

Рис. 5. Изменение сопряжённой  $\psi_{\lambda}$  при выравнивании скорости на орбите Марса

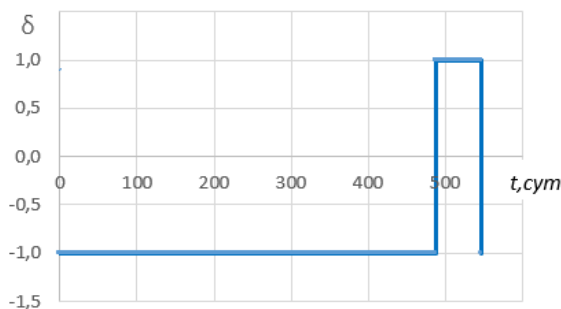


Рис. 6. Изменение функции включения-выключения управляющих плоскостей  $\delta$  при выравнивании скорости на орбите Марса

### Заключение

В работе описана математическая модель управляемого движения КАСП при использовании управляющих поверхностей. Описана математическая модель углового движения КАСП, необходимого для осуществления оптимального перелёта с орбиты Земли на орбиту Марса. Проведён баллистический расчёт пролёта КАСП орбиты Марса, а также перелёта к Марсу с выравниванием скорости.

### Библиографический список

1. Поляхова Е.Н. Космический полёт с солнечным парусом / Под ред. В.А. Егорова. Изд. стереотип. – М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2018.
2. Старинова О.Л. Расчёт межпланетных перелётов космических аппаратов с малой тягой. – Самара: Издательство Самарского научного центра РАН, 2007.

УДК 681.51

Старинова О.Л., Лобыкин А.А.

## ОПТИМИЗАЦИЯ ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКИХ ПЕРЕЛЁТОВ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ С РАЗНОТИПНЫМИ ЭЛЕКТРОРАКЕТНЫМИ ДВИГАТЕЛЯМИ

Одним из путей повышения массовой эффективности космических перелётов является использование маршевой двигательной установки (ДУ) на базе электроракетных двигателей, обладающих высокой скоростью истечения. Такие ДУ требуют наличия на борту энергоустановки повышенной мощности. Панели солнечных батарей, хорошо зарекомендовавшие себя в околоземном пространстве,

становятся практически бесполезными при полётах за орбиту Марса и Юпитера из-за снижения относительной мощности Солнечного излучения с удалением от Солнца. Использование для межпланетных КА ядерных энергоустановок, мощность которых не падает с удалением от Солнца, сдерживается отсутствием опыта их применения в качестве энергоустановки для ЭРД.

Международный проект «Демокритос» [1] направлен на проведение одновременного испытания ядерной энергоустановки (Россия, ГНЦ ФГУП «Центр Келдыша») и целого набора электроракетных двигателей различных стран. Планируется, что КА «Демокритос» использует в качестве маршевой ДУ (рисунок 1) набор из двадцати двух ЭРД семи стран: Россия – ИД-500; Германия – HIPARC, MARC, SX3, THITUS, RIT-2X, RIT-2X-HS, RIT-2X-HS+, RIT-3X, RIT-4X; Австрия – NANO, NANO R3, NANO IR3, Micro R3, NEO; Франция – PPS-20k; Италия – HT-20k; Япония – XP-6; США – HiPER, NEXIS DM 1, NASA-457M, 457Mv2. Пилотной целью проекта является полёт на Марс, возвращение на Землю и перелёт в систему Юпитера для исследования Европы [2].

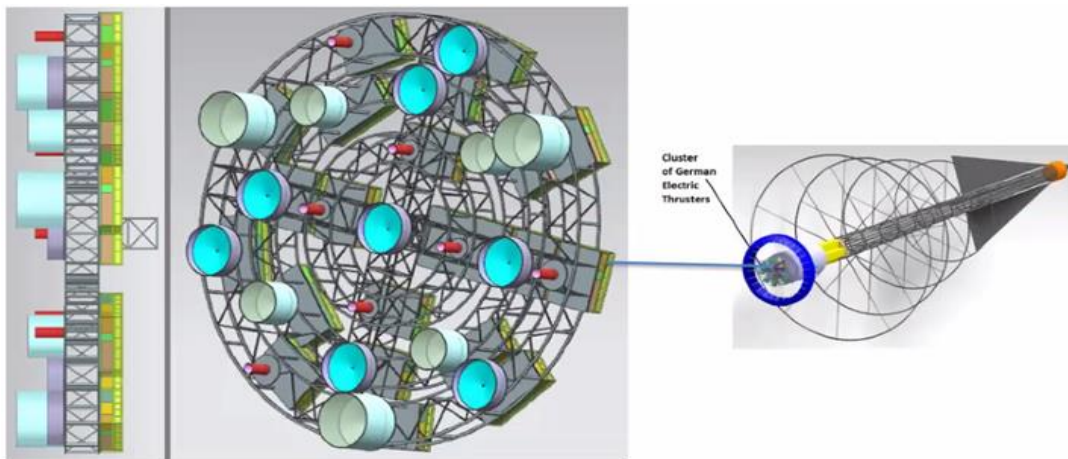


Рис. 1. Схема расположения ЭРД на КА «Демокритос»

Для выполнения программы «Демокритос» кроме технического согласования всех компонентов проекта требуется разработать методику формирования номинальной программы управления ДУ, содержащей разнотипные ЭРД. Проектная схема КА (см. рис. 1) предполагает, что изменение направления вектора тяги осуществляется за счёт поворота КА относительно центра масс, каждый ЭРД (или группа ЭРД) могут быть включены или выключены независимо. Кроме того, предполагается, что мощности энергоустановки достаточно для одновременной работы всех ЭРД, входящих в ДУ. С учётом этих технических ограничений мы приходим к следующей постановке задачи.

Требуется определить программу управления ДУ  $\mathbf{u}(t) = (\mathbf{e}, \delta_1, \dots, \delta_n)^T$  обеспечивающую выполнение цели миссии за заданное время  $T$  с минимальной мас-

сой израсходованного рабочего тела  $m_{PT} = \int_0^T \sum_{i=1}^n \frac{a_{0i} \delta_i}{c_i} dt \rightarrow \min$ . Запишем уравнения гелиоцентрического движения КА в безразмерном виде

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}, \quad \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{g} + \mathbf{e} \sum_{i=1}^n \frac{a_{0i} \delta_i}{1-m}, \quad \frac{dm}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{a_{0i} \delta_i}{c_i}. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{V}$  – гелиоцентрические безразмерные радиус-вектор и скорость КА,  $m$  – масса израсходованного рабочего тела, отнесённая к стартовой массе,  $\mathbf{g}$  – безразмерное ускорение от гравитационных сил,  $\mathbf{e}$  – единичный вектор направления маршевого ускорения,  $\delta_i \in \{0, 1\}$  – функция включения – выключения  $i$ -го двигателя,  $a_{0i}$  и  $c_i$  – безразмерные величины ускорения и скорости истечения  $i$ -го двигателя.

Используем принцип максимума Понтрягина для решения поставленной задачи. Введём вектора фазовых координат  $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \mathbf{V}, m)^T$  и сопряжённых переменных  $\boldsymbol{\psi} = (\boldsymbol{\psi}_r, \boldsymbol{\psi}_v, \psi_m)^T$  и составим Гамильтониан

$$H = \boldsymbol{\psi}_r \mathbf{V} + \boldsymbol{\psi}_v \left( \mathbf{g} + \mathbf{e} \sum_{i=1}^n \frac{a_{0i} \delta_i}{1-m} \right) + \psi_m \sum_{i=1}^n \frac{a_{0i} \delta_i}{c_i}. \quad (2)$$

Легко получить, что оптимальное направление ускорения определяется тривиальной формулой  $\mathbf{e} = \frac{\boldsymbol{\psi}_v}{|\boldsymbol{\psi}_v|}$ , а функция включения – выключения двигателей определяется выражением

$$|\boldsymbol{\psi}_v| \sum_{i=1}^n \frac{a_{0i} \delta_i}{(1-m)} + \psi_m \sum_{i=1}^n \frac{a_{0i} \delta_i}{c_i} = \sum_{i=1}^n \left( \left( \frac{|\boldsymbol{\psi}_v|}{1-m} a_{0i} + \psi_m \frac{a_{0i}}{c_i} \right) \delta_i \right). \quad (3)$$

Сопряжённый множитель  $\psi_m$  является невозрастающей функцией, так как правая часть соответствующего сопряжённого уравнения всегда меньше или равна (в случае, когда все двигатели выключены) нулю. Согласно условию трансверсальности, в конечный момент времени она должна принимать отрицательное значение, нормировка  $\psi_m(t=0) = -1$  обеспечит выполнение этого условия. Следовательно, значение  $\psi_m$  будет отрицательно всегда в процессе моделирования.

Обозначим  $x = |\boldsymbol{\psi}_v|$ ,  $y = \frac{|\boldsymbol{\psi}_v|}{1-m}$  и преобразуем формулу (3) к виду

$$H_\delta(x, y) = \sum_{i=1}^n \left( \left( -\frac{a_{0i}}{c_i} x + a_{0i} y \right) \delta_i \right). \quad (4)$$

Таким образом, максимум гамильтониана по функции включения – выключения определяется линейным выражением, коэффициенты которого зависят от

проектных параметров используемых двигательных установок и не меняются для всего перелёта, а переменные  $x$ ,  $y$  от значений фазовых координат и сопряжённых переменных в текущее время. Поскольку массив возможных значений функций включения-выключения является конечномерным (имеет размерность  $2^n$ ), то максимум (4) определяется взаимным расположением  $2^n$  плоскостей, а  $n$ -мерное пространство значений  $\delta_i$  разделяется на области проекциями линий пересечения этих плоскостей.

Рассмотрим простейший случай использования ДУ с двумя типами ЭРД, характеристики которых показаны в табл. 1. В этой же таблице приведены обозначения для выражения (4) в рассматриваемых четырёх случаях.

Проиллюстрируем определение максимума (4) графически. На рис. 2а показаны значения выражения (4) в зависимости от переменных  $x$ ,  $y$ . Четыре плоскости образуют шесть линий пересечения (четыре линии попарно совпадают) показанные на рис. 2б.

Таблица 1. Характеристики используемых ЭРД и возможные варианты включений –выключений

|            | двигатель | $a_{0i}$ | $c_i$ | $H_{(0,0)} = H_1$ | $H_{(0,1)} = H_2$ | $H_{(1,0)} = H_3$ | $H_{(1,1)} = H_4$ |
|------------|-----------|----------|-------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $\delta_1$ | ИД-500    | 0,059    | 2,518 | 0                 | 0                 | 1                 | 1                 |
| $\delta_2$ | HiPER     | 0,056    | 3,223 | 0                 | 1                 | 0                 | 1                 |

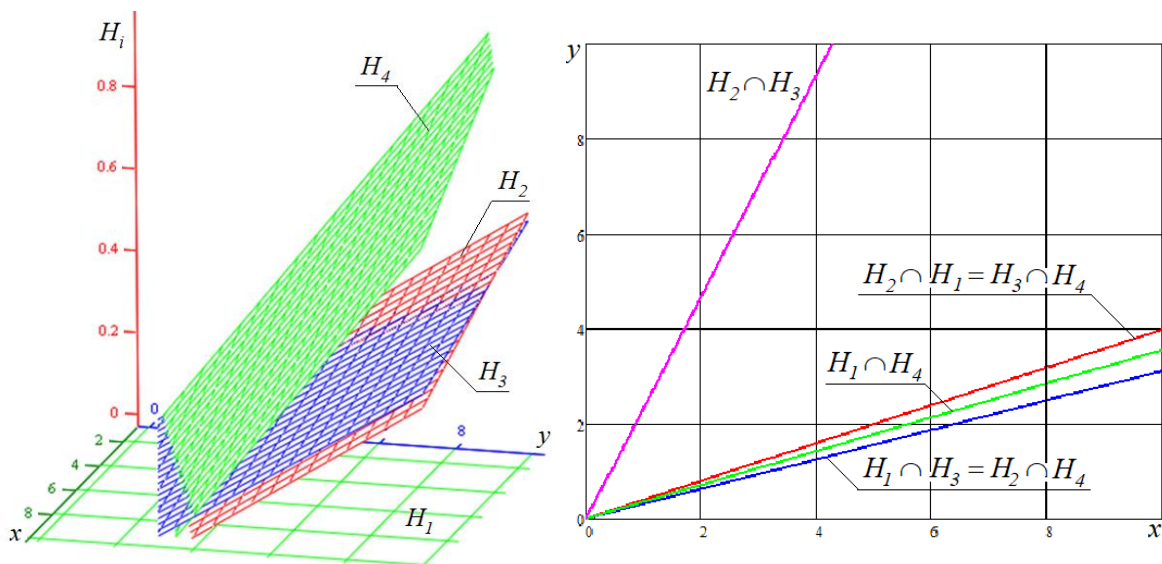


Рис. 2. Значения выражения (4) (а) и соответствующие линии переключения программы управления (б)

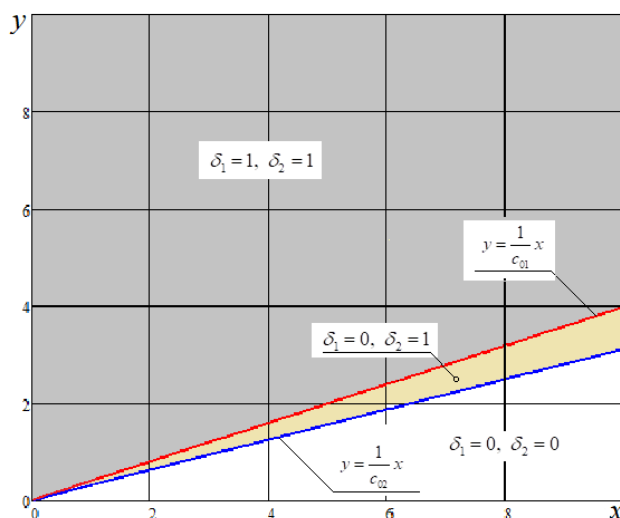


Рис. 3. Полученные области включения-выключения для двух типов ЭРД

Для случая плоского движения поставленная задача поиска оптимального управления сводится к следующей двухточечной трёхпараметрической краевой задаче. Требуется найти такие начальные значения сопряжённых переменных, чтобы выполнялись начальные и конечные условия, соответствующие положениям Земли и Марса на плоскости эклиптики.

$$\begin{array}{ll}
 t = 0 & t = T \\
 r = r_0 & r(T) = r_k \\
 \varphi = \varphi_0 & \varphi(T) - \text{не фиксировано} \\
 m = 0 & m(T) \rightarrow \min \\
 V_r = V_{r_0} & V_r(T) = V_{r_k} \\
 V_\varphi = V_{\varphi_0} & V_\varphi(T) = V_{\varphi_k} \\
 \psi_r = x_1 & \psi_r(T) - \text{не фиксировано} \\
 \psi_\varphi = 0 & \psi_\varphi(T) = 0 \\
 \psi_m = -1 & \psi_m(T) < 0 \\
 \psi_{v_r} = x_2 & \psi_{v_r}(T) - \text{не фиксировано} \\
 \psi_{V_\varphi} = x_3 & \psi_{V_\varphi}(T) - \text{не фиксировано}
 \end{array} \tag{5}$$

Система дифференциальных уравнений движения (1) и сопряжённых переменных интегрировалась численно с использованием метода Рунге-Кутты 4-го порядка. Краевая задача решалась модифицированным методом Ньютона с помощью авторского программного комплекса [3].

На рис. 4 показаны графики изменения относительной массы рабочего тела во время перелёта для различных заданных длительностей. Можно заметить, что при большой длительности перелёта (более 350 суток) на траектории включается только наиболее экономичный с точки зрения расхода двигатель HiPER и сохра-

няется традиционная структура управления – два активных участка в начале и конце траектории, разделённые пассивным участком. При сокращении требуемой длительности в начале и конце траектории появляются участки с включением обоих двигателей HiPER и ИД-500.

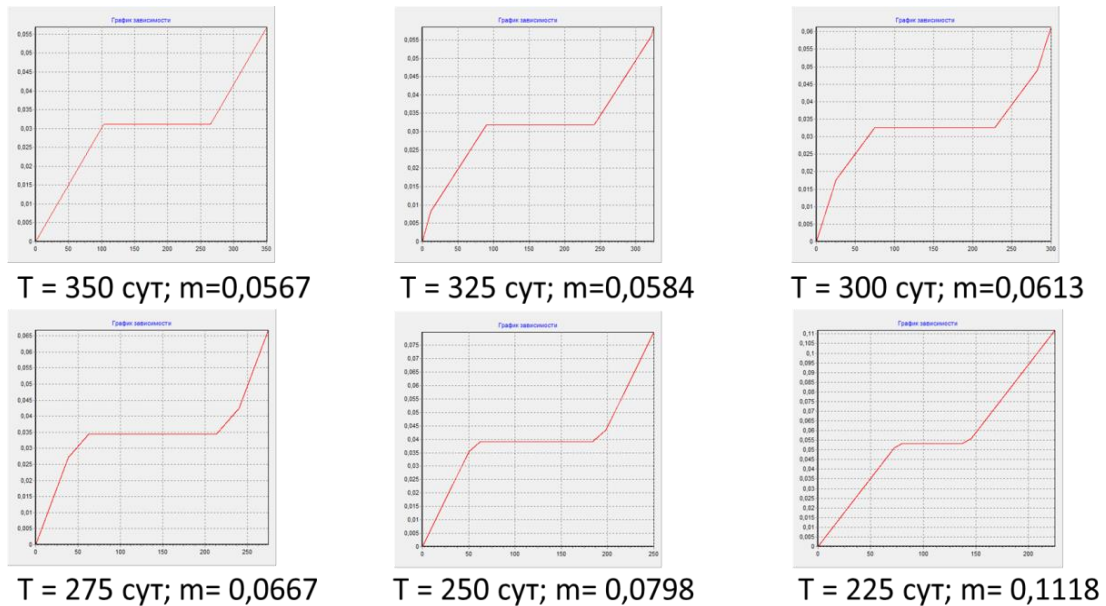


Рис. 4. Изменение относительного расхода рабочего тела для перелётов Земля-Марс, различных длительностей

На графиках зависимостей, представленных на рис. 4, этим участкам соответствует кривая с большей скоростью изменения массы израсходованного рабочего тела. По мере сокращения требуемой длительности перелёта продолжительность участков с работой двух двигателей увеличивается, их положение в начале и конце траектории сохраняется.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 22-29-01092, <https://rscf.ru/project/22-29-01092/>.

### Библиографический список

1. Jansen, Frank, et al. "DEMOCRITOS demonstrators for realization of nuclear electric propulsion of the European roadmaps MEGANIT & DiPoP." Transactions of The Japan Society For Aeronautical and Space Sciences, Aerospace Technology Japan 14.ists30 (2016): P. 225-233.
2. [https://www.dfki.de/fileadmin/user\\_upload/import/10731\\_20191205\\_MARS\\_EUROP\\_A\\_INPPS\\_Flagship\\_High\\_Power\\_Space\\_Transportation.pdf](https://www.dfki.de/fileadmin/user_upload/import/10731_20191205_MARS_EUROP_A_INPPS_Flagship_High_Power_Space_Transportation.pdf)
3. Старинова О.Л. Сергаева Е.А. Рожков М.А. Свидетельство о праве на интеллектуальную собственность «Определение оптимального управления движением космического аппарата с электроракетной двигательной установкой, применяя принцип максимума Понтрягина» № патента: 2022617890. приоритет заявки: 2022-03-18. дата публикации: 2022-04-26 т.