

## АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим обтекание любого плоского криволинейного контура. Оси ортогональной криволинейной системы координат выберем таким образом, что ось  $\bar{q}_1$  направлена по касательной к данной точке контура, ось  $\bar{q}_2$  – по нормали (рисунок 1). Положение любой точки  $M$  будет определяться координатами  $q_1 = s$  и  $q_2 = n$ , где  $q_2$  – отрезок нормали  $MN$  к контуру, проходящий через точку  $M$ ,  $q_1$  – длина дуги кривой  $ON$ ,  $O$  – точка отсчета координаты  $q_1$ .

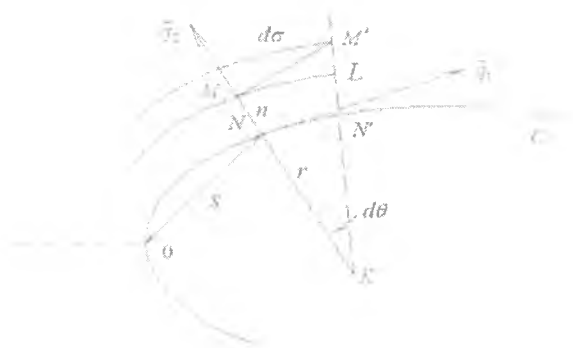


Рис. 1. К выводу уравнений пограничного слоя

Определим коэффициенты Ляме для рассматриваемой системы координат. Возьмем соседнюю с  $M$  точку  $M'$  и вычислим расстояние  $d\sigma$  между точками  $M$  и  $M'$ . Бесконечно близкие нормали  $MN$  и  $M'N'$  пересекаются в центре кривизны  $K$ , соответствующем точке  $N$  кривой  $OC$ . Радиус кривизны кривой  $OC$  в точке  $N$  обозначим через  $r(s)$  и предположим, что  $r(s)$  есть непрерывная функция от  $s$  вместе со своей первой производной.

Коэффициенты Ляме для рассматриваемой системы имеют вид [1]:

$$H_1 = 1 + \frac{n}{r(s)}, \quad H_2 = 1.$$

Уравнения неразрывности и упрощенные уравнения Навье-Стокса для плоского установившегося несжимаемого течения вдоль криволинейной поверхности имеют вид:

$$\frac{1}{H_1} \frac{\partial \rho v_s}{\partial s} + \frac{\partial \rho v_n}{\partial n} + \frac{\rho v_n}{r H_1} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left( \frac{v_s}{H_1} \frac{\partial v_s}{\partial s} + v_n \frac{\partial v_s}{\partial n} + \frac{v_s v_s}{H_1 r} \right) = - \frac{1}{H_1} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial \tau_{ns}}{\partial n} + \frac{2\tau_{nr}}{H_1 r}, \quad (2)$$

$$\rho \frac{v_s^2}{H_1 r} = \frac{\partial p}{\partial n}, \quad (3)$$

где в случае вязкой жидкости:  $\tau_{ns} = \mu \left( \frac{\partial v_s}{\partial n} - \frac{v_s}{H_1 r} \right)$ .

При определении порядка величины членов, входящих в безразмерное уравнение Навье-Стокса, все члены, имеющие порядок величины  $\frac{1}{\text{Re}} y^{1/2}$  или выше, были сохранены для того, чтобы получить уравнение количества движения в пограничном слое в направлении  $s$ . Величина  $Kl$  имеет порядок  $K\delta$ , которое в свою очередь имеет порядок  $\frac{1}{\text{Re}} y^{1/2}$ , поскольку  $\delta$  имеет порядок  $\frac{L}{\text{Re}} y^{1/2}$ , а  $KL$  считается имеющим порядок единицы.

Решение уравнений (1)-(3) получено при следующих граничных условиях:

$$u(s,0) = 0, \quad v(s,0) = 0,$$

$$u(s,n) \rightarrow u_e(s,n) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\frac{\partial(uH)}{\partial n} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,$$

где  $u_e$  относится к внешнему невязкому течению и получено решением задачи о потенциальном течении в отсутствии пограничного слоя. Последнее граничное условие означает исчезновение вихрей во внешнем невязком течении. Так как в невязком течении в отсутствии пограничного слоя завихренность отсутствует, то можно записать уравнение:

$$\zeta_n \equiv - \frac{1}{H} \left( \frac{\partial(u_e H)}{\partial n} \right) = 0,$$

которое имеет решение

$$u_e = \frac{U(s)}{H},$$

где  $U(s)$  – распределение скорости невязкого течения вдоль поверхности.

## 2. Получение автомодельных решений

Для получения автомодельных решений применялись следующие переменные

[2]:

$$f'(\eta) = \frac{u}{u_\epsilon}, \quad \eta = \frac{1}{g(s)} \int_0^s u_\epsilon dn = \frac{1}{\Omega} \ln H,$$

где  $\Omega = \frac{Kg}{U}$  – параметр кривизны поверхности, который считается постоянным для автотомодельных решений.

Вводя новые переменные, исключая значения  $v$  из уравнений (2) и (1) и исключая  $p$  из уравнений (2) и (3), получаем для  $f$  следующее дифференциальное уравнение:

$$f^{(4)} - 4\Omega f''' + 4\Omega^2 f'' + (ff'')' - 2\Omega ff'' - 2ff'' = 0. \quad (4)$$

Граничные условия для функции  $f$  имеют вид:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1, \quad f''(\infty) = 0. \quad (5)$$

Для решения полученного дифференциального уравнения воспользуемся методом матричной прогонки [3].

Для этого вначале представим дифференциальное уравнение (4) в виде системы уравнений первого порядка. Для этого введем новые независимые переменные  $u(x)$ ,  $v(x)$ ,  $g(x)$  и запишем преобразованные уравнений в виде:

$$\left. \begin{aligned} f' &= u, \quad u' = v, \quad v' = g, \\ g' - 4\Omega g + 4\Omega^2 v + fg - 2\Omega f v - uv &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

В новых переменных граничные условия (5) принимают вид:

$$f(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(\infty) = 1, \quad v(\infty) = 0. \quad (7)$$

Воспользуемся конечно-разностной моделью. Тогда система (6) примет вид

$$\left. \begin{aligned} f_j^n - f_{j-1}^n &= \frac{h_{j-1}}{2} u_{j-1/2}^n, \quad u_j^n - u_{j-1}^n = \frac{h_{j-1}}{2} v_{j-1/2}^n, \quad v_j^n - v_{j-1}^n = \frac{h_{j-1}}{2} g_{j-1/2}^n, \\ h_j^{-1} (g_j^n - g_{j-1}^n) &= 4\Omega g_{j-1/2}^n - 4\Omega^2 v_{j-1/2}^n + (uv)_{j-1/2}^n - (fg)_{j-1/2}^n + 2\Omega (fv)_{j-1/2}^n. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Для решения полученной системы воспользуемся методом Ньютона и отыщем решение методом последовательных приближений. Для этого линеаризуем систему, введя новые переменные:

$$f_j^{(i+1)} = f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)}, \quad u_j^{(i+1)} = u_j^{(i)} + \delta u_j^{(i)}, \quad v_j^{(i+1)} = v_j^{(i)} + \delta v_j^{(i)}, \quad g_j^{(i+1)} = g_j^{(i)} + \delta g_j^{(i)}.$$

Затем правые части этих выражений подставим в уравнения (8) вместо  $f_j$ ,  $u_j$ ,  $v_j$ ,  $g_j$  и отбросим члены, содержащие квадраты  $\delta f_j^{(i)}$ ,  $\delta u_j^{(i)}$ ,  $\delta v_j^{(i)}$ ,  $\delta g_j^{(i)}$ . В результате получим линейную систему уравнений (верхний индекс  $i$  у величин, в выражения которых входит  $\delta$ , для простоты отбросим):



$$\delta = \begin{bmatrix} \delta f_j \\ \delta u_j \\ \delta v_j \\ \delta g_j \end{bmatrix} \quad 0 \leq j \leq J, \quad r_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (r_3)_0 \\ (r_4)_0 \end{bmatrix},$$

$$r_j = \begin{bmatrix} (r_1)_j \\ (r_2)_j \\ (r_3)_j \\ (r_4)_j \end{bmatrix} \quad 1 \leq j \leq J-1, \quad r_j = \begin{bmatrix} (r_1)_j \\ (r_2)_j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицы  $A_j$ ,  $B_j$ ,  $C_j$  имеют вид:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{h}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{h}{2} \end{bmatrix}, \quad A_j = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{h_j}{2} & 0 & 0 \\ (s_3)_j & (s_5)_j & (s_1)_j & (s_7)_j \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_j = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{h_j}{2} & 0 & 0 \\ (s_3)_j & (s_5)_j & (s_1)_j & (s_7)_j \\ 0 & -1 & -\frac{h_j}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{h_j}{2} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq j \leq J-1,$$

$$B_j = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{h_j}{2} & 0 & 0 \\ (s_4)_j & (s_6)_j & (s_2)_j & (s_8)_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 1 \leq j \leq J.$$

$$C_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{h_j}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{h_j}{2} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq j \leq J-1.$$

Предложенный метод решения реализуется при помощи математического пакета MatLab.

В результате вычислений были получены профили скоростей (рисунок 2) и профили напряжений (рисунок 3). Для проверки были построены профили  $g$  (рисунок 4). В таблице 1 приводятся величины безразмерного напряжения трения на стенке  $v(0)$ , а в таблице 2 –  $g(0)$ .

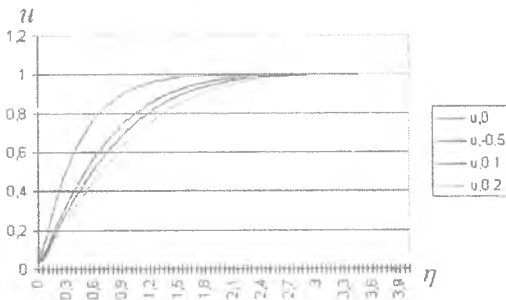


Рис. 2. Профили скорости

Из рисунка 2 можно сделать вывод об увеличении или уменьшении толщины пограничного слоя: при увеличении параметра кривизны толщина пограничного слоя уменьшается и профиль стремится к отрыву, при уменьшении параметра кривизны – толщина пограничного слоя уменьшается.

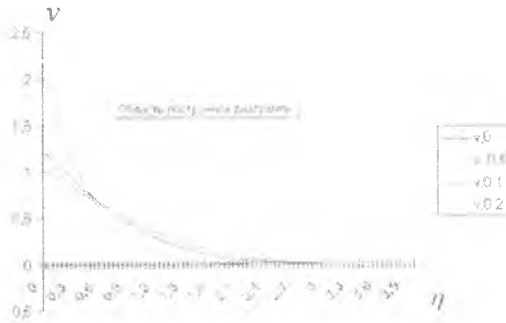


Рис. 3. Профили напряжений

Таблица 1

$\Omega$	-0.5	0	0.1	0.2
$v(0)$	2.207	1.2325	1.0431	0.85734

График профиля напряжений говорит о том, что при увеличении параметра кривизны касательное напряжение уменьшается, а при уменьшении параметра кривизны – увеличивается.

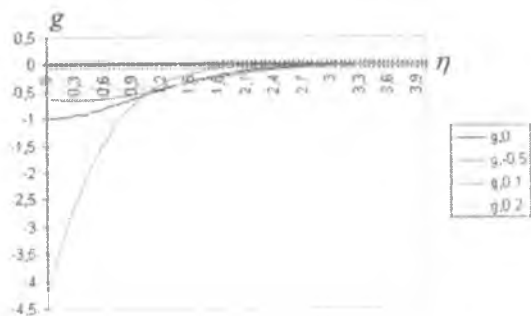


Рис. 4. Профили  $g$

Таблица 2

$\Omega$	-0.5	0	0.1	0.2
$g(0)$	-4.217	-0.99975	-0.60799	-0.3002

Библиографический список

4. Гинзбург И.П. Теория сопротивления и теплопередачи. Л.: Изд-во ЛГУ. 1970.
5. Тулби, Пейтель. Пограничный слой на стенке криволинейного сужающегося канала// Ракетная техника и космонавтика, 1968, №9. С. 240-241.
6. Себеси Т., Брэдшоу П., Конвективный теплообмен. М.: Мир, 1987.