Список литературы

1. Жданюк Б.Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений. - М.:Сов.радио, 1978.
2. Основы теории полета космических аппаратов / Под ред. Нариманова Г.С.. М.:Машиностроение, 1972.

УДК 681.3.06

С.А.Бутырин, С.А.Герасин

МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЯЗНЫХ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Традиционные этапы исследования сложных управляемых систем включают линеаризацию уравнений компонент систем и сборку (объединение) компонент в результирующую модель, подготовленную для операций анализа или синтеза. Предлагаемый алгоритм сборки является универсальным в классе описываемых ниже форм представления моделей компонент и не требует предварительно согласовывать размеры матриц, входящих в эти модели. Особенностью этого алгоритма является то, что связи в собираемой модели замыкаются по символьным именам переменных моделей компонент, сборка производится в пространстве состояний.

Линейная стационарная модель может состоять из произвольного числа векторно-матричных уравнений, каждое из которых представлено одной из следующих форм (в описываемых ниже формах вектор представляет собой набор символьных имен).

I. Статические непрерывная и дискретная формы. В данном случае статическим считается уравнение, в левой части которого отсутствуют производные.

$$y=\sum_{i=1}^{k} B_i\cdot x_i,\quad y_{[l]}=\sum_{i=1}^{k} B_i\cdot x_{i[l]},\quad x_{i[l]}\equiv X_i(t_l), \tag{1}$$

где $y(N)$ - вектор выхода, $x_i(M_i)$ - векторы входов, $B_i(N,M_i)$ - матрицы, l - номер дискретного момента времени $t_l=l\cdot T$, t_l- текущее дискретное время, T - период дискретности.

2. Обобщенная непрерывная динамическая форма.

$$\sum_{i=1}^{l} (A_i \cdot \ddot{x}_i + B_i \cdot \dot{x}_i + C_i \cdot x_i) = \sum_{i=1}^{k} D_i \cdot y_i, \qquad (2)$$

где $x_i(S_i)$ - вектор состояния, $y_i(M_i)$ - векторы входов, $A_i(N,S_i)$, $B_i(N,S_i)$, $C_i(N,S_i)$, $D_i(N,M_i)$- матрицы. В данной форме любые слагаемые могут быть опущены, а некоторые перенесены в право. Слева должны находиться выходы со старшими производными.

3. Форма конечно-разностных уравнений

$$x_{[l+1]} = A \cdot x_{[l]} + \sum_{i=1}^{k} B \cdot y_{i[l]}, \quad x_{[l]} = X(t_l), \qquad (3)$$

где $x_{[l]}(N)$ - вектор состояния, $A_i(N,N)$ - матрица состояния.

4. Форма в виде непрерывной передаточной функции

$$W(s) = y(s)/x(s) = \sum_{i=0}^{m} b_i \cdot s^i \Big/ \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot s^j \qquad (4)$$

где b_i, a_j - коэффициенты полиномов; m, n - степени полиномов числителя и знаменателя соответственно. Форма дискретной передаточной функции совпадает с (4), с точностью до замены s на z.

Результатом операции сборка будет непрерывная или дискретная модель представленная системой из динамического в форме Коши и статического уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + B \cdot f \\ y = C \cdot x + D \cdot w \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{[k+1]} = A \cdot x_{[k]} + B \cdot f_{[k]} \\ y_{[k]} = C \cdot x_{[k]} + D \cdot w_{[k]} \end{cases}, \qquad (5)$$

где $x(N)$ - вектор состояния, $y(M)$ - вектор выходов, $f(S)$, $w(K)$ - обобщенные вектора входов, $A(N,N)$, $B(N,S)$, $C(M,N)$, $D(M,K)$ - матрицы. $t_k = k \cdot T$, t_k - текущее время, T - максимальный период дискретности модели, k - номер дискретного момента времени.

Сборка модели. На сборку подаются модели созданные пользователем, представляющие собой набор уравнений (1)-(4), и модели предварительно прeбразованные процедурой сборка - системы (5). При сборке непрерывной модели все составляющие ее компоненты должны быть непрерывными, при дискретной - непрерывными или дискретными (непрерывные модели дискретизуются с наименьшим периодом дискретности, обнаруженным в собираемых уравнениях). Операция сборка состоит из следующих этапов: перевод передаточных функций в пространство состояний; сборка непрерывных уравнений; дискретизация непрерывных уравнений; сборка дисккретных уравнений с одинаковыми периодами; сборка уравнений с разными периодами (пока подразумевается сборка с двумя периодами).

Сборка 2-х статических уравнений (I).

I. Преобразуем два уравнения (1), объединив матрицы и вектора в суммах

$$y_1 = \tilde{B}_1 \cdot \tilde{x}_1 \qquad y_2 = \tilde{B}_2 \cdot \tilde{x}_2 .$$

2. Сравниваем вектора y_2 и $\tilde{x}_1$. Перегруппируем уравнения, выделив в них одинаковые имена и избавимся от них, подставив часть второго уравнения в первое. В первое уравнение попадает вектор $\tilde{x}_2$, имена которого могут совпадать с остатками вектора $\tilde{x}_1$ (x_{10}). Приведя подобные члены, получим:

$$y_1 = \tilde{B} \cdot \tilde{x}_2 + \tilde{B}_{10} \cdot \tilde{x}_{10}, \qquad y_2 = B_{20} \cdot \tilde{x}_2 .$$

3. Сгруппируем полученный результат

$$y_3 = B_3 \cdot x_3, \tag{6}$$

где $B_3 = \left|\begin{array}{c|c} \tilde{B} & \tilde{B}_{10} \\ \hline B_{20} & 0 \end{array}\right|$, $y_3 = \mathrm{col}(y_1, y_{20})$, $x_3 = \mathrm{col}(\tilde{x}_2, \tilde{x}_{10})$.

Преобразование статических уравнений. После сборки всех статических уравнений компоненты векторов y_3 и x_3 (в уравнении (6)) могут содержать одинаковые имена, что требует преобразования

I. Сравниваем вектора y_3 и x_3, располагая одинаковые имена в начале векторов и выделив по возможности в матрице нулевой блок (нулевой блок уменьшит размерность обращаемой матрицы).

$$\begin{vmatrix} y_{x0} \\ \hline y_{x1} \\ \hline y_0 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{c|c|c} 0 & B_{11} & B_1 \\ \hline B_{20} & B_{21} & B_2 \\ \hline B_{30} & B_{31} & B_3 \end{array}\right| \cdot \begin{vmatrix} y_{x0} \\ \hline y_{x1} \\ \hline x_0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} (7) \\ (8) \\ (9) \end{matrix}$$

где $y_3 = \mathrm{col}(y_{x0}, y_{x1}, y_0)$, $x_3 = \mathrm{col}(y_{x0}, y_{x1}, x_0)$.

2. Подставим уравнение (7) в (8) и получим:

$$y_{x1} = \tilde{B}_{21} \cdot y_{x1} + \tilde{B}_2 \cdot x_0, \tag{10}$$

где $\tilde{B}_{21} = (B_{20} \cdot B_{11} + B_{21})$, $\tilde{B}_2 = (B_{20} \cdot B_1 + B_2)$.

3. Анализируем матрицу $\tilde{B}_{21}$ на наличие в диагональных элементах единиц, присутствие которых говорит о некорректности уравнения, либо

о двух одинаковых уравнениях.

4. Разрешим уравнение (10) относительно y_{x1} и подставим результат в (7) и (9):

$$y_{x0} = \hat{B}_1 \cdot x_0, \quad y_0 = \hat{B}_3 \cdot x_0. \tag{11}$$

5. Сгруппируем уравнения (11) и результат преобразования уравнения (10) в единое уравнение:

$$y = B \cdot x_0, \qquad \text{где} \quad y = \mathrm{col}(y_{x0},\ y_{x1},\ y_0). \tag{12}$$

<u>Сборка 2-х динамических уравнений (2).</u>

I. Преобразование уравнений (2) к виду:

$$A_1 \cdot z_1' + B_1 \cdot x_1'' = C_1 \cdot y_1 + D_1 \cdot u_1, \quad A_2 \cdot z_2' + B_2 \cdot x_2'' = C_2 \cdot y_2 + D_2 \cdot u_2, \tag{13}$$

где z_1', x_1'' – высшие производные векторов выхода (z_1, x_1) первого уравнения; z_2', x_2'' – высшие производные векторов выхода (z_2, x_2) второго уравнения; y_1, y_2 – сводные вектора выходов и их низшие производные; u_1, u_2– векторы входов.

2. Сравниваем компоненты векторов z_2' и y_1, z_1' и y_2. Столбцами матриц A_1 и A_2, взятыми с обратными знаками, номера которых совпадают с номерами имен в векторах z_1' и z_2' и именами, одинаковыми с именами в y_2 и y_1, расширяем матрицы C_1 и C_2 и вектора y_1 и y_2 соответственно. Получим:

$$A_{10} \cdot z_{10}' + B_1 \cdot x_1'' = C_{12} \cdot y_{12} + D_1 \cdot u_1, \quad A_{20} \cdot z_{20}' + B_2 \cdot x_2'' = C_{21} \cdot y_{21} + D_2 \cdot u_2.$$

3. Объединение полученных уравнений начнем с составления матрицы сводных векторов выходов C. Для этого сравним и преобразуем вектора y_{12} и y_{21}, выделив в них одинаковые имена $\tilde{y}_1$:

$$y_3 = \mathrm{col}(\tilde{y}_{10}, \tilde{y}_1, \tilde{y}_{20}), \qquad C = \left|\begin{array}{c|c|c} \tilde{C}_{10} & \tilde{C}_1 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{C}_2 & C_{20} \end{array}\right|$$

4. Составим вектора и матрицы высших производных в z', x'', A, B и вектора и матрицы входов u_1, u_2, D_1, D_2. Алгоритм объединения аналогичен приведенному в пункте 3:

$$z' = \mathrm{col}(\tilde{z}_{10}', \tilde{z}_1', \tilde{z}_{20}'), \quad x'' = \mathrm{col}(\tilde{x}_{10}'', \tilde{x}_1'', \tilde{x}_{20}''), \quad u = \mathrm{col}(\tilde{u}_{10}, \tilde{u}_1, \tilde{u}_{20}),$$

$$A = \left|\begin{array}{c|c|c} \tilde{A}_{10} & \tilde{A}_1 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{A}_2 & A_{20} \end{array}\right|, \quad B = \left|\begin{array}{c|c|c} \tilde{B}_{10} & \tilde{B}_1 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{B}_2 & B_{20} \end{array}\right|, \quad D = \left|\begin{array}{c|c|c} \tilde{D}_{10} & \tilde{D}_1 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{D}_2 & D_{20} \end{array}\right|.$$

5. Вектор $\mathbf{u}$ может содержать имена, находящиеся в векторах $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}'$ и $\mathbf{x}''$, поэтому требуется привести подобные члены. В матрицах $\mathbf{C}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ изменяются только нулевые блоки.

Сборка статического и динамического уравнений.

I. На сборку подаются уравнения, являющиеся результатом описанных выше операций:

$$A_1 \cdot z_1' + B_1 \cdot x_1'' = C_1 \cdot y_1 + D_1 \cdot u_1, \qquad y_2 = B_2 \cdot x_2.$$

2. Сравниваем вектора u_1 и y_2. Преобразование первого и второго уравнений аналогичны описанным в пункте 2 сборки статических уравнений.

$$A_1 \cdot z_1' + B_1 \cdot x_1'' = C_1 \cdot y_1 + D_{10} \cdot u_{10} + F \cdot x_2, \qquad y_{20} = B_{20} \cdot x_2.$$

3. Сравним вектор x_2 с векторами y_1, z_1' и x_1'' – при наличии в них одинаковых имен произведем усечение вектора x_2 и матрицы B, а также модификацию матриц C_1, A_1 и B_1, как было описано в пункте 5 сборки динамических уравнений. Остаток вектора x_2 и матрицы F объединим с u_{10} и D_{10}. В результате получаем

$$\tilde{A} \cdot z_1' + \tilde{B} \cdot x_1'' = \tilde{C} \cdot y_1 + \tilde{D} \cdot u, \qquad y_{20} = B_{20} \cdot x_2. \tag{14}$$

Приведение динамического непрерывного уравнения (I4) к форме Коши

I. Анализ компонент вектора y_1 и перестройка его в соответствии с содержимым векторов z_1' и x_1'':

$$y_1 = \mathrm{col}(y_z, y_x, y_{x'}), \quad z_1' = \mathrm{col}(y_{z'}, z_{10}'), \quad x_1'' = \mathrm{col}(y_{x''}, x_{10}''),$$

где $y_{z'}$ – первая производная вектора y_z; $y_{x'}$, $y_{x''}$ – первая и вторая производные вектора y_x.

Расширим вектор y_1 на низшие производные векторов z_{10}', x_{10}''.

$$\tilde{y}_1 = \mathrm{col}(y_z, y_{z10}, y_{x'}, y_{x'\,'10} y_x, y_{x10}), \quad \tilde{C}_1 = \left| C_z \,\middle|\, 0 \,\middle|\, C_{x'} \,\middle|\, 0 \,\middle|\, C_x \,\middle|\, 0 \right|,$$

где $y_{z'10}$ – первая производная вектора y_{z10}; $y_{x'10}$, $y_{x''10}$ – первая и вторая производные вектора y_{x10}.

2. Преобразуем результат к форме Коши

$$x' = A \cdot x + D \cdot u,$$

где $x' = \mathrm{col}(z'_1, x''_1, x'_{1})$, $x = \tilde{y}$, $C = (|\tilde{A}\ \tilde{B}|)^{-1} = \left|\begin{array}{c:c:c} \multicolumn{3}{c}{C \cdot \tilde{C}_1} \\ \hline 0 & I & 0 \end{array}\right|$, $D = C \cdot \tilde{D}$.

Сборка дискретных уравнений с одинаковыми периодами. Алгоритм сборки аналогичен приведенному выше. Сначала собираются статические уравнения, затем конечно-разностные и, наконец, совместная сборка первых со вторыми.

Сборка уравнений с двумя периодами. Сборка уравнений с одинаковыми периодами производится по именам, используя описанный выше алгоритм. При приведении уравнений с малым периодом к большому предполагаем, что нам дано уравнение (4), в котором на входы подаются сигналы с большим периодом. Преобразуем это уравнение к виду:

$$x_{[l+1]} = A \cdot x_{[l]} + B \cdot y_{[k]}, \quad x_{[l]} \equiv X(t_l), \quad y_{[k]} \equiv y(t_k), \tag{15}$$

где l, k - номера дискретного момента времени $t_l = l \cdot T_l$, $t_k = k \cdot T_k$; t_k, t_l - текущее дискретное время, T_k, T_l - периоды дискретности ($T_k > T_l$)

Приведем уравнение (15) к периоду T_k:

$$x_{[k+1]} = A^{N_s} \cdot x_{[k]} + [\sum_{i=0}^{N_s-1} (A^{i} \cdot B)]\, B \cdot y_{[k]},$$

где $N_s = T_k / T_l$; T_k, T_l - периоды дискретности ($T_k > T_l$).

Алгоритм, подобный данному, реализован на ЭВМ ЕС 1061 в виде диалоговой процедуры "Сборка линейных систем" на языке Фортран-77 с использованием средств форматированного экрана.

Апробация процедуры "Сборка линейных систем" на практических задачах подтвердила ее высокую эффективность, универсальность и удобство использования. В настоящее время производится модернизация процедуры и перевод ее на ПЭВМ.