

В. П. ИВАНОВ

### К ВОПРОСУ О ПРИЧИНАХ РАЗБРОСА РЕЗОНАНСНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГИХ ТЕЛАХ, КОНСТРУКТИВНО ОБЛАДАЮЩИХ ЦИКЛИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

Многочисленные замеры резонансных напряжений на работающих турбомашинах свидетельствуют о существенном разбросе напряжений, замеренных в сходственных точках лопаток, принадлежащих одной ступени.

Четкое объяснение причин разброса в настоящее время отсутствует, хотя и перечисляются факторы, которые могут влиять на него.

Ниже указывается на одну из причин разброса резонансных напряжений, которая органически присуща телам конструктивно обладающим циклической симметрией.

Упругим телом, обладающим циклической симметрией, будем называть такое тело, упругие, массовые и геометрические характеристики которого при повороте вокруг некоторой оси (оси циклической симметрии) на любой угол, кратный величине  $\frac{2\pi}{S}$ , ( $S$  — целое число, характеризующее порядок симметрии), будут оставаться инвариантными относительно неподвижной системы координат.

Телами, обладающими циклической симметрией, порядок, которой равен числу лопаток, являются, номинально лопаточные венцы, импеллеры, шнеки и т. п., а также осесимметричные тела, диски, круговые оболочки, порядок симметрии у которых равен бесконечности.

Циклически-симметричным телам присущи некоторые общие вибрационные свойства.

Так, при свободных колебаниях такого тела на любой из собственных форм упругие смещения сходственных точек\* в любом заданном направлении подчиняются закономерности:

$$y_i = y_0 \cos \frac{2\pi}{z} \lambda i, \quad (1)$$

где  $i = 0, 1, 2, 3, \dots (S - 1)$  — номер периода структуры (номер лопатки),  $\lambda = 0, 1, 2, \dots \frac{S}{2}$  (при четном  $S$ ) и  $\lambda = 0, 1, 2, \dots \frac{S-1}{2}$  (при нечетном  $S$ ) — число волн деформации.

У упругого циклически-симметричного тела с распределенными параметрами каждому из перечисленных чисел волн деформации соответствует бесчисленное множество собственных движений. Различным  $\lambda$  соответствуют различные собственные числа.

Каждому из собственных движений, если  $\lambda \neq 0$  и  $\lambda \neq \frac{S}{2}$  соответствует собственное число, кратность которого не менее двух. Иными словами, данному собственному числу соответствуют две взаимно-ортогональные собственные формы. У циклически-симметричных тел эти формы строго идентичны, но сдвинуты в окружном направлении относительно друг друга на угол, при котором достигается их взаимная ортогональность. Если  $y_{1i} = y_0 \cos \frac{2\pi}{S} \lambda i$ , то

$$y_{2i} = y_0 \cos \left( \frac{2\pi}{S} \lambda i - \frac{\pi}{2} \right) = y_0 \sin \frac{2\pi}{S} \lambda i$$

Силой, вызывающей вынужденные колебания лопаточных венцов, шнеков и т. п., является обычно вращающаяся, неравномерная в окружном направлении, стационарная нагрузка (окружная неравномерность газового потока), вызывающая одновременные резонансные колебания по обеим собственным формам, когда  $\omega = \lambda_v \Omega = p$ , где  $p$  — собственная частота,  $\lambda_v$  — номер гармоники возбуждающей нагрузки, равный числу волн деформации данной формы  $\lambda$ . В этом случае образуется бегущая волна с числом волн, равным  $\lambda$ . Амплитуды колебаний сходственных точек будут одинаковыми.

Реальные системы, как бы они тщательно не были исполнены, строгой симметрией обладать не будут. Введение же асимметрии в систему приводит к тому, что ранее равные собственные частоты становятся различными, а амплитудные отклонения в большей или меньшей степени отличаются от закономерности, описываемой выражениями (1).

Полагая асимметрию малой, будем считать, что формы колебаний несущественно отличаются от форм, принадлежащих системам со строгой симметрией. Тогда, рассматривая вынужденные колеба-

\* Сходственными точками называем такие точки, принадлежащие различным периодам структуры, которые совпадают при повороте тела на любой угол, кратный величине  $\frac{2\pi}{S}$ .

ния под действием окружной неравномерности газового потока, можно записать

$$y_{1i} = \frac{y_1^*}{m} \cos \frac{2\pi}{S} \lambda i \cos(\omega t - \alpha_1)$$

$$y_{2i} = \frac{y_2^*}{n} \sin \frac{2\pi}{S} \lambda i \sin(\omega t - \alpha_2),$$

где  $y_1^*$  и  $y_2^*$  — величины, характеризующие уровень возбуждающих сил при возбуждении первой и второй форм колебаний;

$\lambda$  — число волн деформации рассматриваемых форм колебаний;

$\omega = \lambda_b \Omega$  — частота возбуждения;

$\Omega$  — угловая скорость вращения окружной неравномерности;

$\lambda_b$  — гармоника возбуждения.

$$m = \sqrt{(1 - \xi^2)^2 + \mu_1^2},$$

$$n = \sqrt{(1 - r^2 \xi^2)^2 + \mu_2^2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\mu_1}{1 - \xi^2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\mu_2}{1 - \xi^2 r^2},$$

$\xi = \frac{\omega}{p_1}$  — относительная частота возбуждения;

$r = \frac{p_1}{p^2}$  — настройка, зависящая от степени асимметрии;

$p_1$  и  $p_2$  — собственные частоты первой и второй форм колебаний;

$\mu_1$  и  $\mu_2$  — характеристики демпфирования при колебаниях по первой и второй формам (полагаем, что трение не зависит от скорости деформаций).

В соответствии с принципом суперпозиции найдем движение точек, участвующих в колебаниях одновременно по первой и второй формам, считая при этом, что  $y_1^* = y_2^* = y^*$  и  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ,

$$y_i = y_{1i} + y_{2i} = y^* \left[ \left( \frac{1 - \xi^2}{m^2} \cos \frac{2\pi}{S} \lambda i - \frac{\mu}{n^2} \sin \frac{2\pi}{S} \lambda i \right) \cos \omega t + \left( \frac{\mu}{m^2} \cos \frac{2\pi}{S} \lambda i + \frac{1 - r^2 \xi^2}{n^2} \sin \frac{2\pi}{S} \lambda i \right) \sin \omega t \right].$$

Определим амплитуду колебаний  $i$ -той лопатки, сравнивая с амплитудой колебаний на резонансе при  $r = 1$  и тех же  $y^*$  и  $\mu$

$$\bar{y}_i = \frac{y_i \mu}{y^*} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ K + L \cos \frac{4\pi}{S} \lambda i + M \sin \frac{4\pi}{S} \lambda i \right]}, \quad (2)$$

где

$$K = \left( \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \right) \mu^2,$$

$$L = \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \mu^2,$$

$$M = 2\xi^2 \frac{(1-r^2)}{\mu} \frac{\mu^4}{m^2 n^2},$$

Аналогичное выражение может быть получено и для осесимметричного тела ( $S = \infty$ )

$$\bar{y}(\varphi) = \frac{4(\varphi)\mu}{4y^*} = \sqrt{\frac{1}{2} [K + L \cos 2\lambda\varphi + M \sin 2\lambda\varphi]} \quad (2a)$$

Из (2) и (2a) следует, что амплитуда колебаний зависит от номера периода структуры (номера лопатки) и, в случае конструктивно осесимметричного тела, от угла  $\varphi$ . При строгой симметрии  $r = 1$ ,  $L = M = 0$  и  $\bar{y}_i = \bar{y}_{(\varphi)} = \frac{\mu}{m}$ , т. е. разброс отсутствует.

Таким образом, наличие асимметрии и связанной с ней расстройки ( $1-r^2 \neq 0$ ) является одной из причин разброса вибрационных напряжений в упругих телах, конструкционно обладающих циклической или осевой симметрией, при возбуждении их вращающейся нагрузкой.

Выражения (2) и (2a) получены в предположении, что введение расстройки практически не сказалось на форме колебаний. Такой разброс будем именовать разбросом II-го рода.

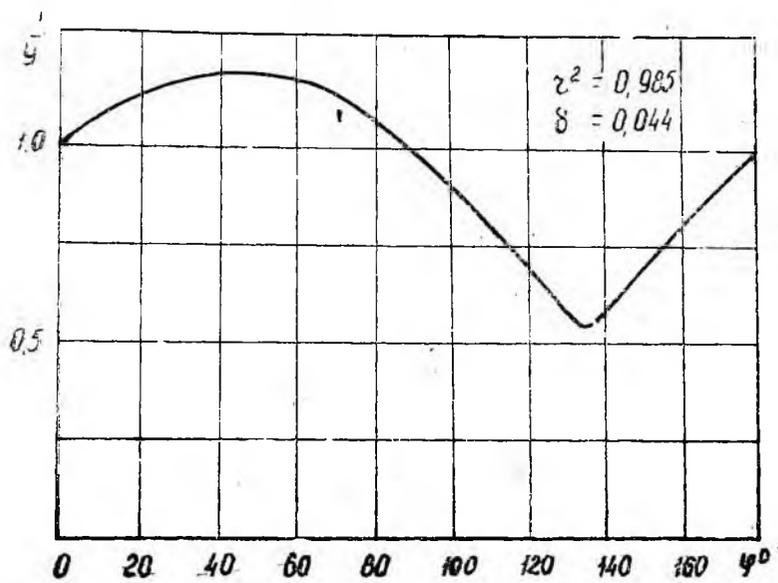
Кроме этого разброса, будет иметь место разброс, обусловленный отклонением формы колебаний при введении асимметрии от формы колебаний, описываемой выражениями (1). Этот разброс будем называть разбросом I-го рода. Очевидно, что при весьма малых расстройках, наиболее существенным является разброс II-го рода, поскольку малому отклонению от строгой симметрии будет соответствовать и малое отклонение формы колебаний от исходной.

Наиболее существенное влияние на величину разброса II-го рода оказывает соотношение расстройки и демпфирования, характеризующее параметром

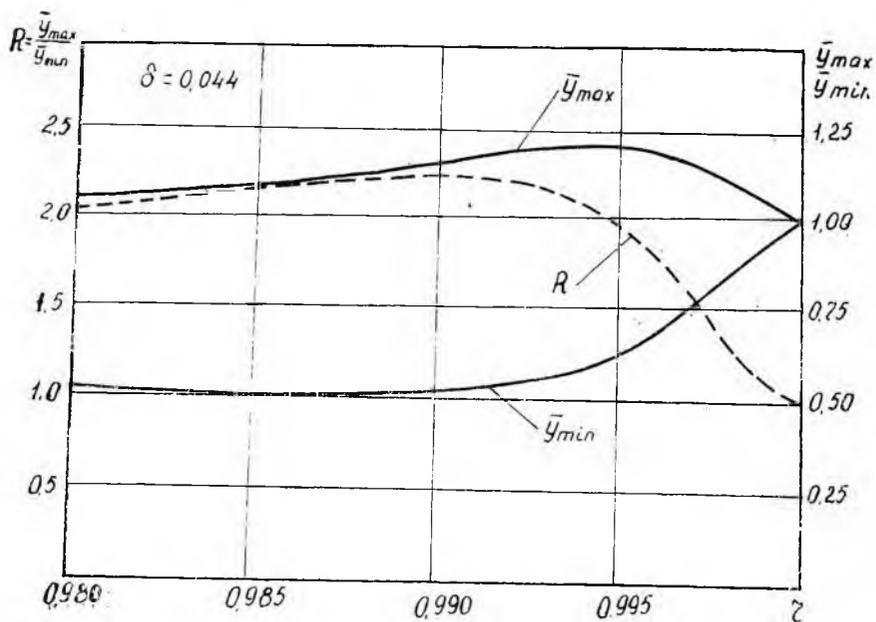
$$\nu = \frac{1-r^2}{\mu} \quad (3)$$

Из (2) и (2a) следует, что смена знака расстройки, так же, как и изменение направления вращения возбуждающей нагрузки, будет приводить к изменению в расположении точек, имеющих максимальные и минимальные амплитуды.

В качестве примера на фиг. 1 приведена зависимость максимальных амплитуд в резонансной зоне, подсчитанных по выражению (2a), от угла  $\varphi$  в пределах одной полуволны деформации, для расстройки  $r^2 = 0,985$  и логарифмического декремента  $\delta = \mu\xi = 0,044$ . Разброс в этом случае достигает  $R = \frac{y_{\max}}{y_{\min}} = 2,2$ . На фиг. 2 представлена зависимость максимальных и минимальных амплитуд, а также разброса в пределах резонансной зоны от

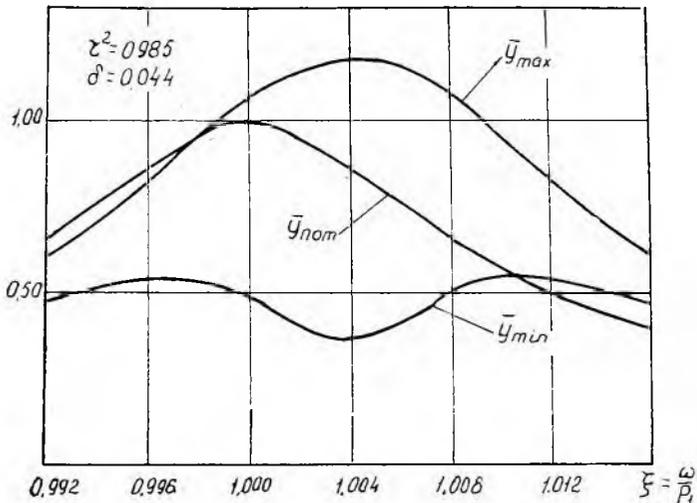


Фиг. 1. Распределение резонансных амплитуд по длине полу-волны деформации.

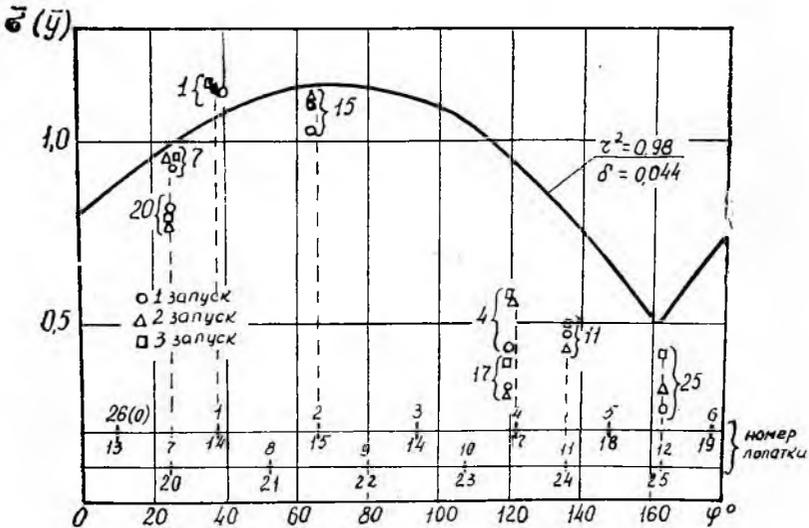


Фиг. 2. Зависимость разброса от настройки.

величины настройки для  $\delta=0,044$ . Максимум разброса достигается при  $r^2=0,980$ . Характер изменения амплитуд колебаний в резонансной зоне по частоте возбуждения для точек, на которых достигаются минимальные и максимальные амплитуды представлен на фиг. 3.



Фиг. 3. Зависимость амплитуд колебаний от частоты.



Фиг. 4. Разброс напряжений по лопаткам.

Анализ графиков на фиг. 1 и 2 свидетельствует, что введение весьма малых расстроек может приводить к существенному разбросу напряжений ( $R=2,2$ ). В пределах одной волны деформации наблюдаются два всплеска и два провала амплитуд напряжений,

при этом максимальные напряжения превышают номинальные (при  $\delta=0,044$ ) на  $\sim 20\%$ .

Для подтверждения качественной стороны явления были использованы результаты тензометрирования восьми лопаток первой ступени компрессора. Анализ производился при колебаниях по первой изгибной форме, возбуждаемой второй гармоникой. На фиг. 4 представлен график с теоретической кривой, построенной для  $r^2=0,98$  и  $\delta=0,044$ . Здесь же нанесены экспериментальные точки, полученные тензометрированием лопаток на работающем двигателе. Как видно, качественная сторона явления подтверждается экспериментом. Косвенно о том же свидетельствует и рассмотрение осциллограмм, когда при одновременной записи напряжений с нескольких лопаток наблюдался характер изменения напряжений в резонансной зоне, совпадающий с результатами, приведенными на фиг. 3.

Необходимо также отметить, что расчеты, проведенные для различных соотношений расстроек и демпфирования, свидетельствуют о том, что возможная величина разброса  $2 \div 2,5$  неплохо согласуется со статистическими сведениями, полученными на основании многолетнего опыта, по которым разброс укладывается в 2—3.

Очень малые расстройки, при которых достигается существенный разброс, свидетельствуют о практической нецелесообразности точной настройки лопаточных венцов, тем более, что в процессе сборки и работы двигателей неминуемо появление расстроек такого порядка, при которых разброс будет значительным и, естественно, нестабильным. Очевидно наиболее рациональным является искусственное введение более или менее существенной определенной расстройки, которая позволила бы уменьшить и, что наиболее важно, детерминировать разброс.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Смольников. Расчет свободных колебаний замкнутой рамной системы с циклической симметрией. Труды ЛПИ, № 120, 1960.
2. В. П. Иванов. Общие вибрационные свойства упругих систем, обладающих циклической симметрией. Труды КуАИ, вып. XXIX, 1967.