерно распределенными параметрами длиной $l = 1/4 \cdot \lambda$ (т. е. при $\Theta_L = 1,57$) максимальная ошибка в элементах матрицы $\|B'\| - |\delta_{\max}| \leq 0,05$.

«Ориентированные» схемы по третьему приближению

«Ориентировка» схемы по третьему приближению состоит в выборе схемы 5 для $B_1 > B$ и схемы 6 для $B > B_1$.

«Схемой-антиподом» в обоих случаях является магистраль с равномерно распределенными параметрами. Для моделирования по «внешнему» интегралу максимальные ошибки были определены выше (40, 41). Для моделирования по «внутреннему» интегралу согласно методике имеем:

$$\begin{aligned} \text{при} \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0,5 \quad \beta_2 = 0,666 \quad \beta_1 = \beta_3 = 0,167 \\ |\delta_{11}| \leq 0,05 \quad \Theta_L \leq 1,46. \end{aligned} \quad (42)$$

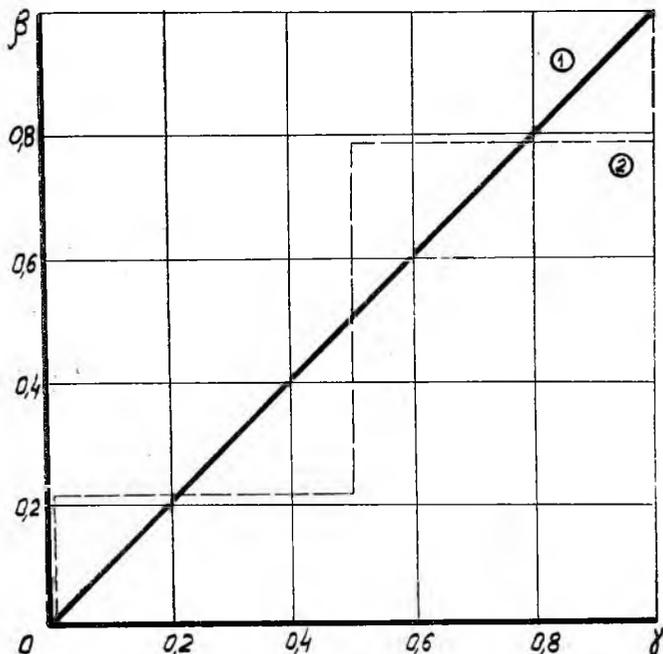
Приведенные данные (39, 41, 42) показывают, что наибольшую точность среди рассмотренных методов дает моделирование по «внешнему» интегралу. Моделирование по «внутреннему» интегралу потребуется нам в дальнейшем для моделирования систем RLC . На фиг. 5 приведена зависимость $\beta(\gamma)$ для магистрали с

равномерно распределенными параметрами и функция $\beta_{cx}(\gamma)$, которой она аппроксимируется при моделировании по «внешнему» интегралу. При моделировании по «внешнему» интегралу справедливости равенства

$$\beta_{\text{ср}} = \int_{x_1}^{x_2} \beta d\gamma = \beta_{\text{ср.сх}}; \quad (43)$$

$$\beta_{\text{ср}}^2 = \int_{x_1}^{x_2} \beta^2 d\gamma = \beta_{\text{ср.сх}}^2. \quad (44)$$

Возможно также моделирование по третьему приближению с минимизацией суммы $(\Delta^2 B + \Delta^2 B_1)$, однако в этом случае сумма



Фиг. 5.

абсолютных величин погрешностей не минимальна, а небольшое уменьшение частных погрешностей не оправдывает некоторое (правда, небольшое) математическое усложнение задачи.

Моделирование магистралей с равномерно распределенными параметрами

Как указывалось выше, участок магистрали с равномерно распределенными параметрами может быть смоделирован схемой 5 по «внешнему» интегралу с параметрами схемы:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0,5 \quad \beta_1 = \beta_3 = 0,2115 \quad \beta_2 = 0,577. \quad (45)$$

Рассмотрим ошибку, допускаемую в цепочечной матрице при оставлении модели длинной магистрали из элементов, построенных по схеме 5 (по «внешнему» интегралу). Известно, что при соединении « n » одинаковых симметричных четырехполюсников суммарные параметры системы определяются равенствами:

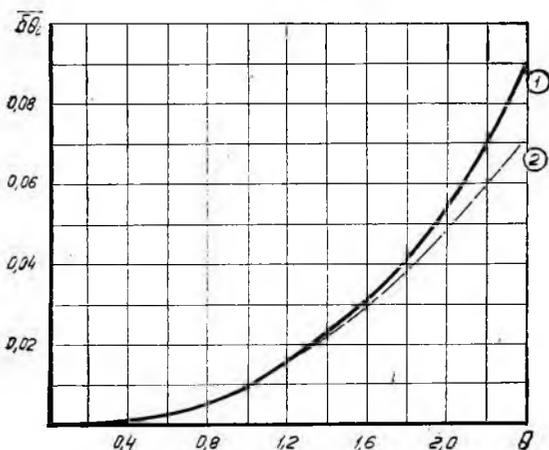
$$z_{0 \text{ сист}} = z_{0i}; \quad (46)$$

$$\Theta_{\text{сист}} = n\Theta_i; \quad (47)$$

здесь z_0 — волновое сопротивление системы,
 Θ — мера передачи системы.

Из (46) и (47) следует, что относительные ошибки, допускаемые в $z_{0 \text{ сист}}$ и $\Theta_{\text{сист}}$ равны:

$$\overline{\delta z_{0 \text{ сист}}} = \overline{\delta z_{0i}}; \quad \overline{\delta \Theta_{\text{сист}}} = \overline{\delta \Theta_i}. \quad (48)$$



Фиг. 6.

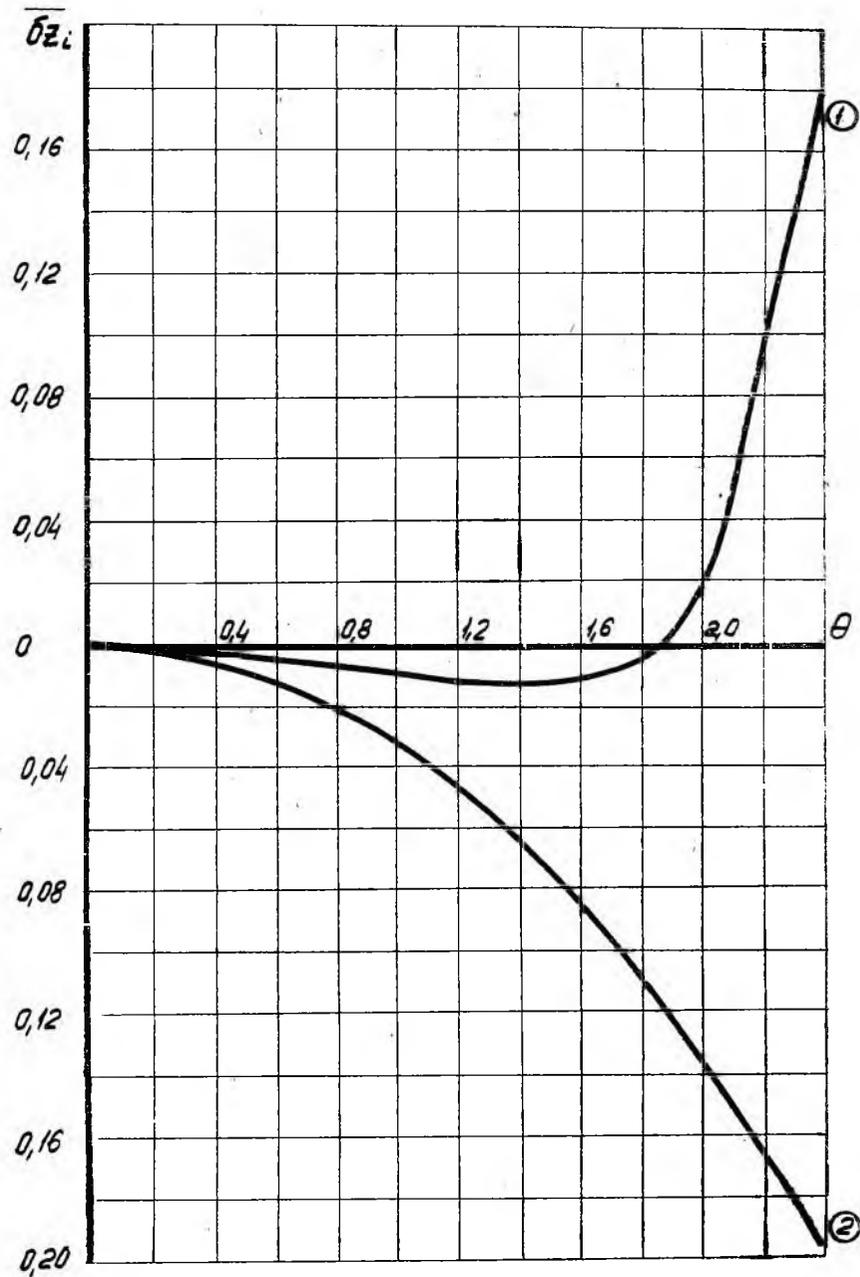
Нетрудно показать [3], что для схемы 5 (45)

$$\overline{\delta z_{0i}} = \sqrt{\frac{1 - 0,1667 \Theta_L^2 + 0,0065 \Theta_L^4}{1 - 0,1442 \Theta_L^2}} - 1; \quad (49)$$

$$\overline{\delta \Theta_i} = \frac{\arccos(1 - 0,5000 \Theta_L^2 + 0,0305 \Theta_L^4)}{\Theta_L} - 1. \quad (50)$$

Для того, чтобы осуществить моделирование магистрали с равномерно распределенными параметрами (трубопровода постоянного сечения, без потерь) с заданными погрешностями $\overline{\delta z_{0 \text{ сист}}}$ и $\overline{\delta \Theta_{\text{сист}}}$, нужно:

1. По графикам фиг. 6, 7 (кривые 1) определить Θ_L допуст., соответствующее выбранным допустимым погрешностям.



Фиг. 7.

2. Разбить магистраль на участки с длиной

$$l = \frac{\theta_L \text{ допуст } a}{\omega_{\max}}, \quad (51)$$

где a — скорость звука в жидкости в трубопроводе;

ω_{\max} — наибольшая исследуемая частота.

3. По формулам $L_i = \beta_i L_{\text{уч}}$, $C_i = \gamma_i C_{\text{уч}}$ (52)

с учетом 45 определить элементы эквивалентной схемы для участка.

4. Соединить отдельные участки по правилам соединения электрических цепей.

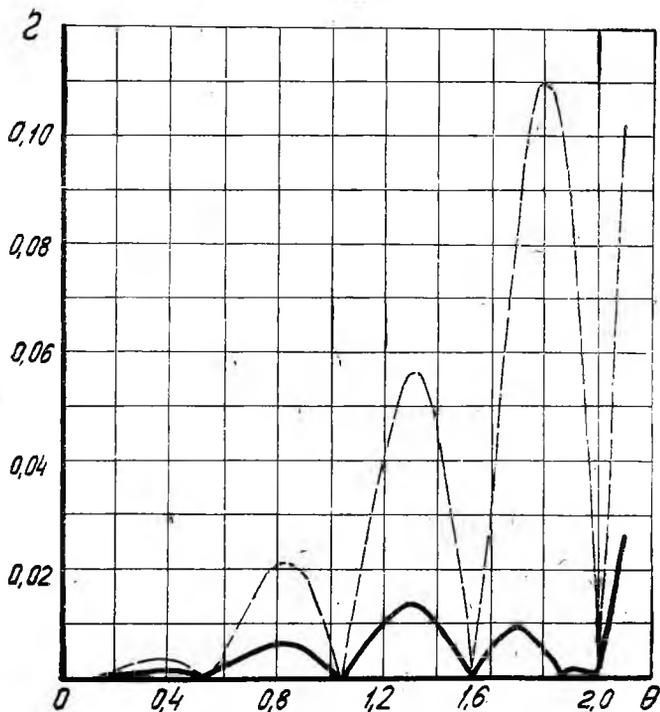
Сравнение с применяемым методом моделирования трубопроводов без потерь

В работе [4] предлагается метод моделирования для отдельных участков трубопроводов постоянного сечения без потерь схемой 2 с $\beta_1 = \beta_2 = 0,5$.

Соответствующие ошибки имеют вид:

$$\overline{\delta z_{0i}} = \sqrt{1 - 0,25\theta_L^2} - 1; \quad (53)$$

$$\overline{\delta\theta_i} = \frac{\arccos(1 - 0,5\theta_L^2)}{\theta_L} - 1. \quad (54)$$



Фиг. 8.

На фиг. 6, 7 приведены сравнительные зависимости $\overline{\delta z_{01}}$ и $\overline{\delta \Theta_1}$ для участка магистрали, смоделированного пятиэлементником по третьему приближению (схема 5) и пятиэлементником, составленным из двух схем 2 (т. е. схема 5 с $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,5$, $\beta_1 = \beta_3 = 0,25$, $\beta_2 = 0,5$). Из этих графиков достаточно наглядно следуют выгоды моделирования по третьему приближению.

На фиг. 8 приведены значения коэффициентов отражения модели, составленной из шести пятиэлементников по третьему приближению и модели из двенадцати трех элементников по схеме 2, моделирующих магистраль, нагруженную на неотражающее сопротивление (т. е. магистраль с коэффициентом отражения, равным нулю).

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ RC

Введем обозначения:

$$\Theta_r^2 = \omega RC, \quad \alpha = \frac{1}{R} \int_{x_1}^x dR; \quad (55)$$

$$a = \int_{x_1}^{x_2} d\alpha \int_{x_1}^x d\gamma \quad a_1 = \int_{x_1}^{x_2} d\gamma \int_{x_1}^x d\alpha; \\ A = \int_{x_1}^{x_2} d\gamma \int_{x_1}^x d\alpha \int_{x_1}^x d\gamma \quad A_1 = \int_{x_1}^{x_2} d\alpha \int_{x_1}^x d\gamma \int_{x_1}^x d\alpha. \quad (56)$$

С учетом принятых обозначений, после замены β на α , b на a и т. д., все сказанное выше о моделировании консервативных систем (систем LC) можно целиком отнести и к моделированию систем RC .

З а м е ч а н и е. Ввиду того, что последовательные члены рядов матрицы $\|B'\|$ при моделировании систем RC не образуют знакопеременных рядов, а повернуты друг относительно друга в комплексной плоскости на $\pi/2$, максимальные ошибки, допускаемые при моделировании «ориентированными» схемами, будут несколько выше, и допустимые Θ_r при $|\delta_{\max}| \leq 0,05$ равны:

а) при моделировании по «внешнему» интегралу

$$\Theta_r = 1,35; \quad (57)$$

б) при моделировании по «внутреннему» интегралу

$$\Theta_r = 1,33. \quad (58)$$

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ RLC

Элементы матрицы $\|B'\|$ с точностью до членов четвертого приближения для систем с сопротивлением имеют вид [1]:

$$B'_{11} = 1 + i\Theta_r^2 a - \Theta_L^2 b + \dots;$$

$$B'_{12} = 1 + i \frac{\Theta_r^4}{\Theta_r^2 + i\Theta_L^2} A_1 - i \frac{\Theta_L^4}{\Theta_r^2 + i\Theta_L^2} B_1 - \frac{\Theta_r^2 \Theta_L^2}{\Theta_r^2 + i\Theta_L^2} K + \dots; \quad (59)$$

$$B'_{21} = 1 + i\Theta_r^2 A - \Theta_L^2 B + \dots;$$

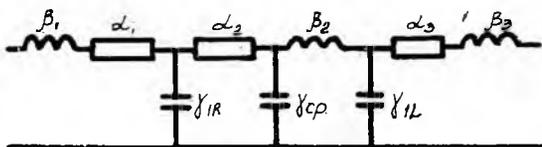
$$B'_{22} = 1 + i\Theta_r^2 a_1 - \Theta_L^2 b_1 + \dots \quad (60)$$

Здесь

$$K = \int_{x_1}^{x_2} d\alpha \int_{x_1}^x d\gamma \int_{x_1}^x d\beta + \int_{x_1}^{x_2} d\beta \int_{x_1}^{x_2} d\gamma \int_{x_1}^x d\alpha.$$

Мы рассмотрим моделирование систем RLC с учетом членов третьего приближения (т. е. с учетом интегралов A ; A_1 ; B ; B_1 , K). Моделирование таких систем по второму приближению достаточно подробно изложено в работе [2].

Для моделирования по третьему приближению можно, как это сделано в работе [2], воспользоваться отдельным моделиро-



Фиг. 9.

ванием по LC и RC и, используя C (γ) как базовую координату, строить модель системы RLC . Например, система смоделирована по LC и по RC схемами 5, «суммарная» схема по RLC для этого случая представлена на фиг. 9 (схема 7)

$$\gamma_{cp} = |\gamma_{1L} - \gamma_{1R}|. \quad (61)$$

Здесь принято $\gamma_{1L} > \gamma_{1R}$ (для $\gamma_{1R} > \gamma_{1L}$ меняются местами α_2 и β_2).

Указанный путь возможен, однако он не является оптимальным из-за наличия в B'_{12} «смешанных» интегралов (K), учитывающих взаимное расположение сопротивлений и индуктивностей.

Ниже рассматривается один из возможных путей, позволяющий учесть «смешанные» интегралы и обеспечивающий достаточно хорошее приближение элементов матрицы $\|B'\|$ при минимальном числе элементов. В основу моделирования положена схема 7 (фиг. 9).

$$\text{Положим } L\omega_{\max} > R, \text{ т. е. при } \omega = \omega_{\max} \Theta_L > \Theta_r. \quad (62)$$

Учитывая (62) и коэффициенты, с которыми ошибки в определении отдельных интегралов входят в суммарные ошибки элементов матрицы $\|B'\|$, можно рекомендовать следующий путь моделирования (для $L\omega_{\max} > R$):

1. Моделирование системы по LC по схеме 5, по «внешнему» интегралу. В результате определяются величины γ_{1L} , γ_{2L} , β_1 , β_2 и β_3 .

2. Моделирование системы по RC по схеме 5, по «внутреннему» интегралу с минимизацией ошибки в сумме «смешанных» интегралов (K), т. е. моделирование по интегралу A_1 , входящему (при $\omega = \omega_{\max}$) с наименьшим коэффициентом в B'_{12} , не проводится (в этом случае число элементов в схеме 7 (9) совпадает с числом независимых уравнений, которым они должны удовлетворять).

З а м е ч а н и е. При $R\omega_{\max}$ порядок моделирования RC и LC — обратный.

Минимизация ошибок в смешанных интегралах

Основное уравнение для K в схеме 7:

$$K = a_1 b + b_1 a - 2A_{cx} B_{cx} \frac{1}{m}. \quad (63)$$

Здесь
$$\begin{aligned} m &= \gamma_{1R} \gamma_{2L} \quad \text{при } \gamma_{1R} > \gamma_{1L}; \\ m &= \gamma_{2R} \gamma_{1L} \quad \text{при } \gamma_{1L} > \gamma_{1R}. \end{aligned} \quad (64)$$

Порядок минимизации

1. Определение диапазона допустимого изменения γ_K (по формулам (35)).

2. Определение диапазона изменения m_{cx} (вычисление m на границах интеграла γ_R и в точке $\gamma_{1R} = \gamma_{1L}$, если последняя попадает в диапазон возможных γ_{1R})

$$m_{\min} \leq m_{cx} \leq m_{\max}. \quad (65)$$

3. Определение $m_{\text{потр}}$:

$$m_{\text{потр}} = \frac{2A_{cx} B_{cx}}{a_1 b + b_1 a - K}; \quad (66)$$

4. Выбор γ_R .

Если $m_{\text{потр}}$ не попадает в диапазон возможных m_{cx} , то выбирается m_{cx} ближайшее к $m_{\text{потр}}$ (m_{\max} или m_{\min}) и соответствующее γ_R . Если $m_{\text{потр}}$ попадает в (65), то выбирается $m_{cx} = m_{\text{потр}}$, а γ_R вычисляется по (64). Если по формулам (64) получаются два возможных значения γ_R , то выбирается то из них, которое дает меньшую ошибку в A_1 .

5. Определение α_i по формулам (24) — (26).

Ошибки при моделировании систем RLC (при $\omega = \omega_{\max}$) определяются в основном величиной Θ_{\max} , т. е. численно не превышают максимальных ошибок при моделировании по «внешнему» интегралу при $\omega = \omega_{\max}$.

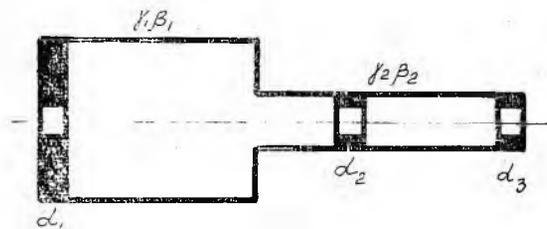
При $\Theta_r < 0,25\Theta_L$ можно при моделировании по RC не учитывать интегралов третьего приближения и принять:

$$\gamma_{1R} = \gamma_{1L} \quad \gamma_{2R} = \gamma_{2L} \quad \alpha_1 = a_1 \quad \alpha_3 = a \quad \alpha_2 = 0. \quad (67)$$

Возможны также и другие способы моделирования систем RLC , которые при решении конкретных задач могут давать лучшие результаты, чем рассмотренный общий метод (и при минимальном числе элементов).

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПО LC ЭЛЕМЕНТАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В задачах, решение которых проводится методом характеристик, а также для натурального моделирования возникает необходимость моделирования системы по LC элементами с распределенными постоянными. Такое моделирование (в работе [2] дана одна из возможных схем его с учетом интегралов второго приближения) соответствует замене функции $\beta(\gamma)$ некоторой ломаной, отрезки которой могут быть и не параллельны осям координат.



Фиг. 10.

Ниже предлагается один из возможных методов моделирования гидравлической системы схемой 8 (фиг. 10) с учетом одного из интегралов третьего приближения, например B :

I. Моделирование системы по LC :

Определение интервала допустимых γ_{1L} :

$$\begin{aligned} \gamma_{1L} < 2b \quad \gamma_{2L} < 2b_1 \\ \gamma_{1L} < 1, \quad \gamma_{2L} < 1. \end{aligned} \quad (68)$$

Определение диапазона изменения $B_{сх}$:

$$B_{сх} = \frac{1}{3} [b + \gamma_{1L} (b_1 - b)]. \quad (69)$$

Выбор γ_{1L} :

Если B не попадает в интервал изменения $B_{сх}$, то выбираем $\gamma_{1L} = \gamma_{гран}$, дающее $B_{сх}$, ближайшее к B .

Если B находится внутри диапазона возможных $B_{сх}$, то выбирается $B_{сх} = B$ и

$$\gamma_{1L} = \frac{3B - b}{b_1 - b}. \quad (70)$$

Определение остальных элементов схемы:

$$\gamma_2 = 1 - \gamma_1; \quad (71)$$

$$\beta_2 = 2b - \gamma_1; \quad (71)$$

$$\beta_1 = 2b_1 - \gamma_2. \quad (72)$$

Аналогичным образом (с заменой β на γ , b на b_1 и B на B_1) может быть учтен интеграл B_1 .

II. Сопротивления $R(\alpha)$ распределяются по $C(\gamma)$ одним из изложенных выше способов моделирования по RC .

Реальные длины и площади элементов дри натурном моделировании определяются из (73), (74):

$$l_i = a_m \sqrt{\gamma_i \beta_i} \sqrt{LC}; \quad (73)$$

$$f_i = a_m \sqrt{\frac{\gamma_i}{\beta_i}} \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad (74)$$

здесь a_m — скорость звука в «модельной» магистрали. Ошибки при моделировании «схемы-антипода» (схемы 3 с $\beta_1 = \beta_2 = 0,5$)

$$\delta_{21} = 0,1667 \Theta_L^2 - 0,0083 \Theta_L^4$$

при $|\delta_{21}| \leq 0,05$ $\Theta_L \leq 0,552$.

В заключение остановимся на некоторых свойствах схем, построенных рассмотренными методами.

Рассмотренные схемы обеспечивают ограниченную ошибку элементов матрицы $\|B'\|$ во всем диапазоне частот $0 \leq \omega \leq \omega_{\max}$, причем при $\omega \rightarrow 0$ $|\delta_{\max}| \rightarrow 0$.

Это свойство позволяет предполагать близость переходных процессов в исходной системе и в модели, так как переходные процессы в значительной степени зависят от частотных характеристик объекта в области малых частот.

Решение задач с помощью построения расчетных схем, кроме возможностей, открывающихся при электрическом моделировании, обладает еще и тем преимуществом, что пассивные системы моделируются пассивными схемами, между тем как при приближенном расчете элементов матрицы $\|B\|$ условие пассивности

$$B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} = 1$$

может нарушиться, что в системах с малым запасом устойчивости может привести к качественно новым решениям [5].

Рассмотренные методы могут быть применены и к более точным квазилинейным уравнениям движения жидкости с диссипативным членом $r \frac{M}{2} M$ (вместо RM). Если при этом к функции $r(c)$ применить тот же метод аппроксимации, как к $R(c)$, то смоделированная таким образом система будет давать представление о переходных и колебательных режимах и в нелинейных системах (при обычной линеаризации $R=rM_0$ и схемы по R и r совпадают с точностью до постоянного множителя M_0). Рассмотренные выше методы могут быть также применены и к задачам схематизации электрических и механических систем.

1. Р. Н. Старобинский. Приближенный метод расчета частотных характеристик гидравлических магистралей с переменными параметрами потока по интегральным характеристикам. Сборник трудов КуАИ, вып. XXX, 1967.
 2. Р. Н. Старобинский. Схематизация физических явлений в гидравлических магистральных на основе интегральных характеристик потока. Сборник трудов КуАИ, вып. XXX, 1967.
 3. С. Сешу, Н. Балабанян. Анализ линейных цепей. Госэнергоиздат. М-Л, 1963.
 4. П. А. Гладких, Н. С. Хачатурян. Гашение вынужденных колебаний в компрессорных установках. М-Л, 1965.
 5. Ольденбургер, Гудсон. Упрощенный анализ динамики линий гидравлической передачи методом бесконечных произведений. Trans ASME № 1, 1963. (Русский перевод).
-