

СГАУ:6
Е 421

А.И.ЕРМАКОВ, А.М.УЛАНОВ

ВИБРАЦИЯ И ПРОЧНОСТЬ
АД И ЭУ
ЧАСТЬ 1

2006



САМАРА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

А.И. ЕРМАКОВ, А.М. УЛАНОВ

ВИБРАЦИЯ И ПРОЧНОСТЬ
АД И ЭУ
ЧАСТЬ 1

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

САМАРА
Издательство СГАУ
2006

УДК 621.452.3.539.4(075)

ББК 39.55

Е 721



**Инновационная образовательная программа
"Развитие центра компетенции и подготовка
специалистов мирового уровня в области аэро-
космических и геоинформационных технологий"**

Рецензенты: Главный конструктор АО СКБМ Е. П. Кочеров
канд. техн. наук, доц. М. А. Мальтеев

Ермаков А.И.

Е 721

Вибрация и прочность АД и ЭУ. Ч.1: учеб. пособие. / *А.И. Ермаков, А.М. Уланов.* – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2006. - 92 с. : ил.

ISBN 5-7883-0449-0

Рассмотрено определение критических частот вращения ротора аналитическим методом и методом конечных элементов (на основе стержневой модели) с учетом податливости и анизотропии опор. Рассмотрены также кинематическое возбуждение ротора, критические частоты второго рода, формы колебаний ротора, построение резонансной диаграммы, меры борьбы с колебаниями роторов.

Учебное пособие предназначено для студентов двигателестроительных факультетов, обучающихся по специальности "Авиационные двигатели и энергетические установки"

УДК 621.452.3.539.4(075)

ББК 39.55

ISBN 5-7883-0449-0

© Ермаков А. И., Уланов А. М., 2006

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2006

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
1. Динамика простейшего ротора.....	5
2. Влияние податливости опор на критическую частоту вращения ротора.....	27
3. Критические частоты вращения ротора на анизотропных упругих опорах.....	31
4. Кинематическое возбуждение ротора.....	37
5. Влияние гироскопического момента на собственную частоту колебаний ротора.....	42
6. Колебания ротора с анизотропным валом. Критические частоты вращения второго рода.....	47
7. Расчет критических частот вращения реальных роторов ГТД.....	62
7.1. Моделирование рабочих колес.....	63
7.2. Моделирование опор.....	69
7.3. Моделирование двойных проставок.....	71
7.4. Построение разрешающей системы уравнений.....	73
8. Определение собственных частот и форм колебаний.....	77
9. Резонансная диаграмма ротора.....	81
10. Методы борьбы с опасными изгибными колебаниями роторов.....	83
10.1. Балансировка.....	83
10.2. Частотная отстройка.....	89
10.3. Демпфирование.....	91

ВВЕДЕНИЕ

В первой части учебного пособия рассматриваются изгибные колебания роторов. Знание критических частот вращения ротора очень важно для обеспечения вибрационной прочности авиационных газотурбинных двигателей (ГТД). На колебания ротора оказывают влияние способ возбуждения колебаний, податливость и анизотропия опор, анизотропия вала, гироскопический момент. Аналитические методы расчета колебаний роторов в настоящее время дополнены численным методом конечных элементов, в пособии рассмотрено моделирование ротора при помощи стержневых конечных элементов. В пособии рассматриваются также формы колебаний роторов, построение резонансной диаграммы ротора, методы борьбы с опасными изгибными колебаниями роторов – балансировка, частотная отстройка и демпфирование.

Изучение колебаний роторов требует знаний по высшей математике, теоретической механике, сопротивлению материалов, деталям машин. Знания, полученные студентом по курсу «Вибрация и прочность авиационных двигателей и энергетических установок», используются далее при изучении конструкции авиационных двигателей и энергетических установок, а также при дипломном проектировании.

1. ДИНАМИКА ПРОСТЕЙШЕГО РОТОРА

Рассмотрим изгибные колебания простейшего ротора, состоящего из невесомого вала, на котором закреплён диск массой m (рис. 1.1).

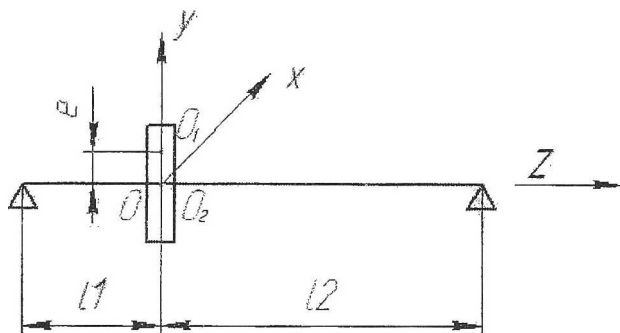


Рис. 1.1. Простейший ротор

Вал вращается на двух шарнирных опорах. Диск расположен несимметрично ($l_1 \neq l_2$).

Обозначим моменты инерции диска относительно оси симметрии J, J_3 . Точку пересечения оси вала со срединной плоскостью диска (место прикрепления диска к валу) будем обозначать O_2 . Смещение этой точки будет являться прогибом вала в месте расположения диска. Допустим, что центр масс диска расположен в точке O_1 и смещён относительно оси вала (точки O_2) на величину эксцентриситета e . Будем рассматривать только изгиб-

ные колебания ротора. Будем использовать глобальную систему координат (ГСК) $OXYZ$, начало которой расположено на недеформируемой оси опор в точке ее пересечения со срединной плоскостью диска.

Ось Z ГСК совпадает с осью опор и направлена так, как это показано на рисунке, оси X , Y находятся в срединной поверхности диска (X – горизонтально; Y – вертикально).

Прогиб вала, т.е. смещение точки O_2 от оси опор будем обозначать как \vec{r} . Проекции этого вектора на оси ГСК будем обозначать как \tilde{r}_x, \tilde{r}_y .

Здесь и далее тильда « \sim » обозначает, что данная величина является функцией от времени.

Опоры ротора могут деформироваться, и в этом случае точка O_2 будет смещаться не только за счёт прогиба вала, но и за счёт опор. Полное смещение точки O_2 будем описывать вектором \vec{q} . Проекции этого вектора на оси обозначим как \tilde{q}_x и \tilde{q}_y .

В рассматриваемом случае опоры являются абсолютно жёсткими: $\vec{q} = \vec{r}$.

Смещение центра масс диска (точки O_1) от оси опор (недеформируемая ось вала) будем обозначать вектором \vec{R} . Его проекции соответственно: \tilde{R}_x, \tilde{R}_y .

Поскольку центр масс диска смещён относительно оси (опор), то говорят, что имеет место массовая неравномерность. Из-за ее наличия при вращении ротора возникает центробежная сила, в результате действия которой вал деформируется. Это приведёт к тому, что вал начнёт не только вращаться относительно своей оси, но и совершать круговое движение вокруг оси опор.

Примем, что в начальный момент времени ($t=0$) точка O_1 располагалась в горизонтальной плоскости, т.е. находилась на оси X .

В произвольный момент времени t точки O_1 и O_2 расположены так, как показано на рис. 1.2.

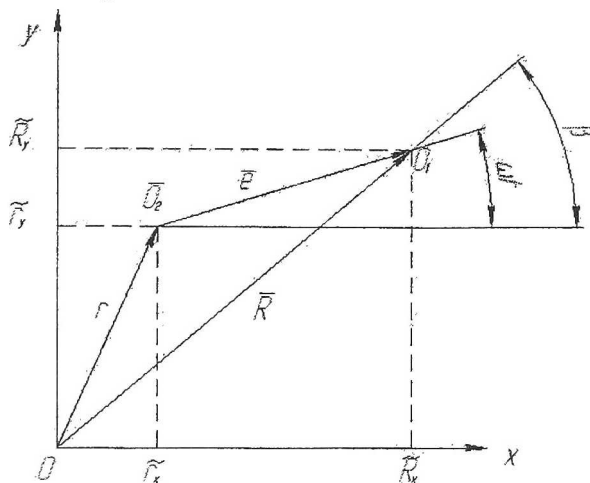


Рис. 1.2. Колебания ротора в плоскости OXY

Из рисунка находим:

$$\tilde{R}_x = \tilde{r}_x + e \cos \omega t = \tilde{q}_x + e \cos \omega t, \quad (1.1)$$

$$\tilde{R}_y = \tilde{r}_y + e \sin \omega t = \tilde{q}_y + e \sin \omega t. \quad (1.2)$$

Обозначим силу, с которой вал действует на диск как вектор \vec{Q}

и соответственно момент \vec{M} .

\vec{Q} и \vec{M} возникают в результате деформирования вала.

Запишем условие равновесия для диска:

$$\vec{Q}_{уп} + \vec{Q}_{ин} + \vec{Q}_{тр} = 0, \quad (1.3)$$

$$\vec{M}_{уп} + \vec{M}_{ин} = 0. \quad (1.4)$$

Здесь $\vec{Q}_{уп}$ и $\vec{M}_{уп}$ - упругая сила и упругий момент, возникающие в валу при его прогибе; $\vec{Q}_{тр}$ - сила неупругого сопротивления, возникающая из-за трения внутри материала вала, в опорах, а также

из-за аэродинамического сопротивления газа; $\bar{Q}_{ин}$ и $\bar{M}_{ин}$ - инерционные сила и момент.

Запишем выражения для сил и моментов, входящих в равенства (1.3) и (1.4).

$$\bar{Q}_{уп} = -(k_{11}\bar{r} + k_{12}\bar{\beta}) \quad (1.5)$$

$$\bar{M}_{уп} = -(k_{21}\bar{r} + k_{22}\bar{\beta}) \quad (1.6)$$

Здесь k_{11} , k_{12} , k_{21} , k_{22} - коэффициенты жесткости вала в точке O_2 ; \bar{r} и $\bar{\beta}$ - упругие смещения вала в точке O_2 . Следует отметить, что векторы $\bar{Q}_{уп}$ и \bar{r} лежат в плоскости прогиба, а $\bar{M}_{уп}$ и $\bar{\beta}$ нормальны этой плоскости.

Примем, что сила неупругого сопротивления пропорциональна величине скорости движения вала:

$$\bar{Q}_{тр} = -\alpha\dot{\bar{q}}, \quad (1.7)$$

где α коэффициент силы трения. Знак минус в формуле (1.7) учитывает то, что силы трения всегда направлены против движения.

В соответствии с принципом Даламбера

$$\bar{Q}_{ин} = -m\ddot{\bar{a}} = -m\ddot{\bar{R}}, \quad (1.8)$$

$$\bar{M}_{ин} = -J_{ин}\ddot{\bar{\beta}}. \quad (1.9)$$

Здесь $J_{ин}$ - момент инерции относительно оси вращения диска. Эта ось совпадает с направлением вектора $\bar{\beta}$. Поскольку при колебаниях ротора направление вектора $\bar{\beta}$ изменяется, то величина $J_{ин}$ является функцией от времени. Это существенно усложняет решение системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику ротора. В связи с этим вместо (1.9) будем использовать формулу, связанную с моментом количества движения \bar{K} :

$$\vec{M}_{ин} = -\frac{d}{dt} \vec{K}. \quad (1.10)$$

Формулу (1.10) можно вывести на основании 2-го закона Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dm\vec{V}}{dt}. \quad (1.11)$$

(1.11) векторно умножим на \vec{r} :

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d}{dt} m\vec{V}.$$

Учитывая, что $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$, и что

$$\vec{r} \times \frac{d}{dt} m\vec{V} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{V}) - \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{V} \right) = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{V}) - m\vec{V} \times \vec{V};$$

$$\vec{V} \times \vec{V} = 0;$$

$$\vec{K} = \vec{r} \times m\vec{V}, \quad (1.12)$$

получаем $\vec{M} = \frac{d}{dt} \vec{K}$, откуда $\vec{M} - \frac{d}{dt} \vec{K} = 0$. Обозначив

$$\vec{M}_{ин} = -\frac{d}{dt} \vec{K}, \text{ получаем } \vec{M} + \vec{M}_{ин} = 0.$$

Формула (1.12) справедлива для материальной точки. Найдём момент количества движения некоторого тела, вращающегося вокруг оси Z с угловой скоростью ω_z .

Выделим элементарный объем с массой dm . Пусть его положение определяется радиус-вектором \vec{r} .

$$d\vec{K}_z = \vec{r} \times dm\vec{V},$$

$$\vec{K}_z = \iiint_V \vec{r} \times \vec{V} dm,$$

$$\text{поскольку } \vec{V} = \vec{\omega}_z \times \vec{r}, \quad \vec{K}_z = \iiint_V \vec{r} \times \vec{\omega}_z \times \vec{r} dm.$$

Из линейной алгебры $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{c}) - \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$. С учетом того, что $\vec{\omega}_z \times \vec{r} = 0$ (эти векторы нормальны друг другу), получаем

$$\vec{K}_z = \iiint_V [\vec{\omega}_z \times (\vec{r} \times \vec{r}) - \vec{r} \times (\vec{\omega}_z \times \vec{r})] dm = \vec{\omega}_z \iiint_V r^2 dm = \vec{\omega}_z J_z.$$

Введём подвижную локальную СК $O_2 X_1 Y_1 Z_1$, начало которой расположим в точке O_2 . Ось Z_1 в любой момент направлена по нормали к срединной поверхности диска. Оси X_1 и Y_1 направлены таким образом, что если локальную систему координат жёстко связать с диском и вернуть диск в исходное состояние, то оси X_1 , Y_1 , Z_1 совпадут с осями глобальной системы координат (рис. 1.3). В локальной системе координат момент инерции диска относительно осей X_1 и Y_1 всегда равен J_z , а относительно оси Z_1 — J .

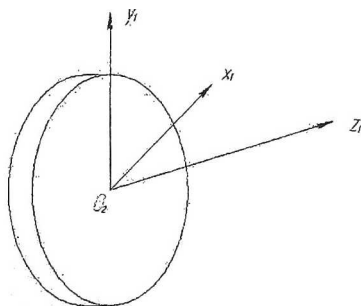


Рис. 1.3. Локальная система координат

Обозначим абсолютный угол поворота диска при колебаниях ротора как вектор $\vec{\beta}_a$. Дифференцируя его по времени, найдем абсолютную угловую скорость диска $\vec{\omega}_a = \dot{\vec{\beta}}_a$. Обозначим проекции вектора абсолютной угловой скорости на оси глобальной и локальной систем координат соответственно как $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ и $\omega_{x1}, \omega_{y1}, \omega_{z1}$. Очевидно, что $\omega_{z1} = \omega$.

Найдем связь между векторами $\vec{\omega}_y$ и $\vec{\omega}_{x1}$. Пусть при смещении диска из положения равновесия в данный момент времени между осью X_1 и осями X, Y, Z образуются углы

$\tilde{\beta}_{xx}, \tilde{\beta}_{xy}$ и $\tilde{\beta}_{xz}$. Тогда, проецируя векторы $\vec{\omega}_x, \vec{\omega}_y, \vec{\omega}_z$ на ось X_1 , получим

$$\vec{\omega}_{x1} = \vec{\omega}_x \cos \tilde{\beta}_{xx} + \vec{\omega}_y \cos \tilde{\beta}_{xy} + \vec{\omega}_z \cos \tilde{\beta}_{xz}.$$

Смещение осей локальной системы координат относительно осей глобальной системы координат связано с поворотом диска при изгибе вала. Поскольку при вибрации реальных роторов ГТД прогибы являются малыми величинами, они не превышают величины зазоров между ротором и статором, следовательно, и угол

β_{xx} является малой величиной, а β_{xy} и β_{xz} близки к $\frac{\pi}{2}$, поэтому

$\cos \tilde{\beta}_{xx} \approx 1; \cos \tilde{\beta}_{xy} = \cos \tilde{\beta}_{xz} \approx 0$. Получаем

$$\vec{\omega}_{x1} \approx \tilde{\beta}_x,$$

где $\tilde{\beta}_x$ - угол поворота диска относительно оси X глобальной системы координат.

Аналогично можем получить

$$\vec{\omega}_{y1} \approx \dot{\tilde{\beta}}_y.$$

Найдём моменты количества движения относительно осей локальной системы координат:

$$\tilde{K}_{x1} = J_{\vartheta} \vec{\omega}_{x1} = J_{\vartheta} \dot{\tilde{\beta}}_x$$

аналогично:

$$\tilde{K}_{y1} = J_{\vartheta} \dot{\tilde{\beta}}_y;$$

$$\tilde{K}_{z1} = J \dot{\tilde{\beta}}_z = J\omega = K_{z1} \quad (1.13)$$

Найдём моменты количества движения относительно осей X и Y глобальной системы координат. Для этого спроецируем на главные оси моменты количества движения \tilde{K}_{x1} , \tilde{K}_{y1} и \tilde{K}_{z1} .

Пусть при прогибе вала диск повернулся относительно осей X и Y глобальной системы координат соответственно на углы β_x и β_y . Так как данные углы малы, то повороты диска относительно каждой из осей можно рассматривать независимо друг от друга. Рассмотрим поворот диска вокруг оси X (рис.1.4).

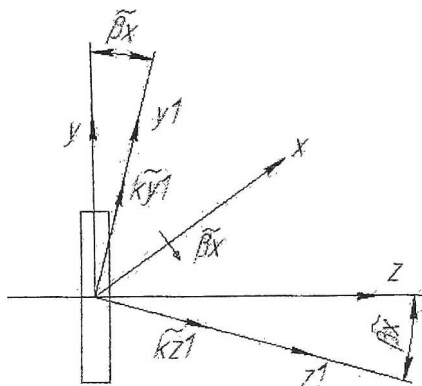


Рис.1.4. Поворот диска вокруг оси X

Проектируя моменты количества движения \tilde{K}_{x1} и \tilde{K}_{y1} на ось y получаем, с учетом (1.13):

$$\tilde{K}_y = \tilde{K}_{y1} \cos \tilde{\beta}_x - \tilde{K}_{z1} \sin \tilde{\beta}_x = J_{\tilde{\omega}} \tilde{\beta}_y - J_{\tilde{\omega}} \tilde{\beta}_x.$$

$$\tilde{K}_y = J_{\tilde{\omega}} \tilde{\beta}_y - J_{\tilde{\omega}} \tilde{\beta}_x. \quad (1.14)$$

Аналогично

$$\tilde{K}_x = J_{\tilde{\omega}} \tilde{\beta}_x - J_{\tilde{\omega}} \tilde{\beta}_y. \quad (1.15)$$

Спроецируем условия равновесия (1.3) и (1.4) на оси ГСК.

$$\begin{aligned}
Q_{УПх} + Q_{ИНх} + Q_{ТРх} &= 0, \\
Q_{УПу} + Q_{ИНу} + Q_{ТРу} &= 0, \\
M_{УПх} + M_{ИНх} &= 0, \\
M_{УПу} + M_{ИНу} &= 0.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

С учетом (1.5), (1.6), (1.7), (1.10), (1.14), (1.15)

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_{ИНх} &= -m\ddot{R}_x; \quad \tilde{Q}_{ИНу} = -m\ddot{R}_y; \quad \tilde{Q}_{УПх} = -(k_{11}\tilde{r}_x + k_{12}\tilde{\beta}_y); \\
\tilde{M}_{УПу} &= -(k_{21}\tilde{r}_x + k_{22}\tilde{\beta}_y); \quad \tilde{Q}_{УПу} = -(k_{11}\tilde{r}_y + k_{12}\tilde{\beta}_x); \\
\tilde{M}_{УПх} &= -(k_{21}\tilde{r}_y + k_{22}\tilde{\beta}_x); \quad \tilde{Q}_{ТРх} = -\alpha\dot{q}_x; \quad Q_{ТРу} = -\alpha\dot{q}_y; \\
M_{ИНу} &= -\frac{d}{dt}\tilde{K}_y = -J_3\ddot{\beta}_y + J\omega\dot{\beta}_x; \\
M_{ИНх} &= \frac{d}{dt}\tilde{K}_x = -J_3\ddot{\beta}_x + J\omega\dot{\beta}_y.
\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в систему уравнений (1.16), с учетом (1.1) и (1.2), получаем:

$$\left. \begin{aligned}
-m(\ddot{r}_x - e\omega^2 \cos \omega t) - k_{11}\tilde{r}_x - k_{12}\tilde{\beta}_y - \alpha\dot{q}_x &= 0 \\
-J_3\ddot{\beta}_y + J\omega\dot{\beta}_x - k_{21}\tilde{r}_x - k_{22}\tilde{\beta}_y &= 0 \\
-m(\ddot{r}_y - e\omega^2 \sin \omega t) - k_{11}\tilde{r}_y - k_{12}\tilde{\beta}_x - \alpha\dot{q}_y &= 0 \\
-J_3\ddot{\beta}_x - J\omega\dot{\beta}_y - k_{21}\tilde{r}_y - k_{22}\tilde{\beta}_x &= 0
\end{aligned} \right\} \tag{1.17}$$

Система уравнений (1.17) описывает динамику рассматриваемого ротора. Из анализа этой системы видно, что колебания являются пространственными (колебания в горизонтальной и вертикальной плоскостях являются связанными, то есть зависят друг от друга). Связь колебаний в горизонтальной и вертикальной плоскостях осуществляется за счёт наличия во втором уравнении $J\omega\dot{\beta}_x$ и в четвёртом уравнении $J\omega\dot{\beta}_y$. Данные

величины являются проекциями гироскопического момента на оси глобальной системы координат.

Для выявления характера движения, происходящего при вращении ротора, упростим систему (1.17). Пренебрежём инерционными свойствами диска, связанными с его угловыми смещениями, т.е. примем, что $J = J_3 = 0$.

Уравнения (1.17) примут вид

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{\tilde{r}}_x - e\omega^2 \cos \omega t) + k_{11}\tilde{r}_x + k_{12}\tilde{\beta}_y + \alpha\dot{\tilde{q}}_x &= 0 \\ k_{21}\tilde{r}_x + k_{22}\tilde{\beta}_y &= 0 \\ m(\ddot{\tilde{r}}_y - e\omega^2 \sin \omega t) + k_{11}\tilde{r}_y + k_{12}\tilde{\beta}_x + \alpha\dot{\tilde{q}}_y &= 0 \\ k_{21}\tilde{r}_y + k_{22}\tilde{\beta}_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

Из второго и четвертого уравнений выразим:

$$\tilde{\beta}_y = -\frac{k_{21}}{k_{22}}\tilde{r}_x,$$

$$\tilde{\beta}_x = -\frac{k_{21}}{k_{22}}\tilde{r}_y.$$

Подставим полученные выражения в первое и третье уравнения.

$$\left\{ \begin{aligned} m(\ddot{\tilde{r}}_x - e\omega^2 \cos \omega t) + k_{11}\tilde{r}_x - \frac{k_{12}k_{21}}{k_{22}}\tilde{r}_x + \alpha\dot{\tilde{q}}_x &= 0 \\ m(\ddot{\tilde{r}}_y - e\omega^2 \sin \omega t) + \left(k_{11} - \frac{k_{12}k_{21}}{k_{22}} \right)\tilde{r}_y + \alpha\dot{\tilde{q}}_y &= 0 \end{aligned} \right. \quad (1.19)$$

Учитывая, что $\tilde{r}_x = \tilde{q}_x$; $\tilde{r}_y = \tilde{q}_y$ и обозначив через

$$c = k_{11} - \frac{k_{12}k_{21}}{k_{22}} \text{ - жесткость вала в точке } O_2. \text{ Из (1.19) получаем}$$

$$\begin{cases} m\ddot{\tilde{q}}_x + \alpha\dot{\tilde{q}}_x + c\tilde{q}_x = me\omega^2 \cos \omega t \\ m\ddot{\tilde{q}}_y + \alpha\dot{\tilde{q}}_y + c\tilde{q}_y = me\omega^2 \sin \omega t \end{cases} \quad (1.20)$$

Уравнения (1.20) описывают вынужденные колебания ротора под действием центробежной нагрузки, возникающей из-за массовой неуравновешенности. Действительно, масса ротора не уравновешена, она смещена от оси ротора на величину эксцентриситета e , что приводит к возникновению центробежной силы $me\omega^2$.

Разделим все слагаемые уравнений (1.20) на массу m и введем обозначения $p^2 = \frac{c}{m}$; $rn = \frac{\alpha}{m}$

Здесь p – собственная частота колебания ротора. Получим

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{q}}_x + rn\dot{\tilde{q}}_x + p^2\tilde{q}_x = e\omega^2 \cos \omega t \\ \ddot{\tilde{q}}_y + rn\dot{\tilde{q}}_y + p^2\tilde{q}_y = e\omega^2 \sin \omega t \end{cases} \quad (1.21)$$

Решение системы (1.21) имеет вид:

$$\begin{cases} \tilde{q}_x = C_1\tilde{q}_{x1} + C_2\tilde{q}_{x2} + \tilde{q}_x \\ \tilde{q}_y = C_3\tilde{q}_{y1} + C_4\tilde{q}_{y2} + q_y \end{cases} \quad (1.22)$$

Здесь \tilde{q}_{x1} , \tilde{q}_{x2} , \tilde{q}_{y1} , \tilde{q}_{y2} – любые линейно независимые частные решения однородной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{q}}_x + rn\dot{\tilde{q}}_x + p^2\tilde{q}_x = 0 \\ \ddot{\tilde{q}}_y + rn\dot{\tilde{q}}_y + p^2\tilde{q}_y = 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

$C_{1...4}$ – неизвестные постоянные, которые определяются из начальных условий, \tilde{q}_x , \tilde{q}_y – любые частные решения неоднородной системы (1.21).

Частные решения однородной системы будем искать в виде

$$\tilde{q}_{x1,2} = e^{k_{1,2}t}, \quad \tilde{q}_{y1,2} = e^{k_{3,4}t} \quad (1.24)$$

Подставим функции (1.24) в первое уравнение системы (1.23).

$$(k_{1,2}^2 + 2nk_{1,2} + p^2)e^{k_{1,2}t} = 0.$$

Отсюда получаем характеристическое уравнение $k_{1,2}^2 + 2nk_{1,2} + p^2 = 0$.

Его решение дает $k_{1,2} = -n \pm i\sqrt{p^2 - n^2}$. Обозначим $p_1 = \sqrt{p^2 - n^2}$ - собственная частота колебаний ротора при наличии демпфирования.

Тогда $\tilde{q}_{x_{1,2}} = e^{-nt} e^{\pm ip_1 t}$. В соответствии с формулой Эйлера $e^{-nt} e^{\pm ip_1 t} = e^{-nt} \cos p_1 t \pm ie^{-nt} \sin p_1 t$.

Из математики известно, что если комплексная функция является решением дифференциального уравнения, то ее действительные и мнимые составляющие функции тоже являются решениями данного дифференциального уравнения. Это позволяет в качестве частных решений однородных дифференциальных уравнений взять выражения

$\tilde{q}_{x_1} = e^{-nt} \cos p_1 t$; $\tilde{q}_{x_2} = e^{-nt} \sin p_1 t$. Аналогично для второго уравнения $\tilde{q}_{y_1} = e^{-nt} \cos p_1 t$; $\tilde{q}_{y_2} = e^{-nt} \sin p_1 t$.

Частные решения неоднородных дифференциальных уравнений (1.21) будем искать в виде

$$\begin{cases} \tilde{q}_{x_3} = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t \\ \tilde{q}_{y_3} = A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t \end{cases} \quad (1.25)$$

Подставим первое уравнение этой системы в первое уравнение системы (1.21).

$$-A_1 \omega^2 \cos \omega t - B_1 \omega^2 \sin \omega t - 2n\omega A_1 \sin \omega t + 2n\omega B_1 \cos \omega t + p^2 A_1 \cos \omega t + p^2 B_1 \sin \omega t - e\omega^2 \cos \omega t = 0 \quad (1.26)$$

Равенство (1.26) должно выполняться для любого момента времени. Это возможно, если выполняются два следующих условия:

$$\begin{cases} -A_1\omega^2 + 2n\omega B_1 + p^2 A_1 - e\omega^2 = 0 \\ -B_1\omega^2 - 2n\omega A_1 + p^2 B_1 = 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

Из второго уравнения следует, что

$$B_1 = A_1 \frac{2n\omega}{p^2 - \omega^2}. \quad (1.29)$$

Подставляя это равенство в первое уравнение, получаем

$$-A_1\omega^2 + A_1 \frac{(2n\omega)^2}{p^2 - \omega^2} + p^2 A_1 = e\omega^2. \text{ Отсюда находим}$$

$$A_1 = \frac{e\omega^2}{(p^2 - \omega^2) + \frac{(2n\omega)^2}{(p^2 - \omega^2)}} = \frac{e\omega^2(p^2 - \omega^2)}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} \text{ и из (1.29)}$$

$$B_1 = \frac{e\omega^2 2n\omega}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{x3} &= \frac{e\omega^2(p^2 - \omega^2)}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} \cos \omega t + \frac{e\omega^2 2n\omega}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} \sin \omega t = \\ &= \frac{e\omega^2}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \cos(\omega t - \arctg \frac{2n\omega}{p^2 - \omega^2}). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Аналогично можно найти

$$\begin{aligned} -A_2\omega^2 \cos \omega t - B_2\omega^2 \sin \omega t - 2n\omega A_2 \sin \omega t + 2n\omega B_2 \cos \omega t + \\ + p^2 A_2 \cos \omega t + p^2 B_2 \sin \omega t - e\omega^2 \sin \omega t = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -A_2\omega^2 + 2n\omega B_2 + p^2 A_2 = 0 \\ -B_2\omega^2 - 2n\omega A_2 + p^2 B_2 - e\omega^2 = 0 \end{cases};$$

$$A_2 = -B_2 \frac{2n\omega}{p^2 - \omega^2}; \quad B_2 = \frac{e\omega^2(p^2 - \omega^2)}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2};$$

$$A_2 = -\frac{e\omega^2 2n\omega}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2};$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{y3} &= -\frac{e\omega^2 2n\omega}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} \cos \omega t + \frac{e\omega^2(p^2 - \omega^2)}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} \sin \omega t = \\ &= \frac{e\omega^2}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \sin(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{2n\omega}{p^2 - \omega^2}) \end{aligned} \quad (1.31)$$

(использованы тригонометрические формулы

$$\begin{cases} p \cos \alpha + q \sin \alpha = r \sin(\alpha + \varphi) \\ p \cos \alpha + q \sin \alpha = r \cos(\alpha - \varphi) \end{cases}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{p}{q}.$$

Объединяя частные решения в соответствии с (1.22), запишем общее решение системы (1.21):

$$\begin{aligned} \tilde{q}_x &= C_1 e^{-nt} \cos p_1 t + C_2 e^{-nt} \sin p_1 t + \\ &+ \frac{e\omega^2}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \cos(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{2n\omega}{p^2 - \omega^2}) = \\ &= e^{-nt} D_1 \cos(p_1 t - \varphi_1) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{e\omega^2}{p^2 \sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{p^2})^2 + 4 \frac{n^2 \omega^2}{p^2 \frac{\omega^2}{p^2}}} \cos(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{2 \frac{n \omega}{p}}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}}),$$

где $D_1 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$; $\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{C_2}{C_1}$.

$$\text{Обозначим } \psi = \arctg \frac{2 \frac{n \omega}{p} p}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} ; \quad r_0 = \frac{e \omega^2}{p^2} = \frac{e \omega^2}{c/m} = \frac{e m \omega^2}{c}$$

статический прогиб вала под действием центробежной силы;

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2}{p^2} \frac{\omega^2}{p^2}}} - \text{коэффициент динамичности. С учетом}$$

принятых обозначений общее решение принимает вид

$$\tilde{q}_x = e^{-nt} D_1 \cos(p_1 t - \varphi_1) + r_0 \mu \cos(\omega t - \psi) . \quad (1.32)$$

Аналогично можно получить

$$\tilde{q}_y = e^{-nt} D_2 \cos(p_1 t - \varphi_2) + r_0 \mu \sin(\omega t - \psi) . \quad (1.33)$$

Проанализируем выражения (1.32) и (1.33). Первое слагаемое в них описывает собственные колебания ротора, возникшие в первый момент движения ротора в результате его выхода из положения равновесия под действием центробежной силы. Они происходят с собственной частотой p_1 . Второе слагаемое описывает вынужденные колебания, происходящие с частотой ω от действия на ротор центробежной силы. Центробежная сила в роторе возникла в результате его массовой неуравновешенности. Ее проекции на вертикальную и горизонтальную плоскости представляют собой вынуждающие силы, совершающие гармонические колебания с частотой ω . Их действие и приводит к возникновению в роторе вынужденных колебаний в данных плоскостях. Из анализа первых слагаемых выражений (1.32) и (1.33) видно, что собственные колебания ротора являются затухающими. Это связано с наличием сил неупругого сопротивления. Через некоторое время после возникновения собственные колебания прекратятся. Промежуток времени T_l между двумя максимальными отклонениями системы из

положения равновесия называются периодом затухающих колебаний (рис. 1.5).

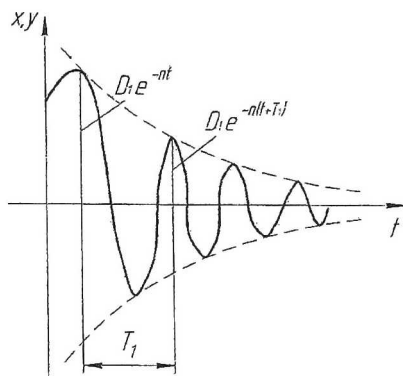


Рис. 1.5. Затухающие колебания

Степень быстроты затухания свободных колебаний зависит от величины демпфирования в роторе, то есть от величины энергии, рассеиваемой за каждый цикл колебаний за счет работы, которую совершает сила трения. Чем больше в системе демпфирование, тем быстрее затухают свободные колебания. О величине демпфирования в системе можно судить по величине двух последовательных максимальных отклонений. Логарифм такого отношения называют логарифмическим декрементом колебаний.

$$\delta = \ln \frac{D_1 e^{-nt_k}}{D_1 e^{-n(t_k+T_1)}} = nT_1.$$

Поскольку $T_1 = \frac{2\pi}{p_1}$, то $\delta = \frac{2\pi n}{p_1} \approx \frac{2\pi n}{p}$, откуда находим

$$\frac{2n}{p} \approx \frac{\delta}{\pi}.$$

Так как собственные колебания ротора являются затухающими, в дальнейшем будем ими пренебрегать. Проанализируем вынужденные колебания ротора:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_x &= r_0 \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2 \omega^2}{p^2 p^2}}} \cos(\omega t - \psi) = \\ &= \frac{r_0 \cos(\omega t - \psi)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{\delta^2 \omega^2}{\pi^2 p^2}}} = q_x \cos(\omega t - \psi) \end{aligned} ;$$

$$\tilde{q}_y = \frac{r_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{\delta^2 \omega^2}{\pi^2 p^2}}} \sin(\omega t - \psi) = q_y \sin(\omega t - \psi) . \quad (1.34)$$

При приближении частоты вынужденных колебаний ω к собственной частоте p амплитуды колебаний ротора q_x и q_y растут. Определим частоту вращения ротора, при которой он вступит в резонанс. Амплитуда колебаний будет максимальной, когда подкоренные выражения в формулах (1.34) будут иметь минимальное значение. Найдем его экстремум. Продифференцируем подкоренное выражение по частоте и приравняем его нулю.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \left(\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{\delta^2 \omega^2}{\pi^2 p^2} \right) &= 0 ; \quad -2 \left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right) \frac{2\omega}{p^2} + \frac{\delta^2}{\pi^2} 2 \frac{\omega}{p^2} = 0 ; \\ 1 - \frac{\delta^2}{2\pi^2} &= \frac{\omega^2}{p^2} \quad \text{Отсюда} \end{aligned}$$

$$\omega = p \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{2\pi^2}} \approx p, \text{ так как } \delta \leq 0.01. \text{ На резонансной частоте}$$

$$q_x = q_y = \frac{r_0 \pi}{\delta} . \quad (1.35)$$

Амплитудно-частотная характеристика ротора имеет вид (рис.1.6):

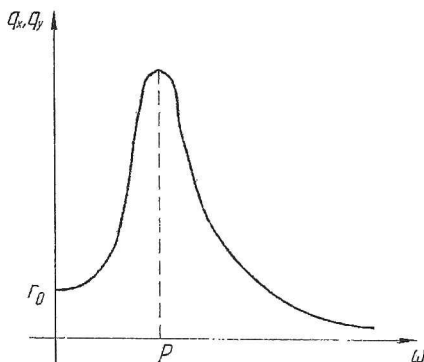


Рис. 1.6. Амплитудно-частотная характеристика ротора

Частота вращения ротора, на которой он вступает в резонанс, называется его критической частотой вращения.

Мы установили, что при вращении ротора, обладающего массовой неуравновешенностью, ротор совершает колебания в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, сдвинутые по фазе на четверть периода. Проанализируем характер результирующего движения ротора. Для упрощения последующих в дальнейшем преобразований демпфированием будем пренебрегать. В этом случае колебания ротора в горизонтальной и вертикальной плоскостях будут описываться выражениями

$$\tilde{q}_x = \frac{e\omega^2}{p^2 - \omega^2} \cos \omega t; \quad \tilde{q}_y = \frac{e\omega^2}{p^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (1.37)$$

Проследим за движением ротора в течение промежутка времени, за который вал совершит один полный оборот вокруг своей деформированной оси. Примем, что в момент начала наблюдения $t=0$. Тогда за указанный промежуток времени фаза колебаний ωt изменится от 0 до 2π . Положение сечения вала для различных значений фазы колебаний изображено на рис. 1.7. Видно, что за один полный оборот вокруг деформированной оси вал также совершит один полный оборот вокруг оси опор.

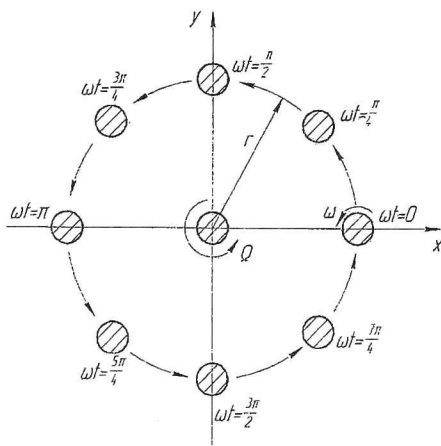


Рис. 1.7. Прецессия ротора

Вращение упругоизогнутого ротора относительно своего положения равновесия называется прецессионным движением, или прецессией ротора. Частоту прецессионного вращения будем обозначать Ω . В рассматриваемом случае частота прецессии равна частоте вращения вала вокруг своей оси, т.е.

$$\omega = \Omega . \quad (1.38)$$

В общем случае ω и Ω могут не совпадать как по величине, так и по направлению. При соблюдении условия (1.38) прецессия называется синхронной. Если ω и Ω совпадают по направлению, то прецессия называется прямой, а если прецессионное движение и вращение вала происходит в разные стороны, то прецессия называется обратной.

Следует отметить, что вал ротора будет совершать прецессионное движение даже в том случае, если его концевые сечения жестко закреплены, но вокруг оси вращается некоторая неуравновешенная масса (рис.1.8):

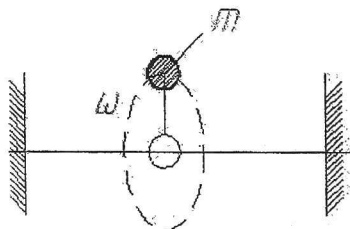


Рис. 1.8. Ротор с жестким закреплением концевых сечений

Определим прогиб вала.

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{q_x^2 + q_y^2} = \left| \frac{e\omega^2}{p^2 - \omega^2} \right|. \quad (1.39)$$

Как видно, он является постоянным и не зависит от времени, то есть прецессионное движение происходит по окружности. Прецессия с постоянной амплитудой и угловой скоростью называется регулярной.

Рассмотрим, что происходит с центром масс ротора при прохождении резонанса. В соответствии с формулами (1.1) и (1.2)

$$\tilde{R}_x = \frac{e\omega^2}{p^2 - \omega^2} \cos \omega t + e \cos \omega t = \frac{ep^2}{p^2 - \omega^2} \cos \omega t, \quad (1.40)$$

$$\tilde{R}_y = \frac{ep^2}{p^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (1.41)$$

Из (1.40), (1.41) видно, что $\frac{\tilde{R}_y}{\tilde{R}_x} = \tan \omega t$; также и $\frac{\tilde{r}_y}{\tilde{r}_x} = \tan \omega t$.

Таким образом, точки O_1 и O_2 расположены на одной прямой.

Если $\omega < p$, то $R = \sqrt{\tilde{R}_x^2 + \tilde{R}_y^2} = \frac{p^2 e}{p^2 - \omega^2} > r$ (рис.1.9).

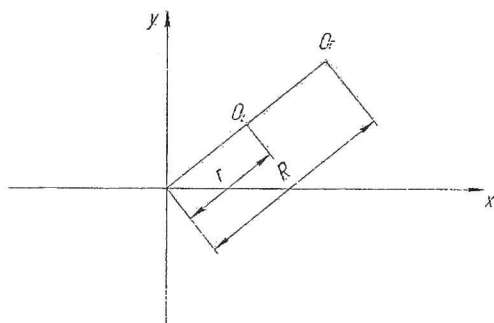


Рис. 1.9. Колебания ротора при $\omega < p$

Если $\omega > p$, то $r > R$ (рис. 1.10).

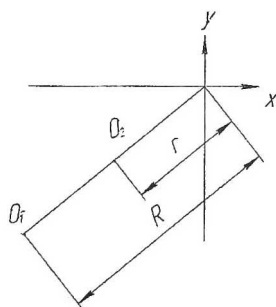


Рис.1.10. Колебания ротора при $\omega > p$

Если $\omega \rightarrow \infty$, $R \rightarrow 0$. Это явление называется самоцентрированием ротора.

Реальный ротор ГТД имеет бесконечное множество степеней свободы, а следовательно собственных частот колебаний и критических частот вращения. Низшую из них называют первой критической частотой вращения, следующую по возрастанию – второй, и так далее. Критические частоты будем обозначать как $\omega_{k1}, \omega_{k2}, \dots$

В зависимости от методов балансировки все роторы ГТД делятся на жёсткие и гибкие. Ротор называется жестким и при балансировке рассматривается как недеформируемый, если его максимальная час-

тота вращения ω_{\max} меньше $0,5 \dots 0,7 \omega_{k1}$. Если уравнение не выполняется, то ротор называется гибким. Преимуществом гибкого ротора, у которого $\omega_{k1} < \omega_{\max}$, является то, что после прохождения критической частоты вращения он самоцентрируется. К его недостаткам относится то, что при запуске и остановке двигателя ротор проходит через резонанс.

2. ВЛИЯНИЕ ПОДАТЛИВОСТИ ОПОР НА КРИТИЧЕСКУЮ ЧАСТОТУ ВРАЩЕНИЯ РОТОРА

Податливость опор оказывает существенное влияние на величину собственных частот колебаний ротора и как следствие на величину его критических частот вращения. Если жёсткости опор сопоставимы с жёсткостью вала ротора, то пренебрежение ими приводит к существенным ошибкам в расчетах. Проанализируем влияние податливости опор на динамику простейшего ротора. Пусть ротор вращается на упругих опорах, жесткость которых будем обозначать как C_0 . Для упрощения уравнений будем считать, что диск расположен посередине вала, демпфирование в роторе отсутствует (рис. 2.1). Принимаем также, что $J = J_3 = 0$. Так как в этом случае угол поворота диска при колебаниях $\beta = 0$,

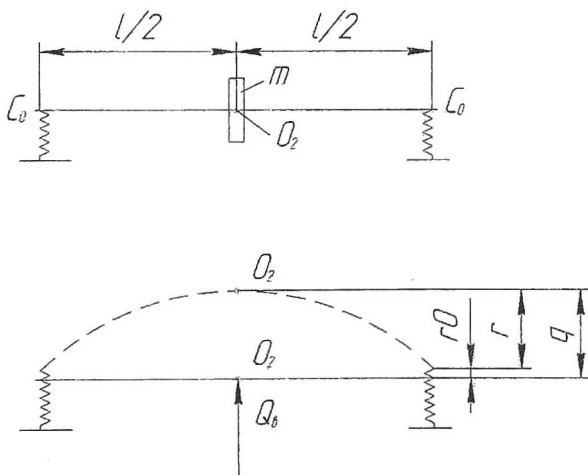


Рис. 2.1. Ротор на податливых опорах

условие равновесия ротора имеет вид

$$\bar{Q}_{уп} + \bar{Q}_{ин} = 0, \quad (2.1)$$

где сила упругости $\bar{Q}_{уп} = -c_p \bar{q}$. Здесь c_p – жесткость ротора в месте закрепления диска с учетом податливости опор.

Для определения этой жесткости приложим к валу в точке O_2 в произвольном направлении некоторую статическую силу \bar{Q}_b . Под действием этой силы вал прогнётся, опоры ротора деформируются. В результате точка O_2 сместится. Это смещение обозначим вектором \bar{q} . Представим это смещение как сумму двух векторов

$$\bar{q} = \bar{r}_0 + \bar{r}, \quad (2.2)$$

где \bar{r} – смещение за счет прогиба вала, \bar{r}_0 – смещение за счет деформирования опор. Так как сила \bar{Q}_b приложена посередине вала, то каждая из опор будет деформироваться под действием силы $\bar{Q}_b/2$. Найдем связь между смещением \bar{q} и силой \bar{Q}_b . В точке приложения силы должно выполняться условие равновесия

$$\bar{Q}_b + \bar{Q}_{уп} = 0,$$

где упругая сила $\bar{Q}_{уп} = -(k_{11}\bar{r} + k_{12}\bar{\beta}) = -k_{11}\bar{r}$, т.к. $\bar{\beta} = 0$. Тогда

$$\bar{Q}_b = -\bar{Q}_{уп} \Rightarrow \bar{Q}_b = k_{11}\bar{r} \Rightarrow \bar{r} = \frac{\bar{Q}_b}{k_{11}}.$$

Поскольку каждая из опор ротора будет деформироваться под действием силы $\bar{Q}_b/2$:

$$C_0 \bar{r}_0 = \frac{\bar{Q}_b}{2} \Rightarrow \bar{r}_0 = \frac{\bar{Q}_b}{2C_0}.$$

Подставляя выражения для r и r_0 в (2.2), получим

$$\bar{q} = \frac{\bar{Q}_b}{k_{11}} + \frac{\bar{Q}_b}{2C_0} = \left(\frac{1}{k_{11}} + \frac{1}{2C_0} \right) \bar{Q}_b.$$

Откуда находим

$$\bar{Q}_b = \frac{1}{\frac{1}{k_{11}} + \frac{1}{2C_0}} \bar{q} = \frac{k_{11}}{1 + \frac{k_{11}}{2C_0}} \bar{q} = c_p \bar{q}. \quad (2.3)$$

Проецируя равенство (2.1) на оси глобальной системы координат, получим

$$\begin{aligned} -m\ddot{\tilde{R}}_x - c_p \tilde{q}_x &= 0, \\ -m\ddot{\tilde{R}}_y - c_p \tilde{q}_y &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Обозначая $p^2 = \frac{c_p}{m}$ (собственная частота колебаний ротора с учетом податливости его опор) и учитывая выражения (1.1) и (1.2), получим

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{q}}_x + p^2 \tilde{q}_x &= e\omega^2 \cos \omega t, \\ \ddot{\tilde{q}}_y + p^2 \tilde{q}_y &= e\omega^2 \sin \omega t. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) описывает вынужденные колебания ротора на упругих опорах, возникшие из-за наличия массовой неуравновешенности системы. Собственная частота ротора на упругих опорах определяется выражением

$$p = \sqrt{\frac{k_{11}}{m} \left(\frac{1}{1 + \frac{k_{11}}{2C_0}} \right)}. \quad (2.6)$$

Из анализа этого выражения видно, что собственная частота колебания ротора существенно зависит от жёсткости опор C_0 . Если $C_0=0$, то $p=0$. Если $C_0 \rightarrow \infty$, то $p \rightarrow \sqrt{\frac{k_{11}}{m}}$, к собственной частоте ротора на абсолютно жёстких опорах. Зависимость крити-

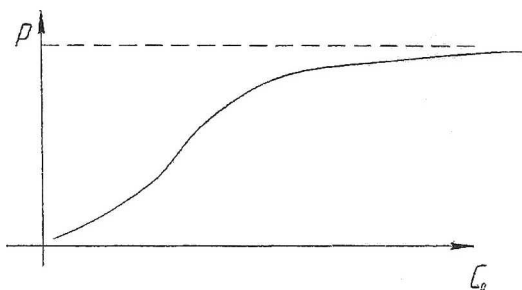


Рис. 2.2. Зависимость критической частоты ротора от жесткости опор

ческой частоты ротора от жесткости опор имеет вид, показанный на рис.2.2.

3. КРИТИЧЕСКИЕ ЧАСТОТЫ ВРАЩЕНИЯ РОТОРА НА АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ ОПОРАХ

Из-за особенностей конструкции корпуса двигателя опоры вала могут обладать неодинаковой жёсткостью в горизонтальной и вертикальной плоскостях. Если такое различие существенно, то в динамике ротора появляются особенности, которые необходимо учитывать при проектировании и доводке двигателя. Рассмотрим динамику простейшего ротора, вращающегося на упругих анизотропных опорах (рис. 3.1). Жёсткость опор в горизонтальной плоскости – C_{ox} , а в вертикальной C_{oy} . Как и в предыдущем случае считаем, что диск расположен посередине вала, а его центр масс смещён на величину эксцентриситета e . Моментами инерции диска и демпфированием в роторе пренебрегаем.

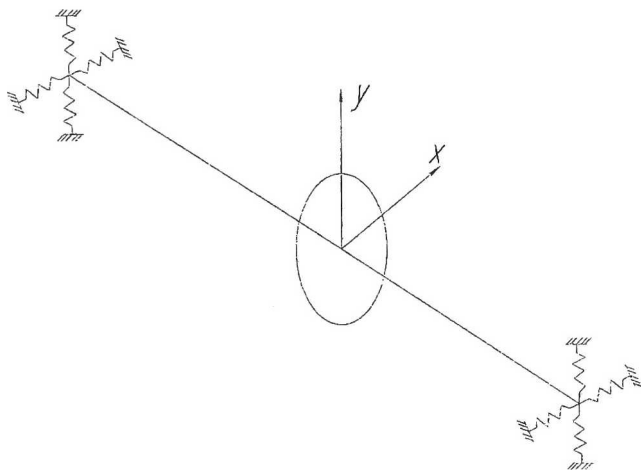


Рис. 3.1. Ротор на анизотропных опорах

Так как опоры имеют разную жёсткость в направлениях X и Y , ротор в точке O_2 также обладает жёсткостями, отличными в гори-

горизонтальной и вертикальной плоскостях. По аналогии с (2.3) можно записать

$$c_{px} = \frac{k_{11}}{1 + \frac{k_{11}}{2C_{ox}}}; \quad c_{py} = \frac{k_{11}}{1 + \frac{k_{11}}{2C_{oy}}}.$$

В этом случае уравнения равновесия (2.4) для диска в проекциях на оси глобальной системы координат принимают вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{\tilde{R}}_x + c_{px}\tilde{q}_x &= 0, \\ m\ddot{\tilde{R}}_y + c_{py}\tilde{q}_y &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Обозначим собственную частоту ротора в горизонтальной плоскости:

$$p_x^2 = \frac{c_{px}}{m},$$

в вертикальной плоскости:

$$p_y^2 = \frac{c_{py}}{m}.$$

Учитывая выражения для определения \tilde{R}_x и \tilde{R}_y (1.1) и (1.2), преобразуем (3.1) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{q}}_x + p_x^2\tilde{q}_x &= e\omega^2 \cos \omega t; \\ \ddot{\tilde{q}}_y + p_y^2\tilde{q}_y &= e\omega^2 \sin \omega t. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Решение (3.2) будем искать в виде стационарных вынужденных колебаний:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_x &= q_x \cos \omega t, \\ \tilde{q}_y &= q_y \sin \omega t. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Подставляя (3.3) в (3.2) получаем выражения для амплитуд колебаний:

$$q_x = \frac{e\omega^2}{p_x^2 - \omega^2}; \quad q_y = \frac{e\omega^2}{p_y^2 - \omega^2}.$$

Таким образом, если опоры ротора анизотропные и в роторе имеется массовая неуравновешенность $e \neq 0$, то при вращении вала вокруг своей собственной оси возникает прецессионное движение, которое будет описываться уравнениями:

$$\begin{aligned} q_x &= \frac{e\omega^2}{p_x^2 - \omega^2} \cos \omega t; \\ q_y &= \frac{e\omega^2}{p_y^2 - \omega^2} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из анализа (3.4) можно сделать следующие выводы:

1. Ротор имеет две отличные по величине резонансные частоты колебаний и, следовательно, две критические частоты вращения $\omega_{1кр} = p_x$; $\omega_{2кр} = p_y$. Примем для определенности, что $p_y > p_x$.

2. Амплитуда прецессии будет переменной:

$$|\vec{q}| = \sqrt{\tilde{q}_{1x}^2 + \tilde{q}_{2x}^2} \neq \text{const.}$$

Следовательно, прецессия является нерегулярной. Движение вала происходит по эллипсу.

Рассмотрим поведение ротора при прохождении через критические частоты вращения. Будем рассматривать движение ротора в течение промежутка времени, за который вал совершает один полный оборот, т.е. $\omega t = 0 \dots 2\pi$.

Разделим весь диапазон частоты вращения ротора на несколько интервалов, и рассмотрим на каждом из них прецессионное движение ротора.

а) $\omega < p_x$ (рис. 3.2):

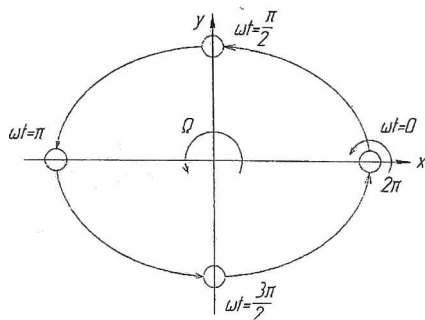


Рис. 3.2. Колебания ротора при $\omega < p_x$

Положения сечения вала при изменении фазы колебаний от 0 до 2π изображены на рисунке. Поскольку $p_x^2 - \omega^2 < p_y^2 - \omega^2$, амплитуда $q_x < q_y$, то есть движение происходит по эллипсу, вытянутому вдоль оси X. Так как $\omega = \Omega$, прецессия является синхронной. Направление вращения при прецессии совпадает с направлением вращения вала вокруг своей оси, следовательно, прецессия является прямой.

б) $\omega \rightarrow p_x$ (рис. 3.3):

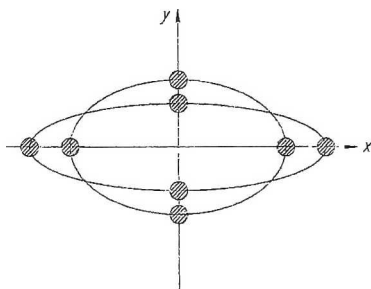


Рис. 3.3. Колебания ротора при $\omega \rightarrow p_x$

При $\omega \rightarrow p_x$ траектория начинает вырождаться в эллипс, вытягиваться вдоль оси X. При $\omega = p_x$ движение фактически превращается в колебания в горизонтальной плоскости.

в) $p_x < \omega < p_y$ (рис. 3.4):

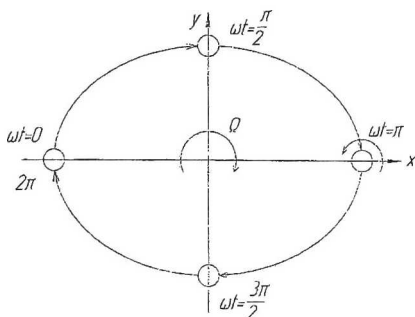


Рис. 3.4. Колебания ротора при $p_x < \omega < p_y$

Из рисунка видно, что ротор совершает обратную нерегулярную синхронную прецессию.

г) $\omega \rightarrow p_y$ (рис. 3.5):

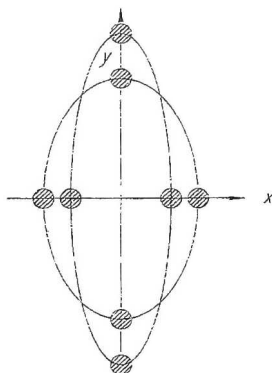


Рис. 3.5. Колебания ротора при $\omega \rightarrow p_y$

При $\omega \rightarrow p_y$ траектория начинает вырождаться в эллипс, вытягиваться вдоль оси Y . При $\omega = p_y$ движение фактически превращается в колебания в вертикальной плоскости.

д) $\omega > p_y$ (рис. 3.6):

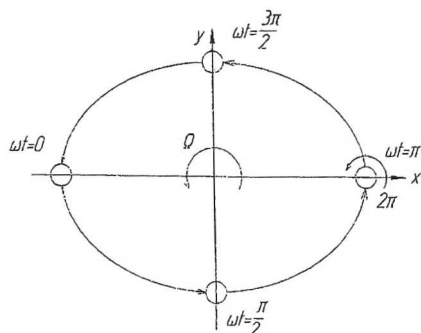


Рис. 3.6. Колебания ротора при $\omega > p_y$

Из рисунка видно, что ротор вновь совершает прямую нерегулярную синхронную прецессию.

4. КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ РОТОРА

Кинематическое возбуждение происходит в случае, когда подвод энергии колебаний к ротору осуществляется через его опоры. Это может происходить в многовальных ГТД, у которых корпус недостаточно податлив, чтобы обеспечить связанность колебаний роторов, но способен передавать энергию изгибных колебаний от одного ротора к другому (рис. 4.1). На рисунке Δ_1 и Δ_2 - упругие смещения корпуса двигателя от действия реакций, возникающих в опорах ротора ВД.

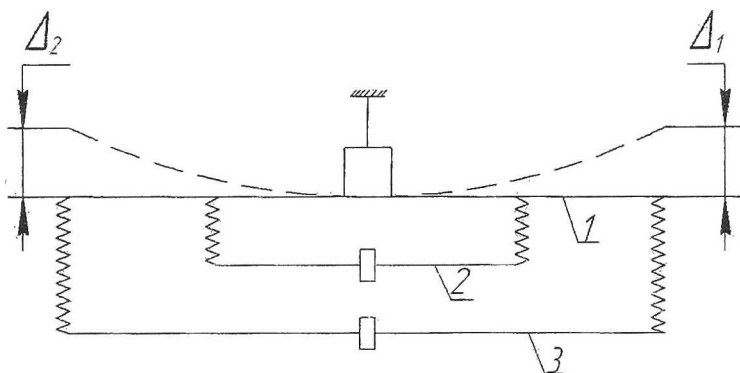


Рис. 4.1. Кинематическое возбуждение ротора
1 – корпус; 2 – ротор ВД; 3 – ротор НД

При прецессии ротора ВД реакции, возникающие в его опорах, вращаются вокруг оси двигателя. Это приводит к тому, что и упругие смещения Δ_1 и Δ_2 также вращаются вокруг оси двигателя, вызывая вращение опор ротора НД. Последнее может оказаться причиной кинематического возбуждения ротора НД.

Рассматриваемая схема возбуждения может оказаться ошибочной, если упругая связь между корпусом двигателя и ротором яв-

ляется достаточно существенной – в этом случае двигатель надо рассматривать как единую упругую систему (корпус – ротор ВД – ротор НД).

Рассмотрим кинематическое возбуждение простейшего ротора (рис. 4.2), вращающегося на опорах, которые сами движутся по окружности радиуса r_0 с угловой скоростью Ω .

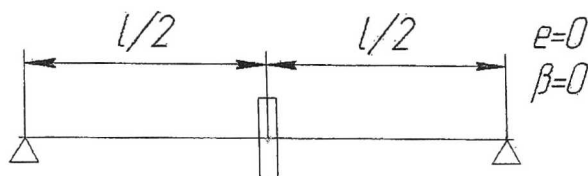


Рис. 4.2. Простейший ротор

Для упрощения формул считаем, что диск расположен посередине вала, в этом случае угол поворота равен 0. Массовой неуравновешенностью, моментами инерции диска и демпфированием пренебрегаем.

Обозначим ось, вокруг которой вращаются опоры, – $O'O'$ (это ось двигателя), $O''O''$ – ось опор. Поскольку опоры вращаются, то и вал вращается, и под действием центробежной силы вал прогнётся, т.е. существует прецессия.

Пусть в любой момент времени точки O_3 , O_1 , O_2 расположены так, как это показано на рис. 4.3, считаем, что в начальный момент времени точка O_3 находилась на оси X .

В данном случае точки O_1 и O_2 совпадают, и вектор полного смещения оси вала равен вектору смещения центра масс ротора:

$$\vec{R} = \vec{q} \quad (\text{рис. 4.4}).$$

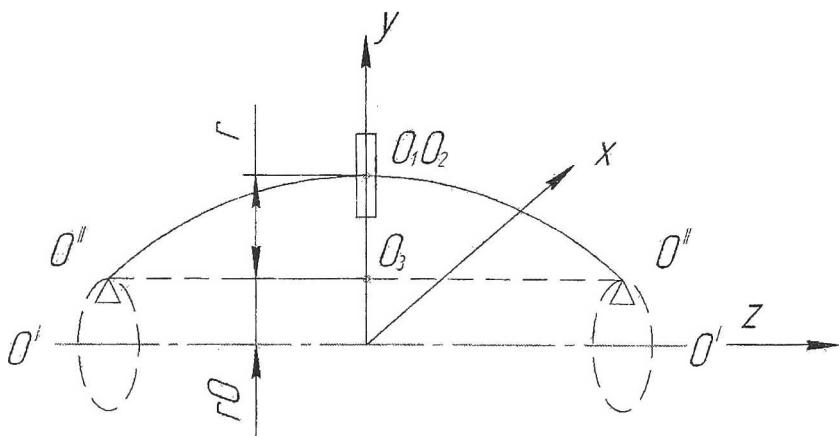


Рис. 4.3. Положение ротора при колебаниях

Из рис. 4.4:

$$\tilde{R}_x = \tilde{r}_x + \tilde{r}_o \cos \Omega t,$$

$$\tilde{R}_y = \tilde{r}_y + \tilde{r}_o \sin \Omega t.$$

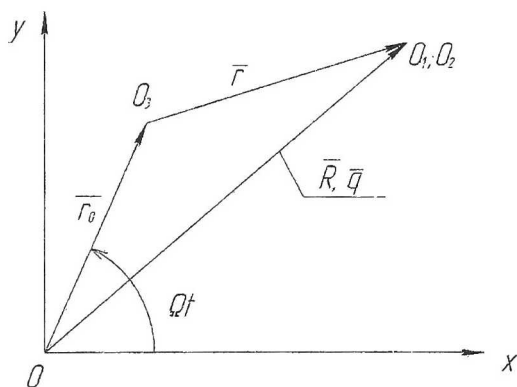


Рис. 4.4. Колебания ротора в проекции на плоскость OXY

Из этих выражений находим:

$$\begin{cases} \tilde{r}_x = \tilde{q}_x - r_o \cos \Omega t, \\ \tilde{r}_y = \tilde{q}_y - r_o \sin \Omega t. \end{cases} \quad (4.1)$$

Запишем условия равновесия для диска:

$$-m\ddot{\tilde{R}}_x - k_{11}\tilde{r}_x = 0,$$

$$-m\ddot{\tilde{R}}_y - k_{11}\tilde{r}_y = 0.$$

Подставляя эти уравнения в (4.1) и учитывая, что $\vec{\tilde{R}} = \vec{q}$, получаем:

$$m\ddot{\tilde{q}}_x + k_{11}(\tilde{q}_x - r_o \cos \Omega t) = 0;$$

$$m\ddot{\tilde{q}}_y + k_{11}(\tilde{q}_y - r_o \sin \Omega t) = 0.$$

Разделив все члены уравнений на m и учитывая, что $\frac{k_{11}}{m} = p^2$,

получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\ddot{\tilde{q}}_x + p^2\tilde{q}_x = p^2 r_o \cos \Omega t, \quad (4.2)$$

$$\ddot{\tilde{q}}_y + p^2\tilde{q}_y = p^2 r_o \sin \Omega t.$$

Решение (4.2) будем искать в виде стационарных вынужденных колебаний:

$$\tilde{q}_x = q_x \cos \Omega t, \quad (4.3)$$

$$\tilde{q}_y = q_y \sin \Omega t.$$

Подставляя (4.3) в (4.2), получим

$$\tilde{q}_x = \frac{p^2 r_o}{p^2 - \Omega^2} \cos \Omega t, \quad (4.4)$$

$$\tilde{q}_y = \frac{p^2 r_o}{p^2 - \Omega^2} \sin \Omega t.$$

Таким образом, при кинематическом возбуждении ротор будет совершать одновременные гармонические колебания в горизонталь-

ной и вертикальной плоскостях с частотой Ω . Так как данные колебания сдвинуты по фазе на четверть периода и происходят с одинаковой амплитудой, то результирующее движение ротора будет происходить в виде регулярной прецессии с частотой Ω . Из выражений (4.4) видно, что если $\Omega = p$, то $|\vec{q}| \rightarrow \infty$ (ротор будет совершать резонансные колебания).

Вернемся к ГТД, схема которого изображена на рис.4.1. Если, например, собственные частоты ротора НД двигателя $p_{НД}$ больше максимальной частоты его вращения $\omega_{\max НД}$, но при этом меньше максимальной частоты вращения ротора ВД $\omega_{\max ВД}$, т.е. выполняется условие $\omega_{\max НД} < p_{НД} < \omega_{\max ВД}$, то ротор НД при некоторой частоте вращения $\omega_{НД} = p_{НД}$ может вступить в резонанс. Данная частота вращения ротора НД будет критической.

5. ВЛИЯНИЕ ГИРОСКОПИЧЕСКОГО МОМЕНТА НА СОБСТВЕННУЮ ЧАСТОТУ КОЛЕБАНИЙ РОТОРА

Пусть простейший ротор вращается на абсолютно жестких шарнирных опорах вокруг собственной оси с угловой скоростью ω и одновременно совершает прецессию вокруг оси опор с угловой скоростью Ω . Считаем, что в данном случае диск расположен несимметрично. Принимаем, что демпфирование в системе отсутствует и момент инерции диска $J_3=0$. При прогибе вала диск ротора повернется на некоторый угол $\vec{\beta}$ (рис. 5.1). При прецессии он всегда нормален плоскости, в которой происходит изгиб вала, и, следовательно, к вектору прогиба вала \vec{r} .

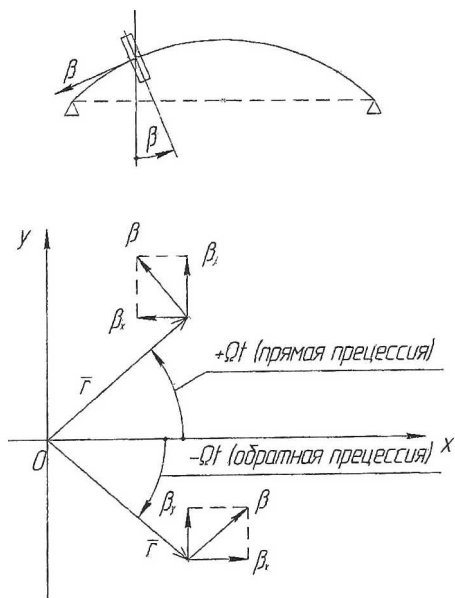


Рис. 5.1. Колебания ротора с диском, расположенным не посередине вала

Найдём проекции вектора $\vec{\beta}$ на оси глобальной системы координат:

$$\begin{cases} \tilde{\beta}_x = -\beta \sin \Omega t; \tilde{\beta}_x = \beta \sin \Omega t, \\ \tilde{\beta}_y = \beta \cos \Omega t; \tilde{\beta}_y = \beta \cos \Omega t. \\ \tilde{\beta}_x = \mp \beta \sin \Omega t, \\ \tilde{\beta}_y = \beta \cos \Omega t. \end{cases} \quad (5.1)$$

Первый знак соответствует прямой прецессии, второй – обратной.

Продифференцируем (5.1) по времени:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\beta}}_x = \mp \Omega \beta \cos \Omega t = \mp \Omega \tilde{\beta}_y, \\ \dot{\tilde{\beta}}_y = -\Omega \beta \sin \Omega t = \pm \Omega \tilde{\beta}_x. \end{cases} \quad (5.2)$$

Запишем с учетом (5.2) полученные ранее уравнения, описывающие динамику простейшего ротора в случае, когда диск расположен не посередине вала, $J_3=0$, $\alpha = 0$:

$$\begin{cases} m\ddot{R}_x + k_{11}\tilde{r}_x + k_{12}\tilde{\beta}_y = 0, \\ \pm J\omega\Omega\tilde{\beta}_y + k_{21}\tilde{r}_x + k_{22}\tilde{\beta}_y = 0, \\ m\ddot{R}_y + k_{11}\tilde{r}_y + k_{12}\tilde{\beta}_x = 0, \\ \pm J\omega\Omega\tilde{\beta}_x + k_{21}\tilde{r}_y + k_{22}\tilde{\beta}_x = 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

Из второго и четвёртого уравнений системы (5.3) находим:

$$\tilde{\beta}_y = -\frac{k_{21}}{k_{22} \pm J\omega\Omega} \tilde{r}_x, \quad (5.4)$$

$$\tilde{\beta}_x = -\frac{k_{21}}{k_{22} \pm J\omega\Omega} \tilde{r}_y, \quad (5.5)$$

«+» - для прямой, «-» - для обратной прецессии.

Подставляя (5.4) и (5.5) в первое и третье уравнения системы (5.3), получаем:

$$m\ddot{\tilde{R}}_x + \left(k_{11} - \frac{k_{12}k_{21}}{k_{22} \pm J\omega\Omega} \right) \tilde{r}_x = 0, \quad (5.6)$$

$$m\ddot{\tilde{R}}_y + \left(k_{11} - \frac{k_{12}k_{21}}{k_{22} \pm J\omega\Omega} \right) \tilde{r}_y = 0.$$

Обозначим: $c = k_{11} - \frac{k_{12}k_{21}}{k_{22} \pm J\omega\Omega}$ - жёсткость ротора в месте

крепления диска, учитывающая влияние гироскопического момента.

Собственная частота колебаний ротора с учетом гироскопического момента

$$p = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m} \left(k_{11} - \frac{k_{12}k_{21}}{k_{22} \pm J\omega\Omega} \right)} \quad (5.7)$$

Из анализа (5.7) видно, что собственная частота колебаний, а следовательно, и критическая частота вращения ротора зависят от направления и величины частоты прецессии Ω .

При прямой прецессии с ростом частоты прецессии собственная частота колебаний растёт. При обратной прецессии с ростом Ω собственная частота уменьшается.

Физически это можно объяснить следующим образом. При прецессионном движении на ротор действует гироскопический момент M_G . Из теоретической механики известно, что $\vec{M}_G = J(\vec{\omega} \times \vec{\Omega})$; $M_G = |\vec{M}_G| = J\omega\Omega \sin \beta \approx J\omega\Omega\beta$, где β - угол между векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{\Omega}$. Вектор гироскопического момента направлен таким образом, что со стороны его стрелки кратчайший поворот вектора $\vec{\omega}$ к вектору $\vec{\Omega}$ виден против часовой стрелки. Из рис. 5.2 видно, что при прямой прецессии гироскопический момент

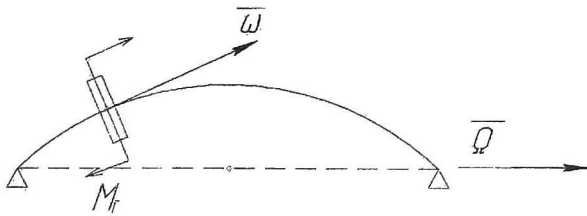


Рис. 5.2. Прямая прецессия

стремится вернуть диск в исходное положение, т.е. он увеличивает возвращающий момент, что эквивалентно увеличению жёсткости. Таким образом, гироскопический момент при прямой прецессии увеличивает жёсткость вала и, как следствие, все его собственные частоты колебаний и критические частоты. Найдем модуль момента, который нормален плоскости изгиба.

$$\tilde{M} = -k_{21}\tilde{r} - k_{22}\tilde{\beta} - J\omega\Omega\tilde{\beta} = -(k_{21}\tilde{r} + (k_{22} + J\omega\Omega)\tilde{\beta}).$$

При обратной прецессии (рис. 5.3) гироскопический момент уменьшает упругий возвращающий момент, что эквивалентно уменьшению жесткости системы.

$$\tilde{M} = -k_{21}\tilde{r} - k_{22}\tilde{\beta} + J\omega\Omega\tilde{\beta} = -k_{21}\tilde{r} - (k_{22} - J\omega\Omega)\tilde{\beta}$$

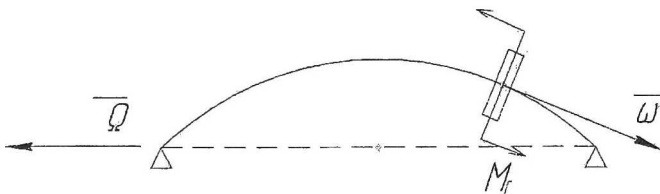


Рис. 5.3. Обратная прецессия

Графически зависимость собственной частоты колебаний ротора от частоты прецессии имеет вид, показанный на рис. 5.4.

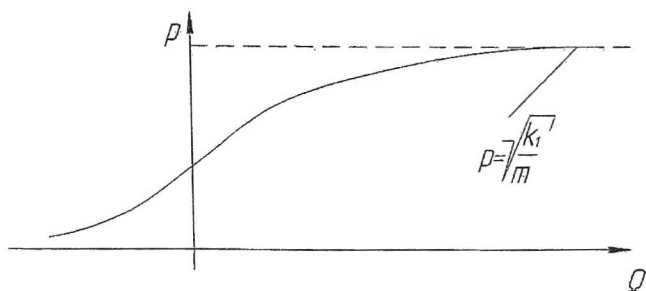


Рис. 5.4. Зависимость собственной частоты колебаний ротора от частоты прецессии

При $\Omega \rightarrow \infty \Rightarrow p = \sqrt{\frac{k_{11}}{m}}$.

6. КОЛЕБАНИЯ РОТОРА С АНИЗОТРОПНЫМ ВАЛОМ. КРИТИЧЕСКИЕ ЧАСТОТЫ ВРАЩЕНИЯ ВТОРОГО РОДА

Критическая частота вращения второго рода возникает у ротора, вал которого имеет упругую анизотропию. Эта частота не связана с массовой неуравновешенностью ротора, и возникает вследствие действия силы веса. Упругая анизотропия у вала может возникать из-за погрешностей изготовления, наличия у вала лысок, шпоночных канавок и т.д.

Рассмотрим колебания простейшего ротора, жесткость вала которого различна в направлении главных осей инерции (рис. 6.1).

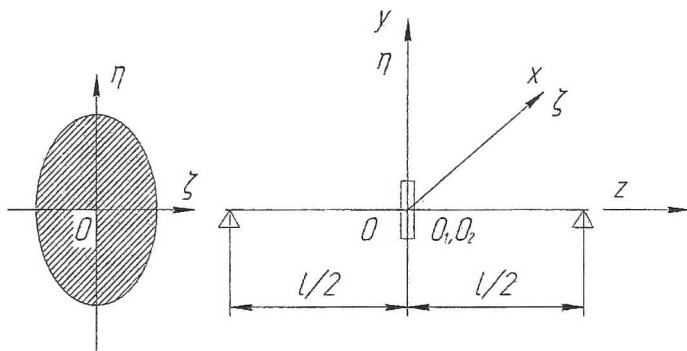


Рис. 6.1. Ротор, жесткость вала которого различна в направлении главных осей инерции

Считаем, что ротор вращается на абсолютно жёстких опорах, диск расположен посередине вала, центр масс диска находится на оси вала ($e=0$), демпфирование отсутствует, $J=J_3=0$. Введём подвижную локальную систему координат $O\xi\eta$, начало её совпадает с началом глобальной системы координат. Ось η направлена в сторону максимальной жёсткости вала, ось ξ в исходном состоянии находит-

ся в плоскости минимальной жёсткости вала. Введённая система координат является подвижной. Она вращается вместе с валом вокруг оси Z глобальной системы координат. Обозначим максимальную жёсткость вала в точке крепления диска C_{η} , а минимальную C_{ζ} . При вращении вала его жёсткость в вертикальной и горизонтальной плоскостях постоянно меняется, поэтому колебания ротора удобнее рассматривать в подвижной системе координат.

Считаем, что в начальный момент времени глобальная и локальная системы координат совпадают. Пусть в произвольный момент времени t локальная система координат и ротор расположены так, как показано на рис. 6.2.

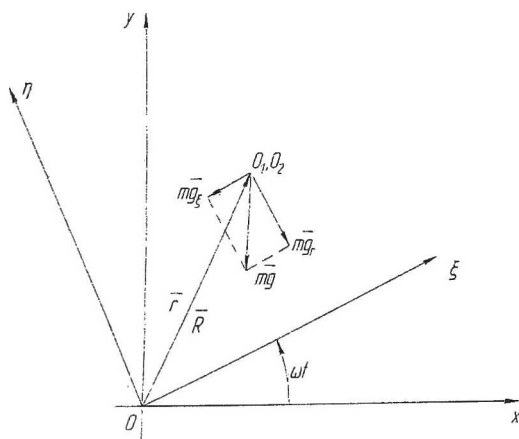


Рис. 6.2. Расположение ротора и локальной системы координат в произвольный момент времени

Рассмотрим условия равновесия диска в подвижной системе координат. Учтём при этом силу веса диска.

$$\vec{Q}_{ин} + \vec{Q} + m\vec{g} = 0 \quad (6.1)$$

Здесь сила инерции $\vec{Q}_{ин} = -m \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2}$.

Спроецируем (6.1) на оси локальной системы координат:

$$\begin{aligned} - \left(m \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} \right)_{\xi} - C_{\xi} \tilde{r}_{\xi} - mg \sin \omega t &= 0, \\ - \left(m \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} \right)_{\eta} - C_{\eta} \tilde{r}_{\eta} - mg \cos \omega t &= 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Здесь $\tilde{Q}_{\xi} = -C_{\xi} \tilde{r}_{\xi}$ - проекция упругой силы на ось ξ . Аналогично

$$\tilde{Q}_{\eta} = -C_{\eta} \tilde{r}_{\eta}.$$

\tilde{r}_{ξ} - прогиб вала в направлении оси ξ . Аналогично \tilde{r}_{η} .

Подвижная система координат не является инерциальной и для неё несправедливо равенство:

$$\left(\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} \right)_{\xi, \eta} \neq \frac{d^2 \vec{R}_{\xi, \eta}}{dt^2},$$

то есть проекция от производной вектора не равна производной от проекции вектора на какую-либо ось.

В то же время глобальная система координат является инерциальной и для неё:

$$\left(\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} \right)_{x, y} = \ddot{\vec{R}}_{x, y}.$$

Найдём проекции второй производной от вектора \vec{R} на оси подвижной системы координат. Для этого вначале найдём связь между проекциями вектора \vec{R} на оси локальной и глобальной систем координат (рис. 6.3).

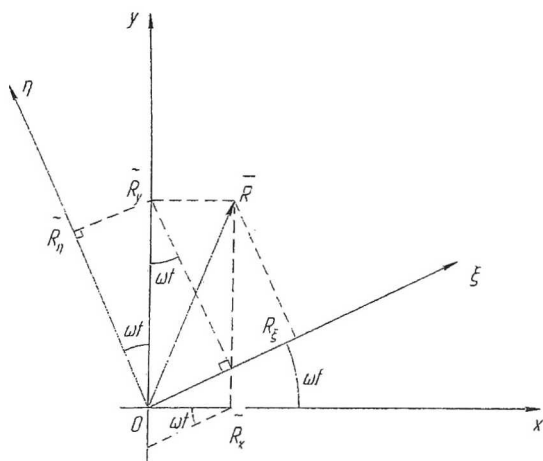


Рис. 6.3. Проекция вектора \vec{R} на оси локальной и глобальной систем координат

$$\begin{aligned}\tilde{R}_\xi &= \tilde{R}_x \cos \omega t + \tilde{R}_y \sin \omega t, \\ \tilde{R}_\eta &= -\tilde{R}_x \sin \omega t + \tilde{R}_y \cos \omega t.\end{aligned}\quad (6.3)$$

Равенства (6.3) справедливы для любого вектора.

Запишем (6.3) для вектора ускорений диска. Этот вектор будем обозначать \vec{W} .

$$\begin{aligned}\tilde{W}_\xi &= \tilde{W}_x \cos \omega t + \tilde{W}_y \sin \omega t, \\ \tilde{W}_\eta &= -\tilde{W}_x \sin \omega t + \tilde{W}_y \cos \omega t.\end{aligned}\quad (6.4)$$

$$\text{В (6.4)} \quad \tilde{W}_\xi = \left(\frac{d^2 R}{dt^2} \right)_\xi; \quad \tilde{W}_\eta = \left(\frac{d^2 R}{dt^2} \right)_\eta. \quad \tilde{W}_x = \ddot{R}_x; \quad \tilde{W}_y = \ddot{R}_y$$

(поскольку глобальная неподвижная система координат является инерциальной).

Это позволяет переписать (6.4) в следующем виде:

$$\left(\frac{d^2 R}{dt^2}\right)_\xi = \ddot{R}_x \cos \omega t + \ddot{R}_y \sin \omega t, \quad (6.5)$$

$$\left(\frac{d^2 R}{dt^2}\right)_\eta = -\ddot{R}_x \sin \omega t + \ddot{R}_y \cos \omega t.$$

Выражения для \ddot{R}_x и \ddot{R}_y найдём с помощью равенств (6.3).

Продифференцируем по времени первое уравнение (6.3):

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{R}}_\xi &= \dot{\tilde{R}}_x \cos \omega t + \dot{\tilde{R}}_y \sin \omega t + \omega(-\tilde{R}_x \sin \omega t + \tilde{R}_y \cos \omega t) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \dot{\tilde{R}}_\xi &= \dot{\tilde{R}}_x \cos \omega t + \dot{\tilde{R}}_y \sin \omega t + \omega \tilde{R}_\eta \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{R}}_x \cos \omega t + \dot{\tilde{R}}_y \sin \omega t = \dot{\tilde{R}}_\xi - \omega \tilde{R}_\eta, \\ -\dot{\tilde{R}}_x \sin \omega t + \dot{\tilde{R}}_y \cos \omega t = \dot{\tilde{R}}_\eta + \omega \tilde{R}_\xi. \end{cases} \quad (6.6)$$

Продифференцируем по времени первое уравнение (6.6), и в полученном результате учтем второе уравнение (6.6):

$$\ddot{\tilde{R}}_x \cos \omega t + \ddot{\tilde{R}}_y \sin \omega t + \omega(-\dot{\tilde{R}}_x \sin \omega t + \dot{\tilde{R}}_y \cos \omega t) = \ddot{\tilde{R}}_\xi - \omega \dot{\tilde{R}}_\eta,$$

или

$$\ddot{\tilde{R}}_x \cos \omega t + \ddot{\tilde{R}}_y \sin \omega t = \ddot{\tilde{R}}_\xi - \omega \dot{\tilde{R}}_\eta - \omega(\dot{\tilde{R}}_\eta + \omega \tilde{R}_\xi) = \ddot{\tilde{R}}_\xi - 2\omega \dot{\tilde{R}}_\eta - \omega^2 \tilde{R}_\xi. \quad (6.7)$$

Аналогично можно получить

$$-\ddot{\tilde{R}}_x \sin \omega t + \ddot{\tilde{R}}_y \cos \omega t = \ddot{\tilde{R}}_\eta + 2\omega \dot{\tilde{R}}_\xi - \omega^2 \tilde{R}_\eta. \quad (6.8)$$

Подставляя полученные выражения в (6.5), получаем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} \right)_{\xi} &= \ddot{\vec{R}}_{\xi} - 2\omega \dot{\vec{R}}_{\eta} - \omega^2 \vec{R}_{\xi}, \\ \left(\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} \right)_{\eta} &= \ddot{\vec{R}}_{\eta} + 2\omega \dot{\vec{R}}_{\xi} - \omega^2 \vec{R}_{\eta}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Заменяя величины в (6.2) выражениями из (6.9), разделив на m и вводя обозначения:

$$P_{\xi}^2 = \frac{C_{\xi}}{m}; P_{\eta}^2 = \frac{C_{\eta}}{m},$$

где P_{ξ} — собственная частота колебания ротора в плоскости минимальной жёсткости,

P_{η} — собственная частота колебания ротора в плоскости максимальной жёсткости, получим:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{R}}_{\xi} - 2\omega \dot{\vec{R}}_{\eta} - \omega^2 \vec{R}_{\xi} + P_{\xi}^2 \vec{r}_{\xi} &= -g \sin \omega t, \\ \ddot{\vec{R}}_{\eta} - 2\omega \dot{\vec{R}}_{\xi} - \omega^2 \vec{R}_{\eta} + P_{\eta}^2 \vec{r}_{\eta} &= -g \cos \omega t. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Учитывая, согласно сделанным допущениям, что $\vec{r} = \vec{q} = \vec{R}$, преобразуем (6.10) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{q}}_{\xi} - 2\omega \dot{\vec{q}}_{\eta} - \vec{q}_{\xi} (P_{\xi}^2 - \omega^2) &= -g \sin \omega t, \\ \ddot{\vec{q}}_{\eta} - 2\omega \dot{\vec{q}}_{\xi} - \vec{q}_{\eta} (P_{\eta}^2 - \omega^2) &= -g \cos \omega t. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Система (6.11) описывает вынужденные колебания ротора, вал которого имеет некруглое поперечное сечение от действия силы веса. Это дифференциальная система двух неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка.

В связи с тем, что система имеет четвёртый порядок, её общее решение имеет вид

$$\begin{Bmatrix} \tilde{q}_{\xi} \\ \tilde{q}_{\eta} \end{Bmatrix} = C_1 \begin{Bmatrix} \tilde{q}_{\xi 1} \\ \tilde{q}_{\eta 1} \end{Bmatrix} + C_2 \begin{Bmatrix} \tilde{q}_{\xi 2} \\ \tilde{q}_{\eta 2} \end{Bmatrix} + C_3 \begin{Bmatrix} \tilde{q}_{\xi 3} \\ \tilde{q}_{\eta 3} \end{Bmatrix} + C_4 \begin{Bmatrix} \tilde{q}_{\xi 4} \\ \tilde{q}_{\eta 4} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{q}_{\xi 5} \\ \tilde{q}_{\eta 5} \end{Bmatrix};$$

где $C_1 \dots C_4$ — неизвестные постоянные, которые определяются из начальных условий;

$$\begin{Bmatrix} \tilde{q}_{\xi 1} \\ \tilde{q}_{\eta 1} \end{Bmatrix} \dots \begin{Bmatrix} \tilde{q}_{\xi 4} \\ \tilde{q}_{\eta 4} \end{Bmatrix} - \text{любые, линейно независимые частные решения}$$

однородной системы, соответствующие системе (6.11). Линейная комбинация этих частных движений описывает свободные колебания ротора (колебания, которые совершает система, будучи выведена из положения равновесия);

$$\begin{Bmatrix} \tilde{q}_{\xi 5} \\ \tilde{q}_{\eta 5} \end{Bmatrix} - \text{любое частное решение (6.11).}$$

Рассмотрим свободные колебания ротора, вал которого имеет некруглое поперечное сечение. Свободные колебания системы описываются однородной системой линейных дифференциальных уравнений, которые имеют вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{q}}_{\xi} - 2\omega \dot{\tilde{q}}_{\eta} + (P_{\xi}^2 - \omega^2) \tilde{q}_{\xi} &= 0; \\ \ddot{\tilde{q}}_{\eta} - 2\omega \dot{\tilde{q}}_{\xi} + (P_{\eta}^2 - \omega^2) \tilde{q}_{\eta} &= 0. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Её общее решение имеет вид

$$\tilde{q}_{\xi} = \sum_{j=1}^4 C_j \tilde{q}_{\xi j}; \quad \tilde{q}_{\eta} = \sum_{j=1}^4 C_j \tilde{q}_{\eta j}.$$

Частное решение будем искать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{\xi j} &= A_j e^{\lambda_j t}; \\ \tilde{q}_{\eta j} &= B_j e^{\lambda_j t}. \end{aligned} \tag{6.13}$$

A, B, λ — некоторые неизвестные константы.

Для их определения подставим (6.13) в (6.12):

$$\begin{aligned}
A_j \lambda_j^2 e^{\lambda_j t} - 2\omega \lambda_j B_j e^{\lambda_j t} + (P_\xi^2 - \omega^2) A_j e^{\lambda_j t} &= 0; \\
B_j \lambda_j^2 e^{\lambda_j t} - 2\omega \lambda_j A_j e^{\lambda_j t} + (P_\eta^2 - \omega^2) B_j e^{\lambda_j t} &= 0. \\
A_j [\lambda_j^2 + (P_\xi^2 - \omega^2)] - 2\omega \lambda_j B_j &= 0; \\
-2\omega \lambda_j A_j + [\lambda_j^2 + (P_\eta^2 - \omega^2)] B_j &= 0.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

(6.14) - это однородная система двух уравнений. Она имеет решение в том случае, если её определитель равен 0. Если это обеспечивается, то она имеет бесчисленное число решений.

$$\begin{aligned}
\det &= \lambda_j^4 + \lambda_j^2 (P_\xi^2 + P_\eta^2 - 2\omega^2) + (P_\xi^2 - \omega^2)(P_\eta^2 - \omega^2) + 4\omega^2 \lambda_j^2 = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \lambda_j^4 + \lambda_j^2 (P_\xi^2 + P_\eta^2 + 2\omega^2) + (P_\xi^2 - \omega^2)(P_\eta^2 - \omega^2) = 0.
\end{aligned}$$

$$\lambda_j^2 = \frac{-(P_\xi^2 + P_\eta^2 + 2\omega^2) \pm \sqrt{(P_\xi^2 + P_\eta^2 + 2\omega^2)^2 - 4(P_\xi^2 - \omega^2)(P_\eta^2 - \omega^2)}}{2} \tag{6.15}$$

Обозначим:

$$a = (P_\xi^2 + P_\eta^2 + 2\omega^2)^2;$$

$$b = \sqrt{(P_\xi^2 + P_\eta^2 + 2\omega^2)^2 - 4(P_\xi^2 - \omega^2)(P_\eta^2 - \omega^2)}.$$

Проанализируем (6.15):

1. Если

$$(P_\xi^2 - \omega^2)(P_\eta^2 - \omega^2) > 0, \text{ то } b < a, \text{ тогда}$$

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{-a-b}{2} < 0; \quad \lambda_{3,4}^2 = \frac{-a+b}{2} < 0.$$

Т.е. оба корня биквадратного уравнения меньше нуля.

2. Если

$$(P_\xi^2 - \omega^2)(P_\eta^2 - \omega^2) < 0, \text{ то } b > a, \text{ тогда}$$

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{-a+b}{2} > 0; \lambda_{3,4}^2 = \frac{-a-b}{2} < 0.$$

Рассмотрим оба случая:

1) Случай, когда:

$$(P_\xi^2 - \omega^2)(P_\eta^2 - \omega^2) > 0.$$

Это возможно при $\omega < P_\xi$ или $\omega > P_\eta$.

В этом случае $\lambda_{1,2}^2 = \frac{-a+b}{2} = -P_1^2$, откуда:

$$\lambda_{1,2} = \pm iP_1;$$

$$\lambda_{3,4}^2 = \frac{-a-b}{2} = -P_2^2 \Rightarrow \lambda_{3,4} = \pm iP_2.$$

Для каждого λ_j из (6.15) могут быть найдены постоянные

$A_j; B_j$.

Из первого уравнения (6.14) найдём:

$$B_j = \frac{\lambda_j^2 + (P_\xi^2 - \omega^2)}{2\omega\lambda_j} A_j,$$

$$B_1 = \frac{-P_1^2 + (P_\xi^2 - \omega^2)}{2\omega ip_1} A_1 = i \frac{P_1^2 - (P_\xi^2 - \omega^2)}{2\omega p_1} A_1 = iK_1 A_1,$$

$$B_2 = \frac{-P_1^2 + (P_\xi^2 - \omega^2)}{-2\omega ip_1} A_2 = -i \frac{P_1^2 - (P_\xi^2 - \omega^2)}{2\omega p_1} A_2 = +iK_2 A_1 = -iK_1 A_1,$$

$$B_3 = iK_3 A_3,$$

$$B_4 = -iK_3 A_4.$$

Таким образом, общее решение системы (6.12) имеет следующий вид:

$$\tilde{q}_\xi = C_1 A_1 e^{ip_1 t} + C_2 A_2 e^{-ip_1 t} + C_3 A_3 e^{ip_2 t} + C_4 A_4 e^{-ip_2 t},$$

$$\tilde{q}_\eta = iC_1 A_1 k_1 e^{ip_1 t} - iC_2 A_2 k_1 e^{-ip_1 t} + iC_3 A_3 k_3 e^{ip_2 t} - iC_4 A_4 k_3 e^{-ip_2 t}.$$

Введём обозначения:

$$D_1 = C_1 A_1; D_2 = C_2 A_2; D_3 = C_3 A_3; D_4 = C_4 A_4.$$

Перейдём в действительную форму. Из математики известно, что если функция $f = f_1 + if_2$ является решением некоторого дифференциального уравнения, то и функции f_1 и f_2 также являются решениями этого уравнения.

$$e^{\pm ip_{1,2} t} = \cos(P_{1,2} t) \pm i \sin(P_{1,2} t),$$

$$ie^{\pm ip_{1,2} t} = i \cos(P_{1,2} t) \mp \sin(P_{1,2} t).$$

Таким образом в качестве частных решений системы дифференциальных уравнений (6.12) мы можем использовать следующие пары функций:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos P_1 t \\ \sin P_1 t \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{l} \sin P_1 t \\ \cos P_1 t \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{l} \cos P_2 t \\ \sin P_2 t \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{l} \sin P_2 t \\ \cos P_2 t \end{array} \right\}.$$

Это позволяет представить решение в действительной форме:

$$\tilde{q}_\xi = D_1 \cos P_1 t + D_2 \sin P_1 t + D_3 \cos P_2 t + D_4 \sin P_2 t,$$

$$\tilde{q}_\eta = D_1 k_1 \sin P_1 t - D_2 k_1 \cos P_1 t + D_3 k_3 \sin P_2 t - D_4 k_3 \cos P_2 t.$$

Видно, что колебания ротора являются стационарными (картина колебаний не меняется). При наличии в системе демпфирования эти колебания через некоторый момент времени после возникновения затухнут.

2) Случай, когда

$$(P_\xi^2 - \omega^2)(P_\eta^2 - \omega^2) < 0.$$

Это возможно при $P_\xi < \omega < P_\eta$ (пусть $P_\xi < P_\eta$)

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{-a+b}{2} = P_1^2, \quad \lambda_{3,4}^2 = \frac{-a-b}{2} = -P_2^2,$$

$$\lambda_{1,2} = \pm P_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm iP_2.$$

В этом случае решение системы дифференциальных уравнений (6.12) может быть представлено в следующей форме:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_\xi &= D_1 e^{P_1 t} + D_2 e^{-P_1 t} + D_3 \cos P_2 t + D_4 \sin P_2 t, \\ \tilde{q}_\eta &= k_1 D_1 e^{P_1 t} - k_1 D_2 e^{-P_1 t} + k_3 D_3 \sin P_2 t - k_1 D_4 \cos P_2 t. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Из (6.16) видно, что при $t \rightarrow \infty$ $q_\xi \rightarrow \infty$ и $q_\eta \rightarrow \infty \Rightarrow r \rightarrow \infty$ и $R \rightarrow \infty$.

Таким образом, вал на частотах вращения $P_\xi < \omega < P_\eta$ теряет устойчивость. Потеря устойчивости проявляется в том, что вращающийся вал, будучи выведенным случайным образом из положения равновесия начинает поворачиваться (его амплитуда колебаний растёт). Все частоты из диапазона $P_\xi \dots P_\eta$ называют критическими.

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{q}}_\xi - 2\omega \dot{\tilde{q}}_\eta + (P_\xi^2 - \omega^2) \tilde{q}_\xi &= -g \sin \omega t, \\ \ddot{\tilde{q}}_\eta - 2\omega \dot{\tilde{q}}_\xi + (P_\eta^2 - \omega^2) \tilde{q}_\eta &= -g \cos \omega t. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Будем рассматривать вынужденные колебания ротора под действием веса. Они описываются системой (6.17). Считаем, что частота вращения ротора не принадлежит интервалу $P_\xi \dots P_\eta$.

В этом случае при наличии демпфирования стационарными колебаниями являются только вынужденные (свободные затухнут). Решение системы (6.17) будем искать в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_\xi &= \tilde{q}_{\xi s} = q_\xi \sin \omega t, \\ \tilde{q}_\eta &= \tilde{q}_{\eta s} = q_\eta \cos \omega t. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Для определения амплитуд q_ξ и q_η подставим (6.18) в (6.17).

Это позволит найти:

$$\begin{cases} -\omega^2 q_\xi \sin \omega t + 2\omega^2 q_\eta \sin \omega t + (P_\xi^2 - \omega^2) q_\xi \sin \omega t = -g \sin \omega t \\ -\omega^2 q_\eta \cos \omega t + 2\omega^2 q_\xi \cos \omega t + (P_\eta^2 - \omega^2) q_\eta \cos \omega t = -g \cos \omega t \end{cases};$$

$$\begin{cases} (P_\xi^2 - 2\omega^2) q_\xi + 2\omega^2 q_\eta = -g \\ (P_\eta^2 - 2\omega^2) q_\eta + 2\omega^2 q_\xi = -g \end{cases} \quad (6.19)$$

Решим эту систему линейных уравнений. Умножим первое уравнение (6.19) на $(P_\eta^2 - 2\omega^2)$, второе на $-2\omega^2$. Получим

$$\begin{aligned} [(P_\xi^2 - 2\omega^2)(P_\eta^2 - 2\omega^2) - 4\omega^4] q_\xi &= -g(P_\eta^2 - 4\omega^2), \text{ откуда} \\ q_\xi &= -g \frac{P_\eta^2 - 4\omega^2}{(P_\xi^2 - 2\omega^2)(P_\eta^2 - 2\omega^2) - 4\omega^4}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Аналогично можно найти

$$q_\eta = -g \frac{P_\xi^2 - 4\omega^2}{(P_\xi^2 - 2\omega^2)(P_\eta^2 - 2\omega^2) - 4\omega^4}. \quad (6.21)$$

Определим условия, при которых возникнут резонансные колебания. Частота вращения ротора, при которой он вступит в резонанс, определяется из условия

$$(P_\xi^2 - 2\omega^2)(P_\eta^2 - 2\omega^2) - 4\omega^4 = 0.$$

Раскрывая скобки, получим

$$P_\xi^2 P_\eta^2 - 2\omega^2 P_\eta^2 - 2\omega^2 P_\xi^2 + 4\omega^2 - 4\omega^2 = 0;$$

$$\omega = \sqrt{\frac{P_\xi^2 P_\eta^2}{2(P_\xi^2 + P_\eta^2)}}. \quad (6.22)$$

Данная критическая частота ротора называется критической частотой второго рода.

Определим приблизительно её величину. В реальных роторах P_ξ и P_η отличаются незначительно, поэтому примем, что $P_\xi \approx P_\eta \approx P$.

$$\text{В этом случае } \omega = \sqrt{\frac{P^4}{4P^2}} = \frac{P}{2},$$

то есть критическая частота второго рода приблизительно равна половине собственной частоты ротора. При $P_\xi = P_\eta$ эта критическая частота отсутствует.

Критические частоты вращения второго рода могут возникать из-за деформирования ротора при сборке. Пусть в результате неточности изготовления составляющих деталей и узлов наш простейший ротор деформировался так, что в месте расположения диска ось вала сместилась на величину \vec{r}_0 (рис. 6.4).

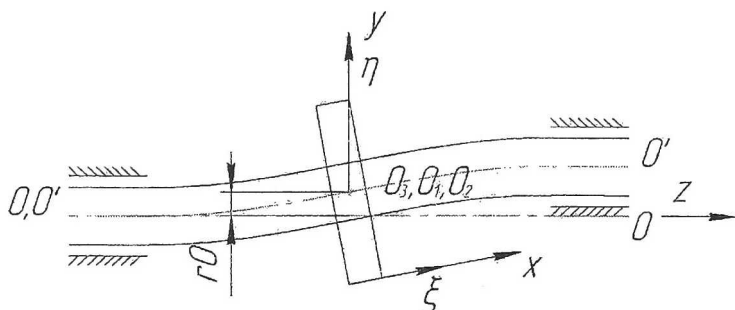


Рис. 6.4. Деформированное положение оси вала $O'O'$

Будем пренебрегать влиянием силы веса, также будем считать, что центры масс находятся на оси диска ($e=0$). Примем также, что в момент времени, когда мы стали наблюдать за ротором, ось η совпадала по направлению с \vec{r}_0 .

Считаем, что вал имеет некруглое поперечное сечение.

Пусть в произвольный момент времени t – точки O_3 , O_1 и O_2 располагались так, как это показано на рис. 6.5.

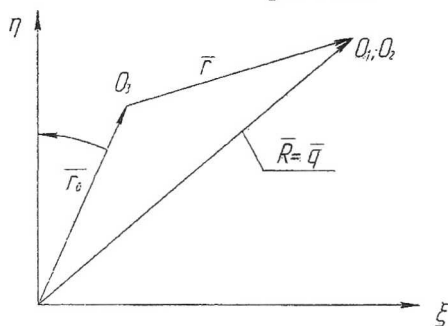


Рис. 6.5. Расположение точек O_3 , O_1 и O_2

\vec{r} – прогиб вала вследствие его колебаний.

Из рисунка находим:

$$\tilde{R}_\xi = r_0 \sin \omega t + \tilde{r}_\xi,$$

$$\tilde{R}_\eta = r_0 \cos \omega t + \tilde{r}_\eta.$$

Учитывая, что

$$\tilde{q}_\xi = \tilde{R}_\xi \text{ и } \tilde{q}_\eta = \tilde{R}_\eta, \text{ получаем}$$

$$\tilde{r}_\xi = \tilde{q}_\xi - r_0 \sin \omega t,$$

$$\tilde{r}_\eta = \tilde{q}_\eta - r_0 \cos \omega t.$$

(6.23)

Подставим (6.23) в систему дифференциальных уравнений (6.10):

$$\ddot{\tilde{q}}_\xi - 2\omega \dot{\tilde{q}}_\eta - \omega^2 \tilde{q}_\xi + P_\xi^2 (\tilde{q}_\xi - r_0 \sin \omega t) = 0.$$

$$\ddot{\tilde{q}}_\eta - 2\omega \dot{\tilde{q}}_\xi - \omega^2 \tilde{q}_\eta + P_\eta^2 (\tilde{q}_\eta - r_0 \cos \omega t) = 0.$$

В правой части уравнения 0, так как мы пренебрегаем весом.

Приведём в последней системе подобные члены:

$$\ddot{\tilde{q}}_\xi - 2\omega^2 \tilde{q}_\eta + (P_\xi^2 - \omega^2) \tilde{q}_\xi = P_\xi^2 r_0 \sin \omega t,$$

$$\ddot{\tilde{q}}_\eta + 2\omega^2 \tilde{q}_\xi + (P_\eta^2 - \omega^2) \tilde{q}_\eta = P_\eta^2 r_0 \cos \omega t.$$

(6.24)

Из сравнения (6.24) и (6.17) видно, что они отличаются только правой частью, т.е. величиной возбуждающей нагрузки. Поэтому решения этих систем идентичны, и мы можем записать

$$q_{\xi} = P_{\xi}^2 r_0 \frac{P_{\eta}^2 - 4\omega^2}{(P_{\xi}^2 - 2\omega^2)(P_{\eta}^2 - 2\omega^2) - 4\omega^4},$$

$$q_{\eta} = P_{\eta}^2 r_0 \frac{P_{\xi}^2 - 4\omega^2}{(P_{\xi}^2 - 2\omega^2)(P_{\eta}^2 - 2\omega^2) - 4\omega^4}.$$

Резонанс возникает при

$$\omega = \sqrt{\frac{P_{\xi}^2 P_{\eta}^2}{2(P_{\xi}^2 + P_{\eta}^2)}}.$$

Пусть $P_{\xi} = 500$ Гц, а $r_0 = 10^{-4}$ м.

$$P_{\xi}^2 r_0 = 25 \cdot 10^4 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}^2 = 25 \text{ м/с}^2 = 2.5g.$$

7. РАСЧЕТ КРИТИЧЕСКИХ ЧАСТОТ ВРАЩЕНИЯ РЕАЛЬНЫХ РОТОРОВ ГТД

Использование для расчёта собственных частот колебаний роторов с использованием оболочечных и объёмных конечных элементов (КЭ) с точным моделированием лопаток требует наличия у компьютера большого объёма оперативной памяти, а также приводит к большим затратам машинного времени. Это не всегда оправдывает себя. Для широкого круга конструкций роторов с достаточной для практики точностью первую и вторую критические частоты вращения можно определить на базе стержневых КЭ. Использование стержневых КЭ становится особенно эффективным при проведении исследований по выявлению влияния на собственные частоты ротора различных геометрических параметров, например, для последующего выполнения частотной отстройки. Рассмотрим моделирование ротора ВРД на основе использования стержневых конечных элементов (рис. 7.1).

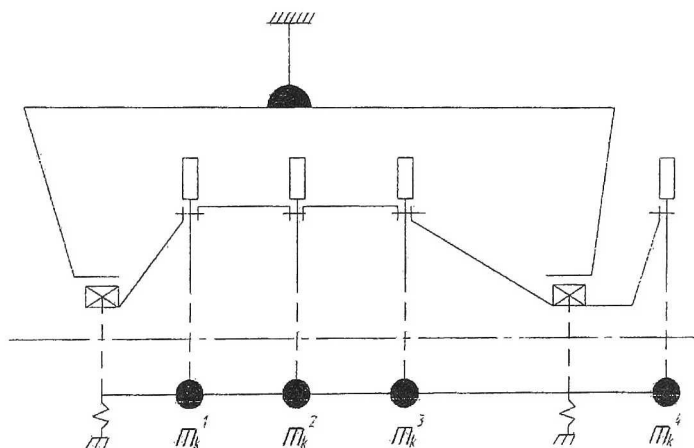


Рис. 7.1. Модель ротора на основе стержневых конечных элементов

Будем использовать следующие допущения:

- рабочие колёса являются абсолютно твёрдыми телами. Масса каждого из колёс сосредоточивается в точке;

- все оболочечные элементы ротора (междисковые проставки и т.д.) рассматриваются как стержни кольцевого сечения;

пренебрегаем влиянием вращения на собственные частоты колебания;

- пренебрегаем демпфированием в роторе;

- корпус двигателя предполагается абсолютно жёстким;

продольные и крутильные колебания ротора не рассматриваем;

Рассмотрим моделирование отдельных элементов ротора.

7.1. Моделирование рабочих колес

Поскольку рабочее колесо (РК) представляется в виде недеформируемого тела, масса которого сосредоточивается в точке, оно моделируется с помощью матрицы масс (и матрицы перехода для усилий и перемещений).

Свойства рабочего колеса определяются в локальной системе координат, начало которой находится в точке, где сосредоточивается его масса (рис. 7.2).

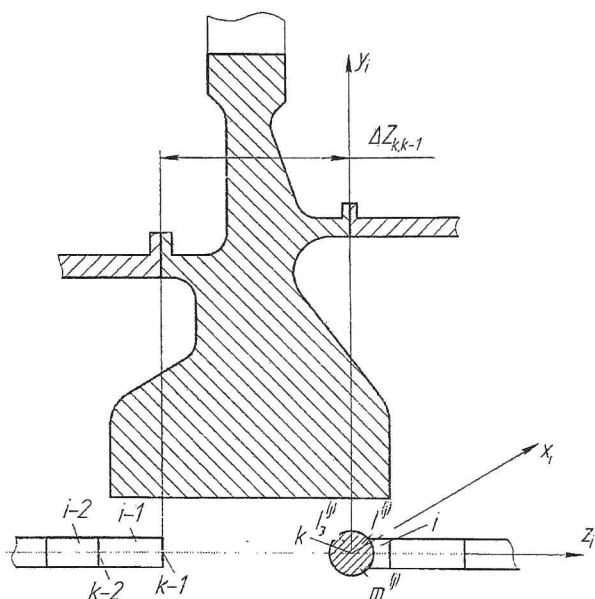


Рис. 7.2. Модель рабочего колеса: j – номер рабочего колеса; $i, i-1, i-2$ – номера стержневых конечных элементов; $k, k-1$ – номера узлов

РК моделируется в виде невесомого стержня, длиной l_i любого поперечного сечения (удобно взять поперечное сечение аналогично поперечному сечению элемента ротора, расположенного перед или за рабочим колесом).

Для материала стержня принимается:

$$\rho_k^i = 0; E_k^i = E \times 10^4,$$

где E – модуль упругости элемента ротора, расположенного перед или за рабочим колесом. Масса рабочего колеса сосредоточивается на левой или правой границе стержня, в узле k элемента i .

При колебаниях ротора в РК возникнут силы инерции, которые могут быть определены по формулам:

$$\begin{aligned}
 \tilde{Q}_{ukx}^j &= -m_k^j \frac{\partial^2 \tilde{q}_{kx}^i}{\partial t^2}; \\
 \tilde{Q}_{uky}^j &= -m_k^j \frac{\partial^2 \tilde{q}_{ky}^i}{\partial t^2}; \\
 \tilde{M}_{ukx}^j &= -J_{\text{ЭК}}^j \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_{kx}^i}{\partial t^2}; \\
 \tilde{M}_{uky}^j &= -J_{\text{ЭК}}^j \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_{ky}^i}{\partial t^2}.
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

$\tilde{Q}_{uk-x,y}^j$ - силы инерции по осям.

$\tilde{M}_{uk-x,y}^j$ - моменты сил инерции.

$\tilde{q}_{k-x,y}^i; \tilde{\beta}_{k-x,y}^i$ - линейное и угловое смещение точки, в которой сконцентрировалась масса.

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \tilde{Q}_{ukx}^j \\ \tilde{M}_{ukx}^j \\ \tilde{Q}_{uky}^j \\ \tilde{M}_{uky}^j \end{Bmatrix}}_{\{\tilde{Q}_{uk}^j\}} = - \underbrace{\begin{bmatrix} m_k^j & & & \\ & J_{\text{ЭК}}^j & & \\ & & m_k^j & \\ & & & J_{\text{ЭК}}^j \end{bmatrix}}_{[M_k^j]} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underbrace{\begin{Bmatrix} \tilde{q}_{kx}^i \\ \tilde{\beta}_{ky}^i \\ \tilde{q}_{ky}^i \\ \tilde{\beta}_{kx}^i \end{Bmatrix}}_{\{\tilde{q}_k^i\}}$$

Перепишем эту матрицу в следующем виде:

$$\{\tilde{Q}_{uk}^j\} = -[M_k^j] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\tilde{q}_k^i\}.
 \tag{7.2}$$

$\{\tilde{Q}_{uk}^j\}$ - вектор инерционных усилий при размещении в нем массы рабочего колеса j ;

$[M_k^j]$ - матрица масс рабочего колеса j ;

$\{\tilde{q}_k^i\}$ - вектор смещений узла k элемента i .

Так как узлы k и $k-1$ принадлежат рабочему колесу, то перемещения в них связаны как перемещения двух точек абсолютно твердого тела. Поэтому совместно эти узлы обладают не восемью, а только четырьмя степенями свободы. Несуществующие четыре степени свободы необходимо исключить из конечно-элементной модели ротора. Запишем уравнения, связывающие перемещения в узлах k и $k-1$. Из рис. 7.3 находим

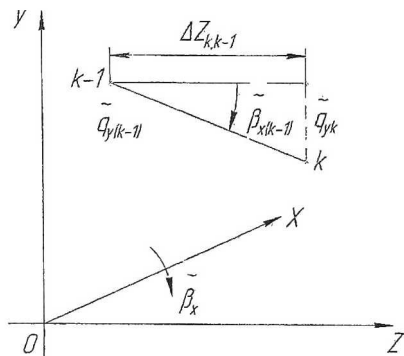


Рис. 7.3. Связь перемещений в узлах k и $k-1$

$$\tilde{q}_{yk}^{i-1} = \tilde{q}_{y(k-1)}^{i-1} - \Delta z_{k,k-1} \tilde{\beta}_{x(k-1)}^{i-1}. \quad (7.3)$$

Аналогично

$$\tilde{q}_{x(k-1)}^{i-1} = \tilde{q}_{xk}^{i-1} - \Delta z_{k,k-1} \tilde{\beta}_{y(k-1)}^{i-1}. \quad (7.4)$$

Кроме того, поскольку в недеформируемом теле во всех его точках углы поворота одинаковы, то

$$\tilde{\beta}_{xk}^i = \tilde{\beta}_{x(k-1)}^{i-1}; \quad (7.5)$$

$$\tilde{\beta}_{yk}^i = \tilde{\beta}_{y(k-1)}^{i-1}. \quad (7.6)$$

Перепишем (7.3) – (7.6) в матричной форме.

$$\begin{Bmatrix} \tilde{q}_{x(k-1)}^{i-1} \\ \tilde{\beta}_{y(k-1)}^{i-1} \\ \tilde{q}_{y(k-1)}^{i-1} \\ \tilde{\beta}_{x(k-1)}^{i-1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta z_{k,k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z_{k,k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{q}_{xk}^i \\ \tilde{\beta}_{yk}^i \\ \tilde{q}_{yk}^i \\ \tilde{\beta}_{xk}^i \end{Bmatrix}, \quad (7.7)$$

или

$$\{\tilde{q}_{k-1}^{i-1}\} = [G_{k-1,k}] \{\tilde{q}_k^{i-1}\}. \quad (7.8)$$

Здесь $\{\tilde{q}_{k-1}^{i-1}\}$ и $\{\tilde{q}_k^{i-1}\}$ - векторы смещений в узлах $k-1$ и k , $[G_{k-1,k}]$ - матрица перехода.

Из теоретической механики известно, что усилия в твердом теле можно привести к любой точке. Приведем усилия, действующие в узле $k-1$, к узлу k . В соответствии с рис. 7.4, имеем

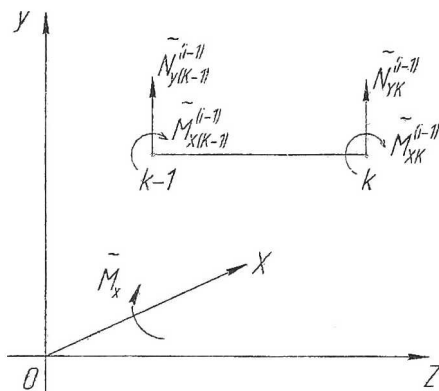


Рис. 7.4. Приведение усилий, действующих в узле $k-1$, к узлу k

$$\begin{cases} \tilde{N}_{xk}^{i-1} = \tilde{N}_{x(k-1)}^{i-1} \\ \tilde{M}_{yk}^{i-1} = \tilde{M}_{y(k-1)}^{i-1} - \Delta z_{k,k-1} \tilde{N}_{x(k-1)}^{i-1} \\ \tilde{N}_{yk}^{i-1} = \tilde{N}_{y(k-1)}^{i-1} \\ \tilde{M}_{xk}^{i-1} = \tilde{M}_{x(k-1)}^{i-1} + \Delta z_{k,k-1} \tilde{N}_{y(k-1)}^{i-1} \end{cases} \quad (7.9)$$

Перепишем это уравнение в матричной форме:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{N}_{xk}^{i-1} \\ \tilde{M}_{yk}^{i-1} \\ \tilde{N}_{yk}^{i-1} \\ \tilde{M}_{xk}^{i-1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta z_{k,k-1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta z_{k,k-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{N}_{x(k-1)}^{i-1} \\ \tilde{M}_{y(k-1)}^{i-1} \\ \tilde{N}_{y(k-1)}^{i-1} \\ \tilde{M}_{x(k-1)}^{i-1} \end{Bmatrix} \quad (7.10)$$

Обозначая векторы реакций в узлах $k-1$ и k как $\{\tilde{N}_k^{i-1}\}$ и $\{\tilde{N}_{k-1}^{i-1}\}$, после сравнения равенств (7.7) и (7.10) перепишем последнее в форме

$$\{\tilde{N}_k^{i-1}\} = [G_{k-1,k}]^T \{\tilde{N}_{k-1}^{i-1}\}. \quad (7.11)$$

Соотношения (7.8) и (7.11) позволяют осуществить переход через рабочее колесо от узла $k-1$ к узлу k . Преобразуем с помощью этих равенств матрицу жесткости для $(i-1)$ конечного элемента. Запишем для этого элемента соотношения для определения узловых реакций

$$\begin{aligned} \{\tilde{N}_{k-2}^{i-1}\} &= [k_{11}^{i-1}] \{\tilde{q}_{k-2}^{i-1}\} + [k_{12}^{i-1}] \{\tilde{q}_{k-1}^{i-1}\} - \{\tilde{Q}_{k-2}^{i-1}\}; \\ \{\tilde{N}_{k-1}^{i-1}\} &= [k_{21}^{i-1}] \{\tilde{q}_{k-2}^{i-1}\} + [k_{22}^{i-1}] \{\tilde{q}_{k-1}^{i-1}\} - \{\tilde{Q}_{k-1}^{i-1}\}. \end{aligned}$$

Умножим все члены второго уравнения слева на матрицу $[G_{k-1,k}]^T$, и учтем в обоих уравнениях соотношение (7.11), в результате получим

$$\begin{aligned} \{\tilde{N}_{k-2}^{i-1}\} &= [k_{11}^{i-1}] \{\tilde{q}_{k-2}^{i-1}\} + [k_{12}^{i-1}] [\tilde{G}_{k-1,k}] \{\tilde{q}_k^{i-1}\} - \{\tilde{Q}_{k-2}^{i-1}\}; \\ [G_{k-1,k}]^T \{\tilde{N}_{k-1}^{i-1}\} &= [G_{k-1,k}]^T [k_{21}^{i-1}] \{\tilde{q}_{k-2}^{i-1}\} + \\ &+ [G_{k-1,k}]^T [k_{22}^{i-1}] [G_{k-1,k}] \{\tilde{q}_k^{i-1}\} - [G_{k-1,k}]^T \{\tilde{Q}_{k-1}^{i-1}\}. \end{aligned}$$

Преобразуем уравнения к виду

$$\begin{Bmatrix} \tilde{N}_{k-2}^{i-1} \\ \tilde{N}_k^{i-1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{11}^{i-1}] & [k_{12}^{i-1}] [G_{k-1,k}] \\ [G_{k-1,k}]^T [k_{21}^{i-1}] & [G_{k-1,k}]^T [k_{22}^{i-1}] [G_{k-1,k}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{q}_{k-2}^{i-1} \\ \tilde{q}_k^{i-1} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \tilde{Q}_{k-2}^{i-1} \\ \tilde{Q}_k^{i-1} \end{Bmatrix} \quad (7.12).$$

Здесь в квадратных скобках – преобразованная матрица жесткости $(i-1)$ конечного элемента. Уравнение (7.12) позволяет последовательность конечных элементов с номерами $i-1$ и i изобразить следующим образом (рис. 7.5):

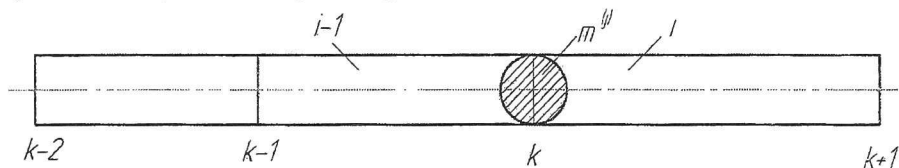


Рис. 7.5. Расположение конечных элементов

7.2. Моделирование опор

Опора ротора моделируется двумя стержнями, работающими только на растяжение-сжатие. Один стержень располагается вдоль оси Y (в вертикальной плоскости), другой – вдоль оси X (в горизонтальной плоскости) (рис.7.6).

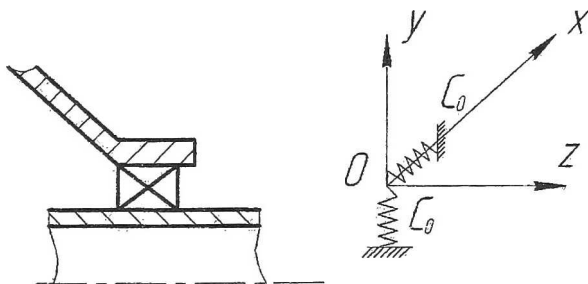


Рис. 7.6. Схема и расчетная схема опоры

Геометрические и физические параметры стержней подбираются так, чтобы их жесткость C_0 равнялась жесткости опоры. Жесткость опоры определяется из решения отдельной задачи по радиальной силе Q , приложенной в месте расположения подшипника, и возникающему от ее действия смещению q в направлении действия силы. i – сечение, в котором опора взаимодействует с ротором. На рис. 7.7 показана конечно-элементная модель опоры ротора. Узлы, в которых опора взаимодействует с ротором, объявляются связанными. К одному из узлов прикладывается сила Q . Определяется упругое смещение связанных узлов.

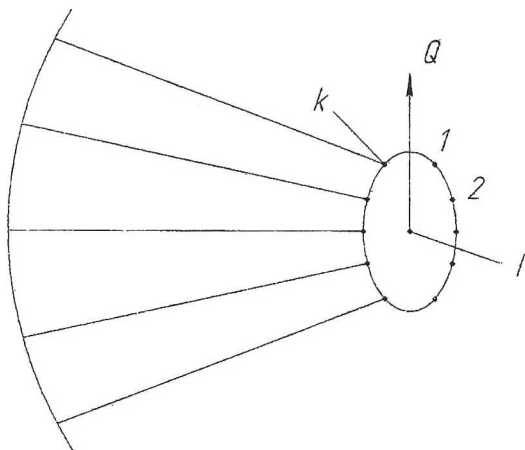


Рис. 7.7. Конечно-элементная модель опоры ротора

Жёсткость опоры определяется

$$C_0 = \frac{Q}{q}.$$

Далее опора моделируется следующим образом. В соответствии с законом Гука удлинение стержня

$$\Delta l = \frac{Ql}{EF} \Rightarrow Q = \frac{EF}{l} \Delta l \Rightarrow C_0 = \frac{EF}{l}.$$

Если принять, что $F=l$ (по величине), то в такой опоре $C_0 = E$ (по величине).

Таким образом, жёсткость опоры может быть смоделирована модулем упругости материала стержня.

Если жёсткость опоры C_0 значительно превосходит жёсткость составных элементов ротора, то её можно моделировать как абсолютно жёсткую шарнирную (рис. 7.8).

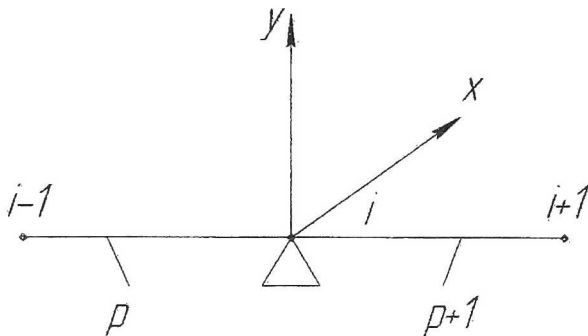


Рис. 7.8. Модель абсолютно жесткой опоры

P и $P+1$ – конечные элементы ротора. В узле i моделируется опора, в которой для радиального подшипника

$$\begin{cases} q_{ix} = 0 \\ q_{iy} = 0 \end{cases}$$

Для радиально-упорного подшипника также $q_{iz} = 0$.

7.3. Моделирование двойных проставок

Двойные проставки будем моделировать пакетом из двух стержней, у которых в общем случае граничные сечения сдвинуты друг относительно друга. На рис. 7.9 левые сечения стержней сдвинуты относительно друг друга по оси Z на величину $\Delta Z_{k,k-1}$.

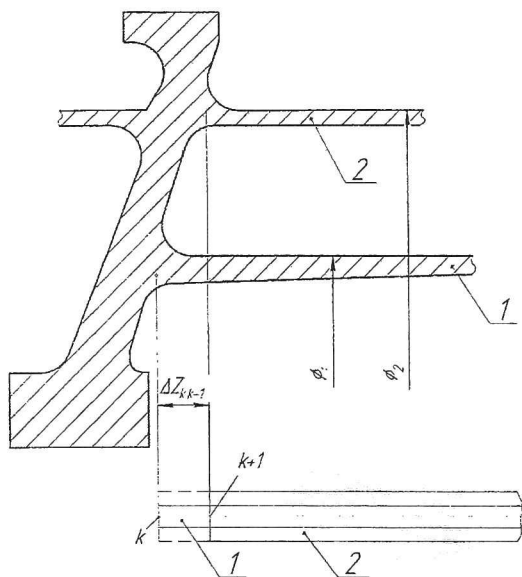


Рис. 7.9. Модель двойной проставки

Поскольку узлы k и $k+1$ принадлежат твердому телу, лишние степени свободы необходимо исключить, записав уравнения связи перемещений в этих двух узлах.

Для удобства визуального анализа колебаний ротора стержни 1 и 2 в расчетной схеме целесообразно сместить друг относительно друга в радиальном направлении (рис. 7.10). Это не влияет на собственные частоты колебаний ротора при правильном задании граничных условий $\{q_{k+1}^{(2)}\} = [G_{k,k+1}]\{q_k^{(1)}\}$, или $\{q_k^{(2)}\} = \{q_k^{(1)}\}$.

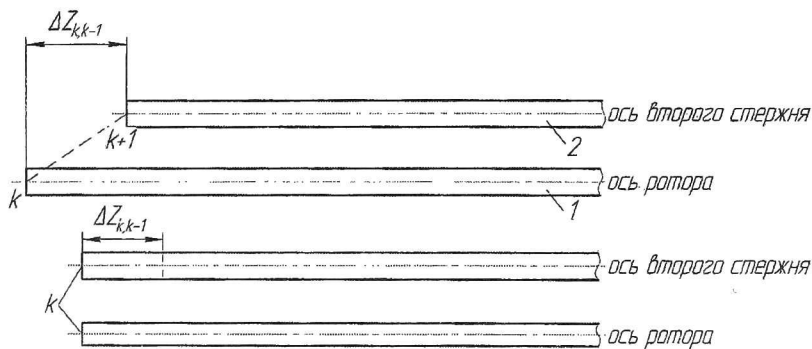


Рис. 7.10. Смещение стержней при моделировании

7.4. Построение разрешающей системы уравнений

Ротор представлен в виде набора стержней переменного сечения, которые далее разбиваются на n конечных элементов (рис. 7.11).

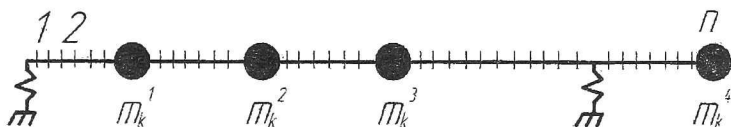


Рис. 7.11. Стержневая модель ротора

Их количество должно быть таким, чтобы достаточно точно моделировать упругие и инерционные свойства ротора. Определение методом конечных элементов динамических деформаций, напряжений и упругих смещений осуществляется по той же схеме, что и при статических расчетах. После того как конструкция разбита на конечные элементы, для каждого из них рассчитывается матрица жёсткостей и вектор приведенной узловой нагрузки. Это позволяет записать для i -го конечного элемента уравнение

$$\{\tilde{N}^{(i)}\} = [k^{(i)}] \{\tilde{q}^{(i)}\} - \{\tilde{Q}^{(i)}\}.$$

Здесь $\{\tilde{N}^{(i)}\}$ вектор динамических узловых реакций, $\{\tilde{q}^{(i)}\}$ вектор переменных во времени узловых смещений, $\{\tilde{Q}^{(i)}\}$ - вектор приведенной к узлам динамической нагрузки. При колебаниях конструкции вектор $\{\tilde{Q}^{(i)}\}$ может быть представлен в виде суммы

$$\{\tilde{Q}^{(i)}\} = \{\tilde{Q}_{ИН}^{(i)}\} + \{\tilde{Q}_{ВН}^{(i)}\}.$$

Здесь $\{\tilde{Q}_{ИН}^{(i)}\}$ - приведенные к узлам силы инерции, $\{\tilde{Q}_{ВН}^{(i)}\}$ - приведенные к узлам другие, не связанные с инерцией, поверхностные и объемные внешние динамические силы.

Найдем выражение для определения $\{\tilde{Q}_{ИН}^{(i)}\}$ при гармонических колебаниях ротора с частотой p . Для метода конечных элементов известно выражение

$$\{\tilde{Q}_{ИН}^{(i)}\} = \int_V [F^{(i)}]^T \{\tilde{P}_{ВИН}^{(i)}\} dV.$$

Здесь $\{\tilde{P}_{ВИН}^{(i)}\}$ - вектор интенсивностей объемных сил. В случае, когда объемными силами являются силы инерции, интенсивности представляют собой силы инерции, возникающие в единице объема, то есть

$$\{\tilde{P}_{ВИН}^{(i)}\} = -\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\tilde{q}_c^{(i)}\},$$

где $\{\tilde{q}_c^{(i)}\}$ - вектор упругих смещений в произвольной точке конструкции.

Поскольку $\{\tilde{q}_c^{(i)}\} = [F^{(i)}] \{\tilde{q}^{(i)}\}$, где $\{\tilde{q}^{(i)}\}$ - вектор узловых смещений, то имеем

$$\{\tilde{P}_{ВИН}^{(i)}\} = -\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} ([F^{(i)}] \{\tilde{q}^{(i)}\}) = -\rho [F^{(i)}] \frac{\partial}{\partial t} \{\tilde{q}^{(i)}\}. \quad (7.13)$$

$$\text{При гармонических колебаниях } \{\tilde{q}^{(i)}\} = \{q^{(i)}\} \cos pt, \quad (7.14)$$

здесь $\{q^{(i)}\}$ - вектор узловых амплитуд колебаний.

Подставляя (6.14) в (6.13), получим

$$\{\tilde{P}_{ИН}^{(i)}\} = \rho p^2 [F^{(i)}] \{q^{(i)}\} \cos pt = \rho p^2 [F^{(i)}] \{\tilde{q}^{(i)}\}. \quad (7.15)$$

Теперь можно вычислить вектор

$$\{\tilde{Q}_{ИН}^{(i)}\} = \rho p^2 \int_V [F^{(i)}]^T [F^{(i)}] dV \{q^{(i)}\} = p^2 [M^{(i)}] \{\tilde{q}^{(i)}\}. \quad (7.16)$$

Здесь $[M^{(i)}] = \rho \int_V [F^{(i)}]^T [F^{(i)}] dV$ - матрица масс конечного эле-

мента. Полученная формула позволяет сосредоточить массу элемента в его узлах. С учетом формулы (7.16) имеем

$$\begin{aligned} \{\tilde{N}^{(i)}\} &= [k^{(i)}] \{\tilde{q}^{(i)}\} - p^2 [M^{(i)}] \{\tilde{q}^{(i)}\} - \{\tilde{Q}_{ВН}^{(i)}\} = \\ &= ([k^{(i)}] - p^2 [M^{(i)}]) \{\tilde{q}^{(i)}\} - \{\tilde{Q}_{ВН}^{(i)}\}. \end{aligned}$$

Разрешающая система уравнений, как и для статических расчетов, формируется на основе рассмотрения условий равновесия и совместности деформаций во всех узлах конструкции. Если в узле i взаимодействуют p , $(p+1)$ и $(p+2)$ конечные элементы, то условие равновесия для этого узла имеет вид

$$\{\tilde{N}_i^p\} + \{\tilde{N}_i^{p+1}\} + \{\tilde{N}_i^{p+2}\} = \{\tilde{F}_i\}, \quad (7.17)$$

где $\{\tilde{F}_i\}$ - вектор внешних динамических сил, действующих в узле i .

Совокупность уравнений (7.17), записанная для всех узлов конструкции, позволяет получить систему

$$([k] - p^2 [M]) \{\tilde{q}\} = \{\tilde{Q}_{ВН}\} + \{\tilde{P}\} = \{\tilde{R}\}. \quad (7.18)$$

Здесь $[k]$ - глобальная матрица жёсткостей конструкции; $[M]$

глобальная матрица масс конструкции; $\{\tilde{q}\}$ - глобальный вектор

узловых смещений конструкции; $\{\tilde{Q}_{ВН}\} + \{\tilde{P}\}$ - глобальный вектор

внешней узловой нагрузки; $\{\tilde{R}\}$ - глобальный вектор полной (суммарной) внешней нагрузки.

В случае, если внешняя нагрузка совершает гармонические колебания с частотой p , правую часть системы (6.18) можно представить в виде

$$\{\tilde{R}\} = \{R\} \cos pt, \quad (7.19)$$

где $\{R\}$ - глобальный вектор амплитуд внешних узловых сил.

Решение задачи ищется в виде гармонических колебаний $\{\tilde{q}\} = \{q\} \cos pt$, и система (7.18) преобразуется к виду

$$([k] - p^2[M])\{q\} = \{R\}. \quad (7.20)$$

Эта система является замкнутой. Ее решение позволяет найти вектор амплитуд смещений $\{q\}$ - форму колебаний, и далее - амплитуды деформаций и напряжений в конструкции.

8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ

Вектор $\{q\}$ называется собственным вектором некоторой квадратной, невырожденной матрицы $[A]$ порядка n , если перемножение его на эту матрицу не приводит к изменению его направления, т.е. если справедливо $[A]\{q\} = \lambda\{q\}$, где λ число (скалярная величина и называется собственным значением матрицы $[A]$).

В случае свободных колебаний, когда $\{R\} = 0$, система (7.20) принимает вид

$$([k] - p^2[M])\{q\} = 0. \quad (8.1)$$

Это однородная система уравнений, которая имеет решение, только если ее определитель равен нулю, то есть, если выполняется условие

$$\det([k] - \lambda[M]) = 0, \quad (8.2)$$

где $\lambda = p^2$. Выражение (8.2) представляет собой полином, порядок которого равен порядку матрицы $[k]$. Решение его позволяет определить все собственные частоты колебаний.

Уравнение (8.2) имеет n , необязательно различных, корней. Для каждого собственного значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ из (8.1) может быть определён собственный вектор $\{q\}_1, \{q\}_2, \dots, \{q\}_n$. Задача определения собственных значений и собственных векторов $\{q\}_1, \{q\}_2, \dots, \{q\}_n$ матрицы $[A]$, удовлетворяющих уравнению (8.1), называется стандартной проблемой собственных значений и векторов. Аналогичная задача для уравнения вида

$$A\{q\} = \lambda[B]\{q\} \quad (8.3)$$

называется обобщённой проблемой собственных значений и векторов. Обобщённая проблема сводится к стандартной для её решения. В настоящее время существует множество методов решения стандартной матричной проблемы собственных значений и векторов.

Наиболее эффективные из них включают два этапа:

на первом упрощается структура матрицы $[A]$. Она преобразуется к трёхдиагональному или диагональному виду;

на втором этапе определяются собственные значения и векторы.

Наиболее эффективным методом является метод Ланцоша.

Динамика реального ротора описывается системой уравнений, которая в матричной форме всегда может быть представлена в следующем виде:

$$[k]\{q\} - p^2[M]\{q\} = 0 . \quad (8.4)$$

Система (8.4) позволяет определить собственные частоты и формы колебания ротора. Из сравнения (8.4) и (8.3) видно, что задача определения собственных частот ротора фактически является обобщённой проблемой собственных значений и векторов для матрицы жёсткостей $[k]$. Если принять, что $\lambda = p^2$, то (8.4) преобразуется в (8.3).

Из решения системы (8.1) для каждой собственной частоты определяется вектор узловых амплитуд колебаний. Система (8.1) имеет для каждой собственной частоты бесконечное множество решений, что физически отражает бесконечное множество условий выхода конструкции из положения равновесия. Для решения (8.1) одному из узловых смещений задают конкретное значение, и далее рассчитывают все относительное распределение смещений по телу.

Характер распределения смещений по длине ротора зависит от частоты колебаний и от соотношения жесткостей отдельных участков ротора, от податливости и количества опор. Под формой

колебаний понимается относительное распределение смещений по длине ротора. Это распределение не зависит от амплитуды колебаний. Форма колебаний, соответствующая низшей собственной частоте колебаний, называется первой изгибной, для следующей частоты – второй изгибной, и так далее. В случае значительной податливости опор при колебании по первой изгибной форме все точки ротора одновременно смещаются из положения равновесия в одну сторону, одновременно достигают максимального смещения и одновременно возвращаются в положение равновесия (рис.8.1).

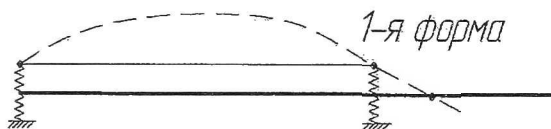


Рис. 8.1. Первая изгибная форма колебаний ротора на податливых опорах

При колебаниях по второй изгибной частоте при выходе системы из положения равновесия часть точек начинает смещение в одну сторону, а другая часть – в противоположную сторону. При этом на оси ротора существует точка, амплитуда колебаний которой равняется нулю. Эта точка называется узловой, или узлом колебаний. При колебаниях по третьей изгибной форме существует две узловых точки, и так далее (рис. 8.2).

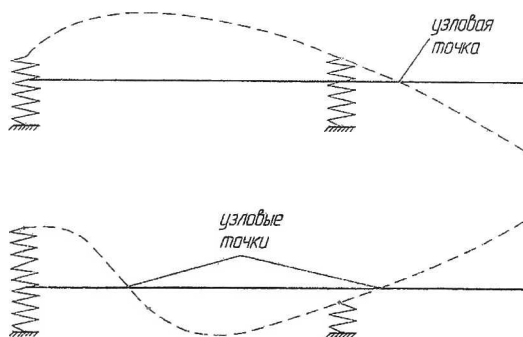


Рис.8.2. Вторая и третья форма колебаний ротора на податливых опорах

В общем случае, чем больше номер изгибной формы колебаний, тем больше узловых точек. Однако общее их число существенно зависит от соотношения жесткостей опор и ротора. Например, при очень жестких опорах в случае колебаний по первой изгибной форме число узлов соответствует количеству опор (рис.8.3).

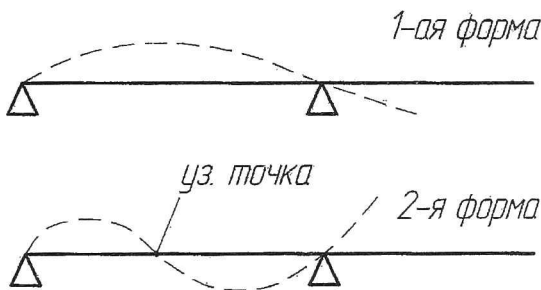


Рис.8.3. Колебания ротора на жестких опорах

Амплитуда колебаний зависит от того, как мы выводим ротор из положения равновесия, но соотношения амплитуд между собой сохраняются для каждой формы колебаний (рис. 8.4).

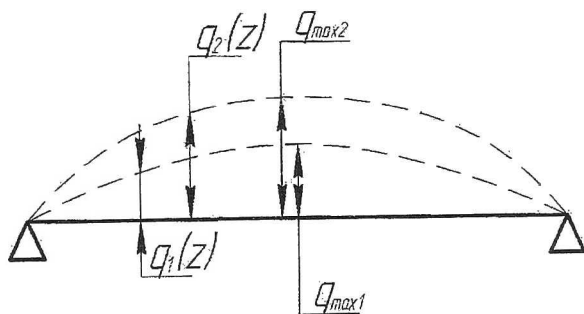


Рис. 8.4. Форма колебаний ротора

На рис. 8.4 простейший ротор выведен из равновесия двумя различными способами, но сохраняется отношение

$$\bar{q}(z) = \frac{q_1(z)}{q_{\max 1}} = \frac{q_2(z)}{q_{\max 2}}.$$

9. РЕЗОНАНСНАЯ ДИАГРАММА РОТОРА

Вынужденные колебания ротора реализуются в виде прямой или обратной прецессии. Резонанс наступает, когда частота прецессии совпадает с собственной частотой колебания. При возбуждении массовой неуравновешенностью

$$\Omega = \omega, \text{ или } \Omega = -\omega.$$

При кинематическом возбуждении

$$\Omega = S\omega,$$

$$\Omega = -S\omega,$$

где S – любое, в том числе и нецелое, число.

Поскольку собственная частота колебаний является функцией от ω и Ω , то задача об определении режима, на котором ротор начинает совершать резонансные колебания решается графически с помощью резонансной диаграммы.

На резонансной диаграмме в виде функции наносятся зависимости частоты прецессии (как функции от частоты вращения ротора) и собственной частоты ротора (как функции от частоты прецессии и частоты вращения ротора).

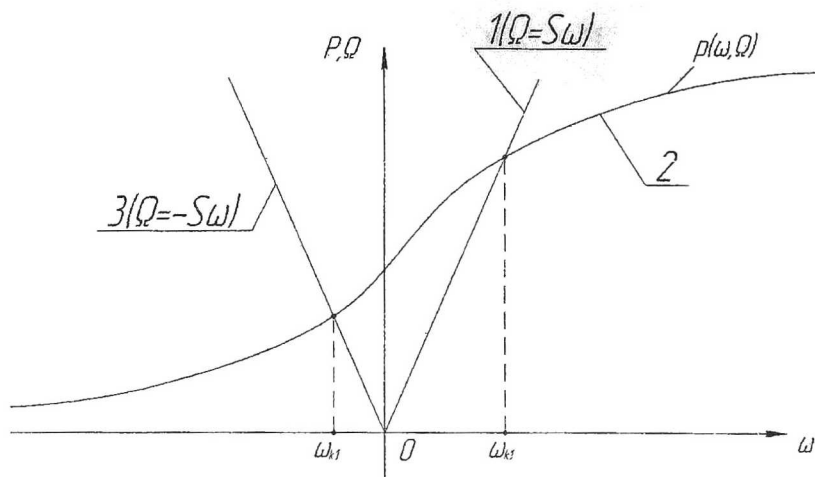


Рис. 9.1. Резонансная диаграмма: 2 – зависимость собственной частоты от ω и Ω ; 1 и 3 – линии для прямой и обратной прецессии

Там, где линии на рис. 9.1 пересекаются, возникает резонанс.

10. МЕТОДЫ БОРЬБЫ С ОПАСНЫМИ ИЗГИБНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ РОТОРОВ

Главным источником возбуждения изгибных колебаний ротора является его массовая неуравновешенность. Чем больше неуравновешенность, тем больше уровень вибрации. Уровень вибрации зависит от частоты вращения. Он особенно велик на резонансе. Существует три способа снижения уровня поперечных вибраций ротора:

- 1) уравнивание ротора (балансировка);
- 2) отстройка от опасных резонансных режимов (частотная отстройка);
- 3) введение в конструкцию опор специальных гасителей колебаний (демпферов).

10.1. Балансировка

Для того, чтобы ротор находился в состоянии динамического равновесия, необходимо выполнение двух условий:

1) $\vec{F} = \sum \vec{F}_i = 0$ - главный вектор всех неуравновешенных сил равен нулю;

2) $\vec{M} = \sum \vec{M}_i = 0$ - главный момент всех неуравновешенных сил равен нулю,

где \vec{F}_i - сила от неуравновешенной массы, \vec{M}_i - момент от неуравновешенной силы.

Проанализируем, как обеспечить выполнение этих условий.

$$\vec{F}_i = \omega^2 m_i \vec{e}_i = \omega^2 \vec{D}_i,$$

где m_i - i -я неуравновешенная масса; \vec{e}_i - эксцентриситет; $\vec{D}_i = m_i \vec{e}_i$ - дисбаланс i -й массы.

Дисбаланс - это мера неуравновешенности (рис. 10.1).

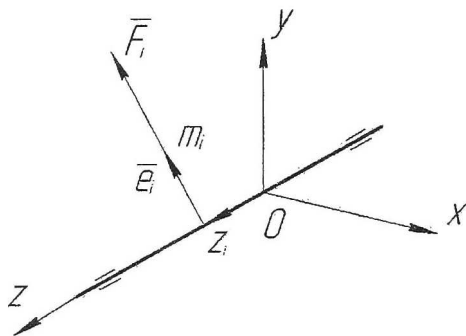


Рис. 10.1. Дисбаланс

$$\vec{F}_i = \omega^2 \vec{D}_i,$$

$$\vec{F} = \Sigma \vec{F}_i = \omega^2 \Sigma \vec{D}_i.$$

$\vec{D} = \Sigma \vec{D}_i$ главный вектор дисбаланса. Главный вектор дисбаланса может быть представлен как

$$\vec{D} = m_p \vec{e}_{cm}, \quad (10.1)$$

где m_p - масса ротора; \vec{e}_{cm} - эксцентриситет ротора.

Для сопоставления роторов различных масс вводят удельный дисбаланс $D_{y\partial} = D/m_p$. Он численно равен величине эксцентриситета.

Из (10.1) следует, что главный вектор неуравновешенных сил равен 0, когда $\vec{e}_{cm} = 0$:

$$\vec{M}_i = \vec{z}_i \times \vec{F}_i = \vec{z}_i \times \omega^2 \vec{D}_i = \omega^2 (\vec{z}_i \times \vec{D}_i).$$

\vec{M}_{D_i} - момент от i -го дисбаланса.

$$\sum \vec{M}_i = \omega^2 \sum \vec{z}_i \times \vec{D}_i = \omega^2 \Sigma \vec{M}_{Di} = \omega^2 \vec{M}_D,$$

где \vec{M}_D - главный момент дисбалансов.

Для выполнения второго условия видно, что главный момент дисбалансов должен быть равен 0.

$$\vec{M}_{Di} = \vec{z}_i \times m_i \vec{e}_i = m_i \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & z \\ x_i & y_i & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} m_i y_i z_i + j m_i x_i z_i.$$

Здесь x_i, y_i - проекции вектора \vec{e}_i на оси X и Y.

Тогда $\vec{M}_D = -\omega^2 \Sigma m_i y_i z_i \vec{i} + \omega^2 \Sigma m_i x_i z_i \vec{j}$.

$$\vec{M}_D = -\omega^2 J_{yz} \vec{i} + \omega^2 J_{xz} \vec{j}. \quad (10.2)$$

Из (10.2) следует, что $\vec{M}_D = 0$ в том случае, если $J_{yz} = 0$ и $J_{xz} = 0$.

Следовательно, ось вращения должна являться главной осью инерции ротора.

В зависимости от взаимного расположения оси ротора z и его главной центральной оси инерции z' различают три вида неуравновешенности:

- 1) статическая;
- 2) моментная;
- 3) динамическая.

При статической неуравновешенности оси z и z' параллельны (рис. 10.2):

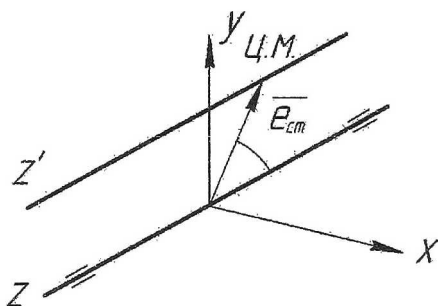


Рис. 10.2. Статическая неуравновешенность ротора

В этом случае $\vec{e}_{cm} \neq 0$, поэтому $\vec{D} \neq 0$, т.к. z параллельна z' , следовательно, $J_{xz} = J_{yz} = 0$ и $M_D = 0$, то есть при статической неуравновешенности массовая неуравновешенность определяется только главным вектором дисбалансов.

При моментной неуравновешенности оси z и z' пересекаются в центре масс (рис.10.3):

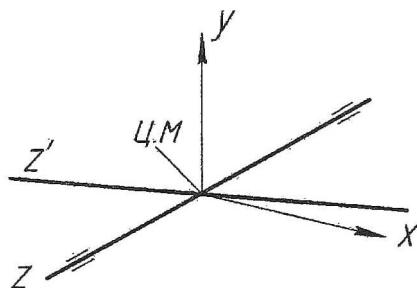


Рис. 10.3. Моментная неуравновешенность ротора

В этом случае $e_{cm} = 0$, $J_{xz} \neq 0$, $J_{yz} \neq 0$, $\vec{D} = 0$, $\vec{M} = 0$. Таким образом, неуравновешенность ротора представлена только главным моментом дисбаланса.

При динамической неуравновешенности оси z и z' либо пересекаются не в центре масс, либо скрещиваются в пространстве (рис.

10.4). Динамическая неуравновешенность определяется главными вектором и моментом дисбалансов ротора.

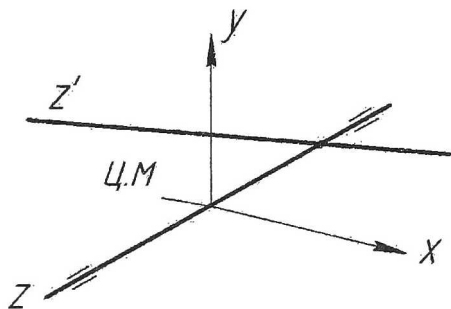


Рис. 10.4. Динамическая неуравновешенность ротора

Главный вектор \vec{D} и главный момент \vec{M} дисбалансов можно заменить эквивалентной системой, состоящей из двух дисбалансов D_A и D_B , расположенных в двух произвольно расположенных плоскостях А и В, нормальных оси ротора z (рис.10.5):

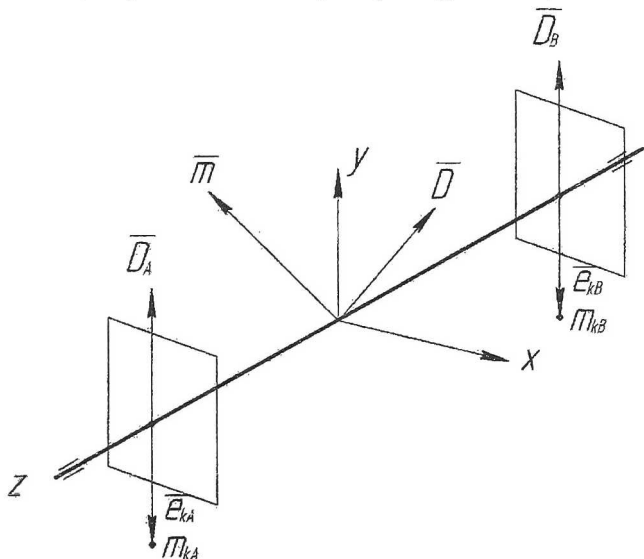


Рис. 10.5. Эквивалентная система дисбалансов

Эквивалентная система дисбалансов должна удовлетворять условиям

$$\vec{D}_A + \vec{D}_B = \vec{D},$$

$$\vec{M}_A + \vec{M}_B = \vec{M}_D.$$

Отсюда следует важный вывод о том, что любой ротор на данной частоте вращения может быть приведён в состояние динамического равновесия с помощью двух корректирующих масс m_{kA} и m_{kB} , расположенных в двух произвольных плоскостях коррекции, нормальных оси вращения. Действительно, если мы расположим в плоскостях А и В две корректирующие массы m_{kA} и m_{kB} такие, что

$$\vec{D}_{kA} = m_{kA} \vec{e}_{kA} = -\vec{D}_A,$$

$$\vec{D}_{kB} = m_{kB} \vec{e}_{kB} = -\vec{D}_B,$$

и, соответственно, $\vec{M}_{DkA} = -\vec{M}_{DA}$ и $\vec{M}_{DkB} = -\vec{M}_{DB}$, то

$$\vec{D} = \vec{D}_A + \vec{D}_B + \vec{D}_{kA} + \vec{D}_{kB} = 0,$$

$$\vec{M}_D = \vec{M}_{DA} + \vec{M}_{DB} + \vec{M}_{DkA} + \vec{M}_{DkB} = 0.$$

Процесс уменьшения дисбаланса ротора корректировкой его массы называется балансировкой ротора. Дисбалансы, имеющиеся до балансировки и после неё, называются начальным и остаточным дисбалансами. В зависимости от методов балансировки все роторы делятся на жёсткие и гибкие. К жёстким относятся роторы у которых

$$\omega_{\max} < k\omega_{k1}, \quad (10.3)$$

где $k = 0,5 \dots 0,7$.

Выполнение этого условия позволяет пренебрегать деформацией ротора от действия неуравновешенных сил и считать его при балансировке недеформируемым.

Гибкий ротор, будучи динамически отбалансированным как жёсткий на одной частоте вращения, деформируясь под действием собственных неуравновешенных сил, а также неуравновешенных сил корректирующих масс, может утратить уравновешенность на других частотах вращения. Методы балансировки жестких и гибких роторов существенно отличаются. В частности, гибкие роторы балансируются в трех плоскостях (рис. 10.6).

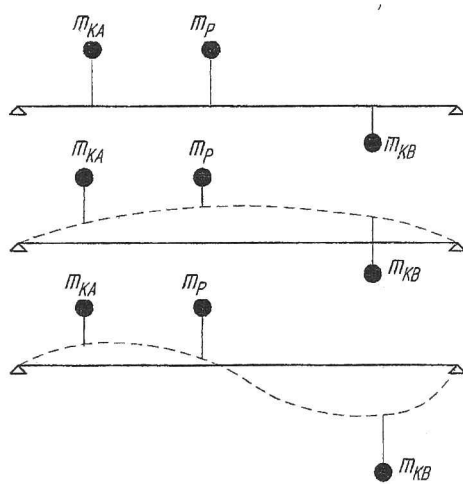


Рис.10.6. Балансировка гибкого ротора

10.2. Частотная отстройка

Частотная отстройка – это смещение критической частоты вращения ротора за пределы рабочего диапазона частот вращения ротора (рис.10.7).

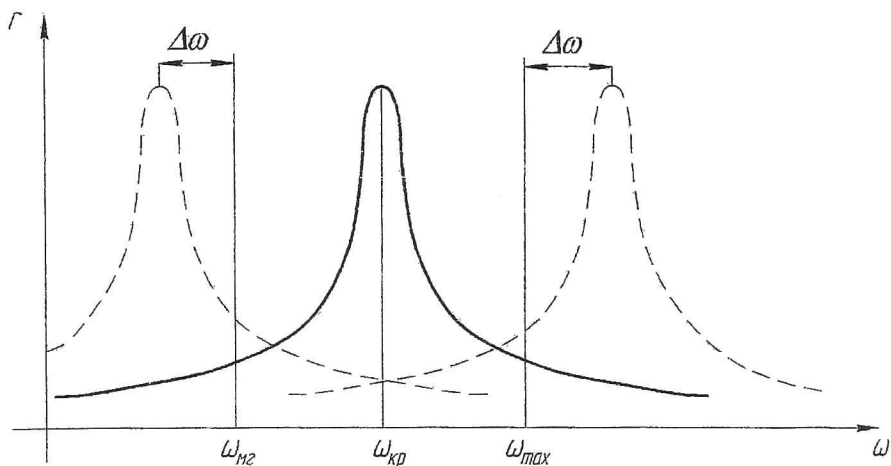


Рис. 10.7. Частотная отстройка

Если вывод критической частоты осуществляется за ω_{\max} , то это отстройка называется отстройкой вверх, если отстройка осуществляется за ω_{\min} , то это отстройка вниз.

Отстройка должна осуществляться с некоторым запасом $\Delta\omega$.

Для отстройки вверх:

$$\Delta\omega = (50 \div 70)\% \omega_{\max}.$$

В этом случае ротор можно считать жёстким.

Наиболее выгодна отстройка вверх. В этом случае не возникает повышенная вибрация из-за резонансных колебаний, однако отстройка вверх сопровождается увеличением массы. При отстройке вниз при запуске ротор проходит через резонанс, что приводит к повышенным вибрациям.

Частотная отстройка осуществляется за счет изменения жесткости опор (в опорах применяются детали, жесткость которых легко изменить, например, «беличье колесо») или за счет изменения жесткости проставок.

10.3. Демпфирование

Введение демпферов в опоры ротора позволяет снизить прогиб вала при прохождении через резонанс за счёт рассеяния энергии колебания. Амплитудно-частотная характеристика ротора с различной степенью демпфирования показана на рис. 10.8.

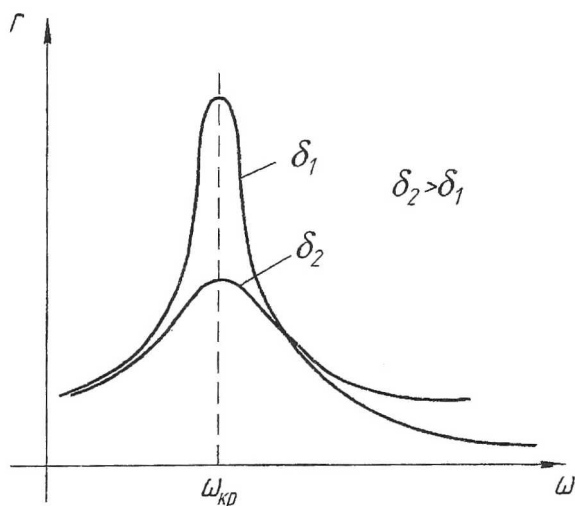


Рис. 10.8. Демпфирование

В современных авиационных ГТД применяются демпферы сухого трения (пластинчатые демпферы) и вязкого трения (гидродинамические или масляные демпферы).

Учебное издание

Ермаков Александр Иванович
Уланов Александр Михайлович

ВИБРАЦИЯ И ПРОЧНОСТЬ АД И ЭУ
ЧАСТЬ 1

Учебное пособие

Научный редактор *С.В. Фалалеев*
Технические редакторы: *В.Н. Вякин, Д.П. Давыдов*
Редакторская обработка *А.С. Кочеулова, Л.Я. Чегодаева*
Корректорская обработка *Л.Я. Чегодаева*
Компьютерная верстка *О.А. Швецова, А.С. Котов*
Доверстка *А.А. Гнутова*

Подписано в печать 28.12.06. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 5,34. Усл. кр.-отт. 5,46 Печ. л. 5,75.

Тираж 50 экз. Заказ 230 ИП-95(2)/2006

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.