УДК 512.516.5

Лежнев В.В., Лежнев М.В.

АЛГОРИТМ ОБТЕКАНИЯ ПРИСОЕДИНЕННОГО ВИХРЯ С ИСТОЧНИКАМИ НА ГРАНИЦЕ

Рассмотрим задачу плоского обтекания потенциальным потоком несжимаемой жидкости ограниченной области Q с достаточно гладкой границей S $\left(S \in C^{1+\alpha},\ \alpha > 0\right)$. В R^2 требуется построить поле скоростей $\overline{w}(x) = \{\, u(x), v(x)\}$, $x = (x_1, x_2)$ течения, удовлетворяющего условиям: а) $div\, \overline{w}(x) = 0$ в R^2, б) $rot\, \overline{w}(x) = 0$ при $x \in Q^+ = R^2 \setminus \overline{Q}$, в) задана скорость на бесконечности $\overline{w}(\infty) = \{u_0, v_0\}$, г) граница S – линия тока. Для такого векторного поля существует функция тока $\psi(x)$: $\overline{w}(x) = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x_2}, -\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right\}\psi$.

По предположению Жуковского [1], обтекаемую область можно заменить присоединенным вихрем, который порождает данное обтекающее течение, т.е. внешнее течение и присоединенный вихрь непрерывно продолжают друг друга через гладкие части границы.

Функция тока такого течения может быть представлена в виде [2]:

$$\psi(x) = (u_0 x_2 - v_0 x_1) + \int_Q g(y) E(x-y)\, dy, \tag{1}$$

где $E(x)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа. Это представление существует и единственно, если плотность $g(y)$ присоединенных вихрей в Q является гармонической функцией. Функция $g(y)$ может быть как угодно точно приближена суммами вида $\sum c_n \gamma_n(y)$, $\gamma_n(y) = \ln\left|z^n - y\right|$, где $\left\{z^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность базисных точек, удовлетворяющих условию единственности гармонических в Q^+ функций [2].

Таким образом, имеем аппроксимацию $\psi^N(x) \approx \psi(x)$, где

$$\psi^N(x) = (u_0 x_2 - v_0 x_1) + \sum_{n=1}^{N} c_n \int_Q \gamma_n(y) E(x-y) dy.$$

Обозначим: $\mu_n(x) = \int_Q \gamma_n(y) E(x-y) dy$. Справедливо утверждение [3]: система функций $\mu_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ полна и линейно независима в $L_2(S)$, если потенциал Робена для области Q не равен нулю. Если потенциал Робена для Q равен нулю, то функции $\mu_n(x)$ принадлежат подпространству $L_2^{\varphi}(S)$ и образуют в $L_2^{\varphi}(S)$ полную систему; $L_2^{\varphi}(S)$ – подпространство, ортогональное $\varphi^*(x)$, $L_2(S) = L_2^{\varphi}(S) \oplus \varphi^*$.

Потенциалом Робена $R(x)$ называется потенциал простого слоя

$$R(x) = \int_S \varphi^*(y) E(x-y)\, ds_y$$

такой, что $R(x) \equiv const$ при $x \in Q$ (и, следовательно, при $x \in S$). Функция $\varphi^*(x)$ – решение задачи Робена для S – является собственной функцией оператора, сопряженного интегральному оператору потенциала двойного слоя [4], [5].

Таким образом, имеем приближенное равенство: $\psi(x) \approx (u_0 x_2 - v_0 x_1) + \sum_{n=1}^{N} c_n \mu_n(x)$.

Условие непротекания может быть переписано в виде: $\psi(x) = const = B$ при $x \in S$. Вариационная задача $\left\|\psi^N(x) - B\right\|^2_{L_2(S)} \to \min\limits_{c_n}$ для нахождения коэффициентов c_n разложения $g(y) \approx \sum_{n=1}^{N} c_n \gamma_n(y)$, $y \in Q$, приводит к СЛАУ: $Ac = d$ с матрицей Грама $A(N \times N)$ с элементами $a_{pn} = \int_S \mu_p(x) \mu_n(x)\, ds$, правая часть – с элементами вида: $d_p = \int_S \left(B - (u_0 x_2 - v_0 x_1)\right) \mu_p(x)\, ds$. При этом получим решение задачи обтекания профиля S без источников на границе.

Для моделирования точечных источника и стока на границе S с одинаковыми интенсивностями будем полагать, что $\psi|_{S_1} = B_1$, $\psi|_{S_2} = B_2$, где $S = S_1 \cup S_2$, $B_1 \neq B_2$. Тогда минимизируемый функционал имеет вид:

$$\left\|\psi^N(x) - B_1\right\|^2_{L_2(S_1)} + \left\|\psi^N(x) - B_2\right\|^2_{L_2(S_2)} \to \min_{c_n}.$$

Перестановка B_1 и B_2 меняет знаки источника и стока, изменение интенсивностей источника и стока достигается изменением разности: $B_1 - B_2$.

В общем случае для K источников-стоков с нулевой суммарной интенсивностью минимизируемый функционал можно записать следующим образом

$$\sum_{k=1}^{K} \int_{S_k} \left(\psi^N - B_k\right)^2 ds \to \min_{c_n}.$$

Регулировать интенсивности источников-стоков можно варьированием постоянных B_k.

Заметим, что можно также моделировать обтекание присоединенного вихря с точечными вихрями и (или) вихревым пятном заданной интенсивности в области течения. Для этого в представлении функции тока (1) нужно добавить для K точечных вихрей в точках $r_k \in Q^+$ с интенсивностями ω_k слагаемое вида: $\sum_{k=1}^{K} \omega_k \, ln|r_k - x|$ и для вихревого пятна с плотностью вихрей $\omega(y)$ – слагаемое $\int_D \omega(y) \ln|y-x| dy$ в области $D \subset Q^+$ (при этом D может не быть односвязной). Для задачи гармонического обтекания профиля Жуковского с относительной толщиной $\mu = 0{,}2$ с точечными вихрями в области течения линии тока представлены, например, в [3].

Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 06-01-96645).

Библиографический список

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.
2. Лежнев В.Г., Данилов Е.А. Задачи плоской гидродинамики. Краснодар: КубГУ, 2000.
3. Лежнев М.В. Математические модели и алгоритмы плоскопараллельного обтекания профиля. Автореферат на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Ростов-на-Дону, 2006.
4. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И.М. Виноградов. Т.4. М.: «Советская энциклопедия», 1984.
5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.