

3. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Вып. 2. - М.: Мир, 1972. - 288с.
4. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. - М.: Мир, 1982. - 428с.

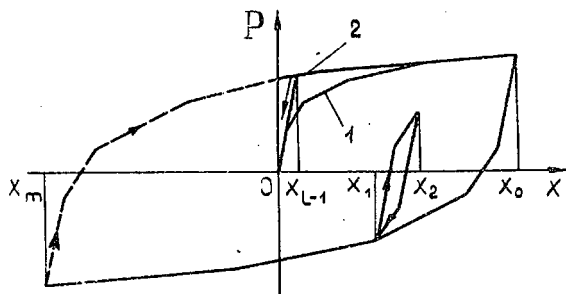
УДК 620.318.6

Г.В.Лазуткин

КОЛЕБАНИЯ ВИБРОЗАЩИТНЫХ СИСТЕМ
С КОНСТРУКЦИОННЫМ ДЕМПИРОВАНИЕМ

В целях виброзащиты широкое применение находят цельнометаллические виброизоляторы и демпферы с конструкционным демпфированием. Упругодемпфирующие элементы таких устройств могут быть выполнены из материала МР, сеток, отрезков тросов, пластин и т.п.

Сложность теоретического исследования колебаний изучаемых виброзащитных систем (ВС) обусловлена как нелинейностью, так и зависимостью упругофрикционных характеристик (УФХ) виброизоляторов и демпферов от предыстории их нагружения - определенной совокупности абсцисс точек смены знака скорости деформирования. На рис. 1 в координатах нагрузка P , деформация x показан характерный вид двух процессов деформирования 1 и 2, соответствующих различным предысториям нагружения



Р и с. 1. Влияние предыстории нагружения балки на характер процессов деформирования

многослойной консольной балки [1]. Процессу 1 предшествовала предыстория нагружения балки, заключающаяся в постепенном уменьшении абсцисс точек смены знака скорости деформирования от x_m до нуля.

Процессу 2 предшествовал процесс нагрузки (пунктирная линия на рис. I) от x_m до $x_{\ell-1}$ и процесс разгрузки от $x_{\ell-1}$ в точку $[0,0]$. Расчеты, проведенные по рекуррентным зависимостям [1], показывают, что разница по величине нагрузки между процессами 1 и 2 может достигать 70%. Несложно показать, что при уменьшении размахов деформации балки предыстория нагружения должна содержать сведения о всех точках смены знака скорости, например $\{x_0, x_1, x_2\}$ (см. рис. I). С увеличением размаха сведения о предыдущей паре абсцисс, например $\{x_1, x_2\}$, исключаются, если текущее значение деформации выходит за указанный интервал, например $x < x_1$. При этом характер последующего процесса деформирования определяется, например, как продолжение процесса разгрузки из точки с абсциссой x_0 . Аналогичные особенности наблюдаются у виброизоляторов из материала МР.

Существование неограниченного числа переменных УФХ требует разработки общего подхода к описанию процессов произвольного нагружения виброизоляторов и демпферов с конструкционным демпфированием. Смысл его заключается в выборе некоторой исходной совокупности (ИС) процессов деформирования [2,3], установлении переменных предыстории нагружения и вида линейных преобразований исходных процессов, с помощью которых можно описать любую совокупность процессов деформирования устройства.

В результате исследований УФХ установлено, что ИС наиболее рационально представлять множеством процессов нагрузки и разгрузки, принадлежащих семействам петель гистерезиса при различных положениях статического равновесия устройства. В этом случае линейные преобразования исходных процессов заключаются только в их плоскопараллельном переносе. Причем переменными предыстории нагружения служат абсциссы точек смены знака скорости, удовлетворяющие условию

$$|x_{\ell-1} - x_{\ell}| < |x_{k-1} - x_k| < |x_{n-1} - x_n| < \dots,$$

где ℓ, k, n - совокупность только четных или нечетных номеров, для которых $\ell-2 \geq k, k-2 \geq n$ и т.д.

Аналитическое представление ИС в классе алгебраических многочленов существенно упрощает теоретические исследования колебаний ВС приближенными аналитическими методами. В частности, аппроксимация ИС полиномами Чебышева в классе непрерывных функций приводит к выражению [3]

$$P = \sum_{|M|=0}^m \sum_{\lambda_2=0}^f \sum_{\lambda_4=0}^r \alpha_{\lambda_1} \dots \lambda_4 x^{\lambda_1} \theta \left[\sqrt{A^2 - x^2} \right]^{\lambda_2} A^{\lambda_3} q^{\lambda_4}, \quad (1)$$

где $a_{\lambda_1 \dots \lambda_4}$ - коэффициенты полиномов; $\sigma = \text{sign } \dot{x}$; A - амплитуда деформации (колебаний); q - положение статического (динамического) равновесия устройства. Такая форма записи ИС удобна при исследовании установившихся колебаний ВС.

Более простая форма представления ИС полиномами, удобная при исследовании переходных колебаний ВС, может быть получена в классе разрывных функций

$$P = \sum_{\lambda_1 \neq 0}^m \sum_{\lambda_3 \neq 0}^f \sum_{\lambda_4 \neq 0}^r (a_{c\lambda_1 \lambda_3 \lambda_4} + \sigma a_{m\lambda_1 \lambda_3 \lambda_4}) x^{\lambda_1} A^{\lambda_3} q^{\lambda_4}, \quad (2)$$

где $a_{c\lambda_1 \lambda_3 \lambda_4}$, $a_{m\lambda_1 \lambda_3 \lambda_4}$ - коэффициенты аппроксимации соответственно для функций, отображающих срединные линии и гистерезис в петлях.

Известно, что для установившихся колебаний на резонансных и около-резонансных режимах можно ограничиться двучленным приближением

$$x^* = q + A \cos(\omega t + \alpha),$$

где x^* - деформация от ненагруженного положения устройства; ω - частота колебаний; t - время; α - сдвиг по фазе между вынуждающей силой B_0 и колебаниями ВС. В этом случае рассматривается решение линеаризованного дифференциального уравнения движения

$$M \ddot{x}^* + P(x^*, \sigma, A, q) = B_0 \cos \omega t + G,$$

где M - масса ВС; G - постоянная нагрузка (вес ВС);

$$P(x^*, \sigma, A, q) = a_{01}^{(\lambda)} \sigma \sqrt{A^2 - (x^* - q)^2} + a_{10}^{(\lambda)} (x^* - q) + a_{00}^{(\lambda)} -$$

линеаризованная реакция виброизолятора или демпфера;

$$a_{\lambda_1 \lambda_2}^{(\lambda)} = \sum_{\lambda_3 \neq 0}^f \sum_{\lambda_4 \neq 0}^r a_{\lambda_1 \dots \lambda_4}^{(\lambda)} A^{\lambda_3} q^{\lambda_4}, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \{00, 01, 10\},$$

$a_{\lambda_1 \dots \lambda_4}^{(\lambda)}$ - коэффициенты полиномов (I) при $m = 1$.

Тогда неизвестные параметры колебаний A , q и α находятся из решения системы уравнений

$$\begin{cases} a_{00}^{(\lambda)} - G = 0 ; \\ A^2 [(\gamma_{10}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_{01}^2] = \left(\frac{B_0}{M}\right)^2 ; \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{\gamma_{01}^2}{\gamma_{10}^2 - \omega^2} , \end{cases}$$

где $\gamma_{10}^2 = \frac{a_{10}^{(\lambda)}}{M}$; $\gamma_{01} = \frac{a_{01}^{(\lambda)}}{M}$.

С помощью полученных выражений можно дать оценку виброизолирующих характеристик изучаемых устройств. В частности, на резонансе ВС при кинематическом возбуждении колебаний с амплитудой a_0 ($B_0 = M a_0 \omega^2$) получим

$$\mu_K = \frac{A}{a_0} = \sqrt{1 + \left(\frac{a_{10}^{(\lambda)}}{a_{01}^{(\lambda)}}\right)^2} ; \quad \omega_K = \gamma_{10} \sqrt{\frac{\mu_K^2}{\mu_K^2 - 1}} ;$$

для силового возбуждения ($B_0 = \text{const}$)

$$\mu_C = \frac{a_{10}^{(\lambda)}}{a_{01}^{(\lambda)}} ; \quad \omega_C = \gamma_{10} ,$$

где μ_K , μ_C и ω_K , ω_C - соответствующие способу возбуждения коэффициенты динамичности и резонансные частоты ВС.

Наряду с вибрационными нагрузками ВС часто подвергаются еще и воздействию ударных нагрузок в виде одиночных импульсов. Возникающие при этом колебания носят неустойчивый характер и быстро затухают. Так как реакция виброизоляторов и демпферов оказывается зависимой от предьстории их нагружения, то возможно рассмотрение только кусочно-непрерывного решения задачи об ударном нагружении. Такое решение состоит из n подэтапов, причем для каждого j -го подэтапа $j \in [0, n]$ его границы $x_{m,j-1}$ и $x_{m,j}$; t_{j-1} и t_j определяются условиями сшивки:

$$x(t_{j-1}) = x_{m,j-1} , \quad \dot{x}(t_{j-1}) = 0 \quad \text{и} \quad x(t_j) = x_{m,j} , \quad \dot{x}(t_j) = 0$$

с учетом возможных остановок движения ВС. Дифференциальное уравнение движения ВС на j -м подэтапе с учетом (2) записывается в виде

$$\ddot{y}_j + \sum_{\lambda=0}^m P_{\lambda j} y_j^{(\lambda)} = \sigma(t-t_y) F(t) , \quad (3)$$

где $y_j = x - x_{m,j-1}$;

$$\sigma(t-t_y) = \begin{cases} 1 & \forall t \in [0, t_y] ; \\ 0 & \forall t \in (t_y, t_n) ; \end{cases}$$

$F(t)$ - возбуждающая нагрузка;

t_y - длительность удара.

Решение $y_j(t)$ (3) целесообразно получать методом малого параметра в виде

$$y_j(t) = \sum_{d=0}^N h_j^d y_{dj}(t) , \quad (4)$$

где h_j - малый параметр, который необходимо предварительно выявить.

Введение малого параметра в дифференциальное уравнение для многих задач носит искусственный характер. Например, малым параметром связывают нелинейные члены и члены, затрудняющие решение задачи, и полагают его равным единице [4]. Вместе с этим в дифференциальное уравнение вводят дополнительную функцию, обеспечивающую достаточную близость порождающего решения к точному [5, 6 и др.]. Введение дополнительной функции осуществляется на основе определенных допущений о характере движения ВС.

Представим разложение (4) в виде

$$y_j(t) = A_j^{(1)} \left[1 - \cos \gamma_j (t - t_{j-1}) \right] + h \left[q_j - A_j^{(1)} + \right. \\ \left. + \sum_{i=2}^{\infty} A_j^{(i)} \cos i \gamma_j (t - t_{j-1}) \right] + h^2 \dots , \quad (5)$$

где малым параметром $h = I$ связаны слагаемые, приводящие к малым поправкам в решении задачи. Вид первого основного члена разложения (5) предопределяет правую часть порождающего уравнения в виде импульсной функции Q_j прямоугольной формы.

Таким образом, при искусственном введении малого параметра $h = I$ дифференциальное уравнение (4) можно представить в виде

$$\ddot{y}_j + \gamma_j^2 y_j = Q_j + h \left[\gamma_j^2 y_j - \sum_{\lambda=0}^m P_{\lambda j} y_j^\lambda + \sigma(t - t_{yj}) F(t) - Q_j \right], \quad (6)$$

где коэффициенты γ_j и Q_j подлежат определению с учетом формы разложения (5). Для освобождения от вековых членов в поправочных слагаемых ($i \geq 2$) потребуем

$$\gamma_j^2 = \gamma_{0j}^2 + \sum_{d=1}^N h_j^d \gamma_{dj}^2. \quad (7)$$

Обратимся к анализу уравнения (6). Очевидно, при $h = 0$ основной член разложения (5) является точным решением (6)

$$y(t) \approx y_{0j}(t) = A_j^{(1)} \left[1 - \cos \gamma_{0j} (t - t_{j-1}) \right], \quad (8)$$

вследствие чего $\gamma_j = \gamma_{0j}$, $A_j^{(1)} = A_j$ и $Q_j = \gamma_{0j}^2 A_j$. Близость порождающего решения (8) к точному обеспечивается, когда значения γ_{0j}^2 и A_j находятся, например, методом Галеркина [7]:

$$\gamma_{0j}^2 = \frac{\beta_{1j}}{A_j} + \sum_{\lambda=1}^m 2^{\lambda+1} \beta_{\lambda j} P_{\lambda j} A_j^{\lambda-1} \left(\frac{\lambda}{\lambda+1} \right); \quad (9)$$

$$2 P_{0j} + \sum_{\lambda=1}^m 2^{\lambda+1} \beta_{\lambda j} P_{\lambda j} A_j^\lambda - \beta_{0j} = 0. \quad (10)$$

где

$$\beta_{\lambda} = \frac{2\lambda-1}{2\lambda} \cdot \frac{2\lambda-3}{2\lambda-2} \dots \frac{2\lambda-5}{2\lambda-5+1};$$

$s=2\lambda-1$; λ - число членов в произведении;

$\beta_{ij} \forall i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ - здесь и далее по тексту коэффициенты разложения Фурье функции $\mathcal{G}(t-t_j)F(t)$ на j -м подэтапе движения ВС.

Подставим разложения (4) и (7) в уравнение (6) и приравняем в нем члены с одинаковым порядком малости. Разложение частоты колебаний γ_j^2 осуществим только в правой части уравнения (6). В результате получим систему линейных дифференциальных уравнений. Чтобы исключить в эквивалентных поправочных слагаемых, потребуем выполнения условия периодичности решений указанных уравнений. Это означает выбор величины $A_j^{(n)}$ (5) в качестве полной амплитуды первой гармоники колебаний ВС [5]. Следовательно, поправочные слагаемые должны определяться только частными решениями полученной системы линейных дифференциальных уравнений. Отметим, что при расчетах ограничиваются обычно поправочными слагаемыми первого порядка ($N=1$), т.е.

$$\ddot{y}_{0j} + \gamma_{0j}^2 y_{0j} = \gamma_{0j}^2 A_j; \quad (11)$$

$$\ddot{y}_{ij} + \gamma_{0j}^2 y_{ij} = \sum_{i=2}^{\infty} (\beta_{ij} + \alpha_{ij}) \cos i \gamma_{0j} (t - t_{j-1}), \quad (12)$$

где α_{ij} - коэффициенты Фурье для функции $\sum_{\lambda=2}^m \rho_{\lambda j} y_{0j}^{\lambda}$, найденные с учетом (8).

После интегрирования (11) и (12) разложение (4) или (5) можно записать в виде

$$y_j(t) = A_j \left[1 - \cos \gamma_{0j} (t - t_{j-1}) \right] + \frac{1}{\gamma_{0j}^2} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\beta_{ij} + \alpha_{ij}}{1-i^2} \cos i \gamma_{0j} (t - t_{j-1}). \quad (13)$$

Рассмотренные вопросы приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения (3) являются общими в теории ударного нагруже-

ния ВС с конструкционным демпфированием. Они дают возможность проанализировать особенности поведения ВС как в течение времени воздействия ударной нагрузки, так и после ее исчезновения. При этом форма решения (13) позволяет весьма просто вычислить j -е деформации виброизоляторов или демпферов

$$y_{m,j} = 2A_j + \frac{1}{\gamma_{0j}^2} \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^i \frac{\beta_{ij} + a_{ij}}{1-i^2}, \quad (14)$$

необходимые для определения их удариволирующих характеристик.

Оценим погрешность Δ решения (13) на примере упругой характеристики виброизолятора в виде кубической параболы и воздействия на ВС прямоугольного ударного импульса с пиковым значением β

С учетом (14) наиболее реакция R такого виброизолятора записывается в виде

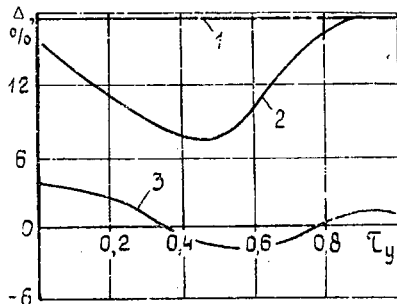
$$R = \begin{cases} \left[2A_1 + \frac{2\beta}{\pi\gamma_{01}} \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^i \frac{i \sin \pi \tau_y}{i(1-i)^2} + \frac{17A_1}{120\gamma_{01}^2} \right] \forall \tau_y \in (0,1); \\ 3,929\beta \quad \forall \tau_y \in (1, \infty) \end{cases},$$

где $A_1 = \sqrt[3]{0,4\beta\tau_y}$; $\gamma_{01}^2 = \frac{15}{4} A_1^2 + \frac{2\beta}{\pi A_1} \sin \pi \tau_y$; $\tau_y = \frac{\gamma_{01} t_y}{\pi}$ —

безразмерная длительность удара. Точное решение для $\tau_y > 1$ можно записать в виде $R = 4\beta$, т.е. погрешность приближенного решения 1,8%. Оценка погрешности решения (15) для $\tau_y < 1$ проводилась с помощью численного решения задачи, обладающего свойствами точного.

Одновременно проводилось сравнение приближенных решений, полученных методами Галеркина (9,10) и линеаризации [6]. Как видно из графиков рис.2, погрешность Δ приближенного решения (14) не превышает 3,5%, что в 5-10 раз меньше, чем погрешности сравниваемых с ним решений.

Таким образом, полученные теоретические результаты исследования колебаний ВС с конструкционным демпфированием позволяют



Р и с.2. погрешность приближенного решения нелинейной задачи: 1-метод Галеркина; 2-метод линеаризации; 3-метод малого параметра

с высокой точностью и минимальными затратами средств и времени определить их вибро- и удароизолирующие характеристики.

Л и т е р а т у р а

1. Конструкционное демпфирование в неподвижных соединениях / Н.Г.Калинин и др. - Рига: АН Латв.ССР, 1960. - 170 с.
2. Бусафов Ю.П., Островский М.С. Математическая модель гистерезиса внешнего трения. - АН СССР. Машиноведение, 1976, № 5, с. 82-87.
3. Математическое представление упругофрикционных характеристик виброизоляторов из материала МР / В.Н.Бузицкий, Г.В.Лагуткин, А.Г.Пиртулин, Е.И.Саланов. - В сб.: Вибрационная прочность и надежность двигателей и систем летательных аппаратов. Куйбышев: КуАИ, 1977, вып.4, с. 3-8.
4. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. - М.: Мир, 1968. - 432 с.
5. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. - М.: Наука, 1974. - 504 с.
6. Вибрации в технике: Справочник / М.И.Блехман, Н.В.Бутенин, Р.Ф.Раниев и др. - М.: Машиностроение, 1979, кн. 2. - 351 с.
7. Каннингхэм В. Введение в теорию нелинейных систем. - М.: Д.: Госэнергоиздат, 1962. - 456 с.
8. Коловский М.З. Нелинейная теория виброзащитных систем. - М.: Наука, 1972. - 317 с.

УДК 62.762

Ф.В.Паровой, В.А.Борисов

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ДАВЛЕНИЯ В РАДИАЛЬНЫХ УПЛОТНЕНИЯХ С УПРУГИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ ИЗ МР ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ

Герметичность радиального контактного уплотнения обеспечивается созданием в зоне сопряжения уплотнительного кольца и контактирующих поверхностей контактного давления, превышающего давление уплотняемой среды.

Объектом исследований были уплотнения подвижных соединений пар возвратно-поступательного движения, включающие уплотнительное кольцо, состоящее из упругого элемента (материал МР), и уплотнительный эле-