Библиографический список

1. Майоров, В.В. Разработка экспериментальной модели ракеты «Capella-M» с целью развития профессиональных навыков студентов / В.В. Майоров, А.Ю. Демина, П.В. Фадеенков // Решетневские чтения : материалы XXV Междунар. науч. конф. (10–12 ноября 2021, г. Красноярск) : в 2 ч.; под общ. ред. Ю. Ю. Логинова. – Красноярск: Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т, 2021. – С. 36–37.

2. Лебедев, А.А. Динамика полёт беспилотных летательных аппаратов: учебное пособие для вузов / А.А. Лебедев, Л.С. Чернобровкин. –2-е изд., переработанное и доп. – Москва: «Машиностроение», 1973. – 616 с.

3. Динамика ракет: учебник для студентов вузов / К.А. Абгарян, Э.Л. Калязин, В.П. Мишин и др.; под общ. ред. В.П. Мишина. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Машиностроение, 1990 – 464 с.

4. Шатров, Я.Т. направлений разработки методов, технических решений и средств снижения техногенного воздействия на окружающую среду для реализации на борту космических средств выведения / Я.Т. Шатров, Д.А. Баранов, В.И. Трушляков [и др.] // Вестник СГАУ. – 2011. – № 1.

УДК 531.36, 629.7

Чжоу Сяо

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ И ГОМОТОПИИ В ЗАДАЧЕ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ПРИ СБЛИЖЕНИИ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Введение. Рассматривается применение метода коллокации и гомотопии в задачи сближение и задача оптимального управления относительным движением преобразуется в краевую задачу решения начальных значений сопряжённых переменных. Сравниваются метода коллокации и метод градиента с точки зрения эффективности интегрирования и времени решения.

Методы коллокации и гомотопии. Основная идея метода коллокации [1] заключается в дискретизации непрерывной временной кривой в конечный временной ряд, что позволяет преобразовать задачу проектирования траектории в масштабную нелинейную задачу проектирования (рис. 1).

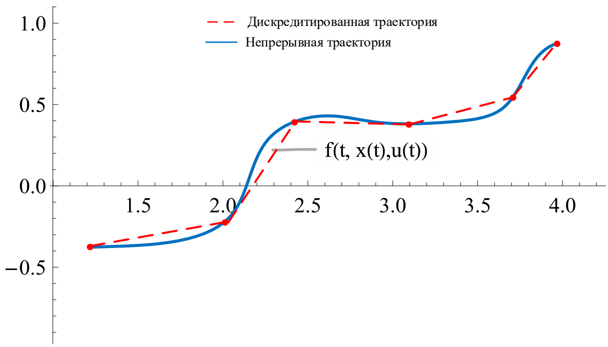

Рис. 1. Схема метода коллокации

Сначала дискредитируются непрерывные траектории движения и переменные состояния:

$$
\begin{aligned}
&t \to t_0 \ldots t_k \ldots t_N \qquad && v \to v_0 \ldots v_k \ldots v_N \\
&x \to x_0 \ldots x_k \ldots x_N \qquad && u \to u_0 \ldots u_k \ldots u_N
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь N обозначает степень дискретизации, чем больше N, тем меньше ошибка расчёта траектории после дискретизации. Дискредитированная траектория разбивается на N сегментов с N+1 дискретными точками. Интеграл уравнения дифференциальной динамики между каждыми двумя дискретными точками может быть аппроксимирован как:

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), u(t)\right)$$

$$x\left(t_{k+1}\right) = x\left(t_k\right) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f\left(\tau, x(\tau), u(\tau)\right) d\tau \approx x_{k+1} = x_k + \frac{h_k}{2}\left(f_{k+1} + f_k \right) \quad (2)$$

Решив задачу для каждого малого участка, в итоге получаем общую приближённую оптимальную траекторию. Методом гомотопии [2] вводится гомотопический параметр ε и строим приближённую функцию переключения. Когда ε достаточно мало, например $\varepsilon < 10^{-8}$, можно считать ε равным 0.

$$\delta^* = \begin{cases} 0 & \Delta < \varepsilon \quad , \\ \dfrac{\varepsilon + \Delta}{2\varepsilon} & -\varepsilon \le \Delta \le \varepsilon \, , \qquad \varepsilon \to 0 \\ 1 & \Delta > \varepsilon \quad , \end{cases} \qquad (3)$$

Таким образом, методом гомотопии позволяют использовать решение задачи оптимального по быстродействию в качестве начального приближения для решения задачи оптимального по моторному времени

Математическая модель относительного движения. Безразмерные дифференциальные уравнения относительного движения в цилиндрической системе координат для случая круговой опорной орбиты имеют следующий вид: [3 – 5]:

- (12)

где $\Delta r_{\text{ср}}$ – среднее смещение вдоль радиуса орбиты, $\Delta L_{\text{ср}}$ – среднее смещение вдоль орбиты, l_{x}, l_{y}– составляющие малой полуоси эллипса относительного движения КА в продольной плоскости, x_{z}, y_{z} – составляющие амплитуды колебаний относительного движения в боковой плоскости, α – угол отклонения вектора тяги от трансверсального направления, β – угол отклонения тяги от плоскости орбиты; $t_{МОТ}$ – моторное время двигатели, δ – функция переключения.

Критерий оптимальности – минимальное моторное время $J = \int_0^{t_f} \delta\, \mathrm{d}t \to \min$. Запишем Гамильтониан системы (1), уравнение сопряжённых переменных, оптимальное управление, определённое из условии максимума Гамильтониана [6-7]:

$$\begin{cases} H = \Psi_{\Delta r_{\text{ср}}} \delta\cos\alpha\cos\beta - \Psi_{\Delta L_{\text{ср}}}\left(1.5\Delta r_{\text{ср}} + \delta\sin\alpha\cos\beta\right) + \\ \quad +\Psi_{l_x}\left(\delta\cos\alpha\cos\beta - l_y\right) + \Psi_{l_y}\left(\dfrac{\delta\sin\alpha\cos\beta}{2} + l_x\right) + \\ \quad +\Psi_{x_z}\left(\dfrac{\delta\sin\beta}{2} - y_z\right) + \Psi_{y_z} x_z + \Psi_m\delta - \delta, \\ \dot{\Psi} = -\dfrac{\partial H}{\partial X}, \\ \alpha_{\text{опт}} = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{A}{B}\right),\ \beta_{\text{опт}} = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\Psi_{x_z}}{2\sqrt{A^2 + B^2}}\right). \end{cases} \tag{13}$$

Здесь

$$\Psi = \left[\Psi_{\Delta r_{\text{ср}}}, \Psi_{\Delta L_{\text{ср}}}, \Psi_{l_x}, \Psi_{l_y}, \Psi_{x_z}, \Psi_{y_z}\right]^{T},\ X = \left[\Delta r_{\text{ср}}, \Delta L_{\text{ср}}, l_x, l_y, x_z, y_z\right]^{T},$$

$$A = \frac{\Psi_{l_y}}{2} - \Psi_{\Delta L_{\text{ср}}},\ B = \Psi_{l_x} + \Psi_{\Delta r_{\text{ср}}}.$$

Функция переключения двигателей δ определяется из условия максимума Гамильтониана:

$$\delta = \begin{cases} 0 & \Delta < 0, \\ 1 & \Delta > 0, \end{cases} \tag{14}$$

где $\Delta = -1 + \Psi_m + C,\ C = \sqrt{{\Psi_{x_z}}^2 / 4 + \left(A^2 + B^2\right)}$.

Граничное условие имеет вид:

$$X(0) = X_0;\ X\left(t_f\right) = 0 \quad (15)$$

где t_f – конечное временя.

Таким образом, задача оптимального управления сводится к двухточечной краевой задаче для системы дифференциальных уравнений (2), дополненной функцией переключения (3). Краевая задача обычно трудно решается и в данной работе введём гибридный алгоритм, который состоит из метода коллокации и метода гомотопии.

Решение краевой задачи на основе метода коллокации и метода гомотопии. Метод коллокации реализован с помощью функции bvp4c в matlab. В работе проведены три расчёта (индекс $X(0)$ – 1,2,3). Количество дискретных точек N=300.

1. Для первого варианта начальных условий $X(0)_1 = [2, 2, 2, 0, 2, 0]^{\mathrm{T}}$ решалась задача об оптимальном быстродействии. Задача имеет хорошую сходимость и в качестве начального значения сопряжённых переменных можно использовать $\Psi(0) = [1,1,1,1,1,1]^{\mathrm{T}}$. Краевая задача решается методом коллокации и методом градиента (рис. 2).

Как видно из рис. 2, для простой задачи с граничными условиями $X(0)_1$ время расчёта методом градиента меньше, чем методом коллокации.

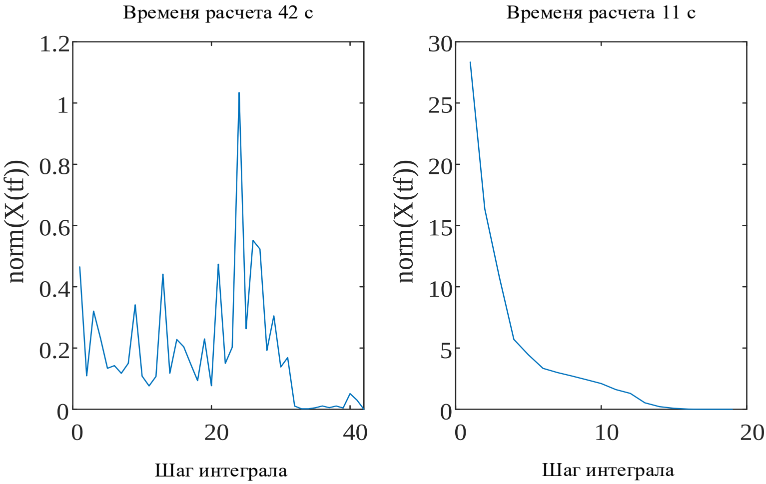

Рис. 2. Изменения нормы вектора $X\left(t_f\right)$ от шага интеграла методом коллокации и методом градиента

2. Для второго варианта начальных условий $X(0)_2 = \left[2,1000,2,0,2,0\right]^{\mathrm{T}}$ решалась задача на оптимальное быстродействие. При больших значениях $X(0)$ сходимость задачи ухудшается и трудно непосредственно найти начальное значение сопряжённых переменных $\Psi\left(0\right)$ для решения краевой задачи, поэтому используем метод гомотопии для перехода из простой задачи до сложной целевой:

$$X(0) = k \cdot X(0)_1 + \left(1-k\right) \cdot X(0)_2 ,$$

где k – коэффициент гомотопии, изменяется от 1 до 0 с шагом 0.01

На рис. 3 показано, как изменяются начальные граничные условия и соответствующая оптимальная траектория в продольной плоскости при изменении значения k. Согласно результатам, полученным в Matlab, при использовании метода коллокации требуется 66 с для расчёта, а при использовании градиентного метода – 1141 с.

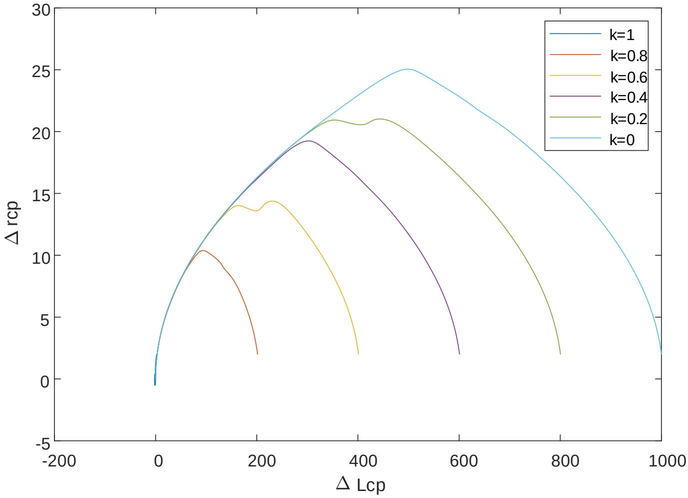

Рис. 3. Метод гомотопии для граничных условий

3. Для третьего варианта граничных условий $X(0)_3 = [11.22, 1607.2, -39, 0, -3.5, 2.9]^{\mathrm{T}}$ решалась задача об оптимальном моторном времени. Введём приближённую функцию переключения (3) и используем решение задачи оптимального по быстродействию в качестве начального приближения для решения задачи оптимального по моторному времени. Краевая задача решается методом коллокации.

Как видно из рис. 4, сходимость уравнений может быть улучшена введением гомотопический параметр ε для сглаживания дискретной функции переключения. При постоянном уменьшении ε полученная приближённая функция переключения будет все больше и больше сходиться к целевой функции переключения $\delta = \{0,\ 1\}$.

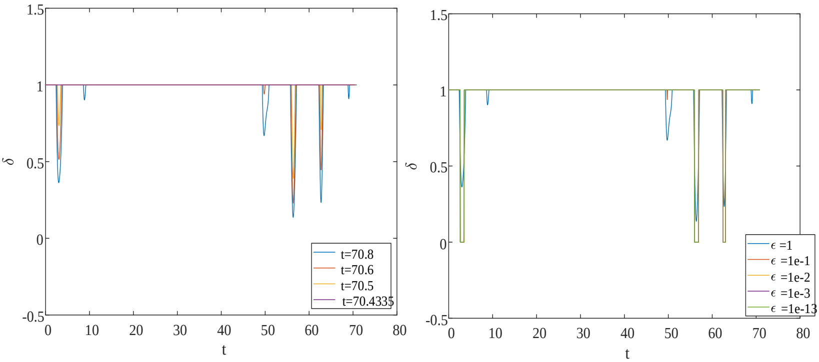

Рис. 4. Изменение функции переключения с увеличением общего времени и уменьшением ε при $t_{общ} = 70.8$ и $t_{мот} = 69.98$

Заключение. В статье **с**равнивается эффективность решения краевой задачи методом коллокации и методом градиента. Если краевая задача проста и уравнения хорошо сходятся, то скорость сходимости быстрее при использовании метода градиента, а если уравнения трудно сходятся, то скорость сходимости быстрее при использовании метода коллокации. Обычно задачи относительного движения являются крайне нелинейными, поэтому выгоднее использовать метод коллокации. Сглаживание дискретной функции переключения путём введения гомотопического параметра позволяет избегать сложностей с выбором начальных значений сопряжённых переменных для задач об оптимизации перелётов по моторному времени и эффективно улучшить сходимость задачи.

Библиографический список

1. Хайрер, Эрнст; Нерсетт, Сайверт Пол; Ваннер, Герхард (1993), Решение обыкновенных дифференциальных уравнений I: нестандартные задачи, Берлин, Нью-Йорк: Springer-Verlag, ISBN 978-3-540-56670-0.

2. Ляо С.Дж., Предложенный метод гомотопического анализа для решения нелинейных задач, докторская диссертация, Шанхайский университет Цзяо Тун, 1992.

3. Sergey A. Ishkov, Andrew A. Khramov, Gregory A. Filippov Formation Algorithms of Sequential Control for Spacecraft Rendezvous with Low-Thrust. AIP Conference Proceedings 2046, 020043 (2018); https://doi.org/10.1063/1.5081563.

4. R. F. Appazov, O. G. Sytin Methods of Designing Trajectories of Carriers and Satellites of the Earth. M.: Science, 1978.

5. M. S. Konstantinov. Mechanics of Space Flight. M.: Science, 1989.

6. Ishkov S A, Filippov G A, Xiao Z, et al. Pareto-optimal control of relative motion in the orbital maneuvering problem of spacecraft with finite thrust[J]. Xibei Gongye Daxue Xuebao/Journal of Northwestern Polytechnical University, 2023, 41(3): 529-536.

7. Понтрягин Л С, Болтянский В Г, Гамкрелидзе Р В, et al. Математическая теория оптимальных процессов[M]. 1969.

УДК 531.36, 629.7

Шарипова А.Р.

ПРИМЕНЕНИЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО МАНЁВРА ПРИ ВЫВЕДЕНИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА ОРБИТУ СПУТНИКА ЮПИТЕРА–КАЛЛИСТО

Введение. Основной проблемой при совершении межпланетных перелётов к Юпитеру и его спутникам является большой расход рабочего тела, необходимого для осуществления перелёта, а также для формирования требуемой орбиты в сфере действия Юпитера. Однако, затраты топлива можно сократить за счёт использования аэродинамического манёвра в плотной атмосфере Юпитера.