

**Заключение.** Результаты работы показывают применимость точных аналитических методов, развитых при оптимизации ударно-волновых систем, к исследованию аэродинамических характеристик многоугольных профилей. Исследование поведения аэродинамических коэффициентов приводит к выводу, что утолщение профиля влияет на его подъемную и нормальную силы неоднозначно, а также позволяет говорить об определяющем влиянии нижней стороны профиля на его подъемную силу.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Петров Г.И. Аэромеханика больших скоростей и космические исследования / Избр. труды. М.: Наука, 1992.

Омельченко А.В., Усков В.Н. Оптимальные ударно-волновые системы // Изв. РАН. МЖГ. 1995. №6.

Омельченко А.В., Усков В.Н. Оптимальные ударно-волновые системы при ограничениях на суммарный угол поворота потока // Изв. РАН. МЖГ. 1996. №4.

Адрианов А.Л., Старых А.Л., Усков В.Н. Интерференция стационарных газодинамических разрывов. Новосибирск: ВО "Наука", 1995.

Черный Г.Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959.

УДК 533.6

Шахов В. Г.

## ИНТЕГРАЛЬНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПОДВИЖНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В последнее время снова возник интерес к задачам пограничного слоя на подвижной поверхности. Это связано не только с тем, что такие течения имеют место в различных технических устройствах, но и потому, что при исследовании обтекания тел, движущихся вблизи границы, используется принцип обращения движения. В результате этого граница получает:

постоянную скорость. Если отстояние тела от границы небольшое, то необходим учет эффектов вязкости. Часто этот учет сводится к корректировке границы на величину толщины вытеснения пограничного слоя. Для оперативного получения такой информации предлагается использовать интегральный метод.

Из-за малой разности между скоростью невязкого течения на внешней границе пограничного слоя, образующегося на подвижной поверхности, и скоростью этой поверхности можно считать, что при достаточно широких предположениях реализуется ламинарный режим течения в пограничном слое. Эффектами сжимаемости в этом случае также можно пренебречь. Тогда уравнения движения и неразрывности имеют вид [1]

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

где  $u$  и  $w$  – составляющие скорости внутри пограничного слоя соответственно вдоль осей  $x$  и  $y$ , ось  $x$  направлена вдоль границы, а ось  $y$  по нормали к ней;  $U$  – скорость невязкого течения вне пограничного слоя,  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости.

Эти уравнения необходимо решить при следующих граничных условиях.

$$y=0: u=u_w(x), w=0; \quad (3)$$

$$y=\delta: u=U(x). \quad (4)$$

Здесь  $\delta(x)$  – толщина пограничного слоя;  $u_w$  – скорость подвижной поверхности.

В дальнейшем используются безразмерные переменные

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)}, \quad \Pi = \frac{u}{U(x)}$$

Так как предлагается использовать интегральный метод расчета, то профиль продольной скорости в пограничном слое аппроксимируется полиномом вида [1]

$$\Pi = f(\eta) = a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3 + e\eta^4, \quad (5)$$

коэффициенты которого выбираются так, чтобы полином удовлетворял граничным условиям (3) и (4) для  $u$ , условиям плавности смыкания скорости в пограничном слое и невязком течении, а также условию для второй производной скорости  $u$  по  $y$ , получающемуся из уравнения движения (1) при  $y=0$ :

$$y=0: u = u_w; \quad v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -U \frac{dU}{dx} + u_w \frac{du_w}{dx}$$

$$y=\delta: u=U(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

В результате формулу для профиля продольной скорости (5) можно записать как

$$u = u_w + (1 - u_w)F(\eta) + \Lambda G(\eta), \quad (6)$$

где введены обозначения

$$F(\eta) = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 = 1 - (1 - \eta)^3(1 - \eta),$$

$$G(\eta) = \frac{1}{6}(\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4) = \frac{1}{6}\eta(1 - \eta)^3,$$

$$\Lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU}{dx}, \quad u_w = \frac{u_w}{U}$$

Границы изменения формпараметра  $\Lambda$  в формуле (6) находятся из двух предельных условий. В течениях с уменьшением скорости границей будет предострый профиль, а в ускоренных течениях профиль скорости должен быть монотонным во внешней части пограничного слоя. Условия отрыва пограничного слоя на движущейся поверхности отличаются от случая неподвижной поверхности. Они формулируются не на обтекаемой поверхности, а внутри пограничного слоя. Возвратные течения, вызванные отрывом потока, появляются в той точке пограничного слоя  $\eta = \eta_*$ , где одновременно выполняются два следующих условия:

$$u = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (7)$$

Из (6) и (7) следуют два уравнения для нахождения минимального значения формпараметра  $\Lambda$  и безразмерной координаты  $\eta_*$  при заданной величине безразмерной скорости поверхности

$$\frac{\Lambda_{\min}}{12} = -(1 - u_w) \frac{1 + 2\eta_*}{1 - 4\eta_*}; \quad \frac{1 - 4\eta_*}{(1 - \eta_*)^4} = 1 - u_w$$

Условие монотонности профиля скорости, совпадающее с условием максимума скорости на внешней границе пограничного слоя, позволяет найти максимальную величину формпараметра  $\Lambda$  в зависимости от безразмерной скорости поверхности

$$\Lambda_{\max} = 12|1 - u_w|$$

На рис. 1 приведен график области изменения формпараметра  $\Lambda$ , а на рис. 2 изменение безразмерной координаты  $\eta$  внутри пограничного слоя, где впервые возникает возвратное течение, вызванное отрывом потока, в зависимости от величины безразмерной скорости поверхности  $u_w$ .

На рис. 3...5 представлены профили скорости, рассчитанные по формуле (6) для некоторых значений безразмерной скорости поверхности и формпараметра в диапазоне с границами  $\Lambda_{min}$  и  $\Lambda_{max}$ .

Из дифференциальных уравнений (1), (2) и граничных условий (3), (4) выводится интегральное соотношение, которое совпадает с соответствующим уравнением для случая неподвижной поверхности [1],

$$U^2 \frac{d\delta_2}{dx} + (2\delta_2 + \delta_1)U \frac{dU}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho}, \quad (8)$$

где условные толщины пограничного слоя и касательное напряжение на стенке определяются как обычно

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} (1-u) dy, \quad \delta_2 = \int_0^{\delta} u(1-u) dy, \quad \tau_0 = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (9)$$

Подставляя формулу (6) для профиля скорости внутри пограничного слоя в (9), имеем

$$\frac{\delta_2}{\delta} = \frac{3}{10} u_w (1-u_w) + \frac{37}{315} (1-u_w)^2 - \left[ \frac{1}{120} u_w + \frac{1}{945} (1-u_w)^2 \right] \Lambda - \frac{1}{9072} \Lambda^2, \quad (10)$$

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{3}{10} (1-u_w) - \frac{\Lambda}{120}, \quad \frac{\tau_0 \delta}{\mu U} = 2(1-u_w) + \frac{1}{6} \Lambda. \quad (11)$$

Следуя [1], используем новые переменные

$$H_{12} = \frac{\delta_1}{\delta_2} = f_1(\kappa, u_w), \quad \frac{\tau_0 \delta_2}{\mu U} = \left[ 2(1-u_w) + \frac{1}{6} \Lambda \right] \frac{\delta_2}{\delta} = f_2(\kappa, u_w),$$

$$Z = \frac{\delta_2^2}{\nu}, \quad \kappa = \frac{\delta_2^2}{\nu} \frac{dU}{dx} = Z \frac{dU}{dx} = \frac{\delta_2^2}{\delta^2} \Lambda, \quad F(\kappa, u_w) = 2f_2(\kappa, u_w) - 4\kappa - 2\kappa f_1(\kappa, u_w)$$

Тогда интегральное соотношение (8) сводится к следующему уравнению

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{F(\kappa, u_w)}{Z} U, \quad (12)$$

$$\text{где } \kappa = Z \frac{dU}{dx}.$$

Наиболее просто обыкновенное дифференциальное уравнение (12) интегрируется для случая плоской подвижной пластины. В этом случае

$$U = \text{const}, \quad u_w = \text{const}.$$

Так как для данной задачи  $A=0$ , то из (10)...(12) следует, что

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{2}{\frac{37}{315} + \frac{23}{126} \pi_w} \frac{\nu}{U}$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными интегрируется по  $x$  от  $x=0$ , где  $\delta=0$ . Результатом является выражение

$$\delta^2 = \frac{4}{\frac{37}{315} + \frac{23}{126} \pi_w} \frac{\nu x}{U}$$

Тогда из (11) находится распределение касательного напряжения вдоль поверхности пластины. Переходя от касательного напряжения к местному коэффициенту сопротивления трения плоской пластины, получаем соотношение, описывающее влияние скорости поверхности пластины на ее сопротивление

$$\frac{c_f(u_w)}{c_f(u_w=0)} = (1 - \pi_w) \sqrt{1 + \frac{115}{74} \pi_w}$$

На рис. 6 приводится сравнение результатов расчета местного коэффициента сопротивления трения по предложенному приближенному интегральному методу (кривая 1) и точному методу, приведенному в [2] (кривая 2). Это сравнение показывает хорошую точность для случая, когда пластина движется в направлении скорости набегающего потока, и неудовлетворительную при движении пластины навстречу потоку.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М : Наука, 1974. - 712 с.  
 Цыганов М. В., Шахов В. Г. Ламинарный пограничный слой на пластине с движущейся поверхностью // Дел. в ВИНТИ, 1987 г., №1379-В87. - 14 с.

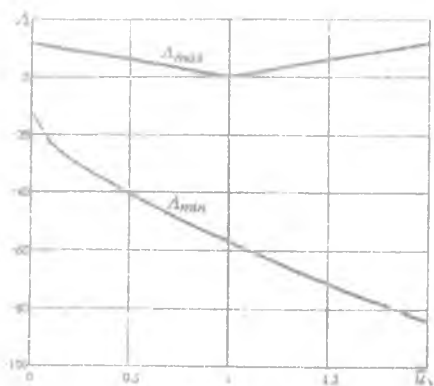


Рис. 1

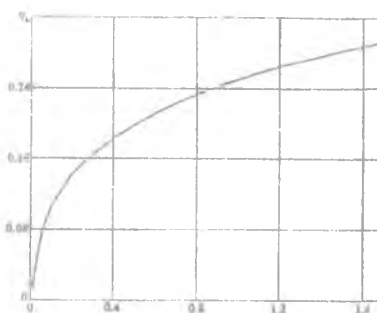


Рис. 2

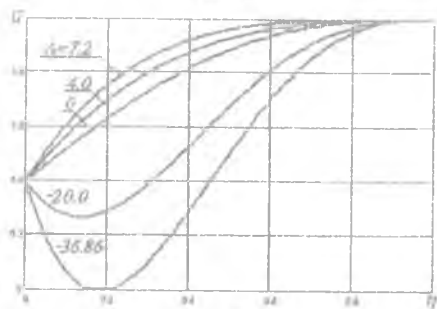


Рис. 3

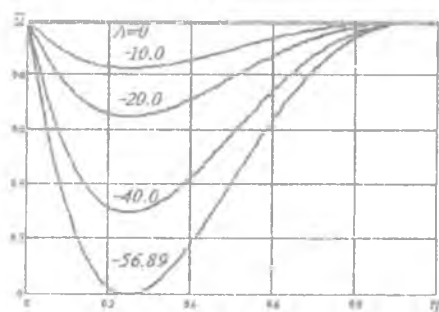


Рис. 4

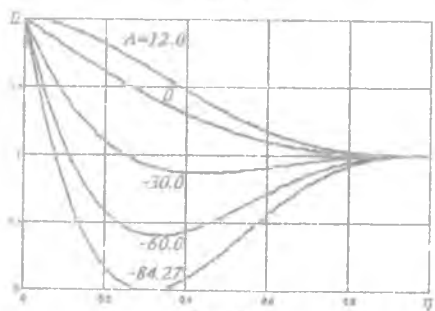


Рис. 5

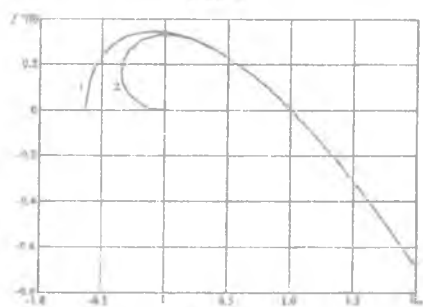


Рис. 6