УДК 531.36, 629.7

Алексеев А.В., Асланов В.С.

ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА С ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ, ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС

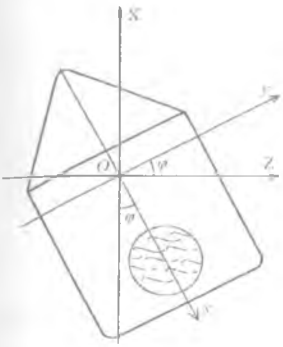

Рис. 1. Схема спутника

Рассматривается плоское движение вокруг центра масс искусственного спутника Земли с полостью, заполненной жидким топливом. Будем считать, что спутник движется по круговой орбите. На движение спутника относительно центра масс влияет гравитационный момент и поведение жидкости в полости. Пусть в связанной системе координат главные моменты инерции удовлетворяют неравенству: $A>B>C$. Топливный бак имеет форму сферы, а топливо малую кинематическую вязкость ($\nu \ll 1$).

Применив подходы в составлении математических моделей движения спутников и систем с жидкими компонентами, изложенные в [1] и [2], запишем уравнение плоского движения вокруг центра масс:

$$\frac{d^2\alpha}{d\vartheta^2}+3\frac{A+A_1-B-B_1}{C+C_1}\sin\alpha+\frac{\rho\sqrt{\nu}En^2}{2(C+J_z)}\frac{d}{d\vartheta}\int\limits_{\vartheta_0/n}^{\vartheta/n}\frac{\alpha' d\tau}{\sqrt{\vartheta/n-\tau}}=0, \qquad (1)$$

где $\alpha=2\varphi$ – удвоенный угол между осями связанной и орбитальной систем координат (рис. 1), $\vartheta=nt$ – истинная аномалия, штрихом обозначено дифференцирование по истинной аномалии, $n=\sqrt{\gamma M}/R^{3/2}$, γ – универсальная гравитационная постоянная, M – масса Земли, R – радиус орбиты; ρ – плотность жидкости, A_1, B_1, C_1 – тензоры инерции присоединенных масс (жидкости), которые зависят от массы жидкости и от расстояния между центром масс топлива и осями связанной системы координат. Параметр полости определяется по формуле: $E=8\pi r^4/3$, где r – радиус сферической полости.

Видно, что уравнение (1) является уравнением колебательных движений. Пусть амплитуда колебаний будет малой величиной, и тогда уравнение (1) можно переписать в виде:

$$\alpha''+k^2\alpha=-\varepsilon\frac{d}{d\vartheta}\int\limits_{\vartheta_0/n}^{\vartheta/n}\frac{\alpha' d\tau}{\sqrt{\vartheta/n-\tau}}. \qquad (2)$$

где $k^2 = 3\dfrac{A + A_1 - B - B_1}{C + C_1}$, $\varepsilon = \dfrac{\rho \cdot \nu E n^2}{2(C + C')}$. Учитывая, что вязкость топлива и величина n малы ($\nu << 1$, $n << 1$), величину $\varepsilon << 1$ также можно считать малым параметром.

Выберем в качестве начальных условий движения: $\vartheta = 0$, $\alpha = \alpha_0$, $\alpha' = 0$. Тогда в соответствии с процедурой усреднения [3] в правую часть уравнения (2) подставим решение соответствующего однородного уравнения:

$$\alpha = \alpha_0 \cos k\vartheta, \quad \alpha' = -\alpha_0 k \sin k\vartheta. \tag{3}$$

Уравнение (2) примет вид:

$$\alpha'' + k^2\alpha = \varepsilon\alpha_0 k F(\vartheta), \tag{4}$$

где

$$F(\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta}\int\limits_0^{\vartheta/n} \frac{\sin k\tau \, d\tau}{\sqrt{\vartheta/n - \tau}}. \tag{5}$$

Так как подынтегральная функция в (5) ограничена и интегрируема, то согласно [4] несобственный интеграл вычисляют по формуле:

$$\int\limits_0^t \frac{\sin k\tau d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \lim_{X \to t-0} \int\limits_0^X \frac{\sin k\tau d\tau}{\sqrt{X-\tau}}.$$

Будем аппроксимировать функцию (5) интегралами Френеля [5]:

$$F(\vartheta) \approx k\left(C(k\vartheta) - \frac{1}{2}\right), \tag{6}$$

где

$$C(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^z \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du.$$

Разложим функцию (6) в асимптотический ряд [5]

$$F(\vartheta) \approx k\left[\frac{\sin k\vartheta}{\sqrt{2\pi k\vartheta}}\left(1 - \frac{1\cdot 3}{(2k\vartheta)^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{(2k\vartheta)^4} - \ldots\right) - \frac{\cos k\vartheta}{\sqrt{2\pi k\vartheta}}\left(\frac{1}{2k\vartheta} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2k\vartheta)^3} - \ldots\right)\right]$$

и будем учитывать только первое слагаемое:

$$F(\vartheta) \approx k\frac{\sin k\vartheta}{\sqrt{2\pi k\vartheta}}. \tag{7}$$

Тогда уравнение (4) примет вид:

$$\alpha'' + k^2\alpha = \varepsilon\alpha_0 k^2 \frac{\sin k\vartheta}{\sqrt{2\pi k\vartheta}}. \tag{8}$$

Умножим уравнение (8) на $d\alpha$ и приведем его к виду:

$$\alpha' d\alpha' + k^2 \alpha d\alpha = \varepsilon D \frac{\sin k\vartheta}{\sqrt{\vartheta}} \alpha' d\vartheta ,$$

где $D = \varphi_0 k^2 / \sqrt{2\pi k}$. Учитывая (3), заменим в правой части последнего уравнения α' и, проинтегрировав обе части уравнения, получим интеграл энергии:

$$\frac{\alpha'^2}{2} + k^2 \frac{\alpha^2}{2} = E_0 - \varepsilon D \alpha_0 k \left[\sqrt{\vartheta} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}} C\left(2\sqrt{\frac{k}{\pi}\vartheta} \right) \right], \tag{9}$$

где $E_0 = k^2 \alpha_0^2 / 2$ – начальное значение полной механической энергии. В силу малых возмущений в уравнении (4) будем считать амплитуду $\alpha_0 = \alpha_{\max}$ в (3) переменной величиной. Воспользуемся заменой переменных (3) и выразим из (9) амплитуду колебаний.

$$\alpha_{\max}(\vartheta) = \alpha_0 \sqrt{1 - \frac{\rho E \sqrt{\nu n^2}}{(J_0 + J)\sqrt{\pi}} \left[\sqrt{\frac{k\vartheta}{2\pi}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} C\left(2\sqrt{\frac{k}{\pi}\vartheta} \right) \right]} . \tag{10}$$

Из выражения (10) видно, что из-за влияния жидкости амплитуда колебаний со временем уменьшается. Таким образом, в спутниках с гравитационной стабилизацией ориентации можно не использовать активную систему демпфирования колебаний, если на борту имеется жидкое топливо.

Результаты данной работы могут быть использованы при исследовании пассивного движения космических аппаратов большого удлинения с баками, заполненными жидким топливом малой вязкости.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-08-00325, грант № 06-01-00355) и фонда Alcoa (грант № AYF 07-003s).

Библиографический список

1. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
2. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ВЦ АН СССР, 1968.
3. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974.
5. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М.: Мир, 1964.