УДК 629.78:681.51

Сомов Е.И., Бутырин С.А.

АНАЛИТИЧЕСКИ СОГЛАСОВАННЫЙ СИНТЕЗ МАРШРУТНОГО УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПРИ ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННОМ НАБЛЮДЕНИИ

Задача аналитически согласованной аппроксимации программного углового маршрутного движения (МД) космического аппарата (КА) на заданном интервале времени $t \in \mathrm{T}_{\mathrm{n}} \equiv [t_0^n, t_f^n]$, $t_f^n \equiv t_0^n + T_n$, состоит в определении явных функций времени, *приближенно* определяющих в *явном* виде кватернион ориентации $\Lambda(t) = (\lambda_0(t), \boldsymbol{\lambda}(t)), \boldsymbol{\lambda}(t) = \{\lambda_i(t)\}$, связанного с корпусом КА базиса $\mathbf{B}$ относительно известного инерциального базиса $\mathbf{I}$, векторы угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$, углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \{\varepsilon_i(t)\} = \dot{\boldsymbol{\omega}}(t)$ и производной углового ускорения $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}^*(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{\varepsilon}(t)$ по значениям векторов $\boldsymbol{\omega}_s \equiv \boldsymbol{\omega}(t_s)$, заданным в дискретные моменты времени $t_s \in \mathrm{T}_{\mathrm{n}}$ с периодом $T_q = t_{s+1} - t_s$, $s = 0,1,2...n_q \equiv 0:n_q$, $n_q = T_n / T_q$, и начальному значению кватерниона $\Lambda(t_0^n) = \Lambda_0$. Решение задачи при бортовой реализации должно получаться *экстраполяцией* значений векторов $\boldsymbol{\omega}_k \equiv \boldsymbol{\omega}(t_k)$, определенных в моменты времени $t_k \in \mathrm{T}_{\mathrm{n}}$ с шагом $T_a = t_{k+1} - t_k$, $k = 0:n$, $n \equiv T_n / T_a$, при кратности периодов $k_q^a \equiv T_a / T_q = 2^{k_p}$ степени $k_p \geq 2$. Получаемые при такой аппроксимации кватернион $\mathrm{M}(t) = (\mu_0(t), \boldsymbol{\mu}(t)), \boldsymbol{\mu}(t) = \{\mu_i(t)\}$ и вектор $\mathbf{p}(t)$ в явной зависимости от времени $t \in \mathrm{T}_{\mathrm{n}}$, используемые в БЦВМ в моменты времени $t_s \in \mathrm{T}_{\mathrm{n}}$, должны быть близки к кватерниону $\Lambda(t)$ и вектору $\boldsymbol{\omega}(t)$ $\forall t \in \mathrm{T}_{\mathrm{n}}$, соответственно. Кроме того, эта аппроксимация должна обеспечивать получение в *явном* виде векторных функций $\mathbf{q}(t) = \dot{\mathbf{p}}(t)$ и $\dot{\mathbf{q}}(t)$, соответствующих функциям $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)$. Значения кватерниона $\mathrm{M}(t_0^n) = \mathrm{M}_0 = \Lambda_0$ и векторов $\mathbf{p}(t_0^n)$, $\mathbf{q}(t_0^n)$, $\dot{\mathbf{q}}(t_0^n)$ необходимы для *гладкого сопряжения* МД с предыдущим участком ПМ КА, а значения кватерниона $\mathrm{M}(t_f^n) = \mathrm{M}_n$ и векторов $\mathbf{p}(t_f^n) = \mathbf{p}_n$, $\mathbf{q}(t_f^n) = \mathbf{q}_n$ – для задания *начальных условий* последующего участка ПМ КА.

Подход к решению задачи основывается на экстраполяции дискретно заданной траектории вектора программной угловой скорости КА $\boldsymbol{\omega}_k$ вектором $\mathbf{p}(t)$ $\forall t \in \mathrm{T}_n$ при условиях $\mathbf{p}(t_k) \equiv \mathbf{p}_k = \boldsymbol{\omega}_k$, $k = 0:(n-1)$, $\mathbf{p}(t_n) = \mathbf{p}(t_f^n) = \boldsymbol{\omega}_n$ с помощью n векторных сплайнов третьего порядка $\mathbf{p}_k(\tau)$, $k = 0:(n-1)$ в нормированном времени $\tau = (t - t_k)/T_a \in [0,1]$, и далее аналитическом получении высокоточной аппроксимации как вектора программного углового ускорения $\mathbf{q}(t) = \dot{\mathbf{p}}(t)$ с его локальной производной $\dot{\mathbf{q}}(t)$, так и кватерниона программной ориентации $\mathbf{M}(t)$ за счет выполнения условий разрешимости классической задачи *Дарбу*.

При обозначениях $\mathbf{p}_k(0) = \mathbf{p}_k$ и $\mathbf{p}'_k(0) = \mathbf{p}'_k$, где $\mathbf{p}'_k(\tau) \equiv d\mathbf{p}_k(\tau)/d\tau$ в нормированном времени $\tau = (t - t_k)/T_a \in [0,1]$, векторный сплайн $\mathbf{p}_k(\tau)$ на сегменте $m \equiv k+1$, где индексы $k = 0:(n-1)$, представляется в матричном виде

$$\mathbf{p}_k(\tau) = \mathbf{F}(\tau)\cdot\mathbf{G}_k; \; \mathbf{F}(\tau) = [\mathrm{F}_1(\tau), \mathrm{F}_2(\tau), \mathrm{F}_3(\tau), \mathrm{F}_4(\tau)]; \quad \mathbf{G}_k = \{\mathbf{p}_k, \mathbf{p}_{k+1}, \mathbf{p}'_k, \mathbf{p}'_{k+1}\}, \quad (1)$$

где нормированные к абсолютной длине сегмента T_a кубические весовые функции *Эрмита*

$$\mathrm{F}_1(\tau) = \tau^2(2\tau-3)+1; \quad \mathrm{F}_2(\tau) = -\tau^2(2\tau-3); \quad \mathrm{F}_3(\tau) = T_a\tau(\tau-1)^2; \quad \mathrm{F}_4(\tau) = T_a\tau^2(\tau-1) \quad (2)$$

и использованы обозначения строки $[\cdot]$ и столбца $\{\cdot\}$. При введении обозначений

$$\mathbf{T}_{\mathrm{H}}(\tau) = [1, \tau, \tau^2, \tau^3]; \qquad \mathbf{A}_{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_a & 0 \\ -3 & 3 & -2T_a & -T_a \\ 2 & -2 & T_a & T_a \end{bmatrix}$$

матрица-строка весовых функций имеет вид $\mathbf{F}(\tau) = \mathbf{T}_{\mathrm{H}}(\tau)\cdot\mathbf{A}_{\mathrm{H}}$. В нормированном времени τ векторный сплайн $\mathbf{p}_k(\tau)$ на m-ом сегменте аппроксимации и его производные по τ представляются в явном виде

$$\mathbf{p}_k(\tau) = \mathrm{F}_1(\tau)\,\mathbf{p}_k + \mathrm{F}_2(\tau)\,\mathbf{p}_{k+1} + \mathrm{F}_3(\tau)\,\mathbf{p}'_k + \mathrm{F}_4(\tau)\,\mathbf{p}'_{k+1}, \quad (3)$$

$$\mathbf{q}_k(\tau) = \mathbf{p}'_k(\tau) = \mathrm{F}'_1(\tau)\,\mathbf{p}_k + \mathrm{F}'_2(\tau)\,\mathbf{p}_{k+1} + \mathrm{F}'_3(\tau)\,\mathbf{p}'_k + \mathrm{F}'_4(\tau)\,\mathbf{p}'_{k+1}, \quad (4)$$

$$\mathbf{q}'_k(\tau) = \mathrm{F}''_1(\tau)\,\mathbf{p}_k + \mathrm{F}''_2(\tau)\,\mathbf{p}_{k+1} + \mathrm{F}''_3(\tau)\,\mathbf{p}'_k + \mathrm{F}''_4(\tau)\,\mathbf{p}'_{k+1}. \quad (5)$$

Дифференцирование весовых функций *Эрмита* (2) в нормированном времени τ дает

$$\mathrm{F}'_1(\tau) = 6\tau(\tau-1); \qquad \mathrm{F}'_2(\tau) = -6\tau(\tau-1); \qquad \mathrm{F}'_3(\tau) = T_a[\tau(3\tau-4)+1];$$
$$\mathrm{F}'_4(\tau) = T_a\tau(3\tau-2). \quad (6)$$

На m-ом сегменте аппроксимации в абсолютном времени $t \in \mathrm{T}_k \equiv [t_k, t_{k+1}]$, $t_{k+1} = t_k + T_a$, $k = 0:(n-1)$, учитывая, что $d\tau / dt = 1/T_a$, имеем производные этих функций

$$\dot{\mathrm{F}}_1(t) = 6\tau(\tau-1)/T_a; \quad \dot{\mathrm{F}}_2(t) = -6\tau(\tau-1)/T_a; \quad \dot{\mathrm{F}}_3(t) = \tau(3\tau-4)+1; \quad \dot{\mathrm{F}}_4(t) = \tau(3\tau-2); \tag{7}$$

$$\ddot{\mathrm{F}}_1(t) = 6(2\tau-1)/T_a^2; \quad \ddot{\mathrm{F}}_2(t) = -6(2\tau-1)/T_a^2; \quad \ddot{\mathrm{F}}_3(t) = 2(3\tau-2)/T_a; \quad \ddot{\mathrm{F}}_4(t) = 2(3\tau-1)/T_a, \tag{8}$$

где формально $\tau = (t - t_k)/T_a \in [0,1]$. В абсолютном времени $t \in \mathrm{T}_k$ производные векторного сплайна $\mathbf{p}_k(t)$ имеют вид

$$\mathbf{q}_k(t) = \dot{\mathbf{p}}_k(t) = \dot{\mathrm{F}}_1(t)\,\mathbf{p}_k + \dot{\mathrm{F}}_2(t)\,\mathbf{p}_{k+1} + \dot{\mathrm{F}}_3(t)\,\mathbf{p}'_k + \dot{\mathrm{F}}_4(t)\,\mathbf{p}'_{k+1}; \tag{9}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_k(t) = \ddot{\mathbf{p}}_k(t) = \ddot{\mathrm{F}}_1(t)\,\mathbf{p}_k + \ddot{\mathrm{F}}_2(t)\,\mathbf{p}_{k+1} + \ddot{\mathrm{F}}_3(t)\,\mathbf{p}'_k + \ddot{\mathrm{F}}_4(t)\,\mathbf{p}'_{k+1}, \tag{10}$$

где использованы представления производных весовых функций (7) и (8).

Очевидно, что векторы $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_0(0) = \boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\omega}(t_0^n)$ и $\mathbf{p}_n(0) = \mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{n-1}(1) = \boldsymbol{\omega}_n = \boldsymbol{\omega}(t_f^n)$, а векторы $\mathbf{p}'_0 = \mathbf{p}'_0(0)$ и $\mathbf{p}'_n = \mathbf{p}'_{n-1}(1)$, представляемые в абсолютном времени t с учетом (9) как $\dot{\mathbf{p}}(t_0^n) = \mathbf{p}'_0$ и $\dot{\mathbf{p}}(t_f^n) = \mathbf{p}'_n$, соответствуют векторам $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}(t_0^n)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_n = \boldsymbol{\varepsilon}(t_f^n)$.

Аналитический расчет векторов $\dot{\mathbf{p}}(t_0^n)$ и $\dot{\mathbf{p}}(t_f^n)$ на *границах* заданного интервала T_n выполняется с помощью *аппроксимации* вектора $\boldsymbol{\omega}(t)$ на основе классической интерполяционной формулы *Лагранжа* порядка $p \in (3,4,5)$ на интервалах времени $t \in [t_0^n, t_0^n + pT_q]$ и $t \in [t_f^n - pT_q, t_f^n]$ по значениям векторов $\boldsymbol{\omega}_s^q = \boldsymbol{\omega}(t_s)$ при $s = 0:p$ и $s = n_q - p : n_q$, соответственно. Такая аппроксимация в окрестности *левой* границы интервала T_n имеет вид

$$\boldsymbol{\omega}(t) \approx \mathbf{l}(t) = \mathbf{l}_0 + \mathbf{l}_1\tau_q + \mathbf{l}_2\tau_q^2 + \cdots + \mathbf{l}_p\tau_q^p, \qquad \tau_q = (t - t_0^n)/T_q \in [0, p],$$

и в окрестности *правой* границы этого интервала представляется как

$$\boldsymbol{\omega}(t) \approx \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1\tau_q + \mathbf{r}_2\tau_q^2 + \cdots + \mathbf{r}_p\tau_q^p, \quad \tau_q = (t + pT_q - t_f^n)/T_q \in [0, p], \ p = 3,4,5.$$

В этих соотношениях всегда векторы $\mathbf{l}_0 = \boldsymbol{\omega}_0^q$ и $\mathbf{r}_0 = \boldsymbol{\omega}_{n_q - p}^q$, а остальные векторы вычисляются по двум однотипным блочно-матричным соотношениям

$$\{\mathbf{l}_1, \ \mathbf{l}_p\} = \mathbf{B}_p^a \cdot \{\boldsymbol{\omega}_0^q, \ \boldsymbol{\omega}_p^q\}; \qquad \{\mathbf{r}_1, \ \mathbf{r}_p\} = \mathbf{B}_p^a \cdot \{\boldsymbol{\omega}_{n_q-p}^q, \ \boldsymbol{\omega}_{n_q}^q\}, \qquad p = 3,4,5,$$

где постоянные прямоугольные матрицы

$$\mathbf{B}_3^a = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -11 & 18 & -9 & 2 \\ 6 & -15 & 12 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B}_4^a = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} -50 & 96 & -72 & 32 & -6 \\ 35 & -104 & 114 & -56 & 11 \\ -10 & 36 & -48 & 28 & -6 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_5^a = \frac{1}{120} \cdot \begin{bmatrix} -274 & 600 & -600 & 400 & -150 & 24 \\ 225 & -770 & 1070 & -780 & 305 & -50 \\ -85 & 355 & -590 & 490 & -205 & 35 \\ 15 & -70 & 130 & -120 & 55 & -10 \\ -1 & 5 & -10 & 10 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Порядок p интерполяции выбирается из условия малости «краевых эффектов» для производных векторной функции $\omega(t)$. Учитывая $d\tau_q / d = 1/T_q$, производные векторной функции $\mathbf{p}(t) = \dot{\omega}(t)$ на границах интервала $\mathrm{T_п}$ в абсолютном времени t рассчитываются так:

$$\dot{\mathbf{p}}(t_0^n) = \mathbf{l}_1 / T_q; \qquad \dot{\mathbf{p}}(t_f^n) = (\mathbf{r}_1 + 2p \cdot \mathbf{r}_2 + 3p^2\, \mathbf{r}_3 + \cdots)/T_a. \qquad (11)$$

При наличии векторов $\mathbf{p}_k = \omega_k$, $k = 0:n$ и $\mathbf{p}'_0 = \dot{\mathbf{p}}(t_0^n)$, $\mathbf{p}'_n = \dot{\mathbf{p}}(t_f^n)$ входящие в состав составных векторов $\mathbf{G}_k(1)$ векторы $\mathbf{p}'_k$ однозначно определяются из матричного уравнения

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & & \\ & & & & & & \\ & & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p}'_0 \\ \mathbf{p}'_1 \\ \mathbf{p}'_2 \\ \mathbf{p}'_k \\ \mathbf{p}'_{n-2} \\ \mathbf{p}'_{n-1} \\ \mathbf{p}'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}'_0 \\ 3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0)/T_a \\ 3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)/T_a \\ 3(\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_{k-1})/T_a \\ 3(\mathbf{p}_{n-1} - \mathbf{p}_{n-3})/T_a \\ 3(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-2})/T_a \\ \mathbf{p}'_n \end{bmatrix}, \qquad (12)$$

так как $(n+1)\times(n+1)$ постоянная *ленточная* трехдиагональная матрица заведомо не вырождена и ее обращение эффективно выполняется специальным методом исключения *Гаусса.*

Значения векторов $\mathbf{p}(t_0^n)$, $\mathbf{q}(t_0^n) = \dot{\mathbf{p}}(t_0^n)$ и $\dot{\mathbf{q}}(t_0^n) = \ddot{\mathbf{p}}(t_0^n)$, соответствующих векторам $\omega_0 = \omega(t_0^n)$, $\varepsilon_0 = \varepsilon(t_0^n) = \dot{\omega}(t_0^n)$ и $\varepsilon_0^* = \varepsilon^*(t_0^n)$, которые необходимы для *гладкого сопряжения* МД с предыдущим участком ПМ КА, вычисляются по формулам

$$\mathbf{p}(t_0^n) = \mathbf{p}_0 = \omega_0; \quad \mathbf{q}(t_0^n) = \dot{\mathbf{p}}(t_0^n) = \mathbf{p}'_0;$$

$$\dot{\mathbf{q}}(t_0^n) = \ddot{\mathbf{p}}(t_0^n) = -6(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1)/T_a^2 - 2(2\mathbf{p}'_0 + \mathbf{p}'_1)/T_a, \qquad (13)$$

а значения векторов $\mathbf{p}(t_f^n) = \mathbf{p}_n$, $\mathbf{q}(t_f^n) = \mathbf{q}_n$, которые нужны для задания начальных условий последующего участка ПМ КА и при необходимости вектора $\dot{\mathbf{q}}(t_f^n) = \dot{\mathbf{q}}_n$ – по формулам

$$\mathbf{p}(t_f^n) = \mathbf{p}_n = \boldsymbol{\omega}_n; \qquad \mathbf{q}(t_f^n) = \dot{\mathbf{p}}(t_f^n) = \mathbf{p}'_n;$$
$$\dot{\mathbf{q}}(t_f^n) = \ddot{\mathbf{p}}(t_f^n) = 6(\mathbf{p}_{n-1} - \mathbf{p}_n)/T_a^2 + 2(\mathbf{p}'_{n-1} + 2\mathbf{p}'_n)/T_a. \tag{14}$$

Компактный вид векторного сплайна $\mathbf{p}_k(\tau)$ на m-ом сегменте ($m = 1:n$) аппроксимации

$$\mathbf{p}_k(\tau) = \mathbf{n}_0^k + \tau\,\mathbf{n}_1^k + \tau^2\,\mathbf{n}_2^k + \tau^3\,\mathbf{n}_3^k, \quad k = 0:(n-1), \tag{15}$$

$$\mathbf{n}_0^k = \mathbf{p}_k; \mathbf{n}_1^k = T_a\,\mathbf{p}'_k; \mathbf{n}_2^k = -3(\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_{k+1}) - T_a(2\mathbf{p}'_k + \mathbf{p}'_{k+1}); \mathbf{n}_3^k = 2(\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_{k+1}) + T_a(\mathbf{p}'_k + \mathbf{p}'_{k+1}) \tag{16}$$

следует из векторно-матричного соотношения

$$\mathbf{p}_k(\tau) = \mathbf{F}(\tau)\cdot\mathbf{G}_k = \mathbf{T}_{\text{H}}\cdot\mathbf{A}_{\text{H}}\cdot\{\mathbf{p}_k, \mathbf{p}_{k+1}, \mathbf{p}'_k, \mathbf{p}'_{k+1}\} = [1, \tau, \tau^2, \tau^3]\cdot\{\mathbf{n}_0^k, \mathbf{n}_1^k, \mathbf{n}_2^k, \mathbf{n}_3^k\}.$$

Прямая проверка на основе формулы (15) и следствий из нее

$$\mathbf{q}_k(t) = \dot{\mathbf{p}}_k(t) = (\mathbf{n}_1^k + 2\tau\,\mathbf{n}_2^k + 3\tau^2\,\mathbf{n}_3^k)/T_a; \qquad \dot{\mathbf{q}}_k(t) = \ddot{\mathbf{p}}_k(t) = 2(\mathbf{n}_2^k + 3\tau\,\mathbf{n}_3^k)/T_a^2 \tag{17}$$

с учетом (16) показывает справедливость соотношений (13) и (14).

Классическая задача *Дарбу* состоит в *аналитическом* определении кватерниона $\Lambda(t)$ из уравнения $\dot{\Lambda}(t) = \frac{1}{2}\Lambda(t)\odot\boldsymbol{\omega}(t)$ при известном значении кватерниона $\Lambda_0 = \Lambda(t_0)$ и известной непрерывной векторной функции $\boldsymbol{\omega}(t)$, определенной своими проекциями в связанном базисе $\mathbf{B}$ для $t \ge t_0$. Введем базис $\mathbf{E}_0$, фиксированный в инерциальном базисе $\mathbf{I}$ кватернионом Λ_0, и подвижные базисы $\mathbf{E}_k$ ($k = 1,\ldots n$), где базис $\mathbf{E}_n$ совпадает со связанным базисом $\mathbf{B}$. *Необходимое* и *достаточное* условия разрешимости задачи *Дарбу* состоят в возможности представления вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ в виде $\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_n(t) + \boldsymbol{\omega}_{n-1}(t) + \cdots + \boldsymbol{\omega}_1(t)$, где вектор $\boldsymbol{\omega}_k(t)$ имеет *неизменное* направление в базисе $\mathbf{E}_{k-1}$ и является вектором мгновенной угловой скорости базиса $\mathbf{E}_k$ относительно базиса $\mathbf{E}_{k-1}$, т.е. в виде

$$\omega(t) = \omega_n^{n-1}(t) + \tilde{\Lambda}_n(t)\odot(\omega_{n-1}^{n-2}(t) + \tilde{\Lambda}_{n-1}(t)\odot(\omega_{n-2}^{n-3}(t) + \tilde{\Lambda}_{n-2}(t)\odot(\cdots + \omega_1^0(t))\cdots\odot\Lambda_{n-2}(t))\odot\Lambda_{n-1}(t))\odot\Lambda_n(t)$$

где вектор-столбец $\boldsymbol{\omega}_k^{k-1}(t)$, $k = 1,\ldots n$ составлен из проекций вектора $\boldsymbol{\omega}_k(t)$ фиксированного направления в базисе $\mathbf{E}_{k-1}$, а $\Lambda_k(t)$ является кватернионом ориентации базиса $\mathbf{E}_k$ относительно базиса $\mathbf{E}_{k-1}$. Отсюда следует, что *аналитический* расчет кватерниона $\mathbf{M}(t) = (\mu_0(t), \boldsymbol{\mu}(t)), \boldsymbol{\mu}(t) = \{\mu_i(t)\}$ на интервале времени $t \in \mathrm{T}_n$ с начальным значением $\mathbf{M}(t_0^n) = \mathbf{M}_0 = \Lambda_0$ на основе представления кватерниона $\mathbf{M}_k(t)$ на m-ом сегменте аппроксимации для времени $t \in \mathrm{T}_k = [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0:(n-1)$ в виде

$$\mathbf{M}(t_k) = \mathbf{M}_k; \qquad \mathbf{L}_k(t) = \mathbf{L}_1^k(t)\odot\mathbf{L}_2^k(t)\odot\mathbf{L}_3^k(t); \qquad \mathbf{M}_k(t) = \mathbf{M}_k\odot\mathbf{L}_k(t) \tag{18}$$

сводится к *аналитическому* вычислению кватерниона $\mathbf{L}_k(t)=\mathbf{L}_1^k(t)\odot\mathbf{L}_2^k(t)\odot\mathbf{L}_3^k(t)$, соответствующего векторному сплайну

$$\mathbf{p}_k(t)=\mathbf{n}_0^k+\tau\,\mathbf{n}_1^k+\tau^2\,\mathbf{n}_2^k+\tau^3\,\mathbf{n}_3^k,\ t\in\mathrm{T}_k,\ \tau=(t-t_k)/T_a,\quad k=0:(n-1), \tag{19}$$

который должен быть *аналитически* представлен в виде

$$\mathbf{p}_k(t)=\mathbf{r}_3^k(t)+\widetilde{\mathbf{L}}_3^k(t)\odot(\mathbf{r}_2^k(t)+\widetilde{\mathbf{L}}_2^k(t)\odot\mathbf{r}_1^k(t)\odot\mathbf{L}_2^k(t))\odot\mathbf{L}_3^k(t),\quad k=0:(n-1), \tag{20}$$

где $\mathbf{r}_\nu^k(t)=\mathbf{e}_\nu^k\,\dot{\varphi}_\nu^k(t)$, $\nu=1,2,3$ – векторы угловых скоростей $\varphi_\nu^k(t)$ элементарных поворотов относительно *фиксированных* ортов $\mathbf{e}_\nu^k$, а $\mathbf{L}_\nu^k(t)=(l_{0\nu}^k(t),\mathbf{l}_\nu^k(t))$, $\mathbf{l}_\nu^k=\{l_{1\nu}^k,l_{2\nu}^k,l_{3\nu}^k\}$, $\nu=1,2,3$ – кватернионы элементарных поворотов, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$\dot{\mathbf{L}}_\nu^k(t)=\tfrac{1}{2}\mathbf{L}_\nu^k(t)\odot\mathbf{r}_\nu^k(t)\ ,\ \mathbf{L}_\nu^k(t_k)=\mathbf{1},\ \nu=1,2,3 \tag{21}$$

с начальными условиями в виде единичного кватерниона $\mathbf{1}$. В свою очередь, кватернион $\mathbf{L}_k(t)$ по определению должен быть решением уравнения

$$\dot{\mathbf{L}}_k(t)=\tfrac{1}{2}\mathbf{L}_k(t)\odot\mathbf{p}_k(t)\ ,\ \mathbf{L}_k(t_k)=\mathbf{1}. \tag{22}$$

Дифференцирование соотношения $\mathbf{L}_k(t)\equiv\mathbf{L}_1^k(t)\odot\mathbf{L}_2^k(t)\odot\mathbf{L}_3^k(t)$ с учетом (21) приводит к выражению

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_k(t)\odot\mathbf{p}_k(t)=\ &\mathbf{L}_1^k(t)\odot\mathbf{r}_1^k(t)\odot\mathbf{L}_2^k(t)\odot\mathbf{L}_3^k(t)+\\ &\mathbf{L}_1^k(t)\odot\mathbf{L}_2^k(t)\odot\mathbf{r}_2^k(t)\odot\mathbf{L}_3^k(t)+\\ &\mathbf{L}_1^k(t)\odot\mathbf{L}_2^k(t)\odot\mathbf{L}_3^k(t)\odot\mathbf{r}_3^k(t),\end{aligned}$$

умножение которого слева на сопряженный кватернион $\widetilde{\mathbf{L}}_k(t)=\widetilde{\mathbf{L}}_3^k(t)\odot\widetilde{\mathbf{L}}_2^k(t)\odot\widetilde{\mathbf{L}}_1^k(t)$ сразу дает представление (20) векторного сплайна угловой скорости $\mathbf{p}_k(t)$. С другой стороны, векторный сплайн $\mathbf{p}_k(t)$ (19) аналитически представляется в форме (20) на основе простых векторных формул, приводимых ниже.

При $\mathbf{n}_0^k\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{n}_1^k\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{n}_0^k\times\mathbf{n}_1^k\neq\mathbf{0}$ и обозначениях $n_0^k=\langle\mathbf{n}_0^k,\mathbf{n}_0^k\rangle^{1/2}$; $\mathbf{m}_k=\mathbf{n}_0^k\times\mathbf{n}_1^k$; $m_k=\langle\mathbf{m}_k,\mathbf{m}_k\rangle^{1/2}$ *фиксированные* в базисе $\mathbf{B}$ орты элементарных поворотов $\mathbf{e}_\nu^k$, $\nu=1,2,3$ и скалярные коэффициенты a_ν^k,b_ν^k,c_ν^k вычисляются по явным формулам

$$\mathbf{e}_1^k=\mathbf{n}_0^k/n_0^k;\qquad \mathbf{e}_3^k=\mathbf{m}_k/m_k;\qquad \mathbf{e}_2^k=\mathbf{e}_3^k\times\mathbf{e}_1^k, \tag{23}$$

$$
\begin{aligned}
a_1^k = \langle \mathbf{n}_1^k, \mathbf{e}_1^k \rangle; \quad a_2^k &= \langle \mathbf{n}_2^k, \mathbf{e}_1^k \rangle; \quad a_3^k = \langle \mathbf{n}_3^k, \mathbf{e}_1^k \rangle; \\
b_2^k &= \langle \mathbf{n}_2^k, \mathbf{e}_2^k \rangle; \quad b_3^k = \langle \mathbf{n}_3^k, \mathbf{e}_2^k \rangle; \\
c_2^k &= \langle \mathbf{n}_2^k, \mathbf{e}_3^k \rangle; \quad c_3^k = \langle \mathbf{n}_3^k, \mathbf{e}_3^k \rangle.
\end{aligned} \tag{24}
$$

Угловые скорости и углы элементарных поворотов в абсолютном времени $t \in \mathrm{T}_k$ с учетом $\tau = (t - t_k)/T_a \in [0,1]$ вычисляются по соотношениям

$$
\dot{\varphi}_1^k(t) = n_0^k + a_1^k\tau + a_2^k\tau^2 + a_3^k\tau^3; \qquad \dot{\varphi}_2^k(t) = \tau^2(b_2^k + b_3^k\tau); \qquad \dot{\varphi}_3^k(t) = \tau^2(c_2^k + c_3^k\tau);
$$

$$
\varphi_1^k(t) = T_a\tau(12n_0^k + 6a_1^k\tau + 4a_2^k\tau^2 + 3a_3^k\tau^3)/12; \tag{25}
$$

$$
\varphi_2^k(t) = T_a\tau^3(4b_2^k + 3b_3^k\tau)/12; \qquad \varphi_3^k(t) = T_a\tau^3(4c_2^k + 3c_3^k\tau)/12.
$$

Наконец, кватернионы $\mathbf{L}_\nu^k(t)$ всех трех элементарных поворотов относительно ортов $\mathbf{e}_\nu^k$, $\nu = 1,2,3$ для $t \in \mathrm{T}_k$ на m-ом сегменте аппроксимации рассчитываются по формулам

$\mathbf{L}_\nu^k(t) = (l_{0\nu}^k(t), \mathbf{l}_\nu^k(t))$; $\quad l_{0\nu}^k(t) = \cos(\varphi_\nu^k(t)/2)$; $\quad \mathbf{l}_\nu^k(t) = \sin(\varphi_\nu^k(t)/2) \cdot \mathbf{e}_\nu^k$; $\quad \nu = 1,2,3$, $k = 0:(n-1)$. (26)

В итоге искомый кватернион $\mathbf{M}_k(t)$ на каждом m-ом из n сегментов абсолютного времени $t \in \mathrm{T}_k = [t_k, t_k + T_a]$, $k = 0:(n-1)$ с начальным значением $\mathbf{M}(t_k) = \mathbf{M}_k$ определяется *аналитически* на основе (18) с перемножением элементарных кватернионов $\mathbf{L}_\nu^k(t)$ (26), представленных в явном виде с помощью соотношений (23) – (25).

Если хотя бы одно из условий $\mathbf{n}_1^k = T_a\,\mathbf{p}'_k \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{n}_0^k \times \mathbf{n}_1^k \neq \mathbf{0}$, проверяемых в момент начала каждого m-ого сегмента аппроксимации (при $t = t_k$), не выполняется, то необходимый набор ортогональных, фиксированных в базисе $\mathbf{B}$ ортов элементарных поворотов $\mathbf{e}_\nu^k$, $\nu = 1,2,3$ и соответствующие им скалярные коэффициенты следует вычислять с привлечением векторов $\mathbf{n}_2^k$ и/или $\mathbf{n}_3^k$. При такой проверке естественными индикаторами выступают *кривизна* κ_k и *кручение* τ_k годографа сплайна $\mathbf{p}_k(t) = \mathbf{n}_0^k + \tau\,\mathbf{n}_1^k + \tau^2\,\mathbf{n}_2^k + \tau^3\,\mathbf{n}_3^k$, $t \in \mathrm{T}_k$, $\tau = (t - t_k)/T_a$ (19), которые, как нетрудно убедиться, при $t = t_k$ вычисляются по соотношениям $\kappa_k = |\mathbf{n}_1^k \times \mathbf{n}_2^k| / |\mathbf{n}_1^k|^3$ и $\tau_k = 3\langle \mathbf{n}_1^k, \mathbf{n}_2^k \times \mathbf{n}_3^k \rangle / |\mathbf{n}_1^k \times \mathbf{n}_2^k|^2$

Аналитический расчет кватерниона $\mathbf{M}(t)$ с начальным значением $\mathbf{M}(t_0^n) = \mathbf{M}_0 = \Lambda_0$ на всем интервале времени $t \in \mathrm{T}_n$ достигается присваиванием $\mathbf{M}_0 = \Lambda_0$ и выполнением цикла вычислений (18) на m-ом сегменте аппроксимации с *припасовыванием* граничных условий сопрягаемых в моменты времени $t_{k+1} = t_k + T_a$ локальных кватернионов:

$$\mathbf{M}_0 = \Lambda_0\,;\ \text{for}\ k = 0:(n-1)\ \text{do}\ \mathbf{M}_k(t) = \mathbf{M}_k \circ \mathbf{L}_k(t),\ t \in [t_k, t_{k+1}],\ \mathbf{M}_{k+1} := \mathbf{M}_k(t_{k+1}). \qquad (27)$$