

Никонов В.В., Шахов В.Г.

**О ПРИМЕНЕНИИ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
В МЕТОДЕ «ВИХРЬ В ЯЧЕЙКЕ»**

Рассматривается случай вязкого двумерного несжимаемого течения. В рамках численного метода «вихрь в ячейке» (ВЯ) уравнение Навье – Стокса в переменных завихренность – скорость расщепляется на уравнения конвекции и диффузии завихренности [1]. На этапе конвекции используется лагранжев подход к описанию движения жидкости и решается система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) движения для каждого вихря в ячейке

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{u} \quad (1)$$

где \bar{x} – вектор, описывающий положение вихря; \bar{u} – вектор скорости. После перемещения интенсивности вихрей перераспределяются в ячейки сетки согласно

$$\Gamma_{(i,j)} = \Gamma^*(x_k, y_l) \Lambda(x_i - x_k) \Lambda(y_j - y_l), \quad (2)$$

где Λ – интерполяционная функция; Γ^* – циркуляция вихря перемещенного в точку (x_k, y_l) , не совпадающую в общем случае с центром некоторой ячейки сетки; $\Gamma_{(i,j)}$ – циркуляция, получаемая вихрем в ячейке (i, j) от перераспределяемого вихря. Наименьшую численную диффузию [2] имеет интерполяционная функция M4'

$$\Lambda_i^{M4'}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{5}{2}x^{*2} + \frac{3}{2}x^{*3}, & 0 \leq x^* < 1 \\ (1 - x^*)(2 - x^*)^2 / 2, & 1 \leq x^* < 2, \\ 0, & x^* \geq 2 \end{cases} \quad x^* = \frac{|x|}{h} \quad (3)$$

На этапе диффузии (эйлеров подход) определяется изменение поля завихренности с помощью модифицированного метода «донор-акцептор». В данном случае, в отличие от обычного метода «донор-акцептор», удается сохранять точность решения в широком диапазоне изменения шага по времени. Известно также, что при уменьшении коэффициента кине-

матической вязкости в схеме метода ВЯ численная диффузия на этапе конвекции может превышать физическую.

Интегрирование (1) проводится обычно явным методом Эйлера 1-го порядка для экономии вычислительных ресурсов. С целью повышения точности исследовалась целесообразность применения в ВЯ более точных и устойчивых методов: прогноза-коррекции 2-го порядка, Рунге-Кутта 2-го и 4-го порядков [3], которые требуют большей вычислительной памяти и времени счета.

В качестве теста рассматривалась задача о конвекции-диффузии вихря Ламба-Озеена в свободном потоке, имеющая аналитическое решение

$$\omega(\bar{x}, t) = \Gamma_0 \frac{\exp\left[-r^2/(4\nu\tau)\right]}{4\pi\nu\tau}, \quad \tau = t + \frac{\beta^2}{4\nu},$$

где r – расстояние от центра вихря до точки в которой определяется завихренность ω . Параметры задачи: интенсивность моделируемого вихря $\Gamma_0 = 3.0$, радиус вихря $\beta = 0.1$, коэффициент кинематической вязкости $\nu = 10^{-3}$, конечное время счета $t = 2.0$, размеры расчетной области (длина и высота) $LxH = 4x2$, шаг сетки $h = 0.01$, скорость набегающего потока $u_\infty = 0.5$. Результаты моделирования показали, что увеличение порядка точности метода интегрирования практически не сказывается на точности получаемого решения (рисунки 1,2, таблица 1). Порядок ошибки численного решения является одинаковым для всех рассмотренных методов и уменьшается при уменьшении шага интегрирования по времени. При этом вычислительные затраты возрастают для методов прогноза-коррекции 2-го порядка и Рунге-Кутта 2-го порядка – в 2 раза, а в методе Рунге-Кутта 4-го порядка – в 4 раза.

Оказывается, что основным источником «численной диффузии» является операция перераспределения вихревой интенсивности в ячейки расчетной сетки (2), а не численное интегрирование уравнения (1). При вычислении промежуточных правых частей для (1) методом Эйлера такая операция выполняется один раз, для методов прогноза-коррекции 2-го порядка и Рунге-Кутта 2-го порядка – 2 раза, а в методе Рунге-Кутта 4-го порядка – 4 раза. В результате уточнение интегрируемой величины внутри шага интегрирования в методах более высоких порядков сводится на нет. В результате применение методов интегрирования (1) более высокого порядка, чем явный метод Эйлера, является нецелесообразным в методе ВЯ.

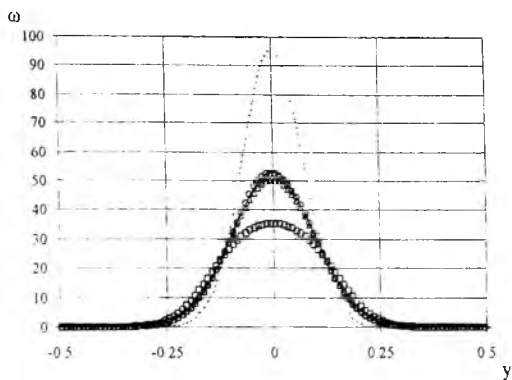


Рис. 1 Поле завихренности внутри вихря Ламба-Озеена при использовании метода Эйлера 1-го порядка

□ - $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$; Δ - $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$; ○ - $\Delta t = 10^{-3}$,

штриховая линия - аналитическое решение в момент времени $t = 0$,

сплошная линия - аналитическое решение в момент времени $t = 2.0$

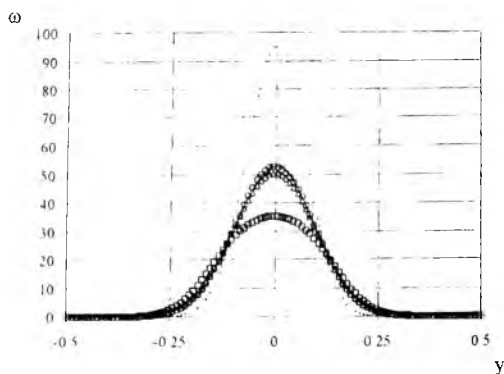


Рис. 2 Поле завихренности внутри вихря Ламба-Озеена при использовании метода Рунге-Кутты 4-го порядка

□ - $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$; Δ - $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$; ○ - $\Delta t = 10^{-3}$;

штриховая линия - аналитическое решение в момент времени $t = 0$,

сплошная линия - аналитическое решение в момент времени $t = 2.0$

Таблица 1 - Применение различных методов интегрирования

Δt	δ_p в зависимости от применяемого метода			
	Эйлера 1-го порядка	прогноза-кор- рекции 2-го порядка	Рунге-Кутта 2-го порядка	Рунге-Кутта 4-го порядка
$5.0 \cdot 10^{-4}$	0.22	0.22		0.22
$5.0 \cdot 10^{-3}$	0.028	0.028	0.028	0.028
$1.0 \cdot 10^{-5}$	0.0092			0.0089

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Basin M., Kornev N., Beruecksichtigung der Reibung in der Wirbelmethode, *ZAMM*, 1998, vol. 78, N 5. Pp. 335-344.
2. Cottet G.-H., Koumoutsakos P.D., *Vortex Method: theory and practice*, Cambridge University Press, 2000.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.Г. Численные методы. Изд. 8-е. - М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000.