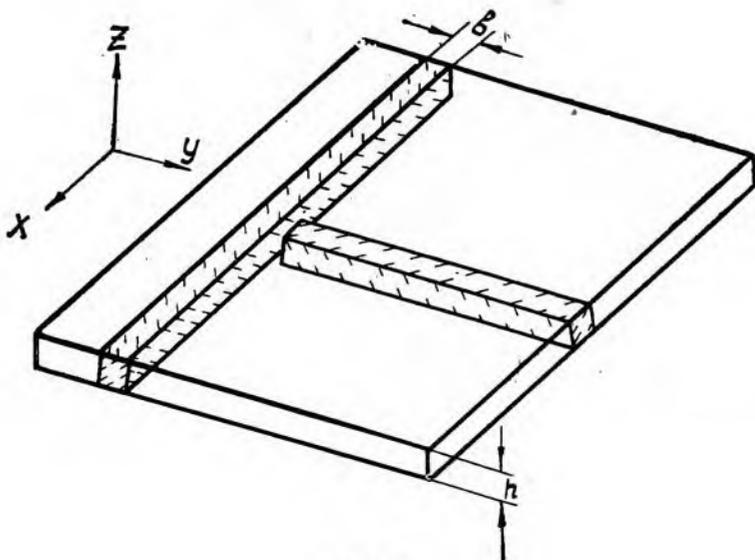


С. И. ИВАНОВ

**К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ
В ПЛАСТИНКАХ МЕТОДОМ ПОЛОСОК**

При выводе формул для определения остаточных напряжений в пластинках методом полосок используется допущение о постоянстве по ширине дополнительных напряжений в полоске [1]. Это до-



Фиг. 1.

пущение справедливо при малой ширине полоски и плавном изменении остаточных напряжений по толщине пластинки. Однако эти условия далеко не всегда выполняются. Например, остаточные напряжения, возникающие после механической обработки, локали-

зованы в тонком слое у поверхности детали, второе условие в этом случае не выполняется.

В настоящей статье показано, что окончательные формулы для определения напряжений не зависят от указанного допущения и, следовательно, могут применяться при любой ширине полоски и любом распределении напряжений по толщине пластинки.

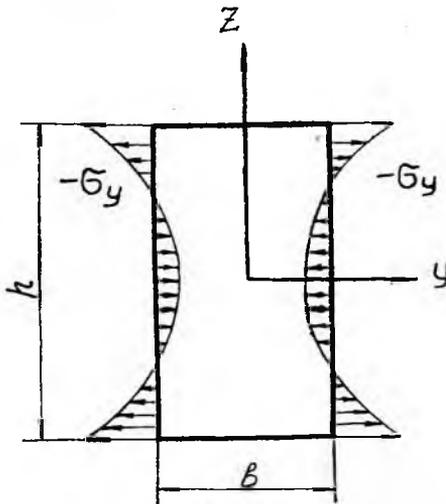
Будем рассматривать остаточные напряжения в пластинке (фиг. 1), когда

$$\sigma_x = \sigma_x(z); \quad \sigma_y = \sigma_y(z); \quad \tau_{xy} = 0.$$

В этом случае из условий равновесия следует:

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0.$$

Для определения напряжений из пластинки вырезаются две полоски: одна вдоль оси x , другая вдоль оси y . Рассмотрим полоску



Фиг. 2.

параллельную оси x . Вырезание полоски эквивалентно приложению на боковых гранях остаточных напряжений σ_y с обратным знаком (фиг. 2). Эквивалентное нагружение вызывает дополнительные напряжения в полоске, которые будем рассматривать в предположении плоской деформации

$$\sigma_{y\partial}(yz); \quad \sigma_{z\partial}(yz); \quad \sigma_{x\partial}(yz) = \mu(\sigma_{y\partial} + \sigma_{z\partial});$$

$$\tau_{yz\partial}(yz); \quad \tau_{xy\partial} = \tau_{zx\partial} = 0.$$

Вычислим суммарные усилия на торцах полоски с тем, чтобы убедиться в наличии плоской деформации.

$$\begin{aligned}
 N &= \int_F \sigma_{x0} dF = \mu \left(\int_F \sigma_{y0} dF + \int_F \sigma_{z0} dF \right) = \\
 &= \mu \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{y0} dy dz + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{z0} dy dz \right) \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M &= \int_F z \sigma_{x0} dF = \mu \left(\int_F z \sigma_{y0} dF + \int_F z \sigma_{z0} dF \right) = \\
 &= \mu \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{y0} dy dz + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{z0} dy dz \right) \quad (2)
 \end{aligned}$$

Из условия равновесия части полоски (фиг. 2) следует:

$$\left. \begin{aligned}
 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{y0} dz &= - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz; & \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma_{z0} dy &= 0; \\
 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{y0} dz &= - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_y dz; & \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z \sigma_{z0} dy &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Из условия равновесия части пластинки (фиг. 1)

$$\left. \begin{aligned}
 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz &= 0; & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_y dz &= 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

После подстановки (3) и (4) в (1) и (2) получим

$$N = 0; \quad M = 0$$

Следовательно, почти вся полоска, за исключением области возле торцов, испытывает плоскую деформацию. Суммируя исходные и дополнительные напряжения, получим напряжения в полоске после вырезки

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xn} &= \sigma_x + \mu(\sigma_{y0} + \sigma_{z0}); & \sigma_{yn} &= \sigma_y + \sigma_{y0}; \\
 \sigma_{zn} &= \sigma_{z0}; & \tau_{yzn} &= \tau_{yz0}; & \tau_{xyn} &= \tau_{x0n} = 0.
 \end{aligned}$$

Эти напряжения определяются через деформации или перемещения, возникающие при последовательном снятии слоев полоски. Нагружение, эквивалентное снятию слоя толщиной a , показано на фиг. 3. На фиг. 3, а изображены усилия по вертикальной плоскости среза, а на фиг. 3, б — по горизонтальной плоскости. Если при снятии слоев регистрируется относительная деформация ϵ_x

на нижних волокнах, то ее необходимо выразить через освобожденные усилия

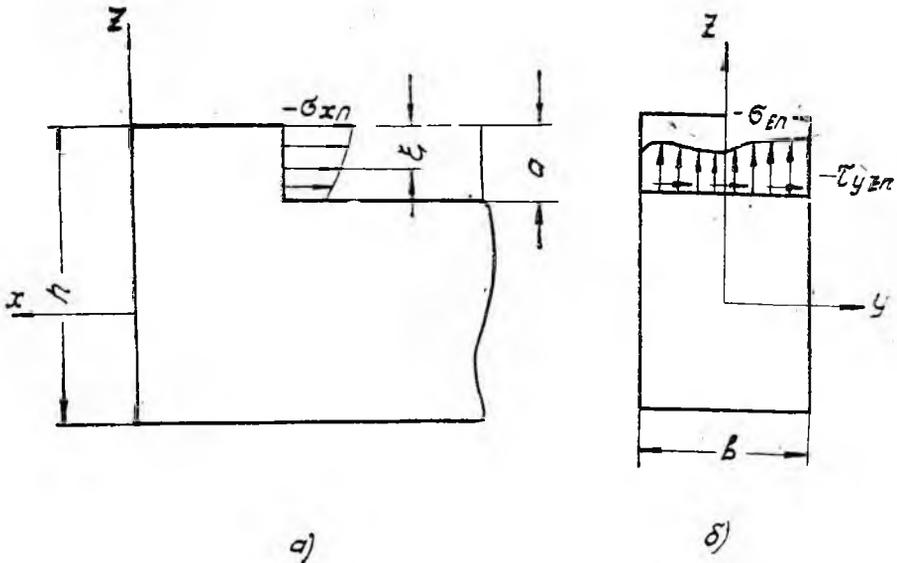
$$\epsilon_x = \epsilon_{xa} + \epsilon_{xb}, \quad (5)$$

где ϵ_{xa} — деформация, вызванная нагрузкой по вертикальным плоскостям, и

ϵ_{xb} — деформация от нагрузки по горизонтальной плоскости.

Для вычисления первого слагаемого можно применить теорию изгиба стержней.

$$\epsilon_{xa} = \frac{N}{EF} - \frac{M}{EW}. \quad (6)$$



Фиг. 3

Выражение для нормальной силы

$$N = \int_0^a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma_{xn} d\xi dy = \int_0^a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma_x d\xi dy + \\ + \mu \left(\int_0^a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma_{y\partial} d\xi dy + \int_0^a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma_{z\partial} d\xi dy \right)$$

Учитывая (3), получим

$$N = b \int_0^a (\sigma_x + \mu \langle \sigma_{y\partial} \rangle) d\xi \quad (7)$$

где

$$\langle \sigma_{y\partial} \rangle = \frac{1}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma_{y\partial} dy$$

Выражение для изгибающего момента

$$M = \int_0^a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{h+a}{2} - \xi \right) \sigma_{xn} d\xi dy = \int_0^a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{h+a}{2} - \xi \right) \sigma_x d\xi dy + \\ + \mu \left[\int_0^a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{h+a}{2} - \xi \right) \sigma_{y\partial} d\xi dy + \int_0^a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{h+a}{2} - \xi \right) \sigma_{z\partial} d\xi dy \right].$$

После преобразований, с учетом (3), получим

$$M = b \frac{(h+a)}{2} \int_0^a (\sigma_x + \mu \langle \sigma_{y\partial} \rangle) d\xi - b \int_0^a \xi (\sigma_x + \mu \langle \sigma_{y\partial} \rangle) d\xi \quad (8)$$

Подстановка (7) и (8) в выражение (6) приводит к следующему результату

$$\varepsilon_{xa} = - \frac{2(h+2a)}{E(h-a)^2} \int_0^a (\sigma_x + \mu \langle \sigma_{y\partial} \rangle) d\xi + \\ + \frac{6}{E(h-a)^2} \int_0^a \xi (\sigma_x + \mu \langle \sigma_{y\partial} \rangle) d\xi. \quad (9)$$

Для вычисления ε_{xb} рассматривается нагружение, изображенное на фиг. 3, б. В случае плоской деформации этим нагружением вызываются следующие напряжения:

$$\sigma_y^0(yz); \quad \sigma_z^0(yz); \quad \sigma_x^0(yz) = \mu (\sigma_y^0 + \sigma_z^0); \\ \tau_{yz}^0(yz); \quad \tau_{xy}^0 = \tau_{zx}^0 = 0.$$

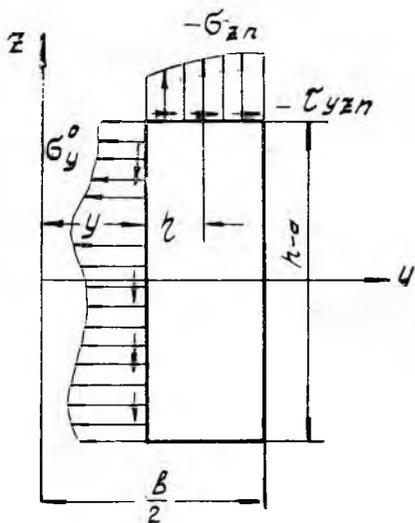
Усилия, действующие на торцах полоски, приведем к центру тяжести оставшегося сечения.

$$N^0 = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\frac{h-a}{2}}^{\frac{h-a}{2}} \sigma_x^0 dydz = \mu \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\frac{h-a}{2}}^{\frac{h-a}{2}} \sigma_y^0 dydz + \right. \\ \left. + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\frac{h-a}{2}}^{\frac{h-a}{2}} \sigma_z^0 dydz \right) \quad (10)$$

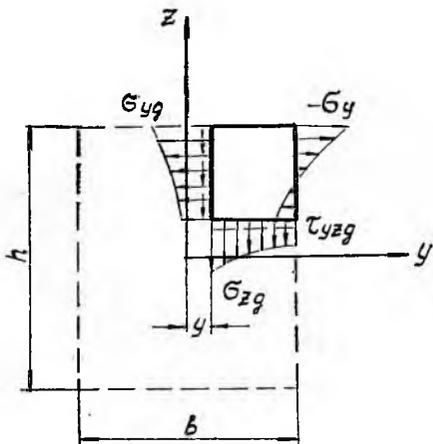
$$M^0 = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\frac{h-a}{2}}^{\frac{h+a}{2}} z \sigma_x^0 dy dz = \mu \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\frac{h-a}{2}}^{\frac{h+a}{2}} z \sigma_y^0 dy dz + \right. \\ \left. + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\frac{h-a}{2}}^{\frac{h+a}{2}} z \sigma_z^0 dy dz \right). \quad (11)$$

В этих выражениях можно осуществить переход к напряжениям σ_y и $\langle \sigma_{y\partial} \rangle$. С этой целью рассматривается равновесие части полочки (фиг. 4). Проектируя силы на ось y , получим

$$\int_{-\frac{h-a}{2}}^{\frac{h-a}{2}} \sigma_y^0 dz = - \int_0^{\frac{b}{2}-y} \tau_{yzn} d\eta \quad (12)$$



Фиг. 4.



Фиг. 5

Из условия равновесия элемента исходной полочки (фиг. 2) можно получить в соответствии с фиг. 5

$$\int_0^{\frac{b}{2}-y} \tau_{yz\partial} d\eta = - \int_0^a \sigma_y d\xi - \int_0^a \sigma_{y\partial} d\xi \quad (13)$$

Из условий равновесия элемента на фиг. 4 следует:

$$\int_{-\frac{h-a}{2}}^{\frac{h-a}{2}} z \sigma_y^0 dz = \int_0^{\frac{b}{2}-y} \eta \sigma_{zn} d\eta - \frac{(h-a)}{2} \int_0^{\frac{b}{2}-y} \tau_{yzn} d\eta. \quad (14)$$

Применяя уравнение статики к элементу на фиг. 5, получим

$$\int_0^{\frac{b}{2}-y} \eta \sigma_{z\partial} d\eta = \int_0^a (a-\xi) \sigma_y d\xi + \int_0^a (a-\xi) \sigma_{y\partial} d\xi. \quad (15)$$

Из условий равновесия части полоски, изображенной на фиг. 3, б,

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma_z^0 dy = - \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma_{zn} dy. \quad (16)$$

Подстановка (12) — (16) и (3), с учетом равенств

$$\sigma_{zn} = \sigma_{z\partial} \text{ и } \tau_{yzn} = \tau_{yz\partial},$$

в выражения для N^0 и M^0 приводит к следующим результатам:

$$N^0 = \mu b \int_0^a (\sigma_y + \langle \sigma_{y\partial} \rangle) d\xi. \quad (17)$$

$$M^0 = \mu b \left[\frac{h+a}{2} \int_0^a (\sigma_y + \langle \sigma_{y\partial} \rangle) d\xi - \int_0^a \xi (\sigma_y + \langle \sigma_{y\partial} \rangle) d\xi \right]. \quad (18)$$

Добавление к нагружению, изображенному на фиг. 3, б, усилий $-N^0$ и $-M^0$ позволяет определить ε_{xb}

$$\varepsilon_{xb} = -\frac{N^0}{EF} + \frac{M^0}{EW}. \quad (19)$$

После подстановки значений соответствующих величин и преобразований

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xb} &= \frac{2\mu(h+2a)}{E(h-a)^2} \int_0^a (\sigma_y + \langle \sigma_{y\partial} \rangle) d\xi - \\ &- \frac{6\mu}{E(h-a)^2} \int_0^a \xi (\sigma_y + \langle \sigma_{y\partial} \rangle) d\xi. \end{aligned} \quad (20)$$

Выражение (5) с учетом (9) и (20) принимает следующий вид:

$$\varepsilon_x = -\frac{2(h+2a)}{E(h-a)^2} \int_0^a (\sigma_x - \mu\sigma_y) d\xi + \frac{6}{E(h-a)^2} \int_0^a \xi (\sigma_x - \mu\sigma_y) d\xi. \quad (21)$$

Полученное соотношение является интегральным уравнением для $\sigma_x - \mu\sigma_y$. Решение этого уравнения [1] приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \sigma_x - \mu\sigma_y = & -\frac{1}{2} E (h - a) \frac{d\varepsilon_x}{da} + 2E\varepsilon_x - \\ & - 3E (h - a) \int_0^a \frac{\varepsilon_x}{(h - \xi)^2} d\xi. \end{aligned} \quad (22)$$

Аналогичным путем для полоски, вырезанной вдоль оси y , можно получить

$$\begin{aligned} \sigma_y - \mu\sigma_x = & -\frac{1}{2} E (h - a) \frac{d\varepsilon_y}{da} + 2E\varepsilon_y - \\ & - 3E (h - a) \int_0^a \frac{\varepsilon_y}{(h - \xi)^2} d\xi. \end{aligned} \quad (23)$$

Формулы (22) и (23) позволяют вычислить остаточные напряжения в пластинке σ_x и σ_y по деформациям ε_x и ε_y , замеренным в двух взаимно перпендикулярных полосках при последовательном снятии слоёв.

Аналогичные формулы были получены в работе [1] для частного случая, когда $\sigma_{y\partial} = -\sigma_y$; $\sigma_{x\partial} = -\mu\sigma_y$ и $\sigma_{z\partial} = \tau_{yz\partial} = 0$ (случай узкой полоски с плавным изменением остаточных напряжений по толщине пластинки). Здесь эти формулы получены без указанных ограничений, поэтому они применимы при любом законе изменения остаточных напряжений по толщине пластинки и любой ширине полоски. Не представляет затруднений показать, что полученный результат остается справедливым при определении остаточных напряжений через перемещения полоски при снятии слоёв.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Биргер. Остаточные напряжения. Машгиз, 1963 г.