УДК 532.5.032

Никонов В.В.

О ВЫБОРЕ ШАГА ПО ВРЕМЕНИ В СХЕМЕ ВВЦП ПРИ РАСЧЕТЕ ПРОЦЕССА ДИФФУЗИИ

При решении уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}+\left(\overline{u}\cdot\overline{\nabla}\right)\overline{u}=-\frac{1}{p}\overline{\nabla}p+\nu\Delta\overline{u} \tag{1}$$

методами, использующими расщепление по физическим процессам возникает, задача о решении уравнения диффузии для скорости

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}=\nu\Delta\overline{u}, \tag{2}$$

где ν - коэффициент кинематической вязкости.

Одной из хорошо известных конечно-разностных схем решения этого уравнения является схема "Вперед по времени, центральное по пространству" (ВВЦП) [1], которая для двумерного случая будет иметь следующий вид

$$\begin{aligned}\frac{u_{i,j}^{t+\Delta t}-u_{i,j}^{t}}{\Delta t}&=\nu\left(\frac{u_{i-1,j}^{t}-2u_{i,j}^{t}+u_{i+1,j}^{t}}{\Delta x^2}+\frac{u_{i,j-1}^{t}-2u_{i,j}^{t}+u_{i,j+1}^{t}}{\Delta y^2}\right)\\ \frac{V_{i,j}^{t+\Delta t}-V_{i,j}^{t}}{\Delta t}&=\nu\left(\frac{V_{i-1,j}^{t}-2V_{i,j}^{t}+V_{i+1,j}^{t}}{\Delta x^2}+\frac{V_{i,j-1}^{t}-2V_{i,j}^{t}+V_{i,j+1}^{t}}{\Delta y^2}\right)\end{aligned} \tag{3}$$

где Δt - шаг по времени, а Δx и Δy – по пространству.

В работе [2] было показано, что при выборе шага по времени в виде

$$\Delta t = kh^2 / V \tag{4}$$

ошибка численного решения уравнения диффузии с помощью схемы "донор-акцептор" зависит только от константы k и от количества сделанных шагов по времени. Здесь h – шаг ячейки расчетной сетки. Путем серии численных экспериментов было найдено значение k, при котором ошибка решения минимальна.

Целью данного исследования является показать, что для схемы ВВЦП существует такое k, для которого при выборе шага по времени в виде (4) ошибка численного решения задачи диффузии будет минимальна.

В качестве тестовой задачи была выбрана первая задача Стокса об импульсном старте плоской стенки [3]. При обращенном движении эту задачу можно рассматривать как продольное обтекание бесконечно длинной плоской пластины равномерным потоком со скоростью u_∞. В данном случае аналитическое решение данной задачи имеет вид

$$u = u_\infty erf(\eta), \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{4Vt}}. \tag{5}$$

Расчетная область представляла собой прямоугольник размерами 2x4, в центре которого в направлении, совпадающем с осью OX, располагалась плоская пластина единичной длины. Использовалась однородная расчетная сетка.

Граничные условия прилипания потока на поверхности пластины для слоя фиктивных ячеек j-1, находящихся с "обратной стороны" пластины, сводятся к

$$u_{i,j-1} = -u_{i,j}, \tag{6}$$

где ячейка с координатами (i,j) является прилегающей к поверхности пластины.

Были получены профили скорости для пяти сечений, располагавшихся на расстояниях 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9 от переднего края пластины. Данные профили совпадают для разных сечений. При проведении расчетов для разных величин h и ν выяснилось, что как и в [2] ошибка численного решения зависит только от константы k и количества сделанных шагов по времени. Максимальная относительная ошибка решения определялась следующим образом

$$\delta = sign(a_j)\max|a_j|, \quad a_j = \frac{u_j - u_{ex}(y_j)}{u_{ex}(y_j)}, \tag{7}$$

где u_j – численной решение, $u_{ex}(y_j)$ – аналитическое решение.

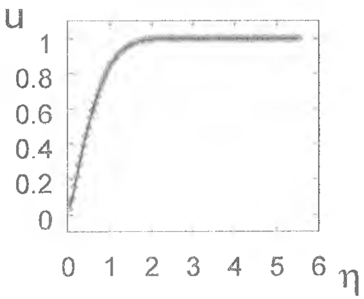

Рис. 1. Распределение продольной компоненты скорости u над поверхностью пластины в сравнении с аналитическим решением (k = 0.2, ν = 10^{-3}, h = 0.02, t = 400Δt)
◇ численное решение, —— аналитическое решение (5)

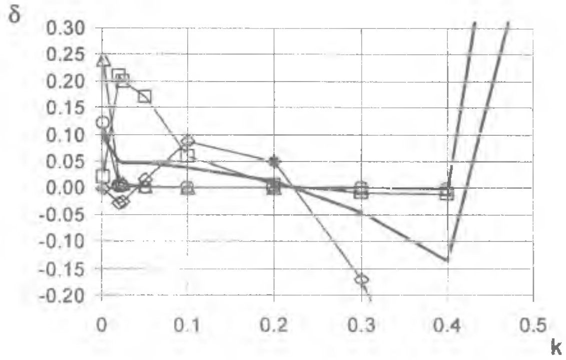

Рис. 2. Зависимость максимальной относительной погрешности решения от константы k для различного числа шагов по времени:
◇ - $1_{\Delta}t$, □ - $10_{\Delta}t$, △ - $400_{\Delta}t$, ○ - $1000_{\Delta}t$, —— средняя погрешность

Сравнение профиля скорости полученного численно с помощью схемы (3) с аналитическим решением показано на рисунке 1.

Из рисунка 2 видно, что существует k, при котором максимальная относительная ошибка δ (7) для различного числа выполненных шагов по времени минимальна. С точностью до десятых, оптимальная величина коэффициента в (4) соответствует k = 0.2, при этом средняя погрешность для четырех измерений (рис. 2) составляет 1.4%. С точностью до сотых, оптимальная величина k = 0.22, при этом средняя погрешность составляет 0.7%.

В работе [2] для схемы "донор-акцептор" в случае минимального размера "диффузионной молекулы" получена величина k = 0.21. Это позволяет сделать вывод, что оптимальное значение коэффициента k для каждой схемы свое.

Библиографический список

1. Флетчер К., Вычислительные методы в динамике жидкостей / Пер. с англ. - М.: Мир. - т. 1. – 1991.
2. Nikonov V., Kornev N., Leder A., The Ratio between Spatial and Time Resolutions for the Diffusion Substep in 2D Computational Vortex Methods, *Schiffbauforschung*, 2002, vol. 41, N 3/4. pp. 5-12.
3. Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, пер. с нем. Г.А. Вольперта, под. ред. Лойцянского Л.Г., М.: Наука, 1974.