

8. Sanders D.A., Verhulst F., Murdock D. Averaging methods in nonlinear dynamical systems // New York: Springer. 2007, 434 p.

9. Заболотнов Ю.М. Асимптотический анализ квазилинейных уравнений движения в атмосфере космического корабля с малой асимметрией III // Космические исследования. 1994. Т. 32. С. 112-125.

10. Kendall A., Weimin H., David S. Numerical solution of ordinary differential equations // New Jersey: John Wiley & Sons publication. 2009. 261 с.

УДК 629.197

**Боровков В.А.**

## **К ВОПРОСУ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОРБИТЫ МАЛОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА ИНТЕРВАЛЕ ОРБИТАЛЬНОГО ПОЛЁТА ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ВКЛЮЧЕНИИ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКИ МАЛОЙ ТЯГИ**

Для навигационного обеспечения полёта малого космического аппарата (МКА) типа «АИСТ», разработки АО «РКЦ «Прогресс», планируется использование навигационных измерений, поступающих от навигационного приёмника (НП) установленного на борту и использующего радионавигационное поле глобальных навигационных спутниковых систем ГЛОНАСС и GPS. Такой подход к навигационному обеспечению космических комплексов используется с конца XX века в России и за рубежом. Сформированы и хорошо отработаны подходы к решению задачи навигационного обеспечения КА для различных схем полёта. Однако, схема полёта МКА имеет свою специфику. Она предполагает частое (до нескольких раз за сутки) включение двигательной установки малой тяги для поддержания параметров орбиты. Периодические включения двигательной установки, которые прерывают участки пассивного орбитального движения, необходимо учитывать при реализации баллистического обеспечения.

Ставится задача навигационно-баллистического обеспечения (НБО) полёта МКА, состоящая в определении оценки параметров движения  $\hat{q}(t_N)$  и, при необходимости, оценки баллистического коэффициента ( $\hat{S}_{\text{бал}}$ ) на момент времени  $t_N$  по результатам обработки векторов навигационных решений  $q(t_1), q(t_2), \dots, q(t_N)$ , которые формируются в виде шестимерных векторов в бортовом НП  $q(t_j)=(r, v)|_{t_j}=(X_j, Y_j, Z_j, V_{x_j}, V_{y_j}, V_{z_j})$  в моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_N$ . При этом задача вычисления оценок  $\hat{q}(t_N)$  и  $\hat{S}_{\text{бал}}$  решается совместно на интервале  $[t_1, t_N]$  [1].

Для получения навигационных оценок  $\hat{q}(t_N)$  и  $\hat{S}_{\text{бал}}$  в задачах НБО используется алгоритм, основанный на методе наименьших квадратов (МНК). Результатом решения алгоритма по МНК является вектор навигационных оценок  $\hat{q}(t_N)$  и  $\hat{S}_{\text{бал}}$  на время  $t_N$ , которые соответствуют минимуму функционала суммы квадратов отклонений. Функционал имеет вид:

$$I(\hat{q}(t_N), \hat{S}_{\text{бал}}) = \sum_{j=1}^N \left\{ [L_p(t_j, \hat{q}(t_N), \hat{S}_{\text{бал}}) - q(t_j)]^T K_j^{-1} [L_p(t_j, \hat{q}(t_N), \hat{S}_{\text{бал}}) - q(t_j)] \right\}, \quad (1)$$

где  $L_p(t_j, q(t_N), S_{\text{бал}})$  – оператор прогнозирования движения МКА, который пересчитывает вектор  $q(t_N)$  на момент времени  $t_j$ ;  $p = 4, 8, 16, 32$  – порядок используемых гармоник в разложении гравитационного поля Земли с использованием баллистического коэффициента  $S_{\text{бал}}$  размерности  $\text{м}^3/(\text{кгс} \cdot \text{с}^2)$ ;  $K_j$  – матрица весовых коэффициентов (принимается  $K_j = K_q(t_j)$  – априорная информация о номинальной величине погрешности НП).

Таким образом, вектор навигационной оценки  $\hat{q}(t_N)$  и оценка  $\hat{S}_{\text{бал}}$  минимизируют функционал (1) и являются решением навигационной задачи на интервале  $[t_1, t_N]$ . При этом нужно заметить, что уточнённый параметр  $\hat{S}_{\text{бал}}$  фактически является решением задачи параметрической идентификации модели движения МКА на интервале  $[t_1, t_N]$ .

После получения навигационных оценок  $\hat{q}(t_N)$  и  $\hat{S}_{\text{бал}}$  на время  $t_N$  на временных промежутках до получения последующих оценок для обеспечения потребителей навигационной информации на заданный момент времени  $t^*$  с использованием оператора прогнозирования  $L_p(t^*, \hat{q}(t_N), \hat{S}_{\text{бал}})$  осуществляется пересчёт оценки  $\hat{q}(t_N)$  с оценкой баллистического коэффициента  $\hat{S}_{\text{бал}}$ . Описанный подход к навигационному обеспечению МКА возможен при отсутствии динамических операций (включения двигательной установки (ДУ)) у КА на временных интервалах  $[t_1, t_N]$  и  $[t_N, t^*]$ .

Наличие динамических операций на интервале  $[t_1, t_N]$  делает некорректным использование выражения (1) для нахождения оценок  $\hat{q}(t_N)$  и  $\hat{S}_{\text{бал}}$ , а на интервале  $[t_N, t^*]$  не позволяет использовать оператор прогнозирования  $L_p(t_j, \hat{q}(t_N), \hat{S}_{\text{бал}})$  по причине необходимости учёта уточнённых знаний о величине импульса манёвра  $\Delta V$ . Это относится и к варианту использования ДУ малой тяги, которая периодически включается для поддержания параметров орбиты функционирования МКА на временных интервалах  $[t_1, t_N]$  и  $[t_N, t^*]$  нахождения навигационной оценки  $\hat{q}(t_N)$  и её прогнозирования. При редких включениях ДУ есть возможность при организации навигационного обеспечения МКА исключить из схем навигацион-

ного обеспечения на интервалах с включением ДУ вычисление оценки  $\hat{q}(t_N)$  и прогнозирование. При частых включениях ДУ возникает необходимость организовать навигационное обеспечение КА с учётом вычисления оценки величины импульса манёвра  $\Delta\hat{V}$ .

Следовательно, необходимо ввести дополнительный параметр идентификации с целью уточнения модели движения на интервале отработки импульса манёвра  $[t_1, t_N]$ .

Таким образом, целесообразно рассмотреть отличный от  $L_p$  оператор прогнозирования, в котором дополнительно учитываются параметры, соответствующие величине импульса манёвра:  $L_p^V(t_j, \hat{q}(t_N), \hat{S}_{\text{бал}}, \Delta V, t_{\text{вкл}}, t_{\text{раб}})$ , где  $\Delta V$  – величина импульса скорости манёвра (м/с);  $t_{\text{вкл}}$  – время включения ДУ (с);  $t_{\text{раб}}$  – время работы двигателя (с). Для оператора  $L_p^V$  минимизируемый функционал (1) принимает следующий вид:

$$I_2(\hat{q}(t_N), \hat{S}_{\text{бал}}, \Delta\hat{V}, t_{\text{вкл}}, t_{\text{раб}}) = \sum_{j=1}^N \left\{ [L_p^V(t_j, \hat{q}(t_N), \hat{S}_{\text{бал}}, \Delta\hat{V}, t_{\text{вкл}}, t_{\text{раб}}) - q(t_j)]^T K_j^{-1} [L_p^V(t_j, \hat{q}(t_N), \hat{S}_{\text{бал}}, \Delta\hat{V}, t_{\text{вкл}}, t_{\text{раб}}) - q(t_j)] \right\}. \quad (2)$$

В функционале  $I_2$  появляется дополнительный параметр оптимизации  $\Delta\hat{V}$ , который наряду с параметром  $\hat{S}_{\text{бал}}$  и вектором оценки  $\hat{q}(t_N)$  является решением, минимизирующим сумму квадратов (2).

Уточнённый параметр  $\Delta\hat{V}$  введён в оператор прогнозирования для идентификации модели движения в части влияния погрешностей величины импульса манёвра.

При решении задач НБО МКА при минимизации функционала  $I$  используется допущение, что уточнённый параметр  $\hat{S}_{\text{бал}}$  возможно использовать на интервале прогнозирования  $[t_N, t^*]$ , соизмеримом по величине с  $[t_1, t_N]$ , для уменьшения влияния погрешностей знания атмосферы. Погрешность  $\Delta V$ , которую предлагается уточнять посредством вычисления оценки  $\Delta\hat{V}$  при минимизации функционала (2), имеет другую природу. Однако можно предположить, что полученную оценку  $\Delta\hat{V}$  можно использовать в операторе прогнозирования  $L_p^V$  на последующих интервалах при работе ДУ. Описанный подход к решению задачи поиска навигационной оценки  $\hat{q}(t_N)$  и параметров идентификации  $\hat{S}_{\text{бал}}, \Delta\hat{V}$  с последующим использованием полученного решения в операторе прогнозирования  $L_p^V(t_j, q(t_N), S_{\text{бал}}, \Delta V, t_{\text{вкл}}, t_{\text{раб}})$  позволяет решать задачу НБО на интервале орбитального полёта при периодическом включении двигательной установки малой тяги.

Для обоснования данного подхода к решению задачи НБО на практике необходимы исследования с реальными данными.

Для априорной оценки эффективности предложенного подхода к решению задачи НБО приведём результаты сравнительного моделирования точностных характеристик навигационных оценок, полученных в результате минимизации функционалов (1) и (2) соответственно.

Моделирование проводилось для тестовых условий работы алгоритма с векторами для орбиты МКА со средней высотой  $H_{CP}=400$  км и наклоном  $97,1$  град. Результаты моделирования приведём для двух навигационных оценок  $\hat{q}^1(t_N)$  и  $\hat{q}^2(t_N)$ , полученных на интервале 40 минут с шагом обработки векторов из НП две минуты, которые получены в результате минимизации функционалов (1) и (2) соответственно с уточнением соответствующих параметров  $\hat{S}_{бал}$  и  $\Delta\hat{V}$ . При моделировании точностные характеристики НП для координат вектора  $q(t_j)=(X_j, Y_j, Z_j, V_{Xj}, V_{Yj}, V_{Zj})$  принимались равными СКО:  $\sigma_{Xj} = \sigma_{Yj} = \sigma_{Zj} = 30$  м;  $\sigma_{V_{Xj}} = \sigma_{V_{Yj}} = \sigma_{V_{Zj}} = 3$  см/с. Такой уровень точности измерительной информации из НП позволяет решать не только задачу поиска навигационных оценок  $\hat{q}^1(t_N)$  и  $\hat{q}^2(t_N)$ , но и одновременно параметров идентификации  $\hat{S}_{бал}$  и  $\Delta\hat{V}$  [2]. При расчётах принимались номинальные значения баллистического коэффициента  $\hat{S}_{бал} = 0,07$  м<sup>3</sup>/(кгс·с<sup>2</sup>) и величины одиночного импульса поддержания  $\Delta\hat{V} = 0,08$  м/с.

При моделировании принималось, что в результате нахождения оценки параметра  $\Delta\hat{V}$  при минимизации функционала (2) величина исходной погрешности уменьшается в два раза и при этом ошибки уточняемого параметра  $\hat{S}_{бал}$  при вычислении оценок  $\hat{q}^1(t_N)$  и  $\hat{q}^2(t_N)$  совпадают. Схема работы ДУ заключалась во включении на трёх последовательных витках каждых суток полёта.

Сравнительные точностные характеристики навигационных оценок  $\hat{q}^1(t_N)$  и  $\hat{q}^2(t_N)$  в абсолютном и относительном виде для тестовых условий приведены в таблице. В таблице приведены ошибки в орбитальной системе координат (ОСК), обусловленные погрешностями знания параметра  $\Delta\hat{V}$ . Для орбит МКА вклад в бюджет ошибки навигационной оценки от погрешности знания  $\Delta V$  может достигать 25%. Уточнённый параметр  $\Delta\hat{V}$  введён в оператор прогнозирования для идентификации модели движения в части влияния погрешностей знания значения  $\Delta V$ .

При моделировании варианта с интервалом работы ДУ  $[t_1, t_N]$ ,  $[t_N, t^*]$  при прогнозировании навигационной оценки  $\hat{q}^2$  на интервале  $[t_N, t^*]$  использовался уточнённый на интервале  $[t_1, t_N]$  параметр  $\Delta\hat{V}$ . Математический аппарат методов поиска оптимальных решений хорошо развит. Для поиска наборов оптимальных параметров  $\hat{q}(t_N), \hat{S}_{бал}$  и  $\hat{q}(t_N), \hat{S}_{бал}, \Delta\hat{V}$ , минимизирующих функционалы (1) и (2) соответственно, выбор варианта метода оптимизации не существен [1].

Таблица. Сравнение ошибок в ОСК, обусловленных погрешностями параметра  $\Delta V$ , двух векторов навигационных оценок  $\hat{q}^1 = \hat{q}^1(t_N)$  (без уточнения  $\Delta V$ ) и  $\hat{q}^2 = \hat{q}^2(t_N)$  (с уточнением  $\Delta V$ ) соответственно на интервалах прогнозирования в одни и двое суток ( $\Delta r$  – ошибка по высоте,  $\Delta t$  – ошибка вдоль орбиты)

Вариант навигационной оценки	Интервал работы ДУ	Ошибки оценки в ОСК			
		$\Delta r$ , м	$\Delta t$ , м	$\Delta r$ , м	$\Delta t$ , м
		в прогнозе на сутки		в прогнозе на двое суток	
$\hat{q}^1$	[ $t_1, t_N$ ]	55	3050	65	6300
$\hat{q}^2$		26	1525	32	3140
$\hat{q}^1$	[ $t_1, t_N$ ], [ $t_N, t^*$ ]	55	3050	85	6850
$\hat{q}^2$		26	1525	41	3400
		Отношение ошибок $\frac{\Delta \hat{q}^2}{\Delta \hat{q}^1}$ в ОСК в безразмерном виде к оценке $\hat{q}^1$ при работающем двигателе, б/р			
$\hat{q}^1$	[ $t_1, t_N$ ]	1	1	1	1
$\hat{q}^2$		0,47	0,50	0,49	0,49
$\hat{q}^1$	[ $t_1, t_N$ ], [ $t_N, t^*$ ]	1	1	1	1
$\hat{q}^2$		0,47	0,50	0,48	0,49

Кроме представленного в таблице выигрыша по точности навигационного обеспечения, полученная оценка  $\Delta \hat{V}$  параметра манёвра уточняет характеристики используемой ДУ.

Отметим, что повышению точности оценок параметров  $\hat{q}^1(t_N)$ ,  $\hat{q}^2(t_N)$ ,  $\hat{S}_{\text{бал}}$  и  $\Delta \hat{V}$  при минимизации функционалов (1) и (2) способствует увеличение длины интервала [ $t_1, t_N$ ] обрабатываемых векторов  $q(t_j)$  ( $i=1, \dots, N$ ), при котором времена  $t_{\text{вкл}}$  и  $t_{\text{раб}}$  находятся внутри интервала [ $t_1, t_N$ ]. Выбор длины интервала [ $t_1, t_N$ ] с учётом наличия в нём динамических операций относится к задаче выбора схем навигационного обеспечения.

Анализ данных таблицы позволяет сделать предварительный вывод, что представленный подход к решению задачи поиска навигационной оценки и параметров идентификации (при периодическом включении двигательной установки малой тяги) и использование полученного решения в операторе прогнозирования позволяет уменьшить ошибку вектора навигационных оценок (в части коррекции ошибок  $\Delta V$ ) на интервале орбитального полёта до 50%.

### Библиографический список

1. Эльясберг П.Е. Определение движения по результатам измерений. М.: Наука. 1976.
2. Справочник по теории автоматического управления / Под редакцией А.А. Красовского. М.: Наука. Гл. редакция физ. Мат. лит. 1987. 712 с.