МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

В.А. Фурсов, С.А. Бибиков, Е.В. Гошин

ЗАДАЧИ
ПО ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программе высшего образования по направлению подготовки бакалавров 010400 Прикладная математика и информатика

С А М А Р А
Издательство СГАУ
2014

УДК 004(075)
ББК 32.811я7
Ф954

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук А. А. Бирюков,
канд. физ.-мат. наук А. В. Гаврилов

Фурсов В.А.
Ф954 **Задачи по теории информации:** учеб. пособие / *В.А. Фурсов, С.А. Бибиков, Е.В. Гошин.* – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2014. – 36 с.

ISBN 978-5-7883-0989-7

Учебное пособие «Задачи по теории информации» представляет собой сборник задач, сгруппированных по темам. В каждой теме приведены как примеры решения задач, так и задачи для самостоятельной работы.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 010400 «Прикладная математика и информатика». Подготовлено на кафедре «Суперкомпьютеры и общая информатика»

УДК 004(075)
ББК 32.811я7

ISBN 978-5-7883-0989-7

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ..4
Тема 1. Модели детерминированных сигналов...5
Тема 2. Модели случайных сигналов 11
Тема 3. Преобразование непрерывных сигналов в дискретные 14
Тема 4. Меры неопределенности дискретных множеств...............................17
Тема 5. Меры неопределенности непрерывных случайных величин 20
Тема 6. Количество информации как мера снятой неопределенности 22
Тема 7. Эффективное кодирование 26
Тема 8. Построение групповых кодов...28
Тема 9. Циклические коды 30
Приложение 32
Библиографический список...35

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие «Задачи по теории информации» является сборником задач, предназначенным для проведения практических занятий по курсу «Теория информации». Пособие построено таким образом, что каждый раздел содержит набор задач по определенной теме курса. При необходимости в начале тем приведены достаточно подробные примеры решения задач, позволяющие студентам самостоятельно освоить курс.

Авторы стремились к тому, чтобы в пособии нашли отражение ключевые вопросы, освещенные на лекции. Задачи посвящены вопросам математического описания сигналов, теории информации и кодирования. По замыслу, решение задач из данного пособия должно обеспечить студентов необходимыми навыками практического применения знаний, полученных в ходе лекции, тем самым способствуя более глубокому пониманию и освоению изучаемого материала.

Материал, содержащийся в учебном пособии «Лекции по теории информации» и в настоящем пособии, является достаточным для изучения курса «Теория информации» по учебному плану направления «Прикладная математика и информатика». Пособие может быть полезным также для студентов других специальностей и направлений, в учебные планы которых включен курс «Теория информации». В частности, он может быть рекомендован в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлениям Информационные технологии и информационная безопасность.

Данное издание представляет собой переработанный «Практикум по теории информации» 2007 года издания. По сравнению с «Практикумом» в данном пособии некоторые постановки и решения задач исправлены или дополнены. Незначительно изменены структура разделов и порядок следования задач.

ТЕМА 1. МОДЕЛИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

Задача 1.1

Найти спектр последовательности косинусоидальных импульсов (рис. 1.1):

$$x(t)=\begin{cases} A\cdot\cos\left(\omega_0 t\right) & \text{при} \quad -\dfrac{\tau}{2}+nT\le t\le\dfrac{\tau}{2}+nT, \\ 0 & \text{при} \quad \dfrac{\tau}{2}+nT<t<\dfrac{3}{2}\tau+nT; \end{cases}$$

$\omega_0=2\pi/T$; $T=2\tau$; $n\in\mathbb{N}$.

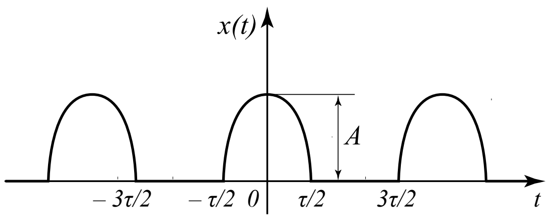

Рис. 1.1

Решение.
Комплексная амплитуда сигнала равна

$$A_k=A\left(jk\omega_0\right)=\frac{2}{T}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2}A\cdot\cos\left(\omega_0 t\right)\cdot e^{-jk\omega_0 t}dt=$$

$$=\frac{2A}{T}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2}\frac{\mathrm{e}^{j\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-j\omega_0 t}}{2}\cdot\mathrm{e}^{-jk\omega_0 t}\,dt=$$

$$=\frac{A}{T}\left[\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2}\mathrm{e}^{-j(k-1)\omega_0 t}dt+\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2}\mathrm{e}^{-j(k+1)\omega_0 t}\,dt\right]=$$

$$= \frac{A}{T}\left[\frac{e^{j(k-1)\omega_0\frac{\tau}{2}} - e^{-j(k-1)\omega_0\frac{\tau}{2}}}{j(k-1)\omega_0} + \frac{e^{j(k+1)\omega_0\frac{\tau}{2}} - e^{-j(k+1)\omega_0\frac{\tau}{2}}}{j(k+1)\omega_0}\right] =$$

$$= \frac{A}{\pi(k-1)}\sin\left((k-1)\omega_0\frac{\tau}{2}\right) + \frac{A}{\pi(k+1)}\sin\left((k+1)\omega_0\frac{\tau}{2}\right) =$$

$$= \frac{-A}{\pi(k-1)}\cos\frac{k\omega_0\tau}{2} + \frac{A}{\pi(k+1)}\cos\frac{k\omega_0\tau}{2} = \cos\frac{k\omega_0\tau}{2}\left(\frac{2A}{\pi(k^2-1)}\right).$$

Так как при $T = 2\tau$ $\omega_0 = \pi/\tau$,

$$\left|\cos\frac{k\omega_0\tau}{2}\right| = \left|\cos\frac{k\pi}{2}\right| = \begin{cases} 1 & \textit{при} \quad k \quad \textit{четном} \\ 0 & \textit{при} \quad k \quad \textit{нечетном}. \end{cases}$$

При этом спектр сигнала содержит только четные гармоники, а модуль комплексной амплитуды равен

$$A(j\omega_0 k) = \frac{2A}{\pi(k^2-1)}.$$

Заметим, что при $k = \pm 1$ модуль комплексной амплитуды равен *A/2*.
График спектра амплитуд изображен на рис. 1.2.

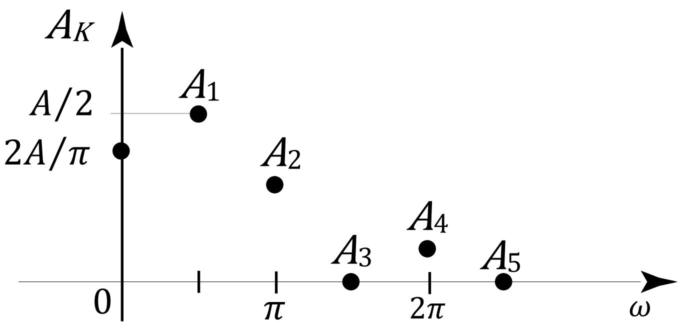

Рис. 1.2

Задача 1.2

Определить спектр амплитуд периодической последовательности прямоугольных импульсов длительностью τ и амплитудой A, следующих с частотой $\omega_0 = 2\pi/T$ (рис. 1.3), описываемых как:

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{при} \quad t_1 + nT \le t \le t_2 + nT \quad t_2 = t_1 + \tau, \\ 0 & \text{при} \quad t_2 + nT < t < t_3 + nT, \quad t_3 = t_1 + T. \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

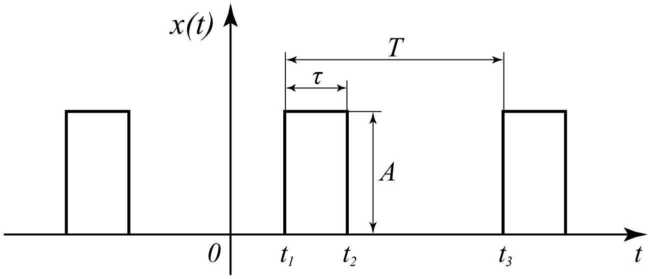

Рис. 1.3

Решение.

В соответствии с формулой для спектра амплитуд имеем

$$A(jk\omega_0) = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+\tau} Ae^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{2A}{T}\cdot\frac{e^{-jk\omega_0 t_1} - e^{-jk\omega_0(t_1+\tau)}}{jk\omega_0} =$$

$$= \frac{2A\tau}{T}\cdot\frac{\sin\left(k\omega_0\dfrac{\tau}{2}\right)}{k\omega_0\dfrac{\tau}{2}}e^{-jk\omega_0\left(t_1+\frac{\tau}{2}\right)}.$$

Амплитуды гармоник, включая постоянную составляющую $A_0/2$, определим из выражения

$$A(k\omega_1) = \frac{2A\tau}{T}\left|\frac{\sin(k\omega_0\tau/2)}{k\omega_0\tau/2}\right|$$

при $k \in \mathbb{N}$.

Выбор начала отсчета времени на их величину не влияет. Огибающая спектра амплитуд в соответствии с последним равенством определяется как

$$A(\omega)=\frac{2A\tau}{T}\left|\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}\right|.$$

При $\omega=0$ получаем

$$A_0=2A\tau/T.$$

Характер изменения амплитуд определяется функцией $\sin(x)/x$ и не зависит от частоты следования импульсов.

Задача 1.3

Найти спектральную характеристику $S(j\omega)$ одиночного прямоугольного импульса:

$$x(t)=\begin{cases} A & \text{при} \quad -\dfrac{\tau}{2}\le t\le\dfrac{\tau}{2}, \\ 0 & \text{при} \quad \dfrac{\tau}{2}< t<-\dfrac{\tau}{2}. \end{cases}$$

Как изменится спектральная характеристика при увеличении длительности импульса τ в 2 раза?

Решение.

В соответствии с выражением для спектральной характеристики

$$S(j\omega)=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}Ae^{-j\omega t}dt=\frac{A}{j\omega}\left(e^{j\omega\frac{\tau}{2}}-e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}\right)=$$

$$=\frac{2A}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)=A\tau\cdot\frac{\sin\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)}{\dfrac{\omega\tau}{2}}.$$

Задача 1.4

Найти спектр дельта-функции, отличной от нуля в начале координат:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=1.$$

Решение.

Дельта-функцию можно трактовать как предельную форму прямоугольного импульса длительности τ и амплитуды $1/\tau$, получаемую при $\tau \to 0$. Тогда, приняв амплитуду импульса равной $h = 1/\tau$, получим

$$S(j\omega) = \lim_{\tau \to 0} \frac{\sin \dfrac{\omega\tau}{2}}{\dfrac{\omega\tau}{2}} = 1.$$

Модуль и фаза спектральной плотности равны соответственно $S(\omega) = 1$; $\varphi(\omega) = 0$.

Задача 1.5

Найти спектр одиночного импульса высокочастотных колебаний (рис. 1.4).

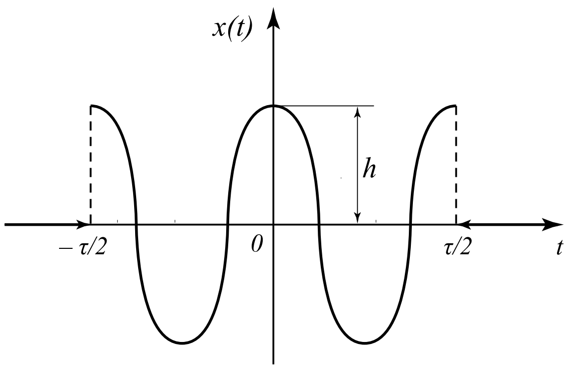

Рис. 1.4

Решение.

Функция $x(t)$, описывающая данный сигнал, может быть представлена в виде

$$x(t) = \begin{cases} h \cdot \cos(\omega_0 t) & \text{при} \quad -\dfrac{\tau}{2} \le t \le \dfrac{\tau}{2}, \\ 0 & \text{при} \quad \dfrac{\tau}{2} < t < -\dfrac{\tau}{2}. \end{cases}$$

Спектральная плотность такого сигнала равна

$$S(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}h\cos(\omega_0 t)e^{-j\omega t}dt=$$

$$=\frac{h}{2}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}e^{j(\omega_0-\omega)t}dt+\frac{h}{2}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}e^{-j(\omega_0-\omega)t}dt=$$

$$=\frac{h}{2}\left[\frac{e^{j(\omega_0-\omega)\frac{\tau}{2}}-e^{-j(\omega_0-\omega)\frac{\tau}{2}}}{j(\omega_0-\omega)}+\frac{e^{j(\omega_0+\omega)\frac{\tau}{2}}-e^{-j(\omega_0+\omega)\frac{\tau}{2}}}{j(\omega_0+\omega)}\right]=$$

$$=\frac{h}{(\omega_0-\omega)}\sin(\omega_0-\omega)\frac{\tau}{2}+\frac{h}{(\omega_0+\omega)}\sin(\omega_0+\omega)\frac{\tau}{2}=$$

$$=\frac{h\tau}{2}\frac{\sin\left(\frac{(\omega_0-\omega)\tau}{2}\right)}{\frac{(\omega_0-\omega)\tau}{2}}+\frac{h\tau}{2}\frac{\sin\left(\frac{(\omega_0+\omega)\tau}{2}\right)}{\frac{(\omega_0+\omega)\tau}{2}}.$$

Из сравнения полученного выражения с выражением для спектра одиночного импульса такой же длительности и величины h, но без высокочастотного заполнения (см. задачу 1.3), видно, что по отношению к спектру прямоугольного импульса спектр импульса высокочастотных колебаний смещен на величину несущей $\frac{Y_{пор}}{\sigma_\xi}=1,65$ и расширен в два раза за счет появления зеркального отображения спектра.

Задача 1.6

Найти модуль и фазу спектра одиночного экспоненциального импульса:

$$x(t)=\begin{cases}h\cdot\mathrm{e}^{-\alpha t} & \text{при } t\geq 0,\\ 0 & \text{при } t<0.\end{cases}$$

Задача 1.7

Для периодической последовательности импульсов (задача 1.4) вычислить первые пять членов ряда Фурье. Оценить энергетический вклад (в %) постоянной составляющей и первой гармоники при $\tau=T/2$.

ТЕМА 2. МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

Задача 2.1

Определить корреляционную функцию для процесса со спектральной плотностью вида δ-функции:

$$S(\omega) = \delta(\omega).$$

Решение.

Согласно общей формуле и исходя из определения δ-функции как предела прямоугольной функции ширины Ω и высоты $1/\,\Omega$ при $\Omega \to 0$, получим

$$R(\tau) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\mathrm{e}^{j\omega\tau}\,d\omega = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\exp^{j\omega\tau}\,d\omega =$$

$$= \lim_{\Omega\to 0}\frac{1}{2}\int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \mathrm{e}^{j\omega\tau}\,\frac{1}{\Omega}\,d\omega = \frac{1}{2}\left|\mathrm{e}^{j\omega\tau}\right|_{\omega=0} = \frac{1}{2}.$$

Задача 2.2

Определить спектральную плотность $S(\omega)$ для стационарного процесса с корреляционной функцией вида

$$R(\tau) = A\,\mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}.$$

Решение.

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} R(\tau)\cos(\omega\tau)\,d\tau = \frac{2A}{\pi}\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha\tau}\cos(\omega\tau)\,d\tau = \frac{2A\alpha}{\pi\left(\alpha^2 + \omega^2\right)}.$$

Задача 2.3

Определить спектральную плотность для стационарного процесса с корреляционной функцией вида δ-функции:

$$R(\tau) = \delta(\tau).$$

Как называется получаемый при этом сигнал?

Задача 2.4

Определить автокорреляционную функцию и дисперсию стационарного процесса со спектральной плотностью вида

$$S(\omega)=\begin{cases} S, & |\omega|<\omega_0, \\ 0, & |\omega|>\omega_0. \end{cases}$$

Задача 2.5

Определить корреляционную функцию $K_x(t_1,t_2)$ для стационарного случайного сигнала:

$$x(t)=\sum_{j=1}^{k}\left(a_j\cos\omega_j t+b_j\sin\omega_j t\right),$$

где a_j, b_j – вещественные взаимно некоррелированные случайные величины.

$$\forall j: M\left\{a_j\right\}=M\left\{b_j\right\}=0, \quad M\left\{a_j^2\right\}=M\left\{b_j^2\right\}=\sigma_j^2 .$$

Задача 2.6

Определить корреляционную функцию для стационарного процесса со спектральной плотностью вида (рис. 2.1)

$$S(\omega)=\begin{cases} 0, & |\omega|\le\omega_0, \\ \sigma^2, & \omega_0<|\omega|<2\omega_0, \\ 0, & 2\omega_0\le|\omega|. \end{cases}$$

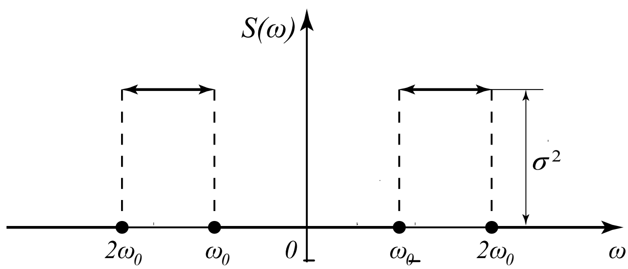

Рис. 2.1

Задача 2.7

Определить спектральную плотность для стационарного случайного процесса с корреляционной функцией вида (рис. 2.2)

$$R(\tau)=\begin{cases}\sigma^2(1-|\tau|), & |\tau|\le 1,\\ 0, & |\tau|>1.\end{cases}$$

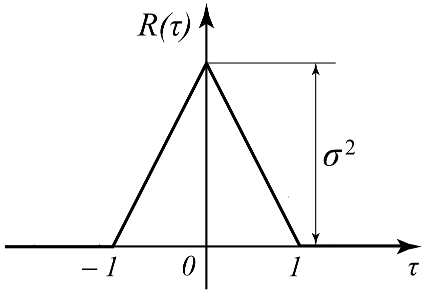

Рис. 2.2

ТЕМА 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СИГНАЛОВ В ДИСКРЕТНЫЕ

Задача 3.1

Найти частоту квантования по времени экспоненциального сигнала $x(t) = A_0\,\mathrm{e}^{-\alpha t}$, $t \ge 0$, если относительная величина площади отсекаемой части энергетического спектра равна γ_{ω_c}.

Решение.

Из условий задачи имеем

$$\gamma_{\omega_c} = \frac{\int\limits_{\omega_c}^{\infty} \left|S(j\omega)\right|^2 d\omega}{\int\limits_{0}^{\infty} \left|S(j\omega)\right|^2 d\omega}.$$

Спектральная плотность сигнала

$$S(j\omega) = \int\limits_0^{\infty} x(t)\exp(-j\omega t)\,dt = \int\limits_0^{\infty} A_0 \exp\big(-(\alpha + j\omega)t\big)\,dt = \frac{A}{\alpha + j\omega}.$$

Модуль спектральной плотности

$$\left|S(j\omega)\right| = \frac{A_0}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}.$$

Энергия сигнала равна

$$W_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \left|S(j\omega)\right|^2 d\omega = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{A_0^2}{\alpha^2 + \omega^2}\,d\omega = \frac{A_0^2}{2\alpha}.$$

Энергия сигнала, сосредоточенная в диапазоне частот от $\omega = \omega_0$ до $\omega = \infty$, равна

$$W_{\omega_c} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\omega_c}^{\infty} \left|S(j\omega)\right|^2 d\omega = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\omega_c}^{\infty} \frac{A_0^2}{\alpha^2 + \omega^2}\,d\omega = \frac{A_0^2}{\pi\alpha}\left(\frac{\pi}{2} - arctg\,\frac{\omega_c}{\alpha}\right).$$

Задача 3.2

Передаваемый по каналу связи сигнал квантуется по уровню способом замены его мгновенных значений ближайшим меньшим квантованным уровнем. Определить необходимое количество уровней квантования сигнала при условии, что приведенная среднеквадратическая погрешность квантования не превышает 0,003.

Решение.

При заданном способе квантования погрешность квантования отрицательная и может принимать значения от 0 до $-\Delta_x$, где Δ_x — шаг квантования. Среднее квадратическое значение погрешности квантования равно

$$\sigma_к = \frac{\Delta_x}{2\sqrt{3}}.$$

Приведенная средняя квадратическая погрешность

$$\gamma_к = \frac{\sigma_к}{x_{\max}} = \frac{\Delta_x}{2\sqrt{3}N\Delta_x} = \frac{1}{2\sqrt{3}N},$$

где N — количество интервалов, на которые разбивается динамический диапазон сигнала при квантовании.

Так как количество уровней квантования M на единицу превышает количество интервалов квантования, то

$$M = N + 1 = \frac{50}{\sqrt{3}\gamma_к\%} + 1 = \frac{50}{\sqrt{3}\cdot 0,3} + 1 = 97.$$

Задача 3.3

В измерительном приборе расстояние между соседними метками шкалы постоянно и равно a. При округлении отсчета до ближайшего целого деления погрешность округления по абсолютной величине не превышает половины расстояния между соседними метками. Найти погрешности распределения вероятности, математическое ожидание и дисперсию.

Решение.

Погрешность при округлении отсчета можно рассматривать как случайную величину x, которая может принимать с равной вероятностью любые значения в пределах от $-\alpha/2$ до $+\alpha/2$. Следовательно, плотность распределения случайной величины x постоянна в этих пределах и равна нулю за ними.

Так как должно быть справедливо равенство

$$\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} w_1(x)\,dx = w_1(x)\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} dx = 1,$$

то

$$w_1(x) = \frac{1}{\alpha}.$$

Закон равномерного распределения в данном случае можно записать в виде

$$w_1(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x < -\alpha/2; \\ 1/\alpha & при \quad -\alpha/2 \le x \le \alpha/2; \\ 0 & при \quad x > \alpha/2. \end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия погрешности округления соответственно равны

$$Mx = \int_{-\infty}^{\infty} x w_1 x dx = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} x\frac{1}{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha}\frac{x^2}{2}\bigg|_{-\alpha/2}^{\alpha/2} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha^2}{8} - \frac{\alpha^2}{8}\right)^2 = 0\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

$$Dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - a(x)\right)^2 w_1(x)\,dx = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} x^2\frac{1}{\alpha}dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\frac{x^3}{3}\bigg|_{-\alpha/2}^{\alpha/2} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha^3}{24} + \frac{\alpha^3}{24}\right) = \frac{\alpha^2}{12}.$$

ТЕМА 4. МЕРЫ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДИСКРЕТНЫХ МНОЖЕСТВ

Задача 4.1

Дискретный источник задан матрицей:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_N \\ p_1 & p_2 & \dots & p_N \end{bmatrix}.$$

Определить, при каких значениях p_k энтропия максимальна.
Решение.
Задача сводится к отысканию максимума энтропии:

$H(Z) = -\sum\limits_{i=1}^{N} p_i \log_a p_i$ при условии $\sum p_i = 1.$

Функция Лагранжа для соответствующей задачи на безусловный экстремум:

$$F(p,\lambda) = -\sum_{p=1}^{N} p_i \log_2 p_i + \lambda\left(\sum_{i=1}^{N} p_i - 1\right) \to extr.$$

Необходимые условия экстремума:

$$\frac{\partial F(p,\lambda)}{\partial p_i} = -\log_2 p_i - \log_2 e + \lambda = 0, \quad i = \overline{1,N},$$

$$\frac{\partial F(p,\lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{N} p_i - 1 = 0.$$

Из первого равенства следует:

$$p_i = 2^{\lambda - \log_2 e},$$

p_1 не зависят от i, а общее их число $\boldsymbol{N}$, поэтому они равны

$$p_i = \frac{1}{N}.$$

Задача 4.2

Вероятности появления сообщений дискретного ансамбля X равны

$$p(x_1) = 1/2, \; p(x_2) = 1/4, \; p(x_3) = 1/4.$$

При этом условные вероятности появления сообщений ансамбля Y

$$p(y_1 \mid x_1) = p(y_2 \mid x_1) = p(y_3 \mid x_1) = 1/3;$$
$$p(y_1 \mid x_2) = 1/2; \;\; p(y_2 \mid x_2) = p(y_3 \mid x_2) = 1/4;$$
$$p(y_1 \mid x_3) = p(y_2 \mid x_3) = 1/4; \;\; p(y_3 \mid x_3) = 1/2.$$

Вычислить энтропию ансамбля Y.

Решение.

Учитывая, что $p(x_i, y_j) = p(y_j \mid x_i)\, p(x_i) = p(x_i \mid y_j)\, p(y_j)$, найдем вероятности $p(y_1)$, $p(y_2)$, $p(y_3)$.

$$p(y_1) = \sum_{i=1}^{3} p(x_i, y_1) = \sum_{i=1}^{3} p(y_1 \mid x_i) p(x_i) =$$
$$= p(y_1 \mid x_1)\, p(x_1) + p(y_1 \mid x_2)\, p(x_2) + p(y_1 \mid x_3)\, p(x_3) =$$
$$= (1/3)(1/2) + (1/2)(1/4) + (1/4)(1/4) = (1/6 + 1/8 + 1/16) =$$
$$= 8/48 + 6/48 + 3/48 = 17/48.$$

Аналогично получаем $p(y_2) = 7/24$, $p(y_3) = 17/48$. Заметим, что

$$p(y_1) + p(y_2) + p(y_3) = \frac{17}{48} + \frac{7}{24} + \frac{17}{48} = 1.$$

Таким образом,

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{3} p(y_i) \log_2 p(y_i) =$$
$$-17/48 \log_2 17/48 - 7/24 \log_2 7/24 - 17/48 \log_2 17/48 \approx 1{,}5787.$$

Задача 4.3

Записать соотношения между
$H(Z)$, $H(V)$, $H_V(Z)$, $H_Z(V)$, $H(ZV)$
для следующих случаев:
а) V и Z зависимы;
б) V и Z независимы.

Задача 4.4

Дано произведение ансамблей:

$$XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_2y_1 & x_2y_2 \\ 0,45 & 0,3 & 0,15 & 0,1 \end{bmatrix}.$$

Являются ли ансамбли независимыми?
Найти $H(Y)$, $H(XY)$, $H_Y(X)$, $H_X(Y)$.

Задача 4.5

Дано произведение ансамблей:

$$XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & x_2y_1 & x_2y_2 & x_1y_3 \\ 0,25 & 0,05 & 0,2 & 0,25 & 0,2 & 0,05 \end{bmatrix}.$$

Являются ли ансамбли независимыми?
Найти $H(X)$, $H(Y)$, $H(XY)$, $H_Y(X)$, $H_X(Y)$.

Задача 4.6

Задано произведение ансамблей сообщений:

$$XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_2y_1 & x_2y_2 & x_3y_1 & x_3y_2 \\ 1/4 & 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/8 & 1/8 \end{bmatrix}.$$

Определить частную энтропию $H_{y_1}(X)$ и частную энтропию $H_{x_1}(Y)$.

ТЕМА 5. МЕРЫ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Задача 5.1

Измеряемая величина изменяется в пределах от x_0 до $x_0 + a$ и распределена по закону равной вероятности. Найти дифференциальную энтропию этой случайной величины.

Решение.

Закон равной вероятности в данном случае представляется в виде

$$w(X) = \begin{cases} 1/a & \text{при} \quad x_0 \le X \le x_0 + a, \\ 0 & \text{при} \quad X < x_0 \quad \text{и} \quad X > x_0 + a. \end{cases}$$

Тогда искомая энтропия

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} w(X)\log_2 w(X)\,dX = -\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x_0+a} \log_2 \frac{1}{a}\,dX = \log_2 a \quad \text{дв.ед.}$$

Задача 5.2

Определить дифференциальную энтропию непрерывной случайной величины x, распределенной по нормальному закону с параметрами $N(0, \sigma_0)$, где $\sigma = 2{,}71$.

Решение.

Нормальное распределение случайной величины с нулевым средним имеет вид

$$w(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Тогда искомая энтропия

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} w(X)\log_2 w(X)\,dX =$$

$$= -\log_2\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)\int_{-\infty}^{\infty} w(X)\log_2\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)dX +$$

$$+\frac{\log_2 e}{2\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty} w(X)x^2\,dX = -\log_2\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) + \frac{\log_2 e}{2} = \log_2 \sigma\sqrt{2\pi e}.$$

Задача 5.3

Непрерывная случайная величина распределена по нормальному закону с параметрами $N(m_1, \sigma_1)$. Сравнить энтропию этой случайной величины с энтропией величины, распределенной по закону

а) $N(m_2, \sigma_1)$, $m_2 > m_1$.

б) $N(m_1, \sigma_2)$, $\sigma_2 > \sigma_1$.

Задача 5.4

Сравнить энтропии непрерывных случайных сигналов, распределенных соответственно равномерно на интервале $[-\alpha; \alpha]$ и нормально, если их дисперсии равны.

Задача 5.5

Сравнить дисперсии непрерывных случайных сигналов, распределенных соответственно равномерно на интервале $[-\alpha; \alpha]$ и нормально, если их энтропии равны.

ТЕМА 6. КОЛИЧЕСТВО ИНФОРМАЦИИ КАК МЕРА СНЯТОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Задача 6.1

Контролируемый параметр x может принимать 2 значения x_0 и x_1 с вероятностью $p(x_0) = p(x_1)$. Вследствие ограниченной точности системы контроля могут иметь место ошибки контроля, т. е. вместо x_0 может быть зафиксировано x_1 и наоборот. Условные вероятности таких событий равны 0,01.

Определить количество информации, получаемое при контроле.

Решение.

Введем следующие обозначения результатов контроля:

y_0 – система контроля указывает, что параметр X имеет значение x_0;

y_1 – система контроля указывает, что параметр X имеет значение x_1. Тогда условные вероятности ошибочного контроля будут соответственно равны $p\left(y_1 \mid x_0\right) = 0,01$ и $p\left(y_0 \mid x_1\right) = 0,01$.

Количество получаемой информации будет равно разности начальной и остаточной энтропии:

$$I\left(Y,X\right) = H\left(X\right) - H\left(X \mid Y\right) = -\sum_{i=1}^{1} p\left(x_i\right)\log_2 p\left(x_i\right) + \\ +\sum_{j=0}^{1} p\left(y_j\right)\sum_{i=1}^{1} p\left(x_i \mid y_j\right)\log_2 p\left(x_i \mid y_j\right).$$

Начальная энтропия

$$H\left(X\right) = -p\left(x_0\right)\log_2 p\left(x_0\right) - p\left(x_1\right)\log_2 p\left(x_1\right) = \\ = 2\cdot 0,5\log_2 0,5 = 1\frac{дв.ед}{сообщ}.$$

Для определения условной энтропии $H\left(X \mid Y\right)$ необходимо знать вероятности $p\left(y_j\right)$ и $p\left(x_i \mid y_j\right)$. Вероятности $p\left(y_j\right)$ вычисляем по формуле полной вероятности:

$$p\left(y_j\right)=\sum_i p\left(x_i\right)p\left(y_{ij}\mid x_i\right).$$

При этом

$$p\left(y_0\right)=p\left(x_0\right)p\left(y_0\mid x_0\right)+p\left(x_1\right)p\left(y_0\mid x_1\right)=$$
$$=p\left(x_0\right)\left[1-p\left(y_1\mid x_0\right)\right]+p\left(x_1\right)p\left(y_0\mid x_1\right)=$$
$$=0,5\left(1-0,01\right)+0,5\cdot 0,01=0,5;$$

$$p\left(y_1\right)=p\left(x_0\right)p\left(y_1\mid x_0\right)+p\left(x_1\right)p\left(y_1\mid x_1\right)=$$
$$=p\left(x_0\right)p\left(y_1\mid x_0\right)+p\left(x_1\right)\left[1-p\left(y_0\mid x_1\right)\right]=0,5.$$

Условные вероятности $p\left(x_i\mid y_j\right)$ вычисляем по формуле Байеса:

$$p\left(x_i\mid y_j\right)=\frac{p\left(x_i\right)p\left(y_j\mid x_i\right)}{p\left(y_j\right)}.$$

При этом

$$p\left(x_0\mid y_1\right)=\frac{p\left(x_0\right)p\left(y_1\mid x_0\right)}{p\left(y_1\right)}=\frac{0,5\cdot 0,01}{0,5}=0,01;$$
$$p\left(x_1\mid y_0\right)=\frac{p\left(x_1\right)p\left(y_0\mid x_1\right)}{p\left(y_0\right)}=\frac{0,5\cdot 0,01}{0,5}=0,01.$$

Таким образом, условная энтропия

$$H\left(X\mid Y\right)=-p\left(y_0\right)\left[p\left(x_0\mid y_0\right)\log_2 p\left(x_0\mid y_0\right)+p\left(x_1\mid y_0\right)\log_2 p\left(x_1\mid y_0\right)\right]-$$
$$-p\left(y_1\right)\left[p\left(x_0\mid y_1\right)\log_2 p\left(x_0\mid y_1\right)+p\left(x_1\mid y_1\right)\log_2 p\left(x_1\mid y_1\right)\right]=$$
$$=-p\left(y_0\right)\left\{\left[1-p\left(x_1\mid y_0\right)\right]\log_2\left[1-p\left(x_1\mid y_0\right)\right]+p\left(x_1\mid y_0\right)\log_2 p\left(x_1\mid y_0\right)\right\}-$$
$$-p\left(y_1\right)\left\{p\left(x_0\mid y_1\right)\log_2 p\left(x_0\mid y_1\right)\right\}+$$
$$+\left[1-p\left(x_0\mid y_1\right)\right]\log_2\left[1-p\left(x_0\mid y_1\right)\right]=0,081\frac{дв.ед}{сообщ}.$$

Окончательно получаем

$$I\left(X,Y\right)=1-0,081=0,92\frac{дв.ед}{сообщ}.$$

Задача 6.2

Определить количество информации, содержащееся в одном замере случайной величины *x*, равномерно распределенной на интервале [0,256], при условии, что погрешность измерения этой величины распределена по нормальному закону $N\left(0,\sigma^2\right)$, где $\sigma^2 = 5$.

Решение.

Дифференциальная энтропия случайной величины *X*

$$h\left(x\right) = -\int_{0}^{256} \frac{1}{256}\log_2 \frac{1}{256}dx = 8 \quad \textit{дв.ед.}$$

Остаточная дифференциальная энтропия определяется погрешностью измерения:

$$h\left(\delta\right) = \log_2 \sqrt{2\pi e \sigma} = \log_2 \sqrt{2\pi e \cdot 5} = 4,39 \quad \textit{дв.ед.}$$

Количество информации, получаемое в результате одного замера, определяется разностью начальной и конечной энтропий:

$$I\left(x\right) = h\left(x\right) - h\left(\delta\right) = 8 - 4,39 = 3,61 \quad \textit{дв.ед.}$$

Задача 6.3

На вход двоичной системы связи, представляющей собой два последовательных соединенных идентичных канала с вероятностями искажения двоичного символа 1 – *p* в каждом (рис. 6.1), поступают статистически независимые двоичные равновероятные символы. Искажения в любом канале происходят независимо друг от друга.

Определить среднее количество передаваемой информации *I*(*WZ*) и *I*(*WV*).

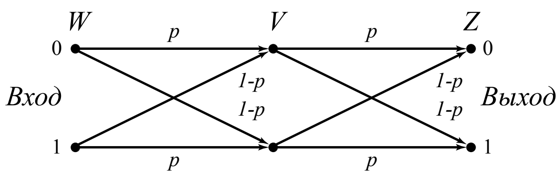

Рис. 6.1

Задача 6.4

Сообщения из ансамбля $x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$ передаются по каналу связи (рис. 6.2).

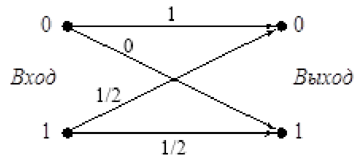

Рис. 6.2

Определить, сколько информации о входном сигнале содержится в сообщениях:

- на выходе принято 0,
- на выходе принято 1.

Насколько меньше информации передается по сравнению с каналом без ошибок?

Задача 6.5

В лотерее N билетов, из них k выигрышных. Было куплено M билетов. Какое количество информации содержится в сообщении, что хотя бы один из купленных билетов был выигрышным?

Задача 6.6

Брошена пара игральных костей, и известно, что сумма выпавших значений равна 5. Сколько информации содержится в этом сообщении?

ТЕМА 7. ЭФФЕКТИВНОЕ КОДИРОВАНИЕ

Задача 7.1

Используя методику Шеннона-Фано, провести эффективное кодирование ансамбля из восьми знаков z_i, вероятности которых приведены в табл. 2.

Таблица 7.1

Знаки	Вероятности
z_1	1/2
z_2	1/8
z_3	1/8
z_4	1/8
z_5	1/16
z_6	1/32
z_7	1/64
z_8	1/64

Для построенного эффективного кода определить среднее число символов на знак и энтропию, сравнить и объяснить результаты.

Задача 7.2

Используя методику Хаффмена, осуществить эффективное кодирование ансамбля *Z*. Построить кодовое дерево. Определить среднюю длину кодовой комбинации при эффективном кодировании знаков следующего ансамбля:

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 \\ 0,22 & 0,2 & 0,16 & 0,16 & 0,1 & 0,1 & 0,04 & 0,02 \end{bmatrix}.$$

Задача 7.3

Построить по методикам Шеннона-Фано и Хаффмена эффективный код для ансамбля, состоящего из блоков по три знака:

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{bmatrix}.$$

Вычислить энтропию и среднее число символов на знак.

Задача 7.4

В табл. 4 приведены вероятности появления сообщений ансамбля X и различные варианты кодов для этого ансамбля.

а) Какие из приведенных кодов однозначно декодируемы (каждое кодовое слово может быть идентифицировано в последовательности)?

б) Какие из приведенных кодов мгновенно декодируемы (конец каждого кодового слова может быть идентифицирован без учета последующих символов)?

Таблица 7.2

Символ	$p(x_i)$	A	B	C	D	E
x_1	$1/2$	000	0	1	0	0
x_2	$1/4$	001	10	10	100	10
x_3	$1/8$	010	110	100	101	110
x_4	$1/16$	011	1110	1000	110	1110
x_5	$1/16$	100	1111	10000	111	1011

ТЕМА 8. ПОСТРОЕНИЕ ГРУППОВЫХ КОДОВ

Задача 8.1

Определить, являются ли группами следующие множества кодовых комбинаций:

1) 0001, 0110, 0111, 0011;
2) 0000, 1101, 1110, 0111;
3) 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

В случае если множество не является группой, достроить его до группы, используя минимальное количество кодовых комбинаций.

Задача 8.2

Определить избыточность помехоустойчивого 11-разрядного кода, предназначенного для передачи сообщений, составленных из букв алфавита, объемом 63 знака.

Задача 8.3

Определить кодовое расстояние между двумя двоичными кодовыми комбинациями:

1111110 и 0100100.

Задача 8.4

Определить избыточность двоичного кода, предназначенного для передачи 16 команд, если длина кода $n = 5$.

Задача 8.5

Построить групповой код для передачи 15 слов, исправляющий одиночные ошибки (нулевая комбинация не используется).

Задача 8.6

Построить групповой код для передачи 31 слова, исправляющего одиночные ошибки (нулевая комбинация не используется).

Задача 8.7

Построить опознаватели для исправления всех одиночных и двойных ошибок для кода, предназначенного для передачи 3 слов.

Задача 8.8

Построить код длиной $n = 3$, предназначенный для обнаружения всех однократных ошибок: $r = 1$.

Задача 8.9

Построить групповой код, предназначенный для передачи 15 слов (нулевая комбинация не используется), способный исправлять одиночные и обнаруживать двойные ошибки: $r = 2$, $s = 1$.

ТЕМА 9. ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОДЫ

Задача 9.1

Задан образующий многочлен $g(x) = x^3 + x + 1$ кода (7,4).

Определить синдромы (остатки) для всех 7 одиночных ошибок.

Задача 9.2

Задан образующий многочлен $g(x) = x^3 + x + 1$ кода (7,4).

Для всех информационных сообщений построить несистематический избыточный код. Для информационного сообщения 1101 ввести ошибку в любой разряд и, исправив её, восстановить исходное информационное сообщение.

Задача 9.3

Задан образующий многочлен $g(x) = x^3 + x + 1$.

Для всех информационных сообщений построить систематический избыточный код. Для информационного сообщения 1101 ввести ошибку в любой разряд и, исправив её, восстановить исходное информационное сообщение. Результат сравнить с решением задачи 9.2.

Задача 9.4

Задан образующий многочлен $g(x) = x^3 + x + 1$ кода (7,4).

Построить соответствующую этому образующему многочлену линейную последовательную машину (ЛПМ). С использованием построенной ЛПМ определить все синдромы для одиночных ошибок. Сравнить с остатками, вычисленными в задаче 9.1.

Задача 9.5

Задан образующий многочлен $g(x) = x^3 + x + 1$ кода (7,4).

Построить соответствующую этому образующему многочлену линейную последовательную машину (ЛПМ). С использованием ЛПМ осуществить формирование избыточного кода для информационного сообщения 1101.

Задача 9.6

Построить циклический код для передачи $2^{11}-1$ команд, исправляющий все одиночные ошибки (нулевая комбинация не используется).

Задача 9.7

Известно, что циклический код порождается многочленом $g(x)=x^3+x+1$. Приняты кодовые комбинации: 0111000; 0111001. Содержат ли эти комбинации ошибки? Если да, то найти и исправить ошибки. Определить исходные неискаженные информационные сообщения.

Задача 9.8

Известно, что циклический код (15,10) порождается образующим многочленом $g(x)=x^5+x^4+x^2+1$. Закодировать информационное сообщение

1010010001

и записать полученное кодовое слово.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица неприводимых многочленов

n	$a(n)$	$f(x)$	Exp
1	1	$x+1$	1 P
2	1	x^2+x+1	3 P
3	2	x^3+x+1 x^3+x^2+1	7 P 7 P
4	2	x^4+x+1 x^4+x^3+1 $x^4+x^3+x^2+x+1$	15 P 15 P 5
5	6	x^5+x^2+1 x^5+x^3+1 $x^5+x^3+x^2+x+1$ $x^5+x^4+x^3+x+1$ $x^5+x^4+x^3+x^2+1$ $x^5+x^4+x^2+x+1$	31 P 31 P 31 P 31 P 31 P 31 P
6	6	x^6+x+1 x^6+x^3+1 $x^6+x^4+x^2+x+1$ $x^6+x^4+x^3+x+1$ x^6+x^5+1 $x^6+x^5+x^2+x+1$ $x^6+x^5+x^3+x^2+1$ $x^6+x^5+x^4+x+1$ $x^6+x^5+x^4+x^2+1$	63 P 9 21 63 P 63 P 63 P 63 P 63 P 21
7	18	x^7+x+1 x^7+x^3+1 $x^7+x^3+x^2+x+1$ x^7+x^4+1 $x^7+x^4+x^3+x^2+1$ $x^7+x^5+x^2+x+1$ $x^7+x^5+x^3+x+1$ $x^7+x^5+x^4+x^3+1$ $x^7+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ x^7+x^6+1	127 P 127 P 127 P 127 P 127 P 127 P 127 P 127 P 127 P 127 P

7	18	$x^7+x^6+x^3+x+1$	127 P
		$x^7+x^6+x^4+x+1$	127 P
		$x^7+x^6+x^4+x^2+1$	127 P
		$x^7+x^6+x^5+x^2+1$	127 P
		$x^7+x^6+x^5+x^3+x^2+x+1$	127 P
		$x^7+x^6+x^5+x^4+1$	127 P
		$x^7+x^6+x^5+x^4+x^2+x+1$	127 P
		$x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+1$	127 P
8	16	$x^8+x^4+x^3+x+1$	51
		$x^8+x^4+x^3+x^2+1$	255 P
		$x^8+x^5+x^3+x+1$	255 P
		$x^8+x^5+x^3+x^2+1$	255 P
		$x^8+x^5+x^4+x^3+1$	17
		$x^8+x^5+x^4+x^3+x^2+x^1+1$	85
		$x^8+x^6+x^3+x^2+1$	255 P
		$x^8+x^6+x^4+x^3+x^2+x+1$	255 P
		$x^8+x^6+x^5+x+1$	255 P
		$x^8+x^6+x^5+x^2+1$	255 P
		$x^8+x^6+x^5+x^3+1$	255 P
		$x^8+x^6+x^5+x^4+1$	255 P
		$x^8+x^6+x^5+x^4+x^2+x+1$	85
		$x^8+x^6+x^5+x^4+x^3+x+1$	85
		$x^8+x^7+x^2+x+1$	255 P
		$x^8+x^7+x^3+x+1$	85
		$x^8+x^7+x^3+x^2+1$	255 P
		$x^8+x^7+x^4+x^3+x^2+x+1$	51
		$x^8+x^7+x^5+x+1$	85
		$x^8+x^7+x^5+x^3+1$	255 P
		$x^8+x^7+x^5+x^4+1$	51
		$x^8+x^7+x^5+x^4+x^3+x^2+1$	85
		$x^8+x^7+x^6+x+1$	255 P
		$x^8+x^7+x^6+x^3+x^2+x^1+1$	255 P
		$x^8+x^7+x^6+x^4+x^2+x+1$	17
		$x^8+x^7+x^6+x^4+x^3+x^2+1$	85
		$x^8+x^7+x^6+x^5+x^2+x+1$	255 P
		$x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x+1$	51

Окончание прил.

8	16	$x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^2+1$ $x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+1$	255 P 85
9	48	…	…
10	60	…	…
11	176	…	…
12	144	…	…
13	630	…	…
14	756	…	…
15	1800	…	…
…	…	…	…

Пояснения к таблице:

n – степень многочлена;
$a(n)$ – число примитивных многочленов;
$f(x)$ – неприводимый многочлен;
Exp – минимальное значение L такое, что x^L-1 является делителем $f(x)$. «P» означает, что многочлен является примитивным.

Примечание:

В таблице приведены коэффициенты для многочленов до 7-й степени, а также число примитивных многочленов до 15-й степени.

Для самостоятельного получения значений более высоких степеней рекомендуем воспользоваться материалами, приведенными в [9].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дмитриев, В.И. Прикладная теория информации / В.И. Дмитриев.- М.: Высш. шк., 1989. - 320 с.
2. Кузьмин, И.В. Основы теории информации и кодирования / И.В. Кузьмин, В.А. Кедрус; 2-е изд., перераб. и доп. – Киев: Вища шк., 1986. - 238 с.
3. Abramson, Norman. Information theory and coding / Norman Abramson. - New York: McGraw-Hill, 1963.
4. Adamek, Juri. Foundations of coding / Juri Adamek. - Chichester Wiley, 1991.
5. Church, R. Tables of Irreducible Polynomials for the First Four Prime Moduli / R Church; Ann. Math, 1935. - 198-209.
6. Hamming W. Richard, Coding and Information Theory, Englewood Cliffs / Richard W. Hamming. - Newersey, 1980.
7. Raymond, Hill. A First Course in Coding Theory / Hill Raymond; Oxford: Oxford University Press, 1986.
8. Ingels M. Franklin, Information and Coding Theory, Intext Education Publishers / Franklin M. Ingels; Scranton, 1971.
9. O'Connor, S. E., Computing Primitive Polynomials / O'Connor, S. E.; A Web Resource. – http://seanerikoconnor.freeservers.com/Mathematics/AbstractAlgebra/Primitive Polynomials/overview.html.
10. Weisstein Eric, Primitive Polynomial, From MathWorld / Weisstein Eric; A Web Resource. - http://mathworld.wolfram.com/Primitive Polynomial.html.

Учебное издание

Фурсов Владимир Алексеевич
Бибиков Сергей Алексеевич
Гошин Егор Вячеславович

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

Учебное пособие

Редактор Т.К. Кретинина
Доверстка Л.Р. Дмитриенко

Подписано в печать 3.12.2014. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Печ. л. 2,25.
Тираж 100 экз. Заказ ---------. Арт. 61/2014

Самарский государственный аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.