УДК 629.7

Асланов В.С., Дорошин А.В.

ДВА ВИДА ДВИЖЕНИЯ СООСНЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Соосные космические аппараты (КА) представляют собой весьма распространенный класс [1, 2. 3]. Описание движения КА с двойным вращением можно проводить на основе механической системы соосных тел. При совершении активных маневров соосного КА с тормозной двигательной установкой (ТДУ) происходит изменение его инерционно-массовых параметров, поэтому описание пространственного движения соосных тел переменной массы представляет собой важную практическую задачу.

Уравнения движения системы соосных тел переменной массой получены в работе [3] и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &\left(A(t)-m\rho_C^2(t)\right)\dot{p}+B(t)qr+C_1(t)q\sigma=0,\\ &\left(A(t)-m\rho_C^2(t)\right)\dot{q}-B(t)pr-C_1(t)p\sigma=0,\\ &\qquad C_2\dot{r}+C_1(t)\left(\dot{r}+\dot{\sigma}\right)=0, \end{aligned} \qquad (1)$$

$$C_1(t)\left(\dot{r}+\dot{\sigma}\right)=M_\delta . \qquad (2)$$

где $B(t)=C(t)-A(t)$, $C(t)=C_2+C_1(t)$, $A(t)=A_2+A_1(t)$; A_i и C_i экваториальный и продольный моменты инерции тела i, вычисленные в связанной с телом системе координат (для тела 2 – $Oxyz$, для тела 1 – $Ox'y'z'$,); M_δ - момент внутреннего взаимодействия тел.

Следует отметить, что за полюс O, вокруг которого рассматривается пространственное движение, выбрана точка, совпадающая с начальным положением центра масс системы тел. Тела системы могут вращаться относительно друг друга лишь в направлении общей продольной оси. Угол и скорость относительного закручивания тел обозначим, соответственно, как δ и σ, причем $\sigma=\dot{\delta}$

Добавим к динамическим уравнениям (1) и (2) следующие кинематические уравнения:

$$\begin{aligned} &\dot{\gamma}=p\sin\varphi+q\cos\varphi,\ \ \dot{\psi}=\frac{1}{\cos\gamma}\left(p\cos\varphi-q\sin\varphi\right),\\ &\dot{\varphi}=r-\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}\left(p\cos\varphi-q\sin\varphi\right),\quad \dot{\delta}=\sigma. \end{aligned} \qquad (3)$$

Будем полагать, что масса, продольные и поперечные моменты инерции убывают по линейному закону:

$$m(t) = m_1 + m_2 - \nu t,$$

$$A_1(t) = A_1 - \frac{A_1 - A_{1,k}}{T}t = A\left(m_1 - \nu t\right), \quad C_1(t) = C_1 - \frac{C_1 - C_{1,k}}{T}t = C\left(m_1 - \nu t\right), \tag{4}$$

$$A = const, \ C = const, \quad A_2 = const, C_2 = const,$$

где m_i - начальная масса тела i; ν - секундный расход массы; A_i, C_i $A_{1,k}$, $C_{1,k}$ - величины экваториальных и продольных моментов инерции тел, соответствующие началу и концу работы ТДУ; T–время работы ТДУ; A, C – коэффициенты пропорциональности, связывающие величины моментов инерции тела 1 с его массой.

Если допустить, что между телами присутствует момент внутреннего взаимодействия $M_\delta(t)$, то из уравнений (1) и (2) следуют следующие квадратуры для продольных компонентов угловых скоростей:

$$r(t) = -\int \frac{M_\delta(t)}{C_2}\,dt, \quad \sigma(t) = \int \frac{M_\delta(t)\left(C_1(t) + C_2\right)}{C_1(t)C_2}\,dt.$$

Рассмотрим случай, когда этот момент отсутствует: $M_\delta(t) = 0$, т.е. реализуется случай движения с пренебрежимо малым трением и выключенным двигателем раскрутки маховика-гиростата (одного из соосных тел). В этом случае продольные компоненты угловых скоростей будут постоянны: $r = r_0$, $\sigma = \sigma_0$.

С изменением массы координата центра масс системы является функцией времени, причем, как показано в [3], слагаемое $m\rho_C^2(t)$ можно исключить из уравнений (1) как величину высшего порядка малости

В уравнениях (1) от переменных $\{p, q\}$ перейдем к переменным $\{G, F\}$ типа "амплитуда-фаза" с помощью следующей замены:

$$p(t) = G(t)\sin F(t), \ q(t) = G(t)\cos F(t). \tag{5}$$

В новых переменных (5) с учетом малых относительных смещений центра масс первые два уравнения (1) примут вид:

$$\begin{gathered} \dot{G} = 0, \ \dot{F} \approx \omega + 2\mu t; \ \omega = \frac{k}{A_1 + A_2}, \ \mu = \frac{1}{2}\left(\frac{\left(A_1 - A_{1,k}\right)k}{T\left(A_1 + A_2\right)^2} - \frac{n}{A_1 + A_2}\right); \\ k = r_0\left(A_1 + A_2 - C_1 - C_2\right) - C_1\sigma_0, \ n = \frac{A_1 - A_{1,k}}{T}r_0 - \frac{C_1 - C_{1,k}}{T}\left[r_0 + \sigma_0\right]. \end{gathered} \tag{6}$$

Решения уравнений (6) имеют вид:

$$G = L_0, \quad F(t) = s_0 + \omega t + \mu t^2, \qquad (7)$$

поэтому для экваториальных угловых скоростей будут справедливы следующие аналитические зависимости:

$$p(t) = L_0 \sin\left(s_0 + [\omega + \mu t]t\right), \quad q(t) = L_0 \cos\left(s_0 + [\omega + \mu t]t\right). \qquad (8)$$

Рассмотрим два возможных случая движения соосных тел, характеризующихся совпадением и различием знаков ω и μ:

$$1)\ \operatorname{sgn}\omega = \operatorname{sgn}\mu; \qquad 2)\ \operatorname{sgn}\omega = -\operatorname{sgn}\mu. \qquad (9)$$

Из кинематических уравнений (3) и зависимостей (8) следует, что для углов пространственной ориентации системы в случае малых углов нутации и медленной скорости собственного вращения справедливы следующие соотношения:

$$\dot{\gamma} = L_0 \sin\left(s_0 + [\omega + \mu t]t\right), \quad \dot{\psi} = L_0 \cos\left(s_0 + [\omega + \mu t]t\right). \qquad (10)$$

Из (10), во-первых, следует, что линеаризованные уравнения для пространственных углов представляют собой неавтономную систему, поэтому возможны пересечения фазовых траекторий (ФТ) в пространстве углов $\{\gamma, \psi\}$ и, во-вторых, так как функции sin(x) и cos(x) не могут одновременно равняться нулю, то не существует стационарных положений углов (предельных при $t \to \infty$ точек ФТ), соответствующих аттракторам динамической системы (10), под которыми понимаются множества точек, к которым притягиваются ФТ.

Проиллюстрируем последние замечания примерами фазовых портретов в пространстве $\{\gamma, \psi\}$ для обоих случаев (9). На рис.1 представлен соответствующий первому случаю фазовый портрет, из которого видно, что ФТ скручиваются к некоторым предельным положениям, отмеченным крестиками. На рис.2 представлен фазовый портрет системы во втором случае, из которого видно, что ФТ сначала раскручиваются из своих начальных точек, а затем скручиваются к весьма удаленным предельным положениям

При малых углах нутации Θ будет справедливо выражение $\Theta^2 \approx \gamma^2 + \psi^2$, поэтому приведенный рисунок 1 дает весьма простую геометрическую интерпрстацию условия уменьшения амплитуды колебаний угла нутации около своего предельного значения ("конечная" точка ФТ) [3]: длина радиус-вектора, проведенного из начала координат фазового пространства в точку ФТ, соответствует величине угла нутации (рис.3).

Выполнение того или другого условия (9) определяется инерционно-массовыми и кинематическими параметрами системы соосных тел, что необходимо учитывать при проектировании соосных КА переменной массы, выбирая способ размещения твердотопливных пакетов тормозной двигательной установки и начальные условия движения таким образом, чтобы реализовывался случай 1, обеспечивающий уменьшение амплитуды нутационных колебаний КА. Например, для получения одинаковых знаков величин ω и μ следует максимально увеличить конечное изменение величины экваториального момента инерции $(A_1 - A_{1,k})$ по сравнению с изменением продольного $(C_1 - C_{1,k})$, т.е. наиболее выгоден случай выгорания ТДУ, представленный на рис.4а, а наименее выгоден случай, соответствующий рис. 4б. (на рисунке 4 ось z является продольной осью ТДУ).

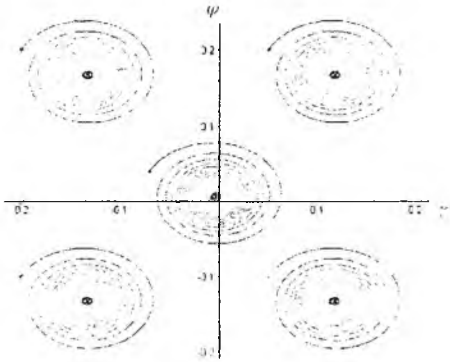

Рис.1 Фазовый портрет системы в случае совпадения знаков величин ω и μ

(ω=10 c^{-1}, μ=2,5 c^{-2}, L_0=0,75 c^{-1}, s_0=0,5 рад)

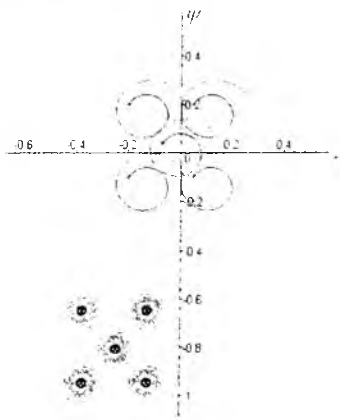

Рис.2 Фазовый портрет системы в случае несовпадения знаков величин ω и μ

(ω =10 c^{-1}, μ = -2,5 c^{-2}, L_0=0.75 c^{-1}, s_0=0,5 рад)

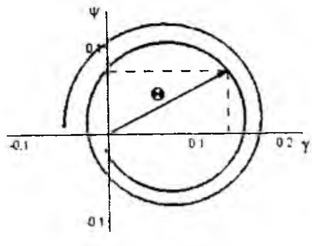

Рис.3 Величина угла нутации как длина радиус-вектора точки ФТ

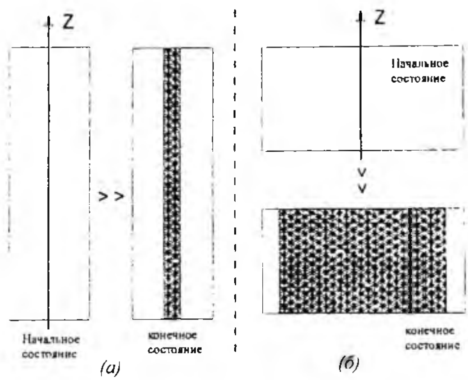

Рис.4 Два случая выработки топлива в ТДУ

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Асланов В. С., Дорошин А. В. Стабилизация спускаемого аппарата частичной закруткой при осуществлении неуправляемого спуска в атмосфере. // Космические исследования. 2002. Т.40. № 2, с. 193-200.
2. Нейштадт А. И., Пивоваров М. Л. Переход через сепаратрису в динамике спутника с двойным вращением. // Прикладная математика и механика. 2000. Т.64. № 5, с.741-746.
3. Асланов В.С., Дорошин А.В., Круглов Г.Е. Уменьшение ошибок стабилизации соосных тел переменного состава при входе в атмосферу. // Вестник СГАУ, 2002, №1, с.126-134.