

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

ВВЕДЕНИЕ В ЦИФРОВУЮ ОБРАБОТКУ СИГНА-  
ЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ:  
КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА ИЗОБРАЖЕНИЙ  
И ПОГРЕШНОСТИ ИХ ДИСКРЕТНОГО  
ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия*

САМАРА  
Издательство СГАУ  
2006

УДК 004.932, 519.7  
ББК 22.343  
В241



**Инновационная образовательная программа  
"Развитие центра компетенции и подготовка  
специалистов мирового уровня в области аэро-  
космических и геoinформационных технологий"**

Авторы: *В.А. Сойфер, В.В. Сергеев, С.Б. Попов,  
В.В. Мясников, А.В. Чернов*

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. А. И. Жданов,  
д-р техн. наук, проф. В. Г. Карташевский

**В241 Введение в цифровую обработку сигналов и изображений:  
критерии качества изображений и погрешности их дискретного представ-  
ления: учеб. пособие / [В.А. Сойфер и др.]. – Самара:  
Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2006. – 36 с. : ил.**

**ISBN 5-7883-04-93-8**

При обработке и анализе изображений всегда приходится задаваться вопросом об их качестве. Качество столь сложного объекта как изображение является очень важным, но одновременно и довольно нечетким понятием. Оно оценивается разными способами и в связи с различными задачами. В учебном пособии представлены наиболее часто используемые показатели качества изображений, рассматриваются вопросы оценки погрешности дискретного представления изображений.

Предназначено для подготовки студентов по направлениям (специальностям) «Прикладная математика и информатика» 010500, 010501, «Прикладные математика и физика» 010600, «Биотехнические и медицинские аппараты и системы» 200401.

УДК 004.932, 519.7  
ББК 22.343

**ISBN 5-7883-04-93-8**

© В.А. Сойфер, В.В. Сергеев, С.Б. Попов,  
В.В. Мясников, А.В. Чернов, 2006  
© Самарский государственный  
аэрокосмический университет, 2006

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Критерии качества изображений.....	4
1.1. Критерий визуального восприятия.....	4
1.2. Среднеквадратичный критерий .....	5
1.3. Критерий максимальной ошибки (равномерного приближения) .....	6
1.4. Вероятностно-зональный критерий.....	7
1.5. Критерий пространственного разрешения.....	8
2. Погрешности дискретного представления изображений.....	13
2.1. Оценка погрешностей квантования параметра по уровню.....	14
2.2. Восстановление непрерывных изображений по их дискретному представлению .....	17
2.3. Оценка среднеквадратичной погрешности дискретизации.....	22
2.4. Оценка максимальной погрешности дискретизации .....	30
2.5. Общая погрешность цифрового представления изображений.....	34
Список литературы.....	37

## 1. КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА ИЗОБРАЖЕНИЙ

При обработке и анализе изображений всегда приходится задаваться вопросом об их качестве. Качество столь сложного объекта как изображение является очень важным, но одновременно и довольно нечетким понятием. Оно оценивается разными способами и в связи с различными задачами.

Иногда качество рассматривается как характеристика самого изображения и определяется его собственными свойствами (статистическими, структурными, семантическими). Соответствующие критерии либо являются субъективными, либо опираются на объективные характеристики изображения: форму и параметры распределения яркости, ширину пространственного спектра и т.п. Такой безотносительный критерий имеет довольно ограниченное применение и почти нигде не используется.

При другом подходе качество рассматривается как мера близости двух изображений: реального и некоторого идеального, или исходного и преобразованного. Такой подход более конструктивен, он позволяет оценивать количественные изменения значений яркости, уровень искажений изображений при их преобразованиях (фильтрации, сжатии данных и т.д.), то есть, по существу, качество самого средства преобразования – алгоритма или системы. Именно это очень важно при построении алгоритмов и систем обработки изображений и оценке качества алгоритмов.

Рассмотрим наиболее часто используемые показатели качества изображений.

### 1.1. Критерий визуального восприятия

Он базируется на результатах экспертизы. Обычная процедура оценки качества заключается в предъявлении набора пар изображений (анализируемые и идеальные) экспертам-наблюдателям, которые высказывают суждения на уровне: «искажения незаметны», «заметны, но не ухудшают», «ухудшают, но не мешают», «немного мешают» и т.п. Индивидуальные оценки обраба-

тываются и усредняются. Существуют специальные приемы, исключаящие «привыкание» экспертов в процессе экспериментов, их пристрастия к конкретным сюжетам и т.д.

Проведение подобной экспертизы – всегда сложная задача, и ее результаты весьма приблизительны. Для специальных изображений (которые, например, получаются при дистанционном зондировании) эксперты должны быть специалистами по решению соответствующих прикладных задач анализа видеоинформации.

Но главный недостаток субъективного критерия – отсутствие количественных оценок. Он не позволяет решать задачи оптимизации систем обработки изображений в пространстве непрерывно изменяющихся параметров. Здесь возможен только перебор вариантов и то не очень большой.

Желательно, чтобы критерий имел простую аналитическую форму и просто вычислялся по предъявляемым изображениям. Этому требованию удовлетворяет ряд критериев, рассматриваемых ниже.

## 1.2. Среднеквадратичный критерий

Пусть изображения  $f(n_1, n_2)$  и  $g(n_1, n_2)$  описываются моделями однородных случайных полей. Мерой соответствия реального изображения идеальному может служить среднее значение квадрата их разности:

$$\varepsilon_{кв}^2 = E \left\{ (f - g)^2 \right\}$$

– эта величина будет постоянной по всему полю аргументов, поэтому аргументы (одинаковые для  $f, g$ ) для краткости не указываем.

Если математические ожидания  $f$  и  $g$  равны, то разность имеет нулевое среднее и величина  $\varepsilon_{кв}^2$  приобретает смысл дисперсии разности (а значение  $\varepsilon_{кв}$  – среднеквадратичного отклонения  $g$  от  $f$ ) двух изображений.

Для стационарной модели обычно считается выполненным условие эргодичности, при котором усреднение по ансамблю реализаций может быть за-

менено на усреднение по одной реализации. Тогда для непрерывных изображений, заданных при  $|x_1| < L_1$ ,  $|x_2| < L_2$ , имеем

$$\varepsilon_{\text{ке}}^2 \approx \frac{1}{4L_1L_2} \int_{-L_1}^{L_1} \int_{-L_2}^{L_2} [f(x_1, x_2) - g(x_1, x_2)]^2 dx_1 dx_2, \quad (1)$$

а для дискретных, заданных при  $0 \leq n_1 \leq N_1 - 1$ ,  $0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$ :

$$\varepsilon_{\text{ке}}^2 \approx \frac{1}{N_1N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} [f(n_1, n_2) - g(n_1, n_2)]^2. \quad (2)$$

Заметим что в задачах сравнительного анализа вариантов и оптимизации постоянные коэффициенты в (1) и (2) могут быть отброшены.

Выражения (1) и (2) позволяют вычислять среднеквадратичную ошибку и для пары произвольных изображений, не обязательно описываемых стационарными полями. Так часто и делается. Однако в этом случае следует иметь в виду, что показатель  $\varepsilon_{\text{ке}}^2$  будет характеризовать «среднее» качество изображения в целом, а на различных его фрагментах ошибки, в принципе, могут различаться.

Достоинство среднеквадратичного критерия - его простота. При его использовании многие задачи анализа и оптимизации алгоритмов обработки изображений легко решаются аналитически. Поэтому он очень часто применяется.

При обработке изображений следует учитывать, что данный критерий плохо согласуется с критерием субъективного восприятия.

### 1.3. Критерий максимальной ошибки (равномерного приближения)

В непрерывном случае

$$\varepsilon_{\text{max}} = \max_{(x_1, x_2)} |f(x_1, x_2) - g(x_1, x_2)| \quad (3)$$

и в дискретном

$$\varepsilon_{\text{max}} = \max_{(n_1, n_2)} |f(n_1, n_2) - g(n_1, n_2)|. \quad (4)$$

Это очень строгий критерий. Он используется в тех случаях, когда выдвигается требование высокой точности представления не изображения в целом, а каждой его точки (отсчета). Это необходимо в ответственных случаях, при получении ценных, уникальных изображений.

Однако данный показатель имеет серьезный недостаток – сложность теоретической оценки и, соответственно, использования его в процедурах оптимизации (по крайней мере для общепринятых моделей изображения).

### 1.4. Вероятностно-зональный критерий

Этот критерий является модификацией (и обобщением) предыдущего. В случае использования критерия максимальной ошибки считается, что все значения разностного сигнала (текущей ошибки)

$$\varepsilon = f - g$$

лежат в диапазоне  $[-\varepsilon_{\max}, \varepsilon_{\max}]$ , то есть распределение вероятностей для  $\varepsilon$

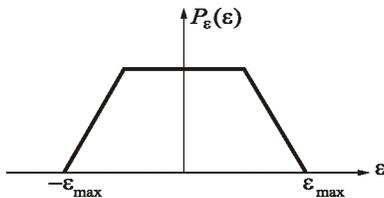


Рис. 1. Пример распределения вероятностей разностного сигнала

имеет вид, например, показанный на рис. 1.

Однако на практике во многих случаях это не выполняется. Простейшим примером является ситуация, когда изображение искажено аддитивным гауссовским шумом:

$$g = f + v ,$$

имеющим плотность распределения шума, которая нигде не обращается в ноль (см. рис. 2):

$$P_v(v) = \frac{1}{2\pi\sigma_v} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{\sigma_v^2}} .$$

Разность  $\varepsilon = f - g = -v$  имеет такое же распределение. Здесь можно оценить максимальную ошибку только с некоторой доверительной вероятностью  $p$ . Вероятностно-зональный критерий определяется парой чисел  $(\varepsilon_{\max}, p)$ .

Смысл этого критерия выражается формулой

$$\int_{-\varepsilon_{\max}}^{\varepsilon_{\max}} P_{\varepsilon}(\varepsilon) d\varepsilon = p \quad (5)$$

и иллюстрируется на рис. 3.

Здесь, как и в предыдущем случае, часто возникают сложности при теоретической оценке. Значение такого показателя качества получают экспериментально, в результате анализа гистограммы распределения ошибки  $\varepsilon$ .

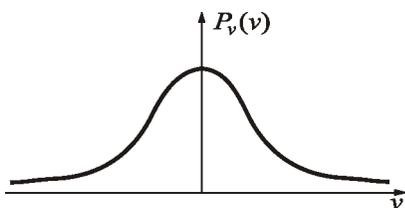


Рис. 2. Плотность распределения гауссовского шума

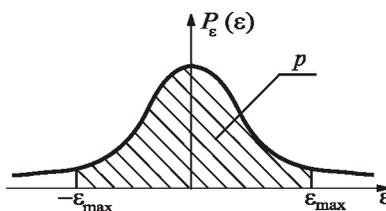


Рис. 3. Иллюстрация вероятностно-зонального критерия

### 1.5. Критерий пространственного разрешения

В ряду показателей качества изображения, особую роль играет показатель пространственного (линейного) разрешения или разрешающей способности. Этот критерий положен в основу стандартных методик определения качества изображений, получаемых фотографическими системами дистанционного зондирования. Обычный способ экспериментальной оценки значения этого показателя

заключается в следующем. На вход системы подается тестовое изображение - мира, состоящая из набора штриховых объектов различных размеров. Здесь и ниже для определенности будем полагать, что каждый такой объект представляет собой «трехшпальную миру», т.е. имеет вид квадрата, составленного из пяти чередующихся полос постоянной яркости  $A$ , имеющих ширину  $l$  (см. рис. 4а). Изображение, прошедшее через информационный тракт, предъявляется на-

блюдателю (оператору-дешифровщику). Перед наблюдателем ставится задача указать самый малый объект с еще различными полосами (штрихами). Минимальная ширина различного штриха -  $l_0$  и является искомым значением показателя линейного разрешения.

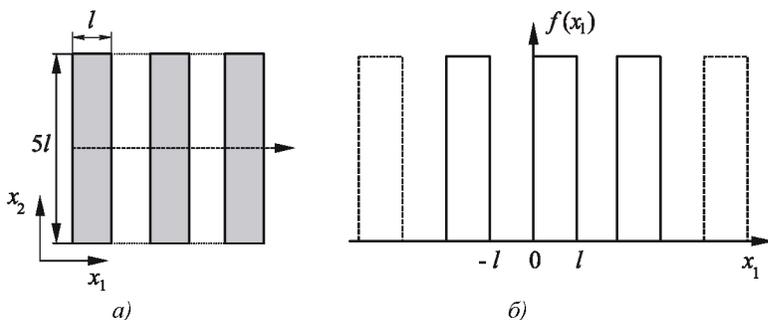


Рис. 4. Трёхшпальная квадратная мира

Однако при тестировании аппаратуры (при «апостериорной» оценке качества изображений) возможности использования детерминированных тестовых полей яркости крайне ограничены. Кроме того, наличие человека-наблюдателя затрудняет проведение экспериментов и порождает субъективные ошибки оценивания. Очевидно, что совершенствование процедуры оценки качества изображений должно идти по пути формализации показателя линейного разрешения (т.е. замены наблюдателя его математической моделью), а также выражения данного критерия через такие характеристики изображения и сквозного тракта, которые могут быть измерены по достаточно произвольным реальным яркостным полям.

Произведем формализацию показателя линейного разрешения применительно к оптико-электронным системам формирования изображений с цифровым представлением данных. Пусть информационный тракт описывается линейной моделью наблюдения двумерного сигнала с шумом:

$$g(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\zeta_1, \zeta_2) f(x_1 - \zeta_1, x_2 - \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2 + v(x_1, x_2) \quad (6)$$

и последующей равномерной дискретизацией сигнала по координатам:

$$g_D(n_1, n_2) = g(x_1, x_2) \Big|_{\substack{x_1 = n_1 \Delta \\ x_2 = n_2 \Delta}}, \quad (7)$$

где  $f(x_1, x_2)$  - полезный непрерывный сигнал на входе сквозного видеоинформационного тракта (истинное поле яркости);  $g(x_1, x_2)$  - выходной искаженный сигнал, представленный в том же масштабе, что и поле на входе;  $h(\zeta_1, \zeta_2)$  - импульсная характеристика искажающей двумерной непрерывной линейной системы с постоянными параметрами (ЛПП-системы);  $v(x_1, x_2)$  - аддитивный шум наблюдения, пространственно однородное поле;  $g_D(x_1, x_2)$  - выходной сигнал после дискретизации;  $\Delta$  - шаг равномерной дискретизации двумерного сигнала. И пусть в качестве входного сигнала используется тестовый объект, показанный на рис. 4а. Рассмотрим сечение поля яркости объекта вдоль оси  $x_1$  (в направлении, перпендикулярном штрихам). Соответствующая этому сечению одномерная функция изображена

на рис. 4б. На этом рисунке введен параметр  $A$  - амплитуда яркостных импульсов («контраст» объекта). Периодически продолжив данную функцию на всю числовую ось (см. пунктир на рис. 4б), разложим ее в ряд Фурье на периоде, т.е. на интервале  $[-l, l]$ . Несложно показать, что основная, первая гармоника этого разложения записывается в виде

$$f_1(x_1) = \frac{2A}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{l} x_1\right), \quad (8)$$

т.е. имеет амплитуду

$$A_1^{(f)} = \frac{2A}{\pi} \quad (9)$$

и пространственную частоту (измеряемую в радианах на единицу длины)

$$\Omega_1 = \frac{\pi}{l} . \quad (10)$$

Частотная характеристика ЛПП-системы, определяемая как преобразование Фурье от импульсной характеристики, задает значения коэффициента передачи пространственных гармоник двумерного входного сигнала при любых частотах  $\Omega_1, \Omega_2$ . Рассматриваемая гармоника (8) после прохождения сквозного тракта (ЛПП-системы) будет иметь в выходном сигнале (6) амплитуду, равную уже не (9), а

$$A_1^{(g)} = \frac{2A}{\pi} H\left(\frac{\pi}{l}, 0\right) . \quad (11)$$

Теперь обратимся ко второму слагаемому в модели наблюдения (6). Шум наблюдения  $v(x_1, x_2)$  обычно является слабокоррелированным и после дискретизации сигнала по правилу (7) его можно считать дискретным белым шумом (полем со статистически независимыми пикселями). Пусть  $\sigma_v$  - среднеквадратичное отклонение отсчетов шума. Известно, что зрительный анализатор человека обладает способностью усреднять такой шум в пределах наблюдаемых штрихов постоянной яркости, если только эти штрихи не слишком вытянуты (отношение длины к ширине не превышает 9). Для рассматриваемого тестового объекта сформулированное требование выполняется. На каждом штрихе размещается приблизительно

$$N = \frac{l}{\Delta} \cdot \frac{5l}{\Delta} = 5 \frac{l^2}{\Delta^2} \quad (12)$$

независимых шумовых пикселей, поэтому «кажущееся» среднеквадратичное отклонение шума (после его субъективного усреднения) будет равно

$$\sigma_v^{\%} = \frac{\sigma_v}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\Delta}{l} \sigma_v . \quad (13)$$

Типичная частотная характеристика линейной модели сквозного тракта убывает (к нулю) с ростом частотных аргументов. Это означает, что при

уменьшении размеров объекта (параметра  $l$ ) амплитуда (11) первой гармоники полезного сигнала на выходе тракта будет также уменьшаться. Одновременно, в соответствии с (13), будет наблюдаться рост кажущегося среднеквадратичного отклонения шума. Следовательно, с уменьшением ширины  $l$  штриха тестового объекта отношение «сигнал/шум»

$$d = \frac{A_1^{(g)}}{\mathcal{E}_\Phi} \quad (14)$$

монотонно убывает и при ширине, равной значению искомого показателя линейного разрешения ( $l = l_0$ ), достигает некоторого нижнего порогового значения

$$d_{|l=l_0} = K, \quad (15)$$

где  $K$  - безразмерный параметр (порог), зависящий от требуемого уровня вероятности ошибок различения штрихов и, как правило, выбираемый в диапазоне  $2 < K < 5$ . Из (15) с учетом (11), (13) и (14) получаем:

$$d = \frac{2\sqrt{5}Al_0H\left(\frac{\pi}{l_0}, 0\right)}{\pi\Delta\sigma_v} = \frac{2\sqrt{5}AH(\Omega, 0)}{\Omega\Delta\sigma_v} = K, \quad (16)$$

где в предпоследней записи введено обозначение для пространственной частоты, соответствующей значению показателя линейного разрешения:

$$\Omega = \frac{\pi}{l_0}. \quad (17)$$

Из (16) следует уравнение относительно неизвестной частоты  $\Omega$  :

$$H(\Omega, 0) = Q\Omega, \quad (18)$$

где

$$Q = \frac{1}{2\sqrt{5}}K\Delta\frac{\sigma_v}{A} \quad (19)$$

- параметр, совокупно характеризующий надежность различения штрихов (через величину  $K$ ), шаг дискретизации ( $\Delta$ ) и относительное превышение контраста над шумом  $\left(\frac{A}{\sigma_v}\right)$ .

Формулы (17) - (19) позволяют определить величину показателя линейного разрешения расчетным путем, без привлечения наблюдателя и без использования тестового изображения. При заданных значениях  $\Delta$  и  $A$  для такого расчета необходимо знать уровень шума на изображении и сечение частотной характеристики искажающей ЛПП-системы. Используя несколько сечений частотной характеристики, можно найти значения рассматриваемого показателя по разным направлениям (при различных ориентациях штрихов на плоскости изображения), что актуально в случае неизотропных искажений поля яркости.

## **2. ПОГРЕШНОСТИ ДИСКРЕТНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ**

Реальное "физическое" изображение является функцией непрерывных пространственных координат –  $f(x_1, x_2)$ . В компьютере обрабатывается его дискретный аналог, матрица  $f(n_1, n_2)$  – цифровое изображение. Оно лишь приближенно соответствует непрерывному. Несоответствие обусловлено погрешностями, которые вносятся в данные в процессе преобразования в цифровую форму.

Все результаты цифровой обработки относятся именно к цифровому изображению. Понятно, что такая обработка имеет смысл лишь в том случае, если цифровые изображения достаточно точно описывают первичные, то есть погрешность цифрового представления мала. Надо уметь оценивать эту погрешность.

Такая оценка важна еще и потому, что позволяет определить потенциальные возможности процедур цифровой обработки (фильтрации, кодирования и т.п.) с точки зрения точности.

Определим погрешность двух основных процедур преобразования изображений в цифровую форму – *дискретизации* (по пространственным координатам) и *квантования* (по уровню - яркости). При решении этих задач прием описание изображения *моделью стационарного случайного поля*. Начнем с квантования.

### 2.1. Оценка погрешностей квантования параметра по уровню

Пусть преобразуемая величина (параметр)  $f$  может принимать любые значения из диапазона  $[f_{\min}, f_{\max}]$ , который называется *шкалой параметра*.

При представлении параметра в цифровой форме в пределах шкалы фиксируется (назначается)  $Q$  *квантовых уровней*:  $f_0, f_1, \dots, f_{(Q-1)}$ . Текущее (фактическое) значение параметра отождествляется с одним из квантовых уровней и далее вместо значения параметра используется просто номер выбранного уровня, кодируемый двоичным кодом. Если используется  $b$  – разрядный код, то имеется возможность пронумеровать  $Q = 2^b$  квантованных уровней.

Расположение квантованных уровней на шкале параметров может быть различным. На практике интервалы между квантованными уровнями обычно берутся одинаковыми. При этом *шаг квантования по уровню*  $\Delta_f = f_q - f_{q-1}$  для любых  $1 \leq q \leq Q - 1$  есть величина постоянная.

Равномерное расположение  $Q$  уровней на шкале параметра показано на рис. 5. Здесь шаг квантования

$$\Delta_f = \frac{f_{\max} - f_{\min}}{Q} = \frac{f_{\max} - f_{\min}}{2^b}.$$

В данном случае текущее значение параметра отождествляется с ближайшим квантованным уровнем. Будем рассматривать именно такой вариант квантования.

Для каждого конкретного значения параметра  $f$  выбирается свой квантовый уровень –  $f_q$ , при этом ошибка цифрового представления параметра (ошибка квантования по уровню):

$$\varepsilon_f = f - f_q.$$

Поскольку  $f$  – случайная величина, то и  $\varepsilon_f$  тоже случайна. Но можно определить максимальное и среднеквадратичное значения ошибки.

Максимальная ошибка квантования по уровню (для нашего варианта квантования):

$$\varepsilon_{f_{\max}} = \max |\varepsilon_f| = \frac{\Delta_f}{2}. \quad (20)$$

Обычно шаг квантования  $\Delta_f$  значительно меньше шкалы параметра (то есть  $b > 1$ ,  $Q \gg 1$ ,  $\Delta_f \ll f_{\max} - f_{\min}$ ). При этом логично допустить, что ошибка  $\varepsilon_f$  – случайная и имеет практически равномерное распределение в диапазоне  $[-\Delta_f/2, \Delta_f/2]$  (см. рис. 6).

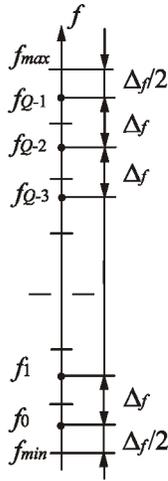


Рис. 5. Равномерное расположение уровней квантования на шкале параметра

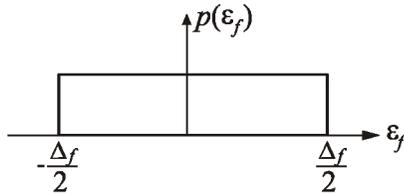


Рис. 6. Распределение ошибки

Дисперсия ошибки

$$\varepsilon_{f\text{ кв}}^2 = \int_{-\frac{\Delta_f}{2}}^{\frac{\Delta_f}{2}} \varepsilon_f^2 p(\varepsilon_f) d\varepsilon_f = \frac{\Delta_f^2}{12}, \quad (21)$$

среднеквадратическое отклонение (корень из дисперсии)

$$\varepsilon_{f\text{ кв}} = \frac{\Delta_f}{2\sqrt{3}} = \frac{\varepsilon_{f\text{ max}}}{\sqrt{3}}. \quad (22)$$

Учтем далее следующее. Если параметр  $f$  имеет нормальное (или близкое к нормальному) распределение с дисперсией  $\sigma_f^2$  и математическим ожиданием  $\mu_f$ , то обычно стремятся выбрать шкалу так, чтобы она совпадала с "доверитель-

ным интервалом"  $[\mu_f - 3\sigma_f, \mu_f + 3\sigma_f]$  (все значения  $f$  лежат в этом интервале с вероятностью  $\approx 0,997$ ). Тогда

$$f_{\max} - f_{\min} = 6\sigma_f; \Delta_f = \frac{6\sigma_f}{2^b}$$

и получаем:

$$\varepsilon_{f \max} = \frac{3\sigma_f}{2^b}; \quad \varepsilon_{f \text{ кв}} = \frac{\sqrt{3}\sigma_f}{2^b}. \quad (23)$$

**Пример 1.** Пусть  $b = 8$  (очень популярный случай – байт на отсчет). Тогда относительная максимальная погрешность квантования (по отношению к среднеквадратичному отклонению параметра):

$$\frac{\varepsilon_{f \max}}{\sigma_f} = \frac{3}{2^b} = \frac{3}{256} \approx 0,012, \text{ то есть } 1,2\%.$$

Относительная среднеквадратичная ошибка - в  $\sqrt{3}$  раз меньше:

$$\frac{\varepsilon_{f \text{ кв}}}{\sigma_f} = \frac{\sqrt{3}}{2^b} = \frac{\sqrt{3}}{256} \approx 0,007, \text{ то есть } 0,7\%.$$

Отношение средней мощности сигнала к средней мощности шума квантования составляет

$$d^2 = \frac{\sigma_f^2}{\varepsilon_{f \text{ кв}}^2} = \frac{2^{2b}}{3} = \frac{2^{16}}{3} \approx 2 \cdot 10^4,$$

то есть погрешностью квантования в данном случае можно пренебречь.

## 2.2. Восстановление непрерывных изображений по их дискретному представлению

Перейдем к анализу второй процедуры преобразования изображения в цифровую форму – дискретизации по пространственным координатам.

$$f(n_1\Delta_1, n_2\Delta_2) = f(x_1, x_2) \Big|_{x_1=n_1\Delta_1, x_2=n_2\Delta_2}.$$

Для сокращения записи часто обозначают

$$f(n_1\Delta_1, n_2\Delta_2) \equiv f(n_1, n_2).$$

Чтобы оценить погрешность, с которой непрерывное изображение описывается своими дискретными отсчетами, нужно восстановить непрерывную функцию по этим отсчетам и сравнить ее с той, которая была до дискретизации.

Погрешность дискретизации изображения (она же – погрешность восстановления непрерывного поля по отсчетам) зависит от следующих факторов:

- величины шагов дискретизации  $\Delta_1, \Delta_2$ ;
- статистических свойств изображения;
- способа восстановления непрерывного изображения (или вида интерполирующей функции).

С физической точки зрения выбор шага дискретизации диктуется шириной пространственного спектра изображения. Чем больше ширина спектра  $\Delta\Omega$ , тем меньше шаг дискретизации  $\Delta$ . Практически при дискретизации стремятся удовлетворить соотношению

$$\Delta \ll 2\pi/\Omega. \quad (24)$$

К сожалению, реальные сигналы и изображения обычно не удовлетворяют требованиям ограниченности спектра, поэтому процедура восстановления при помощи идеального ФНЧ дает лишь приближенный результат. В связи с этим обычно используют простые в реализации способы восстановления, которые являются приближенными при любых характеристиках сигнала, то есть восстанавливают не функцию  $f(x_1, x_2)$ , а некоторую ее оценку -  $\mathcal{F}(x_1, x_2)$ .

Чаще всего используется восстановление при помощи *полиномиальной интерполяции*, при которой  $f$  и  $\mathcal{F}$  совпадают в узлах интерполяции (отсчетах) и, возможно, различаются при всех других значениях непрерывных аргументов.

## *Погрешности дискретного представления изображений*

### Прямоугольная (ступенчатая) несимметричная интерполяция

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = f(n_1\Delta_1, n_2\Delta_2)$$

для

$$n_1\Delta_1 \leq x_1 \leq (n_1 + 1)\Delta_1 \text{ и } n_2\Delta_2 \leq x_2 \leq (n_2 + 1)\Delta_2. \quad (25)$$

Иллюстрация приведена на рис. 7а. Это самый простой способ восстановления. Как мы увидим, он дает самую большую погрешность восстановления.

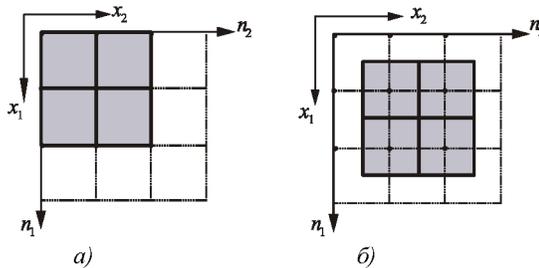


Рис. 7. Иллюстрация ступенчатой интерполяции

### Прямоугольная (ступенчатая) симметрическая интерполяция

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = f(n_1\Delta_1, n_2\Delta_2)$$

для

$$n_1\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2} \leq x_1 < n_1\Delta_1 + \frac{\Delta_1}{2}$$

и

$$n_2\Delta_2 - \frac{\Delta_2}{2} \leq x_2 < n_2\Delta_2 + \frac{\Delta_2}{2}. \quad (26)$$

Иллюстрация приведена на рис. 7б.

Этот способ восстановления почти столь же прост, как и предыдущий, но является более точным. Нетрудно показать, что для полей с изотропными статистическими характеристиками погрешность восстановления при шагах  $\Delta_1, \Delta_2$  здесь равна погрешности несимметричной ступенчатой интерполяции при половинный шагах (то есть при  $\frac{\Delta_1}{2}, \frac{\Delta_2}{2}$ ).

Несмотря на указанное преимущество данная интерполяция также является довольно грубой. В обоих случаях функция яркости восстановленного непрерывного изображения получается ступенчатой. Имеющиеся на ней скачки ухудшают визуальное качество изображений.

### Билинейная интерполяция

При восстановлении непрерывного изображения данным способом строится поверхность, проходящая через четыре соседних отсчета. Интерполирующая функция

$$f(x_1, x_2) = Ax_1x_2 + Bx_1 + Cx_2 + D \quad (27)$$

является линейной по каждой координате. Коэффициенты  $A, B, C, D$  выбираются из условия прохождения интерполирующей функции через отсчеты. Определим их для случая, когда интерполяция производится на прямоугольнике

$$0 \leq x_1 \leq \Delta_1, \quad 0 \leq x_2 \leq \Delta_2,$$

как представлено на рис. 8. Это эквивалентно выбору "локальной" системы координат для каждой четверки отсчетов, образующей подобный прямоугольник.

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} f(0, 0) = D, \\ f(\Delta_1, 0) = B\Delta_1 + D, \\ f(0, \Delta_2) = C\Delta_2 + D, \\ f(\Delta_1, \Delta_2) = A\Delta_1\Delta_2 + B\Delta_1 + C\Delta_2 + D. \end{cases}$$

Ее решением являются следующие значения:

$$D = f(0, 0), \quad B = \frac{f(\Delta_1, 0) - f(0, 0)}{\Delta_1}, \quad C = \frac{f(0, \Delta_2) - f(0, 0)}{\Delta_2},$$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} \left[ (f(\Delta_1, \Delta_2) - f(0, 0)) - \right. \\
&\quad \left. - (f(\Delta_1, 0) - f(0, 0)) - (f(0, \Delta_2) - f(0, 0)) \right] = \\
&= \frac{f(\Delta_1, \Delta_2) - f(\Delta_1, 0) - f(0, \Delta_2) + f(0, 0)}{\Delta_1 \Delta_2}.
\end{aligned}$$

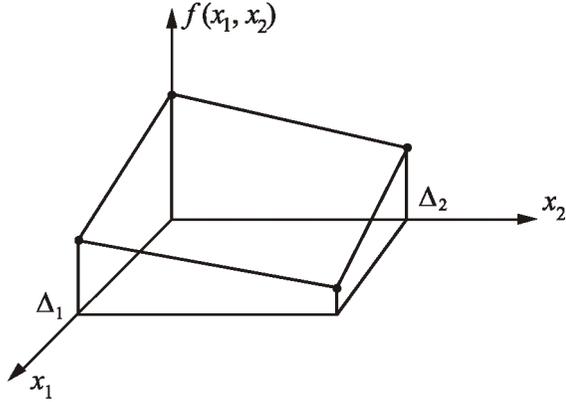


Рис. 8. Билинейная интерполяция

То есть для  $0 \leq x_1 \leq \Delta_1; 0 \leq x_2 \leq \Delta_2$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(x_1, x_2) &= \frac{f(\Delta_1, \Delta_2) - f(\Delta_1, 0) - f(0, \Delta_2) + f(0, 0)}{T_1 T_2} x_1 x_2 + \\
&\quad + \frac{f(\Delta_1, 0) - f(0, 0)}{\Delta_1} x_1 + \frac{f(0, \Delta_2) - f(0, 0)}{\Delta_2} x_2 + f(0, 0)
\end{aligned} \tag{28}$$

или в другой форме запишем:

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= f(\Delta_1, \Delta_2) \frac{x_1 x_2}{\Delta_1 \Delta_2} + f(\Delta_1, 0) \frac{x_1}{\Delta_1} \left( 1 - \frac{x_2}{\Delta_2} \right) + \\
&\quad + f(0, \Delta_2) \left( 1 - \frac{x_1}{\Delta_1} \right) \frac{x_2}{\Delta_2} + f(0, 0) \left( 1 - \frac{x_1}{\Delta_1} \right) \left( 1 - \frac{x_2}{\Delta_2} \right)
\end{aligned} \tag{29}$$

Существуют и другие более сложные интерполирующие функции, но они не всегда дают выигрыш в точности. Показано, например, что для экспоненциально спадающих автокорреляционных функций поля билинейная интерполяция близка к оптимальной. Поэтому ее используют наиболее часто. Там, где налагаются жесткие ограничения на сложность, обычно берется прямоугольная интерполяция.

Следует сказать, что введенные интерполирующие функции важны не только для оценки погрешности восстановления непрерывного изображения по отсчетам. Они широко применяются при геометрических преобразованиях цифрового изображения.

### 2.3. Оценка среднеквадратичной погрешности дискретизации

Пусть интерполяция между отсчетами на каждом двумерном интервале производится одинаковым способом. Тогда все интервалы со статической точки зрения эквивалентны, и при анализе достаточно рассмотреть один из них. Возьмем интервал  $\{0 \leq x_1 < \Delta_1; 0 \leq x_2 < \Delta_2\}$ .

Если  $f(x_1, x_2)$  - исходное изображение, а  $\mathcal{F}(x_1, x_2)$  - восстановленное, то в каждой точке изображения имеем ошибку

$$\varepsilon_x(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - \mathcal{F}(x_1, x_2).$$

Это случайная величина.

Дисперсия ошибки в каждой точке

$$\sigma_\varepsilon^2(x_1, x_2) = E\{\varepsilon_x^2(x_1, x_2)\}.$$

Среднеквадратическая погрешность по всему полю определяется через усредненную дисперсию. Так как поле стационарно, усреднение достаточно выполнить по одному интервалу. Получаем квадрат среднеквадратичной погрешности

$$\varepsilon_{x_{кв}}^2 = \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} \int_0^{\Delta_1} \int_0^{\Delta_2} \sigma_\varepsilon^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Проведем указанные преобразования для конкретного случая. Далее будем считать выполненными следующие два упрощающих условия:

- Шаги дискретизации по пространственным координатам равны:  
 $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ .
- АКФ поля обладает следующими свойствами симметрии:  
 $B_f(x_1, x_2) = B_f(\pm x_1, \pm x_2)$ ,  $B_f(x_1, x_2) = B_f(x_2, x_1)$

при любых сочетаниях знаков.

Такая симметрия имеет место либо для изотропного поля, либо для поля изотропного в перпендикулярных направлениях с линиями равных значений АКФ, имеющими вид, показанный на рис. 9.

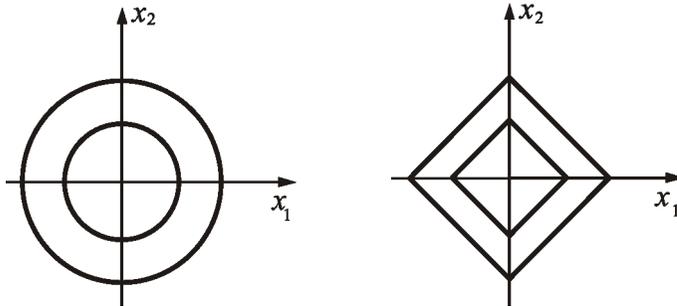


Рис. 9. Линии равных уровней для АКФ специального вида

Возьмем простейшую интерполирующую функцию – *прямоугольную несимметричную*. Для нее на интервале  $0 \leq (x_1, x_2) < \Delta$ :

$$f(x_1, x_2) = f(0, 0).$$

То есть

$$\varepsilon_x(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - f(0, 0)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\varepsilon}^2(x_1, x_2) &= E\left\{\left(f(x_1, x_2) - f(0, 0)\right)^2\right\} = \\
&= E\left\{f(x_1, x_2)^2\right\} - 2E\left\{f(x_1, x_2)f(0, 0)\right\} + E\left\{f^2(0, 0)\right\} = \\
&= \sigma_f^2 + \mu_f^2 - 2\left[B_f(x_1, x_2) + \mu_f^2\right] + \\
&\quad + \sigma_f^2 + \mu_f^2 = 2\left[\sigma_f^2 - B_f(x_1, x_2)\right].
\end{aligned}$$

Для дальнейших преобразований удобно ввести нормированную АКФ –  $R_f(x_1, x_2)$ . Для нее

$$R_f(0, 0) = 1, \quad B_f(x_1, x_2) = \sigma_f^2 R_f(x_1, x_2).$$

Тогда

$$\sigma_{\varepsilon}^2(x_1, x_2) = 2\sigma_f^2[1 - R_f(x_1, x_2)]. \quad (30)$$

Среднеквадратичная погрешность

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x_{кв}}^2 &= \frac{2\sigma_f^2}{\Delta^2} \int_0^{\Delta} \int_0^{\Delta} [1 - R_f(x_1, x_2)] dx_1 dx_2 = \\
&= 2\sigma_f^2 \left[ 1 - \frac{1}{\Delta^2} \int_0^{\Delta} \int_0^{\Delta} R_f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right].
\end{aligned} \quad (31)$$

Выражение (31) связывает среднеквадратичную погрешность с величиной шага дискретизации  $\Delta$  и корреляционной функцией изображения. Но оно не всегда удобно для практического использования. Можно упростить вычисления, приняв во внимание следующее. Нормированную АКФ при  $x_1, x_2 \geq 0$  можно разложить в степенной ряд (он всегда оказывается сходящимся):

$$R_f(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} x_1^i x_2^j,$$

здесь  $a_{ij}$  - коэффициенты разложения. Нам будет удобнее использовать этот ряд в следующем виде (с учетом того, что  $a_{00} = 1$ ):

$$R_f(x_1, x_2) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_{i0} x_1^i + \sum_{j=1}^{\infty} a_{0j} x_2^j + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_1^i x_2^j. \quad (32)$$

Подставляем этот ряд в выражение (31). И для рассматриваемой прямоугольной интерполяции получаем:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x_{кв}}^2 &= 2\sigma_f^2 \left\{ 1 - \frac{1}{\Delta^2} \int_0^\Delta \int_0^\Delta \left[ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_{i0} x_1^i + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^{\infty} a_{0j} x_2^j + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_1^i x_2^j \right] dx_1 dx_2 \right\} = \\ &= 2\sigma_f^2 \left\{ 1 - 1 - \sum_{i=1}^{\infty} a_{i0} \frac{\Delta^i}{i+1} - \sum_{j=1}^{\infty} a_{0j} \frac{\Delta^j}{j+1} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \frac{\Delta^{i+j}}{(i+1)(j+1)} \right\}.\end{aligned}$$

Учитывая принятую симметрию АКФ:  $a_{ij} = a_{ji}$  (и в частности  $a_{i0} = a_{0i}$ ), можно окончательно записать:

$$\varepsilon_{x_{кв}}^2 = -2\sigma_f^2 \left[ 2 \sum_{i=1}^{\infty} a_{i0} \frac{\Delta^i}{i+1} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \frac{\Delta^{i+j}}{(i+1)(j+1)} \right]. \quad (33)$$

Практический интерес представляют случаи, когда погрешность  $\varepsilon_{x_{кв}}^2$  мала по сравнению с дисперсией. Это соответствует ситуации, когда шаг  $\Delta$  мал, и ряд сходится очень быстро. Поэтому при оценке погрешности в полученном выражении можно ограничиться только первым ненулевым членом, отбросив слагаемые высших порядков малости.

**Пример 2.** Пусть изображение имеет биэкспоненциальную АКФ

$$R_f(x_1, x_2) = e^{-\alpha(|x_1| + |x_2|)}.$$

Известно разложение экспоненты в ряд:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \dots$$

Следовательно, при  $x_1, x_2 \geq 0$ :

$$\begin{aligned}
R_f(x_1, x_2) &= 1 - \alpha(x_1 + x_2) + \frac{\alpha^2(x_1 + x_2)^2}{2} + \dots = \\
&= 1 - \alpha x_1 - \alpha x_2 + \alpha^2 x_1 x_2 + \frac{1}{2} \alpha^2 x_1^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 x_2^2 + \dots
\end{aligned}$$

То есть

$$a_{01} = a_{10} = -\alpha; \quad a_{11} = \alpha^2; \quad a_{02} = a_{20} = \frac{\alpha^2}{2}$$

и т.д.

Среднеквадратичная погрешность дискретизации

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x_{кв}}^2 &= -2\sigma_f^2 \left[ 2 \left( -\alpha \frac{\Delta}{2} + \frac{\alpha^2 \Delta^2}{2 \cdot 3} + \dots \right) + \right. \\
&\quad \left. + \alpha^2 \frac{\Delta^2}{2 \cdot 2} + \dots \right] \approx 2\sigma_f^2 \alpha \Delta.
\end{aligned} \tag{34}$$

Можно выразить эту погрешность через коэффициент корреляции между соседними отсчетами (в строке или столбце матрицы отсчетов). Этот коэффициент

$$\rho = R_f(x_1, x_2) \Big|_{x_1=0; x_2=\Delta} = e^{-\alpha\Delta} \approx 1 - \alpha\Delta + \dots,$$

то есть  $\alpha\Delta \approx 1 - \rho$ , и выражение для погрешности получит вид:

$$\varepsilon_{x_{кв}}^2 \approx 2\sigma_f^2 (1 - \rho). \tag{35}$$

Произведем численный расчет. Обычно  $0,8 \leq \rho \leq 0,95$ . Возьмем  $\rho = 0,9$ . Тогда

$$\varepsilon_{x_{кв}}^2 \approx 2\sigma_f^2 (1 - 0,9) = 0,2\sigma_f^2.$$

Соотношение сигнал/шум дискретизации по мощности:

$$d^2 = \frac{2\sigma_f^2}{\varepsilon_{x_{кв}}^2} = \frac{1}{0,2} = 5.$$

Относительная погрешность равна

$$\frac{\varepsilon_{x_{кв}}}{\sigma_f} = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0,45 ,$$

т.е. 45% от среднеквадратичного отклонения.

Не будем повторять выкладки для других интерполирующих и автокорреляционных функций, а сразу дадим сводку результатов. По-прежнему считаем шаги равными, а АКФ симметричной.

*Для прямоугольной симметричной интерполяции:*

$$\sigma_\varepsilon^2(x_1, x_2) = 2\sigma_f^2 \left[ 1 - R_f(x_1, x_2) \right] \text{ для } |x_1| < \frac{\Delta}{2}, |x_2| < \frac{\Delta}{2}. \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x_{кв}}^2 &= 2\sigma_f^2 \left[ 1 - \frac{4}{\Delta^2} \int_0^{\frac{\Delta}{2}} \int_0^{\frac{\Delta}{2}} R_f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right] = \\ &= -2\sigma_f^2 \left[ \sum_{i=1}^{\infty} a_{i0} \frac{\Delta^i}{(i+1)2^{i-1}} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \frac{\Delta^{i+j}}{(i+1)(j+1)2^{i+j}} \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Для билинейной интерполяции:

$$\begin{aligned}
\sigma_e^2(x_1, x_2) = & \sigma_f^2 \left\{ 1 + \left[ 1 - 2 \frac{1}{\Delta} \left( 1 - \frac{x_1}{\Delta} \right) \right]^* \right. \\
& * \left[ 1 - 2 \frac{x_2}{\Delta} \left( 1 - \frac{x_2}{\Delta} \right) \right] + 2R_f(\Delta, 0) \left[ \frac{x_1}{\Delta} \left( 1 - \frac{x_1}{\Delta} \right) + \right. \\
& + \frac{x_2}{\Delta} \left( 1 - \frac{x_2}{\Delta} \right) - \frac{4x_1x_2}{\Delta^2} \left( 1 - \frac{x_1}{\Delta} \right) \left( 1 - \frac{x_2}{\Delta} \right) \left. \right] + 4R_f(\Delta, \Delta) \times \\
& \times \frac{x_1x_2}{\Delta^2} \left( 1 - \frac{x_1}{\Delta} \right) \left( 1 - \frac{x_2}{\Delta} \right) - 2R_f(\Delta - x_1, \Delta - x_2) \times \\
& \times \frac{x_1x_2}{\Delta^2} - 2R_f(\Delta - x_1, x_2) \frac{x_1}{\Delta} \left( 1 - \frac{x_2}{\Delta} \right) - 2R_f(x_1, \Delta - x_2) \times \\
& \left. \times \left( 1 - \frac{x_1}{\Delta} \right) \frac{x_2}{\Delta} - 2R_f(x_1, x_2) \left( 1 - \frac{x_1}{\Delta} \right) \left( 1 - \frac{x_2}{\Delta} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{38}$$

при  $0 \leq x_1 \leq \Delta, 0 \leq x_2 \leq \Delta$ .

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x_{кв}}^2 = & \sigma_f^2 \left[ \frac{13}{9} + \frac{4}{9} R_f(\Delta, 0) + \frac{1}{9} R_f(\Delta, \Delta) - \right. \\
& \left. - \frac{8}{\Delta^2} \int_0^\Delta \int_0^\Delta R_f(x_1, x_2) \left( 1 - \frac{x_1}{\Delta} \right) \left( 1 - \frac{x_2}{\Delta} \right) dx_1 dx_2 \right] = \\
& = \sigma_f^2 \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_{i0} \Delta^i \left[ \frac{2}{3} - \frac{8}{(i+1)(i+2)} \right] + \right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \Delta^{i+j} \left[ \frac{1}{9} - \frac{8}{(i+1)(i+2)(j+1)(j+2)} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{39}$$

Составим таблицу оценок среднеквадратичных погрешностей для разных интерполирующих и автокорреляционных функций (табл. 1). В таблицу сведем средние значения

$$\frac{\varepsilon_{x_{кв}}^2}{\sigma_f^2} = \frac{1}{d^2}.$$

Как видно из таблицы, самой точной интерполяцией из рассмотренных является билинейная. Выигрыш от ее применения особенно значителен для "гладких" изображений, имеющих гауссовскую АКФ. Погрешность дискретизации для биэкспоненциальной и экспоненциальной изотропной АКФ примерно равны. Для них билинейная интерполяция всего в 3 раза (по мощности) точнее простейшей прямоугольной несимметричной интерполяции.

Таблица 1. Относительные оценки среднеквадратичных погрешностей

АКФ	Интерполяция		
	Прямоугольная несимметричная	Прямоугольная симметричная	Билинейная
Биэкспоненциальная $R_f(x_1, x_2) = e^{-\alpha( x_1 + x_2 )}$ $R_f(n_1, n_2) = \rho^{ n_1 + n_2 }$	$\approx 2\alpha\Delta \approx$	$\approx \alpha\Delta \approx$	$\approx \frac{2}{3}\alpha\Delta \approx$
Экспоненциальная неразделимая (изотропная) $R_f(x_1, x_2) = e^{-\alpha\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$ $R_f(n_1, n_2) = \rho^{n_1^2+n_2^2}$	$\approx 2(1-\rho)$	$\approx (1-\rho)$	$\approx \frac{2}{3}(1-\rho)$
Гауссовская изотропная $R_f(x_1, x_2) = e^{-\alpha(x_1^2+x_2^2)}$ $R_f(n_1, n_2) = \rho^{n_1^2+n_2^2}$	$\approx \frac{4}{3}\alpha^2\Delta^2 \approx$ $\approx \frac{4}{3}(1-\rho)$	$\approx \frac{1}{3}\alpha^2\Delta^2 \approx$ $\approx \frac{1}{3}(1-\rho)$	$\approx \frac{23}{90}\alpha^4\Delta^4 \approx$ $\approx \frac{23}{90}(1-\rho)^2$

**Пример 3.** Для экспоненциальной АКФ,  $\rho = 0,9$  и билинейной интерполяции:

$$d^2 = \frac{\sigma_f^2}{\varepsilon_{x_{кв}}^2} = 15.$$

То есть  $\frac{\varepsilon_{x_{кв}}}{\sigma_f} \approx 0,26$ , что также достаточно много.

## 2.4. Оценка максимальной погрешности дискретизации

Теперь оценим погрешность дискретизации по критерию максимальной ошибки.

Полагаем, что на двумерном интервале интерполяции текущая ошибка

$$\varepsilon_x(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - \mathcal{P}(x_1, x_2)$$

есть случайная величина с дисперсией  $\sigma_\varepsilon^2(x_1, x_2)$ . В некоторой точке двумерного интервала (обозначим её координаты  $(x_{1max}, x_{2max})$ ) эта дисперсия принимает наибольшее значение:

$$\begin{aligned} \sigma_{max}^2 &= \sigma_\varepsilon^2(x_{1max}, x_{2max}) = \\ &= \max_{0 \leq x_1 < \Delta_1, 0 \leq x_2 < \Delta_2} \{ \sigma_\varepsilon^2(x_1, x_2) \}. \end{aligned}$$

Обычно точка  $(x_{1max}, x_{2max})$  является наиболее удаленной от узлов интерполяции. Так, для прямоугольной интерполяции (рис. 10а)

$$x_{1max} = \Delta_1; \quad x_{2max} = \Delta_2.$$

Для прямоугольной симметричной и билинейной (рис. 10б)

$$x_{1max} = \frac{\Delta_1}{2}; \quad x_{2max} = \frac{\Delta_2}{2}.$$

Поскольку мы не знаем границ измерений текущей ошибки  $\varepsilon_x$  (известна лишь ее дисперсия), можно говорить о максимальной ошибке лишь с некоторой доверительной вероятностью. Самой широкий «размах» ошибки наблюдается в точке с максимальной дисперсией. Эту точку и рассмотрим.

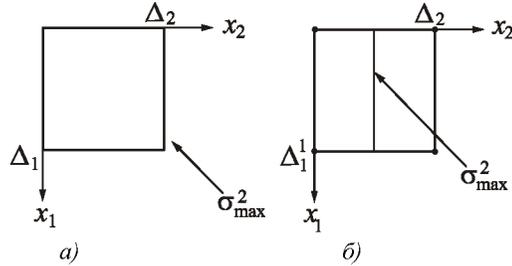


Рис. 10. Иллюстрация погрешности дискретизации

Зададимся доверительной вероятностью  $p$  того, что значения  $\varepsilon_x(x_1, x_2)$  в точке с максимальной дисперсией лежат в интервале  $[-\varepsilon_{x \max}, \varepsilon_{x \max}]$ . Неравенство Чебышева для нашего случая (в наших обозначениях) запишется в виде:

$$P \left\{ |\varepsilon_x(x_{1 \max}, x_{2 \max})| > \varepsilon_{x \max} \right\} = 1 - p < \frac{\sigma_{\max}^2}{\varepsilon_{x \max}^2}. \quad (40)$$

Отсюда получаем

$$\varepsilon_{x \max} = \sqrt{\frac{\sigma_{\max}^2}{1 - p}}. \quad (41)$$

В частности, при  $p = 0,99$

$$\varepsilon_{x \max} < 10 \sqrt{\sigma_{\max}^2}.$$

Неравенство Чебышева справедливо для любой функции распределения случайной величины. Если распределение  $\varepsilon_x$  - нормальное (это будет выполняться, если и поле  $f$  распределено нормально), то можно воспользоваться более строгим соотношением

$$p = P \left\{ |\varepsilon_x(x_{1 \max}, x_{2 \max})| \leq \varepsilon_{x \max} \right\} = erf \left( \frac{\varepsilon_{x \max}}{\sqrt{2\sigma_{\max}^2}} \right). \quad (42)$$

Здесь  $erf(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-u^2} du$  - интеграл вероятностей. Из последнего соотношения следует известное «правило трех сигм»:

$$\varepsilon_{x \max} = 3 \sqrt{\sigma_{\max}^2} \quad (43)$$

при  $p \approx 0,997$ , или

$$\varepsilon_{x \max}^2 = 9 \sigma_{\max}^2. \quad (44)$$

Используя последнюю формулу, определим выражения для максимальной ошибки при разных видах интерполяции. Как и при оценке среднеквадратичной ошибки, ограничимся случаем, когда  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$  и автокорреляционная функция обладает указанными в предыдущем параграфе свойствами симметрии.

Опять рассмотрим простейшую *прямоугольную несимметричную интерполяцию*. Для нее используя формулу (30) при  $x_{1\max} = \Delta$ ;  $x_{2\max} = \Delta$ , получаем

$$\sigma_{\max}^2 = \sigma_{\text{ме}}^2(x_1, x_2) \Big|_{\substack{x_1 = \Delta \\ x_2 = \Delta}} = 2\sigma_f^2 [1 - R_f(\Delta, \Delta)] \quad (45)$$

или

$$\varepsilon_{x \max}^2 = 18\sigma_f^2 [1 - R_f(\Delta, \Delta)]. \quad (46)$$

Используя представление автокорреляционной функции в виде степенного ряда (32), получаем:

$$\varepsilon_{x \max}^2 = 18\sigma_f^2 \left[ 1 - 1 - \sum_{i=1}^{\infty} a_{i0} \Delta^i - \sum_{j=1}^{\infty} a_{0j} \Delta^j - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \Delta^{i+j} \right].$$

И, уже учитывая симметрию АКФ, ( $a_{i0} = a_{0j}$ ):

$$\varepsilon_{x \max}^2 = -18\sigma_f^2 \left[ 2 \sum_{i=1}^{\infty} a_{i0} \Delta^i + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \Delta^{i+j} \right]. \quad (47)$$

Как и раньше, здесь можно оставить только слагаемые первого порядка малости и получить при этом приближенную оценку погрешности. Приведем аналогичные соотношения для других интерполирующих функций.

Для *ступенчатой симметричной интерполяции* (прямоугольной):

$$\begin{aligned}
x_{1max} &= \frac{\Delta}{2}; x_{2max} = \frac{\Delta}{2}, \\
\varepsilon_{xmax}^2 &= 18\sigma_f^2 \left[ 1 - R_f \left( \frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2} \right) \right] = \\
&= -18\sigma_f^2 \left[ \sum_{i=1}^{\infty} a_{i0} \frac{\Delta^i}{2^{i-1}} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \frac{\Delta^{i+j}}{2^{i+j}} \right].
\end{aligned} \tag{48}$$

Для билинейной интерполяции:

$$\begin{aligned}
x_{1max} &= \frac{\Delta}{2}; x_{2max} = \frac{\Delta}{2}, \\
\varepsilon_{xmax}^2 &= 9\sigma_f^2 \left[ \frac{5}{4} + \frac{1}{2} R_f(\Delta, 0) + \frac{1}{4} R_f(\Delta, \Delta) - 2R_f \left( \frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2} \right) \right] = \\
&= 9\sigma_f^2 \left[ \sum_{i=1}^{\infty} a_{i0} \Delta^i \frac{2^i - 4}{2^i} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \Delta^{i+j} \frac{2^{i+j-3} - 1}{2^{i+j-1}} \right].
\end{aligned} \tag{49}$$

В табл. 2 укажем приближенные оценки для  $\varepsilon_{xmax}^2 / \sigma_f^2$ .

Таблица 2. Относительные оценки максимальных погрешностей

АКФ	Интерполяция		
	Прямоугольная несимметричная	Прямоугольная симметричная	Билинейная
Биекспоненциальная, экспоненциальная изотропная	$\approx 36\alpha\Delta \approx$ $\approx 36(1-\rho)$	$\approx 18\alpha\Delta \approx$ $\approx 18(1-\rho)$	$\approx 9\alpha\Delta \approx$ $\approx 9(1-\rho)$
Гауссова изотропная	$\approx 36\alpha^2\Delta^2 \approx$ $\approx 36(1-\rho)$	$\approx 9\alpha^2\Delta^2 \approx$ $\approx 9(1-\rho)$	$\approx (9/2)\alpha^4\Delta^4 \approx$ $\approx (9/2)(1-\rho)^2$

**Пример 4.** Для экспоненциальной АКФ при  $\rho = 0,9$  и билинейной интерполяции:

$$\frac{\varepsilon_{x \max}^2}{\sigma_f^2} \approx 0,9 \quad \text{или} \quad \varepsilon_{x \max} \approx \sqrt{\sigma_f^2} = \sigma_f.$$

Для получения высокой точности описания непрерывного поля отсчетами нужно брать шаги дискретизации очень малыми, чтобы коэффициент корреляции между отсчетами  $\rho \rightarrow 1$ . Работая с цифровым изображением, всегда можно по нему оценить коэффициент корреляции  $\rho$ , а затем вычислить, с какой погрешностью оно описывает непрерывное изображение.

## 2.5. Общая погрешность цифрового представления изображений

Мы отдельно рассмотрели погрешность квантования отсчетов по уровню и погрешность дискретизации изображения по пространственным координатам. Обе они входят как составляющие в *общую погрешность цифрового представления изображений*.

Если изображение квантовано по уровню, то его восстановление (интерполяция) производится не по истинным значениям отсчетов поля яркости, а по искаженным на случайную величину  $\varepsilon_f$ .

Возьмем ступенчатую (прямоугольную) интерполяцию и оценим среднеквадратичную погрешность интерполяции (теперь это будет полная погрешность, так как в ней учтем и квантование по уровню).

Дисперсия ошибки в каждой точке интервала интерполяции имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_e^2(x_1, x_2) &= E \left\{ \left[ f(x_1, x_2) - (f(0,0) + \varepsilon_f) \right]^2 \right\} = \\ &= E \left\{ (f(x_1, x_2) - f(0,0))^2 \right\} - 2E \left\{ f(x_1, x_2) \varepsilon_f \right\} + \\ &\quad + 2E \left\{ f(0,0) \varepsilon_f \right\} + E \left\{ \varepsilon_f^2 \right\}. \end{aligned}$$

Если уровней квантования много (шаг квантования намного меньше шкалы параметра), то можно считать, что ошибки квантования  $\varepsilon_f$  и само изображение статистически независимы. Тогда в полученном выражении останутся только первое и последнее слагаемые, которые с учетом приведенных ранее выкладок запишутся более компактно:

$$\bar{\sigma}_\varepsilon^2(x_1, x_2) = \sigma_x^2(x_1, x_2) + \varepsilon_{f_{KB}}^2.$$

После усреднения по интервалу интерполяции получим:

$$\varepsilon_{KB}^2 = \varepsilon_{x_{KB}}^2 + \varepsilon_{f_{KB}}^2. \quad (50)$$

То есть полная среднеквадратичная ошибка определяется суммированием квадратов составляющих ошибок.

Такую же формулу можно использовать (и обычно используют) и для билинейной интерполяции, однако здесь она уже будет приближенной и даст для среднеквадратичной погрешности оценку сверху. (Более детальный анализ, который мы опускаем, в этом случае показывает, что

$$\varepsilon_{x_{KB}}^2 + \frac{4}{9}\varepsilon_{f_{KB}}^2 \leq \varepsilon_{KB}^2 \leq \varepsilon_{x_{KB}}^2 + \varepsilon_{f_{KB}}^2, \quad (51)$$

причем при  $\varepsilon_{f_{KB}}^2 \rightarrow 0$  значение полной погрешности смещается к нижней границе.)

При оценке максимальной погрешности обычно ориентируются на самый «неблагоприятный», то есть считают, что ошибки суммируются:

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_{x_{max}} + \varepsilon_{f_{max}}, \quad (52)$$

эта формула справедлива для всех способов интерполяции, которые мы рассматривали.

Отметим, наконец, следующее. Мы рассмотрели «первичную» погрешность цифрового представления изображения, которая возникает при квантовании и дискретизации. В процессе формирования и преобразований изображение подвергается действию еще многих искажающих факторов (шумов, линейных искажений и т.п.). Это действие может быть выражено введением дополнительной погрешности —  $\varepsilon_{иск_{KB}}, \varepsilon_{иск_{max}}$ .

Кроме того дополнительную погрешность в данные вносят некоторые процедуры обработки изображений (в первую очередь – процедуры сжатия данных, то есть кодирования с возможностью последующего приближенного декодирования). Обозначим соответствующие погрешности –  $\varepsilon_{обр\ кв}$ ,  $\varepsilon_{обр\ max}$ .

Если считать, что все искажающие факторы статистически независимы, то

$$\varepsilon_{кв}^2 = \varepsilon_{x_{кв}}^2 + \varepsilon_{f_{кв}}^2 + \varepsilon_{иск_{кв}}^2 + \varepsilon_{обр_{кв}}^2, \quad (53)$$

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_{x\ max} + \varepsilon_{f\ max} + \varepsilon_{иск\ max} + \varepsilon_{обр\ max}. \quad (54)$$

Требования к точности цифровой обработки должны быть согласованы с точностью описания цифровым изображением исходного непрерывного.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анисимов Б.В., Курганов В.Д., Злобин В.К. *Распознавание и цифровая обработка изображений* (М.: Высшая школа, 1983)
2. Ахмед Н., Рао К.Р. *Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов* (М.: Связь, 1980)
3. Ван дер Варден. *Алгебра* (М.: Наука, 1976)
4. Витгих В.А., Сергеев В.В., Сойфер В.А. *Обработка изображений в автоматизированных системах научных исследований* (М.: Наука, 1982)
5. Горелик А.Л., Скрипкин В.А. *Методы распознавания* (М.: Высшая школа, 1984)
6. Гренандер У. *Лекции по теории образов: Синтез образов 1* (М.: Мир, 1979)
7. Гренандер У. *Лекции по теории образов: Анализ образов 2* (М.: Мир, 1981)
8. Гренандер У. *Лекции по теории образов: Регулярные структуры 3* (М.: Мир, 1983)
9. Даджион Д., Мерсеро Р. *Цифровая обработка многомерных сигналов* (М.: Мир, 1988)
10. Дуда Р., Харт П. *Распознавание образов и анализ сцен* (М.: Мир, 1976)
11. Журавлев Ю.И. *Избранные научные труды* (М.: Магистр, 1998)
12. Касселс Дж. *Введение в теорию диофантовых приближений*. (М.: ИЛ, 1961)
13. Оппенгейм А.В., Шафер Р.В. *Цифровая обработка сигналов* (М.: Связь, 1979)
14. Постников А.Г. *Введение в аналитическую теорию чисел* (М.: Наука, 1971)
15. Прэтт У.К. *Цифровая обработка изображений* (М.: Мир, 1982, 2 т.)
16. Рабинер Р., Гоулд Б. *Теория и применение цифровой обработки сигналов* (М.: Мир, 1978)
17. Ту Дж., Гонсалес Р. *Принципы распознавания образов* (М.: Мир, 1978)
18. *Физический энциклопедический словарь, 2* (М.: Советская энциклопедия, 1962).
19. Фу К. *Последовательные методы в распознавании образов и обучении машин* (М.: Наука, 1971)
20. Фукунага К. *Введение в статистическую теорию распознавания образов* (М.: Наука, 1979)
21. Шмидт В. *Диофантовы приближения* (М.: Мир, 1983)
22. Ярославский Л.П. *Введение в цифровую обработку изображений* (М.: Советское радио, 1979)

23. Ярославский Л.П. *Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии: Введение в цифровую оптику* (М.: Радио и связь, 1987)
24. Chernov V.M. Spectral Method of Algebraic Primitives Extracting Based on Multidimensional Images Representation. *Fundamental Structural Properties in Image and Pattern Analysis. Schriftenreihe der Oesterreichischen Computr Gesellschaft.* **130** 169-179 1999
25. Chernov V.M. The "modular perceptron": A linear classes separability in the non-Archimedean features spaces. *Proc.of the 10th Scandinavian Conference on Image Analysis (SCIA'97)* (Lappeenranta, Finland, **2**, 803-808, 1997)
26. Chernov V.M. Diophantine Theorems on Stability of Polinomial Decision Rules. *Pattern.Recognition and Image Analysis* **11**(1) 16-18 (2001)
27. Hewitt E., Ross K. *Abstract harmonic analysis.* (Berlin, Springer, 1963)
28. Kargaev P.P, Zhigljavsky A. Approximation of real numbers by rationals: some metric theorems. *Journal of Number Theory* **65** 130-149 1996
29. Pruefer H. Neue Begrueudung der algebraischen Zahlentheorie. *Math. Ann.* **94** (3-4) 198-243 1925

Учебное издание

*Сойфер Виктор Александрович  
Сергеев Владислав Викторович  
Попов Сергей Борисович  
Мясников Владислав Валерьевич  
Чернов Андрей Владимирович*

**ВВЕДЕНИЕ В ЦИФРОВУЮ ОБРАБОТКУ  
СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ:  
КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА ИЗОБРАЖЕНИЙ  
И ПОГРЕШНОСТИ ИХ ДИСКРЕТНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ**

*Учебное пособие*

Технический редактор *Э.И. Коломиец*  
Редакторская обработка *И.И. Проломова*  
Корректорская обработка *И.И. Проломова*  
Доверстка *И.И. Проломова*  
Компьютерная верстка *А.О. Корепанов, С.В. Смагин*

Подписано в печать 28.12.06. Формат 60x84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 2,09. Усл. кр.-отг. 2,21. Печ.л. 2,25.  
Тираж 50 экз. Заказ . ИП-69/2006

Самарский государственный  
аэрокосмический университет.  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

---

Изд-во Самарского государственного  
аэрокосмического университета.  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.