

### *Библиографический список*

1. Ишков, С.А. Исследование оптимальных программ управления относительным движением космического аппарата с ограниченной тягой / С.А. Ишков, Г.А. Филиппов // Космические исследования. – 2023. – Т. 61. № 3. – С. 248–257.

2. Сяо, Чжоу. Оптимальное управление относительным движением космического аппарата по критерию быстродействия на околокруговых орбитах / Чжоу Сяо, С.А. Ишков, Г.А. Филиппов // Вестник Московского авиационного института. – 2023. – Т. 30. № 3. – С. 2–12.

*УДК 531.36, 629.7*

*Климашин С.В., Старинова О.Л.*

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПЕРЕЛЁТА ЗЕМЛЯ-ЗЕМЛЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТЯГИНА**

**Введение.** Межпланетные миссии являются важной частью космических исследований. Они позволяют проводить исследования различных объектов Солнечной системы, совершать гравитационные манёвры для достижения удалённых планет, организовывать эксперименты в условиях микрогравитации. Во многих миссиях перелёт к соседним планетам, например к Венере, выполняется для осуществления гравитационного манёвра. Особенно эффективно выполнять гравитационный манёвр в поле тяготения Земли, так как она обладает наибольшей массой среди планет земной группы и не требует выбора конкретной даты старта. Космический аппарат (КА)

MESSENGER после сближения с Землёй выходил на орбиту сближения с Венерой, КА Rosetta в свою очередь переходила на орбиту перелёта к Марсу, после совершения гравитационного манёвра возле Земли. Кроме того, миссия типа Земля-Земля может быть полезна для испытаний, тренировки и отработки различных сценариев перед пилотируемыми полётами к соседним планетам.

Существуют различные баллистические схемы перелёта Земля-Земля. В первой КА (рис. 1) при помощи одноимпульсного манёвра выходит на эллиптическую орбиту, период обращения которой равен периоду обращения Земли по гелиоцентрической орбите. Обычно, при перелёте по этой схеме КА встречается с Землёй через год.

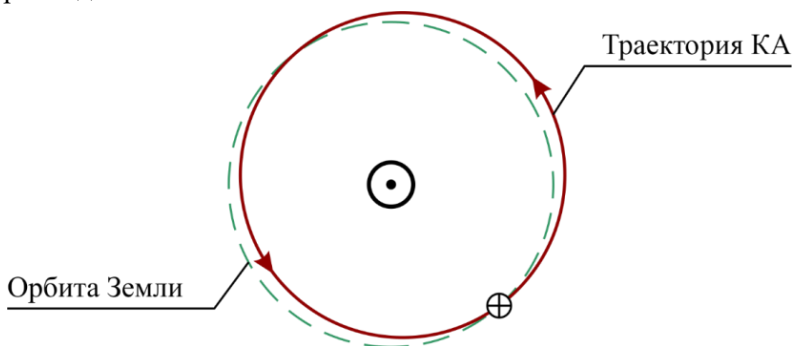


Рис. 1. Одноимпульсная схема перелёта Земля-Земля

В этой схеме, согласно третьему закону Кеплера, для встречи с Землёй должно выполняться следующее условие [1]:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad (1)$$

Основным недостатком такой схемы является длительность перелёта. Например, в рамках доставки КА MESSENGER к Меркурию, перелёт Земля-Земля занял 1/7 часть от всего времени.

Перелёт Земля-Земля можно оптимизировать с точки зрения временных затрат, если вместо одного начального импульса использовать электроракетный двигатель (ЭРД), который будет включаться в определённом направлении на конкретных участках траектории. Для расчёта такого перелёта необходимо определить закон управления двигательной установкой КА и соответствующую траекторию движения, которая позволит после выхода из сферы влияния Земли вернуться в неё за заданное время  $\tau$ , которое должно быть меньше одного Земного года (рис. 2).

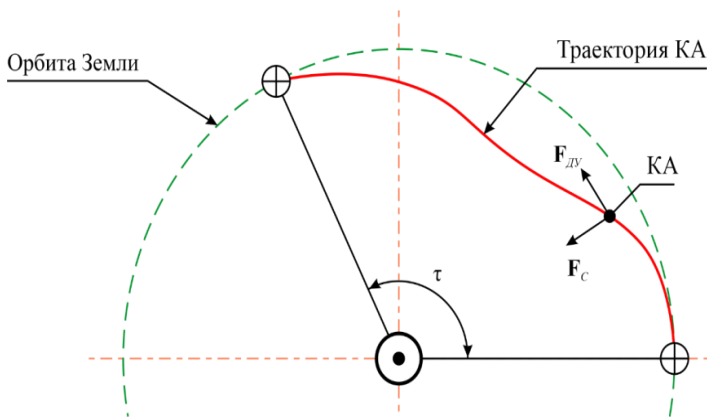


Рис. 2 – Схема перелёта с использованием ЭРД

Система дифференциальных уравнений, описывающих состояние КА, включает в себя три уравнения, определяющих положение, скорость и массу аппарата в конкретный момент времени:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{V}(t) \\ \dot{\mathbf{V}}(t) = \frac{\mathbf{F}_C(t) + \mathbf{F}_{ДВ}(t, \alpha(t))\delta(t)}{m_{КА}(t)} \\ \dot{m}_{КА}(t) = -\gamma\delta(t) \end{cases} \quad (2)$$

На протяжении всего перелёта на КА действуют две силы – гравитационное притяжение Солнца  $\mathbf{F}_C$  и тяга  $\mathbf{F}_{ДВ}$ , создаваемая двигательной установкой, которая зависит от двух параметров управления:  $\delta(t) \in \{0, 1\}$  – состояние включения двигателя,  $\alpha(t) \in [-\pi, \pi]$  – угол направления создаваемой тяги. Изменение массы КА происходит за счёт расхода топлива с заданным секундным расходом  $\gamma$  на участках работы двигателей.

Для решения поставленной задачи удобно рассмотреть КА как управляемый объект, состояние которого описывается при помощи вектор-функции фазовых координат  $\mathbf{x}(t)$ , а параметры, влияющие на тягу двигателя, в виде вектор-функции управления  $\mathbf{u}(t)$ .

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^{(1)}(t) = \mathbf{x}^{(2)}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}^{(2)}(t) = \frac{\mathbf{F}_C(t) + \mathbf{F}_{ДВ}(t, \mathbf{u}^{(1)}(t))\mathbf{u}^{(2)}(t)}{x^{(3)}(t)} \\ \dot{x}^{(3)}(t) = -\gamma \mathbf{u}^{(2)}(t) \end{cases} \quad (3)$$

Функционал качества, который нужно минимизировать, представляет собой интеграл функции, зависящей от вектора фазовых координат и вектора управления. Т.к. в задаче ставится цель поиска наиболее экономичной траектории, то минимизировать нужно расход рабочего тела. Данная задача является задачей об оптимальном быстродействии и имеет следующий вид:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta(t) dt \rightarrow \min. \quad (4)$$

Решить данную задачу можно применив принцип максимума Понтрягина [2]. Для этого необходимо составить Гамильтониан, зависящий от вектор-функции состояния, вектор-функции управления и сопряжённой вектор-функции  $\boldsymbol{\psi}(t)$ , который необходимо максимизировать по управлению на траектории перелёта.

$$\begin{aligned}
 H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t)) &= \sum_{i=1}^n \psi^{(i)}(t) f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\
 \rightarrow \max_{\mathbf{u}(t) \in U} H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t))
 \end{aligned} \tag{5}$$

Сопряжённая вектор-функция  $\boldsymbol{\psi}(t)$  может быть определена через частные производные гамильтониана по элементам вектор-функции фазовых координат  $\mathbf{x}(t)$ , взятые с отрицательным знаком:

$$\dot{\psi}^{(i)} = - \frac{\partial H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u})}{\partial x^{(i)}}. \tag{6}$$

Дополнив систему ДУ (3) вектор-функцией сопряжённых переменных (6) и расписав силы, действующие на КА, получим систему ДУ (7), которую необходимо решить при помощи принципа максимума Понтрягина.

$$\left\{ \begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}}^{(1)}(t) &= \mathbf{x}^{(2)}(t) \\
 \dot{\mathbf{x}}^{(2)}(t) &= -\mu_c \frac{\mathbf{x}^{(1)}(t)}{x^{(1)3}(t)} - \frac{F_{ДУ}}{x^{(3)}(t)} M(u^{(1)}(t)) \frac{\mathbf{x}^{(1)}(t)}{x^{(1)}(t)} u^{(2)}(t) \\
 \dot{x}^{(3)}(t) &= -\gamma u^{(2)}(t) \\
 \dot{\boldsymbol{\psi}}^{(1)}(t) &= -\boldsymbol{\psi}^{(2)}(t) \mu_c \frac{2}{x^{(1)3}(t)} \\
 \dot{\boldsymbol{\psi}}^{(2)}(t) &= -\boldsymbol{\psi}^{(1)}(t) \\
 \dot{\boldsymbol{\psi}}^{(3)}(t) &= -\boldsymbol{\psi}^{(2)}(t) \frac{F_{ДУ}}{x^{(3)2}(t)} M(u^{(1)}(t)) \frac{\mathbf{x}^{(1)}(t)}{x^{(1)}(t)} u^{(2)}(t)
 \end{aligned} \right. \tag{7}$$

Основная проблема при решении задачи – определение начальных значений вектор-функции  $\boldsymbol{\psi}(t)$ . Если рассмотреть случай, когда в начальных условиях задано положение КА, его скорость и масса, а для конечной точки нужно чтобы КА вернулся в сферу действия Земли с любой скоростью, при этом масса израсходованного топлива

должна быть минимальной, то исходя из условий трансверсальности получим следующие возможные значения на концах траектории:

Слева	Справа
$\psi_0^{(1)} \in \mathfrak{R}$	$\psi_1^{(1)} \in \mathfrak{R}$
$\psi_0^{(2)} \in \mathfrak{R}$	$\psi_1^{(2)} = \vec{0}$
$\psi_0^{(3)} \in \mathfrak{R}$	$\psi_1^{(3)} \in \mathfrak{R}$

Существует несколько способов определения начальных значений для сопряжённых переменных: метод Нейштадта-Итона, метод вариаций в фазовом пространстве или в пространстве управлений, сведение к задачам нелинейного программирования. Одним из способов является применение нейронных сетей для определения начальных значений.

В случае использования многослойного персептрона на вход нейронной сети будет подаваться начальное состояние КА, а на выходном слое определяться значение вектор-функции вспомогательных переменных на левом конце траектории. С полученными данными будет производиться численное моделирование системы (7). Значения на правом конце траектории будут сравниваться с ожидаемыми, и результатом сравнения станет величина ошибки, которая после нормализации поступит в нейронную сеть для корректировки весов методом обратного распространения ошибки.

### *Библиографический список*

1. Мирер, С.А. Механика космического полёта. Орбитальное движение: учебно-методическое пособие / С.А. Мирер. – Москва: МФТИ, 2013. – 106 с.
2. Понтрягин, Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – 4-е изд. – Москва: «Наука», 1983. – 392 с.