УДК 629.78.015

И.А.Тимбай

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС

Рассматриваются пространственные нелинейные колебания неуправляемого осесимметричного ЛА относительно центра масс при спуске в атмосфере. Восстанавливающий аэродинамический момент аппарата близок к синусоидальной зависимости. Получены усредненные уравнения возмущенного движения ЛА для произвольного числа гармоник разложения коэффициентов аэродинамических сил и моментов в тригонометрические ряды. Данная работа является развитием статьи /1/, в которой рассматривается случай, когда число гармоник не превышает трех.

Для осесимметричных ЛА коэффициенты аэродинамических сил и моментов могут быть представлены в виде

$$B=\sum_{i=0}^{n} a_{B_i}\cos^i\alpha\ , \quad B=(c_{x_\text{п}},\bar{m}^{\omega_{x_\text{п}}}_{x_\text{п}},\bar{m}^{\omega_{y_\text{п}}}_{y_\text{п}},\bar{m}^{\omega_{z_\text{п}}}_{z_\text{п}})\ ,$$

$$\bar{D}=D/\sin\alpha=\sum_{i=0}^{n} a_{D_i}\cos^i\alpha\ , \quad D=(m_p,c_{y_\text{п}},\bar{m}^{\omega_{y_\text{п}}}_{x_\text{п}},\bar{m}^{\omega_{x_\text{п}}}_{y_\text{п}})\ , \tag{1}$$

где n – количество гармоник разложения аэродинамических характеристик, α – пространственный угол атаки, $c_{x_\text{п}},c_{y_\text{п}}$ – коэффициенты тангенциальной и нормальной сил; m_p – коэффициент аэродинамического момента относительно передней кромки, $\bar{m}^{\omega_{x_\text{п}}}_{x_\text{п}}$, $\bar{m}^{\omega_{y_\text{п}}}_{y_\text{п}}$, $\bar{m}^{\omega_{z_\text{п}}}_{z_\text{п}}$, $\bar{m}^{\omega_{y_\text{п}}}_{x_\text{п}}$, $\bar{m}^{\omega_{x_\text{п}}}_{y_\text{п}}$ – коэффициенты проекций демпфирующего момента на оси связанной с пространственным углом атаки системы координат $Ox_\text{п}y_\text{п}z_\text{п}$.

Из соотношений (1) для коэффициентов m_p и $c_{y_\text{п}}$ следует формула для восстанавливающего момента

$$M_\alpha(\alpha)/I=-qSl\sin\alpha\sum_{i=0}^{n}(a_{m_{p_i}}-\bar{x}_\text{т}a_{c_{y_{\text{п}i}}})\cos^i\alpha/I=-q\sin\alpha\sum_{i=0}^{n}c_i\cos^i\alpha, \tag{2}$$

где q - скоростной напор, S – площадь миделевого сечения, I – поперечный момент инерции, $\bar{x}_\text{т}=x_\text{т}/l$ – безразмерное смещение центра масс от передней кромки, l-характерный размер ЛА.

Пусть коэффициенты c_i в формуле для восстанавливающего момента удовлетворяют условиям

$$|c_i/c_0|=O(\varepsilon) \qquad (i=1,2,\dots n), \tag{3}$$

ε – малый параметр.

С учетом соотношений (1)-(3), для системы уравнений возмущенного движения методом Волосова /2/ получены усредненые уравнения в виде

$$\dot{x}_1=-\frac{\varepsilon(1-x_1^2)^{1/2}}{F(x_1)}\left\{L_\alpha+L_R-\frac{\partial W(x_1)}{\partial R}\bar{\Phi}_R+L_G-\frac{\partial W(x_1)}{\partial G}\bar{\Phi}_G+L_q-\frac{\partial W(x_1)}{\partial q}\bar{\Phi}_q\right\},$$

$$\dot{R}=\varepsilon\sum_{i=0}^{n+1}S_{R_i}N_i=\varepsilon\bar{\Phi}_R, \quad \dot{G}=\varepsilon\sum_{i=0}^{n+2}S_{G_i}N_i=\varepsilon\bar{\Phi}_G, \quad \dot{V}=\varepsilon\sum_{i=0}^{n+2}S_{V_i}N_i=\varepsilon\bar{\Phi}_V,$$

$$\dot{\theta}=\varepsilon\Phi_\theta, \qquad \dot{H}=\varepsilon\Phi_H, \qquad \dot{L}=\varepsilon\Phi_L, \tag{4}$$

где $x_1=\cos\alpha_{max}$, $R=Q_x/I$, $G=Q_V/I$, Q_x, Q_V – проекции вектора кинетического момента на продольную ось ЛА и вектор скорости V, θ, H, L – соответственно, угол наклона траектории к горизонту, высота и дальность полета.

Минимальное значение угла атаки вычисляется по формуле /1/

$$x_2=\cos\alpha_{min}=\eta-(a-bx_1)/(1-x_1^2),$$

где $\eta=\{1-2(ax_1-b)/(1-x_1^2)+[(a-bx_1)/(1-x_1)]^2\}^{1/2}$, $a=(R^2+G^2)/(4qc_0)$, $b=RG/(2qc_0)$.

Параметры, входящие в уравнения (4), определяются следующими соотношениями

$$F(x_1)=[(G-Rx_1)(R-Gx_1)]/(1-x_1^2)^{3/2}+qc_0(1-x_1^2)^{1/2},$$

$$L_\alpha=-\frac{2\beta}{T}\sum_{i=0}^{n+2}S_{\alpha_i}J_{\alpha_i}, \quad L_R=\sum_{i=0}^{n+1}S_{R_i}(RJ_i-GJ_{i+1}), \quad L_G=\sum_{i=0}^{n+2}S_{G_i}(GJ_i-RJ_{i+1}),$$

$$\frac{\partial W(x_1)}{\partial R}=(R-Gx_1)/(1-x_1^2), \quad \frac{\partial W(x_1)}{\partial G}=(G-Rx_1)/(1-x_1^2), \quad \frac{\partial W(x_1)}{\partial q}=-c_0x_1,$$

$$L_q=-c_0V\left(\frac{V}{2}\frac{\partial\rho}{\partial H}\Phi_H N_1+\rho\sum_{i=0}^{n+2}S_{V_i}N_{i+1}\right), \qquad J_{\alpha_i}=J_{\alpha_{i-2}}-\sum_{r=0}^{i-2}C_{i-2}^r d_{i-r-1}$$

$(i=2,3,4,\dots)$, $\quad J_{\alpha_0}=-2(x_2+x_1)K/\eta+4E-(1-x_1)[2+(1-x_2)/\eta]\Pi_1-$
$-(1+x_1)[2-(1+x_2)/\eta]\Pi_2$, $\quad J_{\alpha_1}=2(1+x_1x_2)K/\eta-4x_1E-$
$-(1-x_1)[2+(1-x_2)/\eta]\Pi_1+(1+x_1)[2-(1+x_2)/\eta]\Pi_2-d_0$,

$d_i=4[k_1^2Ah_{2i}+(2k^2-1)h_{2i+2}-h_{2i+4}/(2\eta)]K \quad (i=0,1,2,\dots), \quad A=x_2-x_1,$

$J_i=J_{i-2}-N_{i-2} \quad (i=2,3,4,\dots), \quad J_0=[\Pi_1/(1-x_2)+\Pi_2/(1+x_2)]/(2K),$

$J_1=[\Pi_1/(1-x_2)-\Pi_2/(1+x_2)]/(2K), \quad N_i=\sum_{r=0}^{i} C_i^r h_{2(i-r)} \quad (i=0,1,2,\dots),$

$h_0=1, \quad h_2=2\eta(E-k_1^2K)/K, \quad h_{2j}=2\eta[(2j-2)(2k^2-1)h_{2j-2}+$

$+(2j-3)k_1^2Ah_{2j-4}]/(2j-1) \quad (j=2,3,4,\dots), \quad C_i^r=i!x_1^r/[(i-r)!r!],$

$C_{i-2}^r=(i-2)!x_1^r/[(i-2-r)!r!], \quad 0!=1, \quad \Phi_\theta=(-g/V+V/R_p)\cos\theta,$

$$\bar\Phi_q=\frac{\partial\rho}{\partial H}\Phi_H V^2/2+\rho V\bar\Phi_V, \quad \Phi_H=V\sin\theta, \quad \Phi_L=(R_p-H)V\cos\theta/R_p,$$

$S_{\alpha_i}=\delta_i q_m-\zeta_i q_I \quad (i=0,1,\dots n), \quad S_{\alpha_{n+1}}=\delta_{n+1}q_m, \quad S_{\alpha_{n+2}}=\delta_{n+2}q_m,$

$S_{R_0}=m_x qSl/I+\xi_0 Rq_{Ix}-æ_0 Gq_I \quad S_{R_i}=(æ_{i-1}R-æ_i G)q_I+\xi_i Rq_{Ix}$

$(i=1,2,\dots n), \quad S_{R_{n+1}}=æ_n Rq_I, \quad S_{G_0}=\vartheta_0 Gq_I-\tau_0 Rq_m+\nu_0 Rq_{Ix},$

$S_{G_1}=m_x qSl/I+(\vartheta_1 G-æ_0 G-\nu_0 R)q_I+(\tau_0 G+\lambda_0 R-\tau_1 R)q_m+(\xi_0 R-\nu_1 R)q_{Ix},$

$S_{G_i}=(\vartheta_i G-æ_{i-1}G-\vartheta_{i-1}R-æ_{i-2}R)q_I+(-\lambda_{i-2}G+\tau_{i-1}G+\lambda_{i-1}R-\tau_i R)q_m+$

$+(-\nu_i R+\nu_{i-2}R+\xi_{i-1}R)q_{Ix} \quad (i=2,3,\dots n), \quad S_{G_{n+1}}=(-æ_n G+æ_{n-1}R-$

$-\vartheta_n R)q_I+(-\lambda_{n-1}G+\tau_n G+\lambda_n R)q_m+(\nu_{n-1}R+\xi_n R)q_{Ix}, \quad S_{G_{n+2}}=æ_n Rq_I-$

$-\lambda_n Gq_m+\nu_n Rq_{Ix}, \quad S_{V_0}=-\lambda_0 qS/m-g\sin\theta, \quad S_{V_1}=-(\tau_0+\lambda_1)qS/m,$

$S_{V_i}=-(\tau_{i-1}+\lambda_i-\lambda_{i-2})qS/m \quad (i=2,3,\dots n), \quad S_{V_{n+1}}=-(\tau_n-\lambda_{n-1})qS/m,$

$S_{V_{n+2}}=\lambda_n\, qS/m, \quad q_m=qS/(mV), \quad q_I=qSl^2/(IV), \quad q_{Ix}=qSl^2/(I_xV),$

$\delta_0=-\lambda_0+\tau_1, \quad \delta_1=-2\lambda_1-\tau_0+2\tau_2, \quad \delta_i=i[\lambda_{i-2}-\tau_{i-1}]+(i+1)[\tau_{i+1}-\lambda_i]$

$(i=2,3,\dots n-1), \quad \delta_n=n[\lambda_{n-2}-\tau_{n-1}]-(n+1)\lambda_n, \quad \delta_{n+1}=(n+1)[\lambda_{n-1}-\tau_n],$

$\delta_{n+2}=(n+2)\lambda_n.$

Здесь $T=2K/\beta$ – период колебания угла атаки, $\beta=(qc_0\eta)^{1/2}$; $k=(A/2\eta)^{1/2}$ – модуль эллиптических функций, $k_1=1-k^2$ – дополнительный модуль, $K(k)$, $E(k)$, $\Pi(k,n)$ – полные эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода, $\Pi_1=\Pi(k,n_1)$, $\Pi_2=\Pi(k,n_2)$, $n_1=A/(1-x_2)$,

$n_2=-A/(1+x_2)$; g – ускорение силы тяжести, R_p – расстояние до притягивающего центра, ρ – плотность атмосферы, m – масса ЛА, I_x – продольный момент инерции, m_x – коэффициент крутящего момента относительно продольной оси аппарата, параметрами λ, δ, τ, ξ, ϑ, ζ, $\varkappa$, ν обозначены коэффициенты разложения аэродинамических характеристик в тригонометрические ряды, соответственно,

$$a_{c_{y_п}},\ a_{c^{\alpha}_{y_п}},\ a_{c_{x_п}},\ a_{m^{\bar\omega_{x_п}}_{x_п}},\ a_{m^{\bar\omega_{y_п}}_{y_п}},\ a_{m^{\bar\omega_{z_п}}_{z_п}},\ a_{m^{\bar\omega_{y_п}}_{x_п}},\ a_{m^{\bar\omega_{x_п}}_{y_п}}.$$

Численное интегрирование полученных усредненых уравнений возмущенного движения осесимметричного аппарата (4) дает существенное (на 2 порядка) сокращение времени определения параметров движения по сравнению с исходными уравнениями. Проведенные контрольные расчеты по исходным и усредненным уравнениям показывают близость результатов, при этом ошибка не превышает значения

$$\delta_{a_m}=1-[c_0\sum^{n}(c_0^{\,|}+\sum_{i=0}|c_i|/4)] .$$

Список литературы

1. Асланов В.С., Тимбай И.А., Бойко В.В. Пространственные колебания осесимметричного аппарата на произвольных углах атаки при снижении в атмосфере планеты //Космические исследования. – 1981. – Т. XIX, № 5, с. 680-687.

2. Волосов В.М. Некоторые виды расчетов в теории нелинейных колебаний, связанных с усреднением //ЖВМ и ВМ. – 1963. – т. 3. № 1. – С. 3 – 53.