ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА"

Н.А. Беликова, О.Г. Савельева

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве методических указаний к практическим занятиям

САМАРА
Издательство СГАУ
2008

УДК 519.2 (075)
ББК 22.171
Б 432

Рецензенты: д-р техн. наук, зав. кафедрой математических методов в экономике СГАУ Б.А. Горлач;
д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой высшей математики ПГАТИ И.А. Блатов

Беликова Н.А.
Б 432 **Теория вероятностей в примерах и задачах:** учеб. пособие / Н.А. Беликова, О.Г. Савельева. – Самара: Изд-во СГАУ, 2008. – 112 с.

ISBN 978-5-7883-0580-6

Учебное пособие представляет собой систематизированную подборку задач и упражнений по теории вероятностей. Все задачи снабжены ответами, а большинство и решениями. Задачи, помещённые в приложении, предназначены для составления индивидуальных заданий и контрольных работ. В начале каждой главы приведена сводка основных теоретических положений и формул, необходимых для решения задач.

Пособие выполнено на кафедре высшей математики СГАУ и предназначено в помощь студентам, осваивающим вероятностные методы для решения практических задач.

УДК 519.2 (075)
ББК 22.171

ISBN 978-5-7883-0580-6

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

На результаты, исходы различных процессов, явлений в природе и технике влияют многочисленные факторы и причины, которые невозможно учесть и даже выявить. Например, движение молекулы вещества обуславливается влиянием на нее других многочисленных частиц или отклонение размера поверхности обрабатываемой на токарном станке от заданного номинала зависит от погрешностей установки детали в приспособлении, погрешности закрепления приспособления, качества заточки инструмента и т.д. Вследствие этого исходы таких явлений точно определить невозможно, сами явления и их исходы называют случайными. Однако если такие явления носят массовый характер (токарная обработка деталей происходит непрерывно), то существуют общие закономерности распределения их исходов, которые не зависят от конкретного исхода. Данные закономерности и изучает математическая наука – теория вероятностей.

Данная наука возникла в середине восемнадцатого века, ее основные понятия были установлены выдающимися математиками прошлого Паскалем, Ферма, Бернулли и др. В конце XIX столетия работы в основном русских математиков Чебышева, Маркова, Ляпунова позволили применить теорию вероятностей к решению практических задач в страховании, демографии, статистике. После установления связи между вероятностью и понятием меры, а также связи между теорией вероятностей и метрической теорией функций Колмогоровым, Хинчиным и другими русскими математиками в 30 годах XX столетия сказалось возможным разработать теорию стохастических (вероятностных, случайных) процессов. После этого теория вероятностей стала одним из главных методов исследования задач естествознания (физики, химии и др.), экономики и технологических процессов машиностроения. На основе теории вероятностей разработана теория надежности деталей и узлов машин, определяется качество технологического процесса обработки деталей, рассчитываются допуски и припуски.

§1. Понятие события. Алгебраические операции над событиями

Основным понятием теории вероятности является событие. Под *событием* подразумевается всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта.

Событие называется *достоверным*, если оно в данном опыте не может не произойти. Событие называется *невозможным*, если оно в данном опыте не может произойти. Событие называется *случайным*, если оно может произойти в данном опыте, а может и не произойти.

Например, в реакции разложения воды событие, что при этом выделится кислород, будет достоверным, а событие, что будет выделяться хлор, невозможным. Событие, что в этой реакции образуется озон, будет случайным.

Результат осуществления опыта называют его исходом. Опыт может иметь конечную или бесконечную последовательность исходов ($w_1, w_2, \dots w_n$), случайное событие А может происходить в каких-то m исходов ($m<n$) ($w_{k1}, w_{k2}, \dots . w_{km}$), их называют благоприятствующими событию А.

Так, при бросании игральной кости будет 6 исходов – выпадение какого - нибудь очка. Событию А, состоящему в выпадении четного числа очков, будут благоприятствовать три исхода (выпадение 2, 4, 6).

Каждый исход опыта представляет собой элементарное событие. Совокупности элементарных событий образуют множества. Вследствие этого над событиями устанавливаются алгебраические операции и соотношения такие же, как и над множествами.

Равенство событий. Если событие А влечет за собой событие В, то пишут $A \subset B$, если же В влечет А, то $B \subset A$. Если событие А влечет за собой событие В, а событие В влечет А, то такие события называются равносильными или равными: $A=B$.

Сумма событий. Сумма событий А и В есть событие $C=A+B$, состоящее в осуществлении хотя бы одного из событий А или В.

Разность событий. Разность событий А и В есть событие $C=A-B$, состоящее в том, что А происходит, а В не происходит.

Произведение событий. Произведение событий А и В есть событие $C=A \cdot B$, состоящее в совместном наступлении обоих событий.

Совместные события. Несколько событий называются совместными в данном опыте, если появление одного из них не исключает возможность появления любого из остальных в том же опыте.

Несовместные события. Несколько событий называются несовместными в данном опыте, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Полная группа событий. События A_1, A_2, ,A_n образуют полную группу событий, если в результате данного опыта обязательно должно произойти хотя бы одно из них.

Противоположные события. Если полная группа событий состоит из двух несовместных событий, то эти события называют противоположными. Событие, противоположное событию А, обозначается $\overline{A}$.

Два события называются *равновозможными*, если условия испытания не создают преимущества в появлении одного из них перед другим.

Задача 1.1. Какими должны быть события А, В, С, чтобы выполнялось равенство А+В+С=А?

Ответ: события В и С влекут за собой событие А.

Задача 1.2. Что означает А+А и А·А ?

Ответ: А+А=А; А·А=А

Задача 1.3. Когда возможно равенство А·В·С=А?

Ответ: событие А влечет за собой события В и С.

Задача 1.4. Являются ли равновозможными следующие события:

а) опыт «бросание монеты», событие: А – появление герба, В – появление цифры;

б) опыт «бросание двух монет», событие: А – появление двух гербов, В – появление двух цифр, С – появление герба и цифры;

в) опыт «выстрел по мишени», событие: А – попадание, В – промах?

Ответ: а) да; б) нет; в) в общем случае нет.

Задача 1.5. Являются ли несовместными следующие события:

а) опыт «бросание монеты»; событие А – появление герба на монете, событие В – появление цифры;

б) опыт «бросание двух монет»; событие А – появление герба на первой монете, В – появление цифры на второй монете;

в) опыт «два выстрела по мишени»; события: А – ни одного попадания, В – одно попадание, С – два попадания?

<u>Ответ:</u> а) да; б) нет; в) да.

<u>Задача1.6.</u> Образуют ли полную группу следующие события:

а) опыт «бросание монеты»; событие: А – появление герба, В – появление цифры;

б) опыт «бросание двух монет»; событие: А – появление двух гербов; В – появление двух цифр;

в) опыт «два выстрела по мишени»; событие: А – хотя бы одно попадание, В – хотя бы один промах?

<u>Ответ:</u> а) да; б) нет; в) да.

<u>Задача1.7</u> Наладчик ведёт наблюдение за тремя станками-автоматами. Рассматриваются события:

A_1 – остановка первого станка;

A_2 – остановка второго станка;

A_3 – остановка третьего станка;

$\overline{A}_1$ – первый станок работает;

$\overline{A}_2$ – второй станок работает;

$\overline{A}_3$ – третий станок работает.

Записать события:

А – остановка трёх станков;

В – остановка двух станков;

С – остановка хотя бы одного станка;

Д – остановка не менее двух станков.

<u>Р е ш е н и е.</u>

Событие $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, так как все события A_1, A_2, A_3 должны произойти.

Событие В может произойти в разных вариантах: $A_1A_2\overline{A}_3$, или $A_1\overline{A}_2A_3$, или $\overline{A}_1A_2A_3$, поэтому $B = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$.

Поскольку событие С состоит в наступлении хотя бы одного из событий A_1, A_2, A_3, то $C = A_1 + A_2 + A_3$.

Событие Д состоит в остановке или двух станков, или всех трёх станков, т.е.

$Д = B + A = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1A_2A_3.$

<u>Задача 1.8.</u> Опыт состоит в бросании двух монет. Рассматриваются следующие события:

A – появление герба на первой монете;

B – появление цифры на первой монете;

C – появление герба на второй монете;

Д – появление цифры на второй монете;

E – появление хотя бы одного герба;

F – появление хотя бы одной цифры;

G – появление одного герба и одной цифры;

H – непоявление ни одного герба;

К – появление двух гербов.

Определить, каким событиям этого списка равносильны следующие события:

1) A+C, 2) AC, 3) EF, 4) G+E, 5) GE, 6) BД, 7) E+К.

Ответ. 1) A+C = E; 2) AC = К; 3) EF = G; 4) G+E = E; 5) GE= = G; 6) BД = H; 7) E+К = E.

<u>Задача 1.9.</u> По мишени производится три выстрела. Рассматриваются события A_i-попадание при i-м выстреле (i=1, 2, 3). Представить в виде сумм, произведений или сумм произведений событий A_i и $\overline{A}_i$ следующие события:

1) A – все три попадания;
2) B – все три промаха;
3) C – хотя бы одно попадание;
4) Д – хотя бы один промах;
5) E – не меньше двух попаданий;
6) F – не больше одного попадания;
7) G – попадание в мишень не раньше, чем при третьем выстреле.

<u>О т в е т.</u> 1) $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$; 2) $B = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$; 3) $C = A_1+A_2+A_3$ или $C = A_1+\overline{A}_1 \cdot A_2+ +\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3$ или $C = A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 +$

$+\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3+A_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3+A_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3+\ \overline{A}_1\cdot A_2\cdot A_3+\ +A_1\cdot A_2\cdot A_3$; 4) $Д = =\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3$; 5) $E = \overline{A}_1\cdot A_2\cdot A_3+A_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3+A_1\cdot A_2$; 6) $F = \overline{A}_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3+ +A_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3+\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2$; 7) $G = \overline{A}_1\cdot\overline{A}_2$.

Задача 1.10. Производится наблюдение за группой, состоящей из четырёх однородных объектов. Каждый из них за время наблюдения может быть обнаружен или не обнаружен. Рассматриваются события:

A – обнаружен ровно один из четырёх объектов,

B – обнаружен хотя бы один объект,

C – обнаружено не менее двух объектов,

Д – обнаружено ровно два объекта,

E – обнаружено ровно три объекта,

F – обнаружены все четыре объекта.

Указать, в чём состоят события:

1) A+B; 2) AB; 3) B+C; 4) BC; 5)Д+E+F; 6) BF.

О т в е т. 1) A+B = B; 2) AB = A; 3) B+C = B; 4) BC = C; 5)Д+E+F = C; 6) BF = F.

§ 2. Вероятность события и ее вычисление по классической схеме

Каждому событию A ставится в соответствие число P(A), называемое *вероятностью* этого события. Вероятность P(A) удовлетворяет следующим условиям (аксиомам вероятностей):

1. $P(A)\geq 0$.
2. Если U – достоверное событие, то P(U)=1, если V – невозможное событие, то P(V)=0, тогда для любого события $0 \leq P(A) \leq 1$.

Непосредственное вычисление вероятностей событий производится в основном по трем схемам: если случайное событие имеет конечное число равновозможных исходов, то используется классическая схема («схема урн»), если же число исходов неограниченное, то вероятность события определяют статистически или используют понятие геометрической вероятности.

Классическая вероятностная схема состоит в следующем. Пусть в данном опыте может произойти конечное число равновероятных взаимоисключающих исходов $(w_1, w_2, \ldots w_n)$, тогда $P(w_1)= P(w_2)=\ldots=$

$P(w_n) = \dfrac{1}{n}$. Если событие А наблюдается в m исходах ($w_{k1}, w_{k2}, \dots w_{km}$), то его вероятность согласно аксиоме вероятностей определяется по формуле

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Итак, вероятность события А равна отношению числа благоприятствующих событию исходов к общему числу исходов в опыте.

Далее предлагается разобрать и решить приведённые в этом параграфе задачи.

Задача 2.1. В урне 4 белых и 5 чёрных шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Р е ш е н и е. Обозначим А событие, состоящее в появлении белого шара. Общее число случаев n = 9; число случаев, благоприятных событию А, m = 4.

Следовательно, $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{4}{9}$.

Задача 2.2. Какова вероятность выпадения двух гербов при однократном бросании двух монет (событие А)?

Р е ш е н и е. При одном бросании двух монет могут произойти следующие события:

1) герб и герб;
2) герб и цифра;
3) цифра и герб;
4) цифра и цифра.

Все эти четыре исхода равновозможные, но среди них только один исход (первый) благоприятствует появлению двух гербов. Таким образом,

n = 4 – количество всех исходов,

m = 1 – количество благоприятных исходов.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{4}.$$

Задача 2.3. Какова вероятность того, что при бросании двух игральных костей произведение выпавших очков будет равно 12 (событие А)?

Р е ш е н и е. При бросании двух игральных костей на каждой из них может выпасть или 1 очко, или 2, или 3, или 4, или 5, или 6 очков. Каждая грань одной кости может комбинироваться с каждой гранью другой кости, поэтому всех возможных исходов будет n = 6^2 = = 36. Среди них имеется только 4 исхода, в которых произведение очков равно 12: 1) 2 и 6; 2) 3 и 4; 3) 4 и 3; 4) 6 и 2. Таким образом,

$$n = 36;\ m = 4,\quad P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Задача 2.4. Бросаются два игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков меньше 13 (событие А)?

Р е ш е н и е. Число всех возможных исходов n = 36 (см. задачу 2.6), и любой из этих исходов благоприятствует наступлению события А. Действительно, максимальная сумма очков выпадет тогда, когда на каждом кубике выпадет по 6 очков. Но эта сумма равна 12, и она меньше 13. Следовательно, m = 36.

Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{36}{36} = 1$.

Задача 2.5. Бросаются два игральных кубика. Какова вероятность, что на выпавших гранях будет разное число очков (событие А)?

Р е ш е н и е. Число всех возможных исходов: n = 6^2 = 36.

Среди них есть 6 исходов, когда выпадают грани с одинаковым числом очков: 1) 1 и 1; 2) 2 и 2; 3) 3 и 3; 4) 4 и 4; 5) 5 и 5) 6) 6 и 6 . Тогда количество исходов, благоприятствующих событию А, будет: m = 36 – 6 = 30.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}.$$

П р и м е ч а н и е. Та же задача решена в следующем параграфе под номером 3.10 с использованием элементов комбинаторики.

Задача 2.6. Из урны, содержащей 4 белых и 5 чёрных шаров, вынимают один за другим все шары, кроме одного. Найти вероятность того, что последний оставшийся в урне шар будет белым (событие А).

Р е ш е н и е. Любой из 9 шаров может оказаться последним в урне, поэтому общее число всех возможных исходов n = 9. При этом любой из четырёх белых шаров мог оказаться последним в урне, поэтому благоприятствующих событию А исходов будет m = 4. Таким образом,

$$P(A)=\frac{4}{9}.$$

Задача 2.7. В урне 4 белых и 5 чёрных шаров. Из урны вынимают один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белый. После этого из урны берут ещё один шар. Найти вероятность того, что этот шар тоже будет белым.

Ответ. $\frac{3}{8}$.

Задача 2.8. В урне 4 белых и 5 чёрных шаров. Из урны вынули один шар и, не глядя, отложили в сторону. После этого из урны взяли ещё один шар. Он оказался белым. Найти вероятность того, что первый шар, отложенный в сторону, тоже белый.

Ответ. $\frac{3}{8}$.

Задача 2.9. Игральная кость бросается один раз. Найти вероятность следующих событий:

А – появление чётного числа очков,

В – появление не менее 5 очков,

С – появление не более 5 очков.

Ответ. $P(A)=\frac{1}{2}$; $P(B)=\frac{1}{3}$; $P(C)=\frac{5}{6}$.

Задача 2.10. Бросаются две монеты. Какое из событий является более вероятным:

А – монеты лягут одинаковыми сторонами,

В – монеты лягут разными сторонами?

Ответ. P(A) = P(B).

Задача 2.11. Найти вероятность того, что при бросании двух кубиков суммарное число очков будет не меньше 9.

Ответ. $\frac{2}{9}$.

§3. Элементы комбинаторного анализа и его применение к непосредственному подсчету вероятностей

При вычислении вероятностей событий часто требуется подсчитывать число различных комбинаций исходов опыта, в результате которых наступает рассматриваемое событие. В этих целях используются методы комбинаторного анализа (теории выборок).

Пусть дано множество $в_1, в_2, \dots, в_n$ элементов, которое будем называть *генеральной совокупностью*, состоящей из n элементов. Элементы этого множества могут выражать совокупность элементарных исходов в опыте.

Любая часть из r элементов ($в_{i1}, в_{i2}, \dots, в_{ir}$), отобранная из данного множества, называется *выборкой* объема r из генеральной совокупности n элементов. Имеют место два способа составления выборки: *выборка с возвращением*, в этом случае один и тот же элемент может быть выбран несколько раз, и *выборка без возвращения*, когда однажды выбранный элемент удаляется из генеральной совокупности.

3.1 Выборки с возвращением

Дана генеральная совокупность элементов $в_1, в_2, \dots, в_n$; требуется составить выборки по r элементов в каждой, которые различались бы между собой либо элементами, либо их порядком, и определить их число. При этом после отбора элемента в выборку его опять возвращают в генеральную совокупность. Очевидно, что выборок из n элементов по одному элементу будет n. Образуем из данной совокупности n элементов по два элемента в каждой выборке. Отобрав, например, элемент $в_1$, возвращаем его в общую совокупность, поэтому вторым элементом в первой выборке может снова оказаться тот же элемент $в_1$. Итак, первая выборка состоит из элементов $в_1\ в_1$. Вторая выборка должна отличаться от первой хотя бы одним элементом, следовательно, к $в_1$ нужно присовокупить другой элемент, например $в_2$. Таким образом, получим строку выборок: $в_1 в_1,\ в_1 в_2,\ в_1 в_3, \dots,\ в_1 в_n$.

Также поступим со всеми остальными элементами. В результате будем иметь

$в_2 в_1,\ в_2 в_2 \dots в_2 в_3, \quad ,в_2 в_n;$

$в_3 в_1,\ в_3 в_2, \dots в_3 в_3, \quad ,в_3 в_n;$

. . . .

$в_n в_1,\ в_n в_2, \dots в_n в_3, \quad ,в_n в_n.$

Следовательно, все выборки из n элементов по два элемента в каждой, отличающиеся между собой либо элементом, либо их порядком, составят n строк по n выборок в строке, их число равно n^2.

Для составления выборок из n элементов по три элемента в каждой нужно составить выборки по два элемента и к каждой из них присовокупить поочередно по одному из данной совокупности. Поэтому число выборок из n элементов по три будет n^3 и т.д. Число различных выборок с возвращением из n элементов по r в каждой выборке (r n) равно n^r.

3.2 Выборки без возвращения

Размещения. Рассмотрим ту же задачу. Дана генеральная совокупность элементов $в_1, в_2, \ldots, в_n$; требуется составить выборки по r элементов в каждой, отличающиеся между собой элементами и их порядком. При этом отобранный элемент не возвращается в данную совокупность.

Выборки из данной совокупности по одному элементу в каждой будут $в_1, в_2, в_3, \ldots в_n$. Число их равно n . Чтобы получить выборки по два элемента из n элементов, нужно к каждому из данных элементов присовокупить поочередно остальные. Все такие выборки составят таблицу:

$в_1в_2,\ \ в_1в_3, \ldots в_1в_n$

$в_2в_1,\ \ в_2в_3, \ldots в_2в_n$

. . . .

$в_nв_1,\ \ в_nв_2, \ldots в_nв_n$.

Число таких выборок будет n (n-1).

Для образования выборок из n элементов по три нужно к каждой выборке по два элемента добавить по одному элементу из оставшихся:

$в_1в_2в_3,\ \ в_1в_2в_4, \ldots в_1в_2в_n$

$в_1в_3в_2,\ \ в_1в_3в_4, \ldots в_1в_3в_n$

. . . .

$в_nв_{n-1}в_1,\ \ в_nв_{n-1}в_2, \ldots в_nв_{n-1}в_{n-2}$.

Число выборок из n элементов по три равно произведению числа размещений в строке на число строк n (n-1) (n-2). Так можно образовать выборки из n элементов по любому числу r ($r \le n$) элементов в каждом.

Выборки такого типа называются *размещениями*. Число размещений из n элементов по r в каждом обозначается A_n^r.

Из предыдущих рассуждений следует, что A_n^1=n, A_n^2=n(n-1), A_n^3=n(n-1)(n-2). Методом математической индукции можно показать, что A_n^r=n(n-1)(n-2) ... (n-(r-1)).

Перестановки. Перестановками называются выборки из генеральной совокупности n элементов по n элементов в каждой.

Поскольку объем выборки совпадает с объемом генеральной совокупности, то множество выборок без возвращения совпадает с множеством способов упорядочения (перестановок) этих элементов. Число различных перестановок из n элементов обозначается P_n и равно числу размещений из n элементов по n. Таким образом, $P_n = A_n^n$ =n(n-1)(n-2)…1 или P_n = n!.

Сочетания. Сочетаниями называются выборки объемом r из генеральной совокупности n элементов, которые отличаются между собой хотя бы одним элементом.

Сочетания из n элементов по r элементов можно получить из соответствующих размещений, если в них отобрать те группы, которые отличаются между собой хотя бы одним элементом. Так, сочетания из n элементов по два будут

$$
\begin{array}{llll}
B_1B_2, & B_1B_3, & B_1B_4, & \ldots B_1B_n \\
 & B_2B_3, & B_2B_4, & \ldots B_2B_n \\
 & & & \ldots\ldots\ldots \\
 & & & B_nB_{n-1}
\end{array}
$$

Наоборот, из сочетаний можно получить соответствующие размещения, если в каждом сочетании сделать различные перестановки элементов. Число сочетаний из n элементов по r в каждом обозначается C_n^r. Из предыдущих рассуждений следует, что $C_n^r = \dfrac{A_n^r}{P_r}$ или

$C_n^r = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot r}$. Если умножить числитель и знаменатель последней формулы на (n-r)!, то получим $C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$. Из вновь полученной формулы следует, что $C_n^r = C_n^{n-r}$.

<u>Задача 3.1.</u> Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово “книга”. Ребёнок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось слово “книга”.

<u>Р е ш е н и е.</u> Событие А – снова получилось слово “книга”.

Общее число случаев n = $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Число благоприятствующих событию А случаев m = 1

$$P(A)=\frac{1}{120}.$$

<u>Задача 3.2.</u> На каждой из 6 одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: А, Т, М, Р, С, О. Карточки тщательно перемешиваются. Найти вероятность того, что на четырёх вынутых по одной и расположенных в одну линию карточек можно будет прочесть слово “трос”.

<u>Р е ш е н и е.</u> Событие А – можно прочесть слово “трос”.

Общее число случаев n = $A_6^4 = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 360$.

Случаев, благоприятствующих событию А m = 1

$$P(A)=\frac{1}{360}.$$

<u>Задача 3.3.</u> В урне 4 белых и 5 чёрных шаров. Из урны вынимают сразу два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

<u>Р е ш е н и е.</u> Обозначим событие А – вынуты два белых шара.

Общее число случаев n = $C_9^2=\frac{A_9^2}{P_2}=\frac{9\cdot 8}{1\cdot 2}=36$.

Число благоприятных случаев m = $C_4^2=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}=6$

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

<u>Задача 3.4.</u> В урне 4 белых и 5 чёрных шаров. Из урны вынимают сразу 5 шаров. Найти вероятность того, что два из них будут белыми, а три – чёрными.

<u>Р е ш е н и е.</u> $n=C_9^5=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=126$,

$$m=C_4^2\cdot C_5^3=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}=60,$$

$$p=\frac{m}{n}=\frac{60}{126}=\frac{10}{21}.$$

Задача 3.5. В урне 4 белых и 5 чёрных шаров. Из урны вынимают одновременно два шара. Какое событие более вероятно:

А – шары одного цвета, В – шары разных цветов.

Р е ш е н и е. Воспользуемся классической формулой вероятности: $p = \dfrac{m}{n}$.

Для события А: m = $m_1 + m_2$,

где $m_1 = C_4^2 = 6$ – количество возможных исходов: два шара белые;

$m_2 = C_5^2 = 10$ – количество возможных исходов: два шара чёрные;

$$P(A) = \frac{C_4^2 + C_5^2}{C_9^2} = \frac{16}{C_9^2}$$

Для события В: m = $m_1 \cdot m_2$,

где $m_1 = C_4^1 = 4$ – число возможных исходов: только один шар белый;

$m_2 = C_5^1 = 5$ – число возможных исходов: только один шар чёрный.

$$P(B) = \frac{C_4^1 \cdot C_5^1}{C_9^2} = \frac{20}{C_9^2};\ \ P(B) > P(A).$$

Задача 3.6. Совет директоров компании состоит из 12 человек: 3 из них лоббируют проект А, 5 – проект В, остальные склонны инвестировать деньги в проект С. Решение об инвестировании будет принимать большинством голосов комиссия, состоящая из 5 выбранных жребием директоров. Какова вероятность принятия решения в пользу проекта В?

Р е ш е н и е. Обозначим событие F – принятие решения в пользу проекта В.

$$P(F) = \frac{m}{n};$$

$n = C_{12}^5$ – число всех возможных вариантов состава комиссии,

$m = m_1 + m_2 + m_3$ – число вариантов присутствия в комиссии людей (не меньше трёх), лоббирующих проект В;

$m_1 = 1$ – вся комиссия (5 человек) состоит из лоббистов проекта В;

$m_2 = C_5^4 \cdot 7$ – комиссия состоит из четырёх лоббистов проекта В и одного лоббиста либо проекта А, либо С;

$m_3 = C_5^3 \cdot C_7^2$ - комиссия состоит из трёх лоббистов проекта В и двух лоббистов либо проекта А, либо С.

В результате подсчёта:

$n = 792$, $m_1 = 1$, $m_2 = 35$, $m_3 = 210$,

$m = 246$,

$$P(F) = \frac{246}{792} = \frac{41}{132} \approx 0{,}31.$$

<u>Задача 3.7.</u> Бросаются два игральных кубика. Какова вероятность, что на выпавших гранях будет разное число очков (событие А)?

<u>П р и м е ч а н и е.</u> Это условие задачи 2.8 из предыдущего параграфа.

<u>Р е ш е н и е.</u> Общее число всех возможных исходов $n = 6^2 = 36$. Число благоприятствующих событию А исходов:

$m = A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}.$$

<u>Задача 3.8.</u> Бросают 4 игральных кубика. Найти вероятности следующих событий:

1) А – на всех гранях выпадет разное число очков;
2) В – на всех гранях выпадет число очков равное 4;
3) С – на всех гранях выпадет одинаковое число очков.

<u>Р е ш е н и е.</u> Число всех возможных исходов $n = 6^4 = 1296$.

1) Число исходов, благоприятствующих событию А:

$m = A_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

$$P(A) = \frac{360}{1296} = \frac{5}{18}.$$

2) Число исходов, благоприятствующих событию В:

$m = 1$; $P(B) = \dfrac{1}{1296}$.

3) Число исходов, благоприятствующих событию С:

m = 6; $P(C)=\dfrac{6}{1296}=\dfrac{1}{216}$.

Задача 3.9. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли четыре человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность события А – все пассажиры выйдут на разных этажах.

Р е ш е н и е. Задача того же типа, что и задача 3.11. Этажи играют роль "граней правильного многогранника", пассажиры – число "многогранников".

Число всех исходов $n = 6^4 = 1296$.

Число благоприятных исходов $m = A_6^4 = 360$.

$$P(A)=\frac{360}{1296}=\frac{5}{18}.$$

Задача 3.10. В партии, состоящей из 16 изделий, имеется 4 дефектных. Из партии выбирается для контроля 5 изделий. Найти вероятность того, что из них ровно 2 изделия будут дефектными.

О т в е т. $\dfrac{55}{182}\approx 0{,}3$.

Задача 3.11. В урне 10 белых и 15 чёрных шаров. Вынули наугад 4 шара. Какова вероятность, что среди вынутых шаров один белый?

О т в е т. $\dfrac{91}{253}\approx 0{,}36$.

Задача 3.12. В наборе 12 фломастеров различных цветов. Извлекаются 6 фломастеров. Найти вероятность того, что среди них есть красный и синий.

О т в е т. $\dfrac{5}{22}$.

Задача 3.13. В лифт девятиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий:

A – все пассажиры выйдут на пятом этаже;

B – все пассажиры выйдут одновременно (на одном и том же этаже);

C – все пассажиры выйдут на разных этажах.

Ответ. $P(A)=\frac{1}{8^3}$; $P(B)=\frac{1}{8^2}$; $P(C)=\frac{23}{32}$.

§4. Статистические вероятности

Классическое определение вероятности и вытекающую из него формулу (1) можно использовать для непосредственного вычисления вероятностей только в том случае, когда возможные исходы опыта являются равновозможными и их конечное число.

Но на практике чаще всего встречаются такие задачи, в которых возможные исходы опыта нельзя свести к схеме равновозможных случаев. Значит, во многих задачах формула (1) не может быть использована для определения вероятностей случайного события. Рассмотрим, например, неправильно выполненную несимметричную игральную кость. Выпадение определённой грани уже не будет характеризоваться вероятностью $\frac{1}{6}$. Вместе с тем ясно, что для данной конкретной несимметричной кости выпадение этой грани обладает некоторой вероятностью, указывающей, насколько часто в среднем должна появляться данная грань при многократном бросании. Очевидно, что по формуле (1) нельзя найти вероятность попадания в цель при первом выстреле; по этой формуле нельзя найти вероятность выхода из строя радиолампы в течение одного часа работы и т.д., хотя упомянутые события обладают определённой объективной возможностью, т.е. имеют определённую вероятность. В обыденной жизни на основании наблюдений мы считаем более вероятными те события, которые происходят часто, а события, происходящие редко, мы считаем маловероятными. Если произведена серия из n опытов, в каждом из которых могло появиться или не появиться некоторое событие A, то частотой события A в данной серии опытов называется отношение числа опытов, в которых появилось событие A, к общему числу произведённых опытов.

Условимся обозначать частоту события А знаком $P^*(A)$. Частота события вычисляется на основании результатов опыта по формуле

$$P^*(A) = \frac{m}{n}, \qquad (2)$$

где m – число появлений события А; n – общее число произведённых опытов.

Опыт показывает, что при небольшом числе испытаний частота $\frac{m}{n}$ события носит случайный характер и может заметно изменяться с изменением числа испытаний. Однако при достаточно большом числе испытаний частоты событий приобретают определённую закономерность, в силу которой они колеблются в узких границах около некоторого постоянного числа.

Эта закономерность впервые была подмечена в начале XVIII столетия и сформулирована в виде известной теоремы Бернулли. В этой теореме указывается, что при неограниченном возрастании числа независимых испытаний с уверенностью, близкой к достоверности, можно утверждать, что частота события будет как угодно близка к его вероятности в одном отдельном испытании. Отсюда можно сделать следующий вывод: то есть при достаточно большом числе повторных испытаний по отношению к некоторому событию А его вероятность Р(А) приближенно равна частоте:

$P(A) \approx P^*(A)$.

Такая связь между вероятностью события и его частотой при достаточно большом числе статистических наблюдений открывает возможность использования вероятности в решении многих практических задач.

Задача 4.1. По цели произвели 20 выстрелов, причем было зарегистрировано 18 попаданий. Найти относительную частоту попаданий в цель.

Ответ: $\overline{P}$ =0,9.

Задача 4.2. При испытании партии приборов относительная частота годных оказалась равной 0,9. Найти число годных приборов, если всего было проверено 200.

Ответ: около 180.

Задача 4.3. Дана таблица времени решения контрольной задачи учениками четырех классов (в секундах):

38 60 41 51 33 42 45 21 53 60;

68	52	47	46	49	49	14	57	54	59;
77	47	28	48	58	32	42	58	61	30;
61	35	47	72	41	45	44	55	30	40;
67	65	39	48	43	60	54	42	59	50.

Считая, что ученик, решающий задачу за время $t \le 40$ с, учится отлично, за 40 с$<t\le 60$ с – хорошо, а за $t>60$ с – удовлетворительно, найти относительную частоту отличников, хорошистов и учащихся, обучающихся на удовлетворительно.

Ответ: $\overline{P}_1=0{,}22$; $\overline{P}_2=0{,}64$; $\overline{P}_3=0{,}14$.

§5. Геометрические вероятности

Геометрические вероятности являются вероятностной моделью с бесконечным числом исходов, аналогичной классическому определению вероятности для опытов с конечным числом исходов. Они используются для вычисления вероятности появления события в том случае, когда результат испытания определяется случайным положением точки в некоторой области, причем любые положения точки в области равновозможные, и вероятность попадания точки в область пропорциональна размеру области. Тогда, если размер всей области S , а размер части области, попадания в которую благоприятствует данному событию, есть $S_б$, вероятность события равна отношению:

$$P(A)=\frac{S_б}{S}. \tag{3}$$

Область S может иметь любое число измерений, поэтому $S_б$ и S могут представлять собой длины отрезков, площади, объемы и т.д.

Задача 5.1. В круг радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что эта точка окажется внутри данного вписанного правильного треугольника (рис. 1).

Рис. 1

рис. 1

Р е ш е н и е. Искомая вероятность равна отношению площади треугольника к площади круга:

$$P=\frac{3\sqrt{3}\cdot R^2}{4\pi R^2}=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\approx 0{,}4137 .$$

Задача 5.2. Из отрезка [0,2] наудачу выбраны два числа x и y. Найти вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенствам

$$\frac{1}{4}x^2 \le y \le x.$$

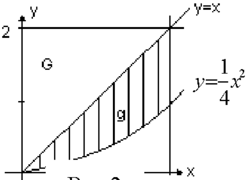


Рис.2

рис. 2

Р е ш е н и е. По условиям опыта координаты точки (x;y) удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ 0 \le y \le 2. \end{cases}$$

Это значит, что точка (x, y) наудачу выбирается из множества точек квадрата со стороной 2 (рис.2). Интересующее нас событие происходит в том и только в том случае, когда выбранная точка (x,y) окажется в заштрихованной фигуре, ограниченной линиями y = x, $y = \frac{1}{4}x^2$, x = 2. Эта фигура представляет собой множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам $\frac{1}{4}x^2 \le y \le x$.

Площадь G = 4 кв.ед.

Площадь g = $\int\limits_0^2 (x - \frac{1}{4}x^2)dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^2 - \frac{1}{12}x^3\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$.

По формуле (3) имеем искомую вероятность $p = \frac{4/3}{4} = \frac{1}{3}$.

Задача 5.3. Пассажир может ехать на любом из автобусов двух маршрутов. Временные интервалы между моментами появления автобусов этих маршрутов равны соответственно 5 мин и 12 мин. Найти вероятность события А – пассажир будет ждать не более 3 мин.

Р е ш е н и е. Элементарным событием будем считать точку (x,y), для которой x – время до появления автобуса с 12-минутным интервалом, y – время до появле-ния другого автобуса.

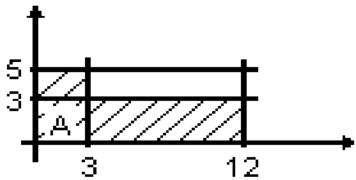


Рис. 3

Пространство всех исходов: $$\Omega = \left\{ (x,y) \middle| \begin{matrix} 0 \le x \le 12 \\ 0 \le y \le 5 \end{matrix} \right\}.$$

На чертеже эти элементарные исходы образуют прямоугольник G: 12×5.

Событие А определяется условием: наименьшая из координат не превосходит 3, т.е. $A = \{(x,y) : \min(x,y) < 3\}$

На рис.3 область прямоугольника G, соответствующая событию А, заштрихована. Обозначим её g.

Площадь $G = 12 \cdot 5 = 60$ кв.ед.

Площадь $g = 12 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 42$ кв.ед.

По формуле (3) находим $P(A) = \dfrac{42}{60} = 0{,}7$.

Задача 5.4. В течение каждого часа в случайный момент времени на экране радиолокатора появляется объект и находится там 15 мин. Какова вероятность обнаружения объекта, если оператор наблюдает за экраном случайным образом в течение 30 мин каждый час?

Р е ш е н и е. Элементарным исходом будем считать точку (x,y), для которой

x – время появления объекта в течение часа, y – время появления оператора в течение часа.

Пространство всех исходов:

$$\Omega = \left\{ (x,y) \middle| \begin{matrix} 0 \le x \le 60 \\ 0 \le y \le 60 \end{matrix} \right\}.$$

На рис.4 эти элементарные исходы образуют квадрат G: 60×60.

I. Пусть первым появляется объект:

Событие A_1 – оператор засёк объект: $x \le y \le x+15$.

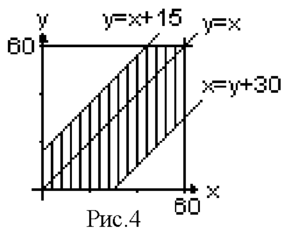
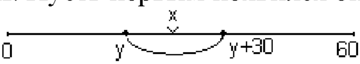


Рис.4

На рис.4 строим линии $y = x$ и $y = x+15$.

II. Пусть первым появился оператор:



Событие A_2 – объект появился в момент наблюдения $y \le x \le y+30$.

Строим на рис.4 линии x = y (уже построена), x = y+30.

Заштрихованную часть обозначим g,

g – область, соответствующая исходам (x,y), означающим обнаружение объекта.

Искомая вероятность определится по формуле $P = \frac{пл.g}{пл.G}$,

пл.G = $60^2 = 3600$,

пл.g = $60^2 - ½\, 45^2 - ½\, 30^2 = 2137{,}5$,

$$P = \frac{2137{,}5}{3600} = 0{,}594 .$$

Задача 5.5. Два студента договорились встретиться между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждёт второго 10 мин, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча произойдёт, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода (между 12 и 13 часами).

Указание.

Элементарный исход (x,y);

x – момент прихода первого студента в минутах;

y – момент прихода второго студента в минутах.

Пространство всех исходов

$$\Omega = \left\{ (x, y) : \begin{matrix} 0 \le x \le 60 \\ 0 \le y \le 60 \end{matrix} \right\} \text{ – квадрат.}$$

Определить точки квадрата, соответствующие событию: встреча произошла. Воспользоваться формулой $P = \frac{пл.g}{пл.G}$.

Ответ. $p = 11/36$.

Задача 5.6. К преподавателю для сдачи зачёта с 9 до 10 часов должны прийти 2 студента: Николай и Егор. Николаю для сдачи зачёта потребуется 20 минут, а Егору – 10 минут. Найти вероятность того, что ни одному из них не придётся ждать.

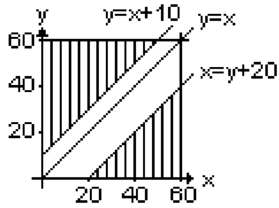


рис.5

Решение. Элементарным исходом будем считать точку (x,y), для которой x – число минут, прошедших после 9 часов до прихода Егора; y – число минут до прихода Николая.

Пространство всех исходов:

Рис. 5

$$\Omega = \left\{ (x,y): \begin{matrix} 0 \le x \le 60 \\ 0 \le y \le 60 \end{matrix} \right\}.$$

На рис.5 множество этих элементарных исходов образуют квадрат G: 60×60.

I. Пусть первым появляется Егор.

Событие A_1 – во время пребывания Егора пришёл Николай: $x \le y \le x+10$.

На рис.5 строим линии $y = x$ и $y = x+10$.

II. Пусть первым появился Николай.

Событие A_2 – во время пребывания Николая пришёл Егор: $y \le x \le y+20$.

Заштрихованная на рис.5 область соответствует исходам, когда Егору и Николаю не приходится ждать. Обозначим эту область g.

Искомая вероятность определяется по формуле (3)

пл.G = 60^2 = 3600 кв.ед.;

пл.g = ½ 50^2 + ½ 40^2 = 2050 кв.ед.;

$$P = \frac{2050}{3600} = \frac{41}{72}.$$

<u>Задача 5.7.</u> К причалу между 8 и 18 часами должны подойти две баржи. Одна должна разгружаться 2 часа, а другая 3 часа. Какова вероятность, что ни одна из них не подойдёт во время разгрузки другой?

<u>О т в е т</u>. $P = {}^{113}\!/_{200}$.

<u>Задача 5.8.</u> В интервале времени [0;T] в случайный момент появляется сигнал длительностью Δ. Приёмник включается в случайный момент на время t. Найти вероятность обнаружения сигнала.

<u>О т в е т</u>. $P = \dfrac{\Delta + t}{T} - \dfrac{t^2 + \Delta^2}{2T^2}$.

Задача 5.9. Задача Бюффона (французский естествоиспытатель XVIII в.). Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу бросают иглу длины $2l$ ($l < a$). Найти вероятность того, что игла пересечёт какую-нибудь прямую.

Р е ш е н и е. Введём обозначения: x – расстояние от середины иглы до ближайшей параллели; φ – угол, составленный иглой с этой параллелью (рис.6, а).

Положение иглы полностью определяется заданием определённых значений x и φ, причём x принимает значение от 0 до a; возможные значения φ изменяются от 0 до π. Другими словами, середина иглы может попасть в любую из точек прямоугольника со сторонами a и π (рис.6,б). Таким образом, этот прямоугольник можно рассматривать как фигуру G, точки которой представляют собой все возможные положения середины иглы. Очевидно, площадь фигуры G равна πa: пл.G = πa.

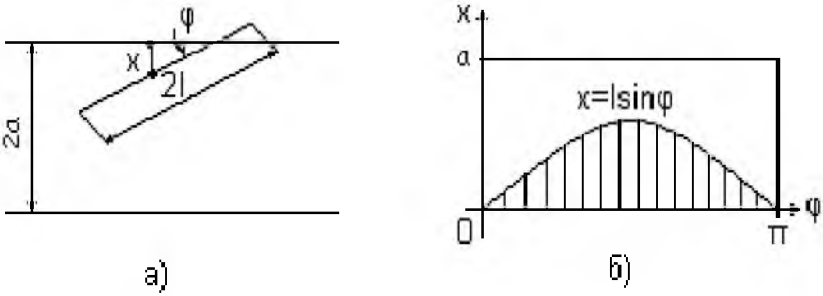


Рис. 6

Найдём теперь фигуру g, каждая точка которой благоприятствует интересующему нас событию, т.е. каждая точка этой фигуры может служить серединой иглы, которая пересекает ближайшую к ней параллель при условии $x \leq l\sin\varphi$, т.е. если середина иглы попадёт в любую из точек фигуры, заштрихованной на рис.6, б.

Таким образом, заштрихованную фигуру можно рассматривать как фигуру g.

$$Пл.g = \int_0^{\pi} l\sin\varphi \cdot d\varphi = -l\cos\varphi \Big|_0^{\pi} = 2l.$$

Искомая вероятность, что игла пересечёт прямую $P = \dfrac{Пл.g}{Пл.G} = \dfrac{2l}{\pi a}$.

§6. Формулы сложения и умножения вероятностей

1) Формула сложения вероятностей.

Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий, т.е.

$P(A+B) = P(A)+P(B)$.

В случае, когда события A и B совместны, вероятность их суммы выражается формулой

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$,

где AB – произведение событий A и B.

Вероятность суммы нескольких несовместных событий равна сумме их вероятностей.

$P(A_1+A_2+\ldots+A_n) = P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$.

Если события A_1, $A_2,\ldots$, A_n несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

Если A и $\overline{A}$ – противоположные события, то

$P(A)+P(\overline{A}) = 1$.

2) Формула умножения вероятностей.

Независимые события. Два события называют независимыми, если вероятность одного из них не зависит от появления или непоявления другого. Например, если монету бросить два раза, то вероятность появления герба во втором опыте не зависит от результата первого опыта.

Зависимые события. Событие A называется зависимым от событием B, если вероятность появления события A зависит от того, произошло или нет событие B. Вероятность события A, вычисленную в предположении, что событие B уже наступило, будем обозначать $P_B(A)$ или $P(A/B)$ и называть условной вероятностью события A.

Вероятность совместного появления двух *независимых* событий равна произведению вероятностей этих событий, т.е.

$P(AB) = P(A)\ P(B)$.

В случае n независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ справедлива формула:

$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$.

Вероятность совместного появления двух *зависимых* событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Для n зависимых событий справедлива формула

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1A_2) \ldots P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}).$$

Задача 6.1. В лотерее 1000 билетов. Из них на один билет падает выигрыш 5000 руб., на 10 билетов – выигрыши по 1000 руб., на 50 билетов – выигрыши по 200 руб., на 100 билетов – выигрыши по 50 руб., остальные билеты невыигрышные. Некто покупает один билет. Найти вероятность выиграть не менее 200 руб.

Р е ш е н и е. Рассмотрим события:

A – выиграть не менее 200 руб.,

A_1 – выиграть 200 руб.,

A_2 – выиграть 1000 руб.,

A_3 – выиграть 5000 руб.

Очевидно, $A = A_1+A_2+A_3$.

Так как события A_1, A_2, A_3 несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$P(A) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3) = 0{,}050+0{,}010+0{,}001 = 0{,}061$.

Задача 6.2. В урне 4 белых и 5 чёрных шаров. Из урны вынимают один шар, отмечается его цвет и шар возвращается в урну. После этого из урны берётся ещё один шар. Найти вероятность, что оба шара будут белыми.

Р е ш е н и е. Обозначим:

A – появление двух белых шаров.

Событие A представляет собой произведение двух событий: A = $=A_1 \ A_2$, где A_1 – появление белого шара при первом вынимании,

A_2 – появление белого шара при втором вынимании.

События A_1 и A_2 независимы и по теореме умножения вероятностей

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \approx 0{,}198 .$$

Задача 6.3. В урне 4 белых и 5 чёрных шаров. Из урны вынимают один шар (не возвращают его назад в урну), затем ещё один шар. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

Р е ш е н и е. Обозначения событий такие же, как в задаче 6.2. В данном случае события A_1 и A_2 зависимые.

$$P(A) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \approx 0{,}167 .$$

Задача 6.4. Бросаются две монеты. Рассматриваются события:

A – выпадение герба на первой монете,

B – выпадение герба на второй монете.

Найти вероятность события C = A+B.

Р е ш е н и е. Так как события A и B совместны, то

P(C) = P(A)+P(B) – P(AB) = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ или, через противоположное событие, P(C) = 1 – P($\overline{C}$) = $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, где $\overline{C}$ – выпадение орла на обеих монетах ($\overline{C} = \overline{A} \cdot \overline{B}$).

Задача 6.5. Бросают 4 игральных кубика. Найти вероятность события A – на всех гранях выпадет разное число очков (см. решение этой задачи под номером 2.8).

Р е ш е н и е. Для решения этой задачи в данном случае используем теорему умножения зависимых событий. Обозначим следующие события:

A_1 – на первом кубике выпадет какое-то число очков $P(A_1) = 1$.

A_2 – на втором кубике выпадет другое число очков, чем на первом кубике;

P(A_2/A_1) = $\frac{5}{6}$,

A_3 – на третьем кубике выпадет другое число очков, чем на первых двух $P(A_3/A_1A_2) = \frac{4}{6}$.

A_4 – на четвёртом кубике выпадет новое число очков по сравнению с первыми тремя кубиками $P(A_4/A_1A_2A_3) = \frac{3}{6}$.

Искомая вероятность: $P(A) = 1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{18}$.

<u>Задача 6.6.</u> В лифт девятиэтажного дома на первом этаже вошли четыре человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятность события С – все пассажиры выйдут на разных этажах.

<u>Р е ш е н и е.</u> Данная задача того же типа, что и предыдущая 7.5.

$$P(C) = 1 \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{105}{256}.$$

<u>Задача 6.7.</u> В урне 4 белых и 5 чёрных шаров. Из урны один за другим вынимают два шара. Найти вероятность того, что эти шары будут разных цветов.

<u>Р е ш е н и е.</u> Искомое событие может появиться в двух несовместных вариантах:

б.ч. – 1-й раз белый, 2-й раз чёрный или

ч.б. – 1-й раз чёрный, 2-й раз белый.

По теоремам сложения и умножения вероятностей имеем:

$$P(б.ч. + ч.б.) = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{9}.$$

<u>Задача 6.8.</u> Производится три выстрела по одной и той же мишени. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах равны соответственно:

$P_1 = 0{,}4$; $P_2 = 0{,}5$; $P_3 = 0{,}7$.

Найти вероятность того, что в результате этих трёх выстрелов в мишени будет ровно одна пробоина.

<u>Р е ш е н и е.</u> Событие А – ровно одно попадание в мишень. Это событие может осуществиться несколькими способами, т.е. распада-

ется на несколько несовместных вариантов: а) может быть попадание при первом выстреле, промахи при втором и третьем; б) или же попадание при втором выстреле, промахи при первом и третьем; в) или, наконец, промахи при первом и втором выстрелах и попадание при третьем. Следовательно, А = $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$,

где A_1, A_2, A_3 – попадание при первом, втором, третьем выстрелах;

$\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ – промах при первом, втором, третьем выстрелах.

Применяя теоремы сложения и умножения вероятностей и пользуясь свойством противоположных событий, находим:

$$P(A) = P(A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3) =$$
$$= 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}36.$$

Задача 6.9. В условиях предыдущего примера (6.8) найти вероятность того, что в мишени будет хотя бы одна пробоина.

Р е ш е н и е. Событие В – хотя бы одно попадание в мишень. Пользуясь тем же приёмом, который был применён в предыдущем примере, и теми же обозначениями, можно представить событие В виде суммы несовместных вариантов:

$$B = A_1A_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3.$$

Найти вероятность каждого варианта по теореме умножения и все эти вероятности сложить. Однако такой путь решения задачи громоздкий. Целесообразно от события В перейти к противоположному:

$\overline{B}$ – ни одного попадания в мишень.

Очевидно, $\overline{B} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

По теореме умножения

$$P(\overline{B}) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}09.$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}09 = 0{,}91.$$

Задача 6.10. Из полной колоды карт (52 карты) вынимают одновременно четыре карты. Рассматриваются события:

А – среди вынутых карт будет хотя бы одна бубновая,

В – среди вынутых карт будет хотя бы одна червонная.

Найти вероятность события С = А+В.

Р е ш е н и е. Найдём вероятность противоположного события $\overline{C}$ - нет ни бубновой, ни червонной карты.

$$P(\overline{C}) = \frac{C_{26}^4}{C_{52}^4} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} = 0{,}055;$$

P(C) = 1 – P($\overline{C}$) ≈ 0,945.

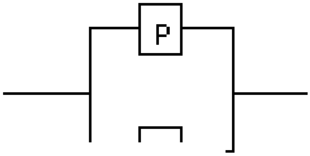


Рис. 7

Задача 6.11. Для повышения надёжности прибора он дублируется другим точно таким же прибором. Вероятность безотказной работы (надёжность) каждого прибора равна p. При выходе из строя первого прибора происходит мгновенное переключение на второй. Определить вероятность безотказной работы системы двух дублирующих друг друга приборов (рис.7).

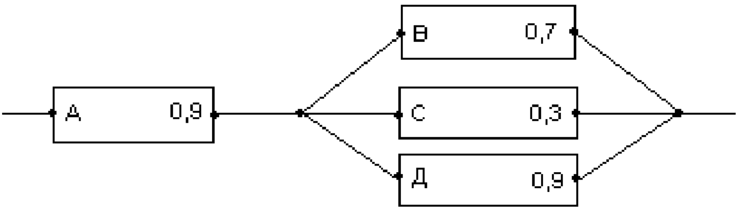
Р е ш е н и е. Отказ системы требует совместного отказа обоих приборов.

Отказ одного прибора q = 1 – p.

Отказ двух приборов $q^2 = (1 - p)^2$.

Вероятность безотказной работы системы двух дублирующих друг друга приборов: $P = 1 - q^2 = 1 - (1 - p)^2$.

Задача 6.12. Найти вероятность безотказной работы электрической цепи, изображённой на схеме и состоящей из четырёх элементов А, В, С, Д.



Числа 0,7; 0,3; 0,9 на схеме показывают вероятности безотказной работы соответствующих элементов.

Р е ш е н и е.

Обозначим событие F – безотказная работа цепи. Это событие можно записать через операции сложения и умножения событий в виде:

$$F = AB\overline{C}\,\text{Д} + ABC\,\overline{\text{Д}} + A\overline{B}\,C\text{Д} + AB\overline{C\text{Д}} + A\overline{B}\,C\,\overline{\text{Д}} + A\overline{B}\,\overline{C}\,\text{Д} + ABC\text{Д}.$$

$$P(F) = 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 + {}$$
$$+\, 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}8811.$$

<u>Задача 6.13.</u> Два стрелка произвели по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,7, а вторым – 0,6. Найти вероятность того, что хотя бы один из стрелков попал в мишень.

<u>О т в е т.</u> 0,88.

<u>Задача 6.14.</u> В урне 4 белых и 5 чёрных шаров. Из урны один за другим вынимают два шара. Найти вероятность того, что второй шар будет белым.

<u>О т в е т.</u> $4/9$.

<u>Задача 6.15.</u> Из колоды карт в 52 карты (4 масти по 13 карт) вынимают без возвращения 3 карты. Найти вероятность того, что первой вынутой карта пиковой масти, второй – трефовой, а третьей – карта красной масти.

<u>О т в е т.</u> $\dfrac{13}{5100}$.

<u>Задача 6.16.</u> При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за космическим объектом, объект обнаруживается с вероятностью 0,7. Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других. Найти вероятность того, что при 3 циклах объект будет обнаружен.

<u>О т в е т.</u> 0,973.

<u>Задача 6.17.</u> Прибор состоит из 3-х блоков. Выход из строя каждого блока означает выход из

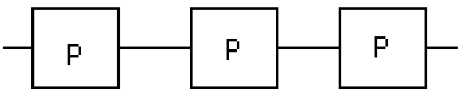


Рис. 8

строя прибора в целом. Блоки выходят из строя независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы (надёжность) каждого блока равна p. Найти надёжность P прибора в целом (рис.8).

Ответ. $P = p^3$.

Задача 6.18. Над изготовлением изделия работают последовательно трое рабочих. Качество изделия при передаче следующему рабочему не проверяется. Первый рабочий допускает брак с вероятностью p_1, второй – p_2, третий – p_3. Найти вероятность того, что при изготовлении изделия будет допущен брак.

Ответ. $1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)$.

Задача 6.19. При включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью p.

1. Найти вероятность того, что двигатель начнёт работать при втором включении зажигания.
2. Найти вероятность того, что для ввода двигателя в работу придётся включить зажигание не более двух раз.

Ответ. 1) $(1 - p)p$; 2) $1 - (1 - p)^2 = (2 - p)p$.

Задача 6.20. Завод изготовляет определённого типа изделия. Каждое изделие имеет дефект с вероятностью p. Изделие осматривается одним контролёром, который обнаруживает имеющийся дефект с вероятностью p_1. Если же контролёр не обнаружил дефект, то пропускает дефект в готовую продукцию. Кроме того, контролёр может по ошибке забраковать изделие, не имеющее дефекта; вероятность этого равна α. Найти вероятности следующих событий:

A – изделие будет забраковано,

B – изделие будет забраковано, но ошибочно,

C – изделие будет пропущено в готовую продукцию с дефектом.

Ответ. $P(A) = pp_1 + (1 - p)\cdot\alpha$; $P(B) = (1 - p)\cdot\alpha$; $P(C) = p\cdot(1 - p_1)$.

Задача 6.21. Техническая система состоит из трёх блоков, надёжность каждого из которых равна p. Выход из строя хотя бы одного блока влечёт за собой выход из строя всей системы. С целью повышения надёжности системы производится дублирование, для чего выделено ещё три таких же блока. Надёжность переключающих устройств полная. Определить, какой способ дублирования даёт большую надежность системы:

а) дублирование каждого блока (рис.9);

б) дублирование всей системы (рис.10).

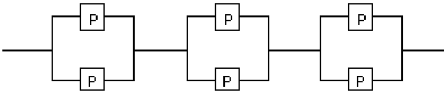


Рис. 9

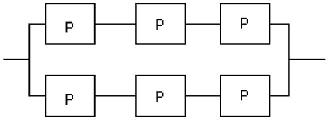


Рис.10

<u>О т в е т.</u> Надёжность системы, дублированной по способу а), будет

$p_а = [1 – (1 – p)^2]^3 = p^3[(2 – p^3)+6(1 – p)^2]$;

по способу б):

$p_б = 1 – (1 – p^3)^2 = p^2(2 – p^3)$.

Таким образом, $p_а > p_б$.

<u>Задача 6.22.</u> Семь из десяти посетителей кафе заказывают к кофе фирменное пирожное. Два человека заказывают кофе. Какова вероятность того, что они закажут: а) два пирожных; б) одно пирожное; в) ни одного?

<u>О т в е т.</u> а) 0,49; б) 0,42; в) 0,09.

§7. Формула полной вероятности и формула Бейеса

Пусть требуется определить вероятность некоторого события А, которое может произойти вместе с одним из событий: $H_1, H_2, \dots, H_n$, образующих полную группу несовместных событий. Эти события называют гипотезами. В этом случае вероятность события А вычисляется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n)\cdot P_{H_n}(A) \text{ или}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P_{H_i}(A),$$ где $P(H_i)$ – вероятность гипотезы H_i;

$P_{H_i}(A)$ – условная вероятность события А при этой гипотезе.

Если до опыта вероятности гипотез были $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$, а в результате опыта появилось событие А, то с учётом этого события “новые”, т.е. условные вероятности гипотез вычисляются по формуле Бейеса:

$$P_{H_i}(A) = \frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}, \quad (i=1,2,...,n).$$

Формула Бейеса даёт возможность “пересмотреть” вероятности гипотез с учётом наблюденного результата опыта.

Задача 7.1. Имеются три одинаковые с виду урны. В первой 6 белых шаров и 4 чёрных; во второй – 8 белых и 7 чёрных; в третьей– только белые шары. Некто подходит наугад к одной из урн и вынимает из неё один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Р е ш е н и е. Пусть событие А – появление белого шара.

Формулируем гипотезы:

H_1 – выбор первой урны;

H_2 – выбор второй урны;

H_3 – выбор третьей урны.

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

$$P_{H1}(A) = \frac{6}{6+4} = \frac{3}{5}; \quad P_{H2}(A) = \frac{8}{8+7} = \frac{8}{15}; \quad P_{H3}(A) = 1.$$

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{15} + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{32}{45}.$$

Задача 7.2. Брокер может приобрести акции одной из трёх компаний: A, B, C. Риск прогореть при покупке акций компании A составляет 50%, B – 40%, C – 20%. Брокер решает вложить все деньги в акции случайно выбранной компании. Какова вероятность того, что брокер прогорит?

Р е ш е н и е. Обозначим события:

F – брокер прогорит;

H_1 – брокер приобрёл акции компании A;

H_2 – брокер приобрёл акции компании B;

H_3 – брокер приобрёл акции компании C.

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

$$P_{H1}(F) = 0{,}5; \quad P_{H2}(F) = 0{,}4; \quad P_{H3}(F) = 0{,}2.$$

$$P(H) = \frac{1}{3}(0{,}5 + 0{,}4 + 0{,}2) \approx 0{,}37.$$

Задача 7.3. Среди покупателей-мужчин 80% предпочитают напитки фирмы А, а среди покупателей-женщин эти же напитки предпочитают 50%. На основании многомесячных наблюдений установлено, что доля покупателей-женщин в данном магазине составляет 60%. Оцените вероятность того, что случайный покупатель предпочтёт напитки фирмы А (событие Е).

Р е ш е н и е. Обозначим гипотезы:

H_1 – покупатель-мужчина.

H_2 – покупатель-женщина.

$P(H_1) = 0{,}4$; $\quad P(H_2) = 0{,}6$;

$$P_{H1}(E) = 0{,}8; \qquad P_{H2}(E) = 0{,}5.$$

По формуле полной вероятности искомая вероятность равна:

$$P(E) = P(H_1) \cdot P_{H1}(E) + P(H_2) \cdot P_{H2}(E) = 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}62.$$

Задача 7.4. Имеются две урны с шарами. В первой урне 6 чёрных и 14 белых шаров. Во второй урне 9 чёрных и 21 белый шар. Из первой урны случайным образом взяли 10 шаров, а из второй – 15 шаров и ссыпали их в третью урну. Затем из этой (третьей) урны наугад берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар чёрный.

Р е ш е н и е.

Обозначим событие А – из третьей урны вынули чёрный шар.

Обозначим гипотезы:

H_1 – вынутый шар ранее находился в первой урне;

H_2 – вынутый шар ранее находился во второй урне.

Вероятности гипотез:

$$P(H_1) = \frac{10}{25}; \qquad P(H_2) = \frac{15}{25}.$$

Условные вероятности события А:

$$P_{H1}(A) = \frac{6}{20}; \qquad P_{H2}(A) = \frac{9}{30}.$$

Воспользуемся формулой полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) = \frac{10}{25} \cdot \frac{6}{20} + \frac{15}{25} \cdot \frac{9}{30} = 0{,}3.$$

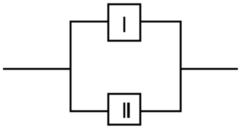


Рис. 11

Задача 7.5. Прибор состоит из двух дублирующих друг друга узлов I и II (рис.11) и может случайным образом работать в одном из двух режимов: благоприятном и неблагоприятном. В благоприятном режиме надёжность каждого из узлов рана 0,9, в неблагоприятном 0,8. Вероятность того, что прибор будет работать в благоприятном режиме, равна 0,95, в неблагоприятном 0,05. Найти полную надёжность прибора р.

Решение. Событие А – полная надёжность прибора.

Гипотезы:

B_1 – прибор работал в благоприятном режиме,

B_2 – прибор работал в неблагоприятном режиме.

$P(B_1) = 0{,}95$; $P(B_2) = 0{,}05$.

Условные вероятности найдём по теореме сложения совместных событий:

$$P_{B_1}(A) = 0{,}9 + 0{,}9 - 0{,}9^2 = 0{,}99,$$

$$P_{B_2}(A) = 0{,}8 + 0{,}8 - 0{,}8^2 = 0{,}96,$$

$P(A) = 0{,}95 \cdot 0{,}99 + 0{,}05 \cdot 0{,}96 \cong 0{,}99$.

Задача 7.6. В первой урне 2 белых и 5 чёрных шаров, во второй – 4 белых и 2 чёрных. Из первой урны наудачу переложили 2 шара во вторую, после чего из второй урны наудачу достали один шар.

Найти следующее:

а) какова вероятность того, что этот шар белый;

б) шар, взятый из второй урны, оказался белым. Какова вероятность того, что из первой урны во вторую были переложены 2 белых шара?

Решение.

а) обозначим: событие А – шар, извлечённый из второй урны, белый;

гипотеза H_1 – из первой урны во вторую переложены 2 белых шара;

гипотеза H_2 – переложили 2 разноцветных шара;

гипотеза H_3 – переложили 2 чёрных шара.

Тогда

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A).$$

Вероятности гипотез и условные вероятности вычислим по классической схеме:

$$P(H_1) = \frac{C_2^2}{C_8^2} = \frac{1}{28}; \quad P(H_2) = \frac{C_2^1 \cdot C_6^1}{C_8^2} = \frac{12}{28}; \quad P(H_3) = \frac{C_6^2}{C_8^2} = \frac{15}{28};$$

$$P_{H1}(A) = \frac{3}{4}; \quad P_{H2}(A) = \frac{5}{8}; \quad P_{H3}(A) = \frac{1}{2}.$$

Искомая вероятность равна:

$$P(A) = \frac{1}{28} \cdot \frac{3}{4} + \frac{12}{28} \cdot \frac{5}{8} + \frac{15}{28} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{16};$$

б) вероятность $P_A(H_1)$ находим по формуле Бейеса:

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H1}(A)}{P(A)} = \frac{1/28 \cdot 3/4}{9/16} = \frac{1}{21}.$$

<u>Задача 7.7.</u> Исследуется динамика курсов валют А и В по отношению к валюте С. Статистика торгов на валютной бирже свидетельствует, что при возрастании курса валюты В курс валюты А растёт в 80% случаев, при снижении курса валюты В курс валюты А растёт в 25% случаев, при неизменности курса валюты В курс валюты А растёт в 50% случаев. Предполагая, что варианты изменения курса валюты В имеют одинаковую вероятность, определите вероятности соответствующих изменений при условии, что на последних торгах курс валюты А вырос.

<u>Р е ш е н и е.</u> Обозначим событие F – курс валюты А вырос.

Гипотезы:

H_1 – курс валюты В вырос,

H_2 – курс валюты В снизился,

H_3 – курс валюты В остался неизменным.

По условию $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = p$.

$$P_{H1}(F) = 0{,}8; \quad P_{H2}(F) = 0{,}25; \quad P_{H3}(F) = 0{,}5.$$

По формуле Бейеса найдём вероятности гипотез:

$$P_F(H_1)=\frac{0{,}8p}{p(0{,}8+0{,}25+0{,}5)}=\frac{0{,}8}{1{,}55}=0{,}516\,;$$

$$P_F(H_2)=\frac{0{,}25p}{1{,}55p}=0{,}161\,;$$

$$P_F(H_3)=\frac{0{,}5p}{1{,}55p}=0{,}323\,.$$

Задача 7.8. Прибор состоит из двух узлов. Работа каждого узла необходима для работы прибора в целом. Надёжность (вероятность безотказной работы в течение времени t) первого узла равна 0,9, второго 0,8. Прибор испытывался в течение времени t, в результате чего обнаружено, что он вышел из строя (отказал). Найти вероятность того, что отказал только первый узел, а второй исправен.

Р е ш е н и е. До опыта возможны четыре гипотезы:

H_0 – оба узла исправны;

H_1 – первый узел отказал, второй исправен;

H_2 – первый узел исправен, а второй отказал;

H_3 – оба узла отказали.

Наблюдалось событие A – прибор отказал.

Вероятности гипотез:

$P(H_0) = 0{,}9\cdot 0{,}8 = 0{,}72$; $\quad P(H_1) = (1 - 0{,}9)\cdot 0{,}8 = 0{,}08$;

$P(H_2) = 0{,}9\cdot(1 - 0{,}8) = 0{,}18$; $\quad P(H_3) = (1 - 0{,}9)\cdot(1 - 0{,}8) = 0{,}02$.

Условные вероятности события A:

$P_{H_0}(A)=0\,,\quad P_{H_1}(A)=P_{H_2}(A)=P_{H_3}(A)=1\,.$

По формуле Бейеса: $P_A(H_1)=\dfrac{0{,}08}{0{,}72\cdot 0+0{,}08+0{,}18+0{,}02}=\dfrac{2}{7}\,.$

Задача 7.9. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовленных отлично, 4 – хорошо, 2 – посредственно и 1 – плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный – на 16, посредственно – на 10, плохо – на 5. Вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент подготовлен: а) отлично; б) плохо.

Р е ш е н и е. Событие A – студент ответил на три вопроса.

Гипотезы:

H_1 – студент подготовлен отлично; $P(H_1) = 0{,}3$;
H_2 – студент подготовлен хорошо; $P(H_2) = 0{,}4$;
H_3 – студент подготовлен посредственно; $P(H_3) = 0{,}2$;
H_4 – студент подготовлен плохо; $P(H_4) = 0{,}1$.

$P_{H1}(A) = 1$;

$$P_{H2}(A) = \frac{C_{16}^3}{C_{20}^3} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{20 \cdot 19 \cdot 18} \approx 0{,}491;$$

$$P_{H4}(A) = \frac{C_5^3}{C_{20}^3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} \approx 0{,}009;$$

а) $P_A(H_1) = \dfrac{0{,}3 \cdot 1}{0{,}3 \cdot 1 + 0{,}4 \cdot 0{,}491 + 0{,}2 \cdot 0{,}105 + 0{,}1 \cdot 0{,}009} \approx 0{,}58$;

б) $P_A(H_4) = \dfrac{0{,}1 \cdot 0{,}009}{0{,}3 \cdot 1 + 0{,}4 \cdot 0{,}491 + 0{,}2 \cdot 0{,}105 + 0{,}1 \cdot 0{,}009} \approx 0{,}002$.

Задача 7.10. Имеются две урны: в первой 5 белых шаров и 3 чёрных; во второй 6 белых и 4 чёрных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, три шара. После этого из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

Ответ. $^{63}\!/_{104}$.

Задача 7.11. Приборы одного наименования изготавливаются двумя заводами. Первый завод поставляет $^2\!/_3$ всех изделий, поступающих на производство; второй – $^1\!/_3$. Вероятность безотказной работы прибора, изготовляемого первым заводом, равна p_1, второго – p_2. Определить полную надёжность p прибора, поступившего на производство.

Ответ. $p = \frac{2}{3} p_1 + \frac{1}{3} p_2$.

Задача 7.12. Прибор может работать в двух режимах: 1) нормальном и 2) ненормальном. Нормальный режим наблюдается в 80% всех случаев работы прибора; ненормальный – в 20%. Вероятность выхода прибора из строя за время t в нормальном режиме равна 0,1; в ненормальном – 0,7. Найти полную вероятность p выхода прибора из строя за время t.

<u>О т в е т.</u> $p = 0{,}22$.

<u>Задача 7.13.</u> Трое рабочих изготавливают однотипные изделия. Первый рабочий изготовил 40 изделий, второй – 35, третий – 25. Вероятность брака у первого рабочего 0,03, у второго – 0,02, у третьего – 0,01. Взятое наугад изделие оказалось бракованным. Определить вероятность того, что это изделие сделал второй рабочий.

<u>О т в е т.</u> $\approx 0{,}33$.

<u>Задача 7.14.</u> На вход радиолокационного устройства с вероятностью p поступает смесь полезного сигнала с помехой, а с вероятностью (1 – p) – только одна помеха. Если поступает полезный сигнал с помехой, то устройство регистрирует наличие какого-то сигнала с вероятностью p_1; если только помеха – с вероятностью p_2. Известно, что устройство зарегистрировало наличие какого-то сигнала. Найти вероятность того, что в его составе имеется полезный сигнал.

<u>О т в е т.</u> $\dfrac{pp_1}{pp_1 + (1-p)p_2}$

§8. Повторение опытов

Опыты называются *независимыми*, если вероятность того или иного исхода каждого опыта не зависит от того, какие исходы имели другие опыты.

Независимые опыты могут производиться как в одинаковых условиях, так и в различных. В первом случае вероятность появления какого-то события A во всех опытах одна и та же, во втором случае она меняется от опыта к опыту.

На практике повторение опытов имеет место в массовом производстве, в частности в машиностроении, где производится на станках обработка большого числа однотипных деталей. При этом интерес представляет не каждая деталь в отдельности, а общее число годных (или бракованных). Подобные задачи решаются по следующей схеме Бернулли.

Если производится n независимых опытов в одинаковых условиях, причём в каждом из них с вероятностью p появляется событие A, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие А произойдёт в этих n опытах ровно k раз, выражается формулой Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (к = 0, 1, \ldots, n),$$

где q = 1 – p.

Приведённая формула выражает так называемое биноминальное распределение вероятностей. Вероятность хотя бы одного появления события А при n независимых опытах в одинаковых условиях равна

$R_n(1) = 1 - q^n$.

При большом числе независимых испытаний пользоваться формулой Бернулли затруднительно. В этом случае подсчёт можно производить по одной из следующих теорем.

Локальная теорема Лапласа. Пусть в схеме независимых испытаний число испытаний n велико. Тогда вероятность наступления события А ровно k раз в n испытаниях определяется приближённой формулой

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \quad \text{где} \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значения функции φ(x) указаны в табл. П 1 приложения, причём φ(-x) = φ(x).

Интегральная теорема Лапласа. Пусть в схеме независимых испытаний число испытаний n велико. Тогда вероятность наступления события А не менее k_1 раз и не более k_2 раз в n испытаниях определяется приближённой формулой

$P_n(k_1;k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x')$,

где $x' = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$

$\Phi(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^x e^{-x/2} dx$ - функция Лапласа.

Значения функции Лапласа Φ(x) приведены в табл. П 2 приложения. Отметим, что Φ(-x) = - Φ(x). При x > 5 можно принять Φ(x) = 0,5.

Теорема Пуассона. Пусть в схеме независимых испытаний число испытаний n велико и $0{,}1 < np < 10$. Тогда вероятность наступления события A ровно k раз в n испытаниях определяется приближённой формулой Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{a^k e^{-a}}{k!}, \text{ где } a = np,\ e \approx 2{,}718.$$

Предыдущие теоремы о повторении опытов касались того случая, когда вероятность события A во всех опытах одна и та же. На практике часто приходится встречаться с более сложным случаем, когда опыты производятся в неодинаковых условиях, и вероятность события от опыта к опыту меняется. Например, если производится ряд выстрелов в переменных условиях (скажем, при изменяющейся дальности), то вероятность попадания от выстрела к выстрелу может заметно меняться.

Пусть производится n независимых опытов, в каждом из которых может появиться или не появиться некоторое событие A, причём вероятность появления события A в i-м опыте равна p_i, а вероятность непоявления $q_i = 1 - p_i$ $(i = 1, 2,\ldots, n)$.

Тогда вероятность того, что событие A в n независимых опытах появится ровно k раз $P_n(k)$, равна коэффициенту при z^k в выражении производящей функции:

$$\varphi_n(z) = (q_1+p_1z)(q_2+p_2z)\ldots(q_n+p_nz) = \prod_{i=1}^{n}(q_i + p_iz)\,.$$

Раскрывая скобки в правой части и выполняя приведение подобных членов, получим все вероятности: $P_n(0)$; $P_n(1)$; ;$P_n(n)$ как коэффициенты соответственно при нулевой, первой и т.д. степенях z.

Задача 8.1. Прибор состоит из 10 узлов. Надёжность (вероятность безотказной работы в течение времени t) для каждого узла равна p. Узлы выходят из строя независимо один от другого. Найти вероятность того, что за время t:

а) откажет хотя бы один узел,

б) откажет ровно один узел,

в) откажут ровно два узла,

г) откажут не менее двух узлов,

д) откажут от 4 до 6 узлов.

Р е ш е н и е.
а) $R_{10}(1) = 1 - q^{10}$, где $q = 1 - p$;

б) $P_{10}(1) = C_{10}^{2} pq^{9} = 10pq^{9}$;

в) $P_{10}(2) = C_{10}^{2} p^{2}q^{8} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot p^{2}q^{8} = 45p^{2}q^{8}$;

г) $P_{10}(k \geq 2) = 1 - P_{10}(0) - P_{10}(1) = 1 - q^{10} - 10pq^{9} = 1 - q^{9}(q+10p)$,
д) $P_{10}(4 \leq k \leq 6) = P_{10}(4) + P_{10}(5) + P_{10}(6) = 42p^{4}q^{4}(5 - 4pq)$.

Задача 8.2. Вероятность наступления события А в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что А наступит:
а) ровно 84 раза;
б) не менее 72 и не более 84 раз.

Р е ш е н и е. а) по условию $n = 100$; $k = 84$; $p = 0{,}8$; $q = 1 - p = 0{,}2$. Так как $n = 100$ достаточно большое число, воспользуемся локальной теоремой Лапласа:

$$P_{100}(84) = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} \cdot \varphi(x).$$

Найдём значение x:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{84 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{4}{4} = 1.$$

По табл. П 1 $\varphi(1) = 0{,}24$. Искомая вероятность:

$$P_{100}(84) = \frac{1}{4} \cdot 0{,}24 = 0{,}06;$$

б) по условию $n = 100$; $p = 0{,}8$; $k_1 = 72$; $k_2 = 84$.
Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:
$P_{100}(72;84) = \Phi(x'') - \Phi(x')$.
Вычислим x'' и x':

$$x' = \frac{72 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100} \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = \frac{-8}{4} = -2;$$

$$x'' = \frac{84 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100} \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = \frac{4}{4} = 1$$

$P_{100}(72;84) = \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) + \Phi(2)$.

По табл. П 2 находим $\Phi(1) = 0{,}3413$, $\Phi(2) = 0{,}4772$.

Искомая вероятность $P_{100}(72;84) = 0{,}3413+0{,}4772 = 0{,}8185$.

Задача 8.3. Среди 10000 лотерейных билетов 10% являются выигрышными. Определить:

а) вероятность выигрыша при покупке 5 билетов;

б) количество билетов, которое необходимо приобрести, чтобы выиграть с вероятностью не менее 0,9.

Решение.

а) по условию $n = 5$; $p = 0{,}1$; $q = 1 - p = 0{,}9$; $k_1 = 1$; $k_2 = 5$.

Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа.

$$x_1 = \frac{1 - 5 \cdot 0{,}1}{\sqrt{5 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} = 0{,}75;$$

$$x_2 = \frac{5 - 5 \cdot 0{,}1}{\sqrt{5 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} = 6{,}71.$$

$P(1;5) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(6{,}71) - \Phi(0{,}75) = 0{,}5 - 0{,}27 \approx 0{,}23$;

б) $P_n(1;n) = 0{,}9$; $k_1 = 1$; $k_2 = n$; $p = 0{,}1$; $q = 0{,}9$.

$$x_1 = \frac{1 - 0{,}1n}{\sqrt{n \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} = \frac{1 - 0{,}1n}{0{,}3\sqrt{n}}; \qquad x_2 = \frac{n - 0{,}1n}{0{,}3\sqrt{n}} = 3\sqrt{n}.$$

Используем интегральную теорему Лапласа

$$0{,}9 = \Phi(3\sqrt{n}) - \Phi\left(\frac{1 - 0{,}1n}{0{,}3\sqrt{n}}\right).$$

Очевидно, что количество билетов $n > 5$ и $\Phi(3\sqrt{n}) = 0{,}5$.

$$0{,}9 = 0{,}5 - \Phi(3\sqrt{n}) - \Phi\left(\frac{1 - 0{,}1n}{0{,}3\sqrt{n}}\right);$$

$$\Phi\left(\frac{1 - 0{,}1n}{0{,}3\sqrt{n}}\right) = -\,0{,}4.$$

По табл. П 2 находим, что $\Phi(1{,}28) = 0{,}4$.

Поэтому $\dfrac{1 - 0{,}1n}{0{,}3\sqrt{n}} = -\,1{,}28$;

$$1 - 0{,}1n + 0{,}384\sqrt{n} = 0;$$

$$n - 3{,}84\sqrt{n} - 10 = 0.$$

Из решения последнего уравнения получим $\sqrt{n} = 5{,}62$; $n > 31{,}6$.
Таким образом, надо купить минимум 32 билета.

Задача 8.4. Задачник издан тиражом 20000 экземпляров. Вероятность того, что он сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит три бракованных книги.

Р е ш е н и е. По условию n = 20000, p = 0,0001, k = 3. Поскольку n = 20000 велико, а вероятность p = 0,0001 мала, то воспользуемся теоремой Пуассона

$$P_{20000}(3) = \frac{a^3 \cdot e^{-a}}{3!}.$$

Найдём a = np = 20000·0,0001 = 2.

Искомая вероятность:

$$P_{20000}(3) = \frac{2^3 \cdot e^{-2}}{3!} = \frac{8}{6 \cdot e^2} = 0{,}18\ .$$

Задача 8.5. Производится 4 независимых выстрела по одной и той же цели с различных расстояний. Вероятности попадания при этих выстрелах равны соответственно $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}2$; $p_3 = 0{,}3$; $p_4 = 0{,}4$. Найти вероятности ни одного, одного, двух, трёх и четырёх попаданий: $P_4(0)$; $P_4(1)$; $P_4(2)$; $P_4(3)$; $P_4(4)$.

Р е ш е н и е. Составляем производящую функцию

$$\varphi_4(z) = \prod_{i=1}^{4}(q_i + p_i z) = (0{,}9 + 0{,}1z)(0{,}8 + 0{,}2z)(0{,}7 + 0{,}3z)(0{,}6 + 0{,}4z) =$$

$$= 0{,}302 + 0{,}440z + 0{,}215z^2 + +0{,}040z^3 + 0{,}002z^4\ .$$

Таким образом,

$P_4(0) = 0{,}302$; $P_4(1) = 0{,}440$; $P_4(2) = 0{,}215$; $P_4(3) = 0{,}040$; $P_4(4) = 0{,}002$.

Задача 8.6. Найти вероятность того, что событие А появится не менее трёх раз в четырёх независимых испытаниях, если вероятность появления события А в одном испытании равна 0,4.

О т в е т. $P_4(3)+P_4(4) = 0{,}1792$.

Задача 8.7. Найти вероятность того, что событие А наступит ровно 60 раз в 300 испытаниях, если появление этого события в каждом испытании равно 0,3.

Ответ. $P_{300}(60) = 0,15$.

Задача 8.8. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не менее 70 и не более 80 раз.

Ответ. $P_{100}(70;80) = 0,7514$.

Задача 8.9. Вероятность изготовления автоматом бракованного изделия равна 0,01. Найти вероятность того, что в партии из 100 изделий ровно два окажутся бракованными.

Ответ. $P_{100}(2) \approx 0,184$.

Задача 8.10. Завод изготовляет изделия, каждое из которых должно подвергаться четырём видам испытаний. Первое испытание изделие проходит благополучно с вероятностью 0,9; второе – с вероятностью 0,95; третье – с вероятностью 0,8 и четвёртое – с вероятностью 0,85. Найти вероятность того, что изделие пройдёт благополучно:

А – все четыре испытания;

В – ровно два испытания (из четырёх);

С – не менее двух испытаний (из четырёх).

Ответ. $P(A) = 0,5814$; $P(B) = 0,06965$; $P(C) = 0,99420$.

§9. Случайные величины. Законы распределения. Числовые характеристики случайных величин

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, неизвестно заранее, какое именно. Случайные величины являются числовой характеристикой исходов опыта и относятся к основным понятиям теории вероятностей, их принято обозначать заглавными буквами X, Y, Z,…, а принимаемые ими значения строчными x, y, z, ….

Дискретной случайной величиной называется случайная величина, принимающая отделённые друг от друга значения, которые можно перенумеровать, т. е. они образуют последовательность $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.

Непрерывной случайной величиной называется случайная величина, возможные значения которой непрерывно заполняют какой-то промежуток.

<u>Законом распределения</u> случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Закон распределения может иметь разные формы.

<u>1.Р я д   р а с п р е д е л е н и я.</u>

<u>Рядом распределения</u> дискретной случайной величины X называется таблица, где перечислены возможные значения этой случайной величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с соответствующими им вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Эта таблица и выражает закон распределения.

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

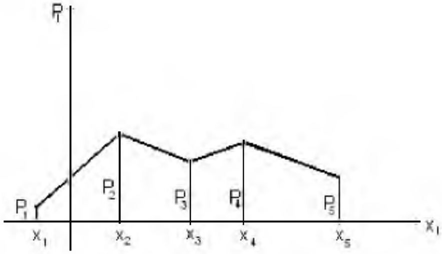


Рис. 12

Если последовательность $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ бесконечная, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} P_i$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} P_i = 1$

Графическое изображение ряда распределения (рис.12) называется *многоугольником распределения*.

<u>2.Ф у н к ц и я   р а с п р е д е л е н и я.</u>

<u>Функцией распределения</u> случайной величины X называется функция F(x), выражающая вероятность того, что X примет значение, меньшее чем x:

$F(x) = P(X < x)$.

Функция F(x) есть неубывающая функция, т.е. $F(x_1) \le F(x_2)$, если $x_1 < x_2$.

$F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$, $P(a<X<в)=F(в)-F(a)$.

Для случайной величины дискретного типа функция распределения будет выражаться с помощью формулы:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le x_1, \\ P_1 & \text{при } x_1<x\le x_2, \\ P_1+P_2 & \text{при } x_2<x\le x_3, \\ \dots & \dots \\ P_1+P_2+\dots+P_{n-1} & \text{при } x_{n-1}<x\le x_n, \\ 1 & \text{при } x>x_n. \end{cases}$$

График функции F(x) в последнем случае – это ступенчатая неубывающая функция, имеющая скачки в точках x_i.

3.<u>Плотность распределения случайной величины непрерывного типа.</u>

Случайная величина X называется *случайной величиной непрерывного типа* или *непрерывной*, если существует такая неотрицательная, интегрируемая по Риману в бесконечном промежутке функция f(x), называемая *плотностью распределения вероятностей* и связанная с функцией распределения X формулой

$$F(x) = P(X<x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx, \text{ отсюда } f(x) = F'(x).$$

Функцию f(x) – плотность распределения X называют *дифференциальным законом распределения величины X.*

График f(x) называется *кривой распределения*. Вероятность P(a<X<в) того, что случайная величина X попадает в промежуток (а; в), определяется как

$$P(a<X<в) =\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Функция f(x) обладает свойствами:

1. $f(x) = F'(x)$ в точках непрерывности распределения f(x).
2. $f(x) \ge 0$.
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

Величины x_p, определяемые равенством $F(x_p)=p$, называются *квантилями*; квантиль $x_{0,5}$ называется *медианой*.

4. Числовые характеристики случайных величин

Закон распределения случайной величины даёт исчерпывающую информацию о ней, так как позволяет вычислить вероятность любых событий, связанных с этой случайной величиной. Однако во многих практических случаях достаточно знать лишь некоторые основные её характеристики, отражающие наиболее важные особенности этого закона. Такие числа называют *числовыми характеристиками* случайных величин. Условно их подразделяют на характеристики положения (математическое ожидание, мода, медиана, начальные моменты различных порядков) и характеристики рассеивания (дисперсия, среднее квадратическое отклонение, центральные моменты различных порядков). Важнейшими из них являются математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение.

Математическое ожидание случайной величины X представляет собой некоторое "средневзвешенное" число, вокруг которого группируются значения случайной величины. Математическое ожидание вычисляется по формулам:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i$$ – для дискретной случайной величины;

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$$ – для непрерывной случайной величины.

В случае, когда M(X) надо обозначить одной буквой, будем писать $M(X)=m_x$.

Мода случайной величины X определяется как наиболее вероятное ее значение x_m, т.е. $x_m=\max P(X=x_k)$. Для непрерывной величины X модой будет значение x, при котором плотность f(x)=max. Случайная величина может и не иметь, а может иметь несколько значений x_m (мультимодальное распределение).

Медианой случайной величины X называется число h_x, удовлетворяющее условию $P(X<h_x)=P(X\geq h_x)$

Числовая характеристика *дисперсия* оценивает разброс возможных значений случайной величины относительно её среднего значения (математического ожидания). Например, в артиллерии важно знать, насколько кучно лягут снаряды вблизи цели, которая должна быть поражена.

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата разности между случайной величиной X и её математическим ожиданием.

$D(X) = M\,(X - m_x)^2$.

Дисперсия вычисляется по формулам:

$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, p_i - m_x^2$ – для дискретной случайной величины,

$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - m_x^2$ – для непрерывной случайной величины.

Дисперсию D(x) кратко будем обозначать D_x.

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется корень квадратный из дисперсии

$\sigma_x = \sqrt{D_x}$.

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение являются характеристиками рассеивания случайной величины относительно математического ожидания. Кроме того, они часто применяются при изучении риска различных действий со случайным исходом.

Чтобы оценить разброс значений случайной величины в процентах относительно ее среднего значения, вводится *коэффициент вариации* V(x), рассчитываемый по формуле

$$V(x) = \frac{\sigma(x)}{|M(x)|} \cdot 100\% .$$

Используются также начальные моменты распределения k-го порядка: $a_k = M[X^k]$, для дискретной величины $\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k\ p_i$; для непрерывной $\alpha_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$, а также центральные моменты $\mu_k = M[(X - m_x)^k]$.

С помощью центральных моментов определяется коэффициент асимметрии (“скошенности” кривой распределения) а=$\frac{\mu^3}{\sigma_x^3}$ и коэффициент эксцесса (“островершинности” кривой распределения) $e=\frac{\mu_4}{\sigma_x^4}-3.$

Задача 9.1. Может ли при каком-либо значении аргумента быть:

1. Функция распределения больше единицы?
2. Плотность распределения больше единицы?
3. Функция распределения отрицательной?

4. Плотность распределения отрицательной?

Ответ:1) нет; 2) да; 3)нет; 4)нет.

Задача 9.2. Какова размерность: 1) математического ожидания; 2) дисперсии; 3) среднего квадратического отклонения?

Ответ: 1) Размерность случайной величины.
2) Размерность квадрата случайной величины.
3) Размерность случайной величины.

Задача 9.3. Дискретная случайная величина Х задана законом распределения:

x_i	-5	2	3	4
p_i	0,4	0,3	0,1	0,2

Найти: 1) математическое ожидание, 2) дисперсию, 3) среднее квадратическое отклонение, 4) функцию распределения F(x), 5) построить график F(x).

Решение:

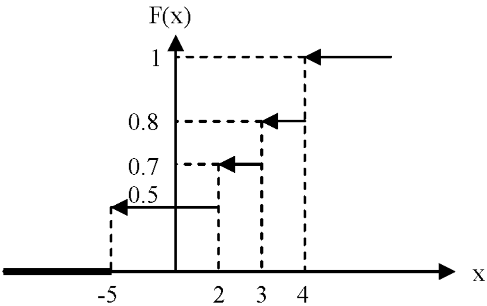
1) $M(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot p_i = (-5)\cdot 0{,}4 + 2\cdot 0{,}3 + 3\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}2 = -0{,}3.$

2) $D(X) = \sum_{i=1}^{4}(x_i \;\; m_x)^2 p_i = (-5+0,3)^2 \;\; \cdot 0,4+(2+0,3)^2 \;\; \cdot 0,3+(3+0,3)^2$ $\cdot 0,1+(4+0,3)^2 \cdot 0,2 = 15,21$.

3) $\sigma(X) = \sqrt{D_x} = \sqrt{15,21} = 3,9$.

4)
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -5; \\ 0,4 & \text{при } -5 < x \le 2; \\ 0,4+0,3=0,7 & \text{при } 2 < x \le 3; \\ 0,7+0,1=0,8 & \text{при } 3 < x \le 4; \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

5)



Задача 9.4. В одном ящике 4 синих и 12 красных шаров, в другом – 6 синих и 8 красных шаров. Из каждого ящика наугад взяли по одному шару. Рассматривается случайная величина X – число красных шаров среди вынутых двух шаров. Найти: 1) ряд распределения случайной величины X,

2) математическое ожидание M(X),

3) дисперсию D(X) и среднее квадратичное отклонение σ(X),

4) функци ю распределения F(x),

5) построить график F(x).

Р е ш е н и е.

1) Случайная величина X может принимать следующие возможные значения:

$x_1 = 0$ – ни одного красного шара (с · с),

$x_2 = 1$ – один красный шар (к · с +с · к),

$x_3 = 2$ – оба шара красные (к · к).

Находим вероятности, с которыми принимаются эти значения, используя теоремы умножения и сложения вероятности.

$$P_1 = \frac{4}{16}\cdot\frac{6}{14} = \frac{3}{28} \approx 0{,}11,$$

$$P_2 = \frac{12}{16}\cdot\frac{6}{14} + \frac{4}{16}\cdot\frac{8}{14} = \frac{13}{28} \approx 0{,}46,$$

$$P_3 = \frac{12}{16}\cdot\frac{8}{14} = \frac{12}{28} \approx 0{,}43.$$

Ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	2
p_i	3/28	13/28	12/28

Проверка:

$$\sum_{i=1}^{3} p_i = \frac{3}{28} + \frac{13}{28} + \frac{12}{28} = 1,$$

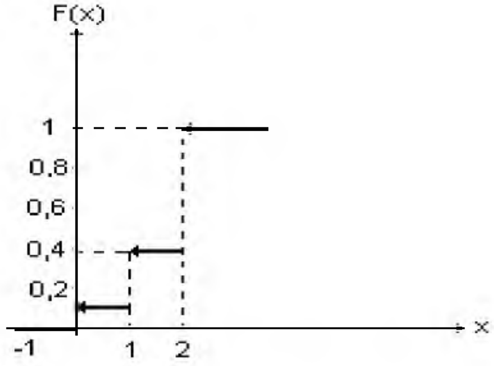
1) $M(x)=\sum_{i=1}^{3} x_i \cdot p_i = 0\cdot\frac{3}{28} + 1\cdot\frac{13}{28} + 2\cdot\frac{12}{28} = \frac{37}{28} \approx 1{,}32;$

2) $D(x)= \sum_{ш=1}^{3} (x_i - m_x)^2 \cdot p_i = (0-1{,}32)^2\cdot\frac{3}{28} + (1-1{,}32)^2\cdot\frac{13}{28} +$

$+(2-1{,}32)^2\cdot\frac{12}{28} \approx 0{,}43;$

3) $\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{0{,}43} \approx 0{,}66.$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ \dfrac{3}{28} & \text{при } 0 < x \le 1; \\ \dfrac{3}{28}+\dfrac{13}{28}=\dfrac{16}{28} & \text{при } 1 < x \le 2; \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$



Задача 9.5. В урне 5 шаров: 3 белых и 2 черных. Наудачу вынимают 3 шара. Рассматривается случайная величина X – число извлеченных белых шаров. Найти: 1) закон распределения случайной величины X,

2) функцию распределения F(x) и ее график,

3) математическое ожидание M(X),

4) дисперсию D(X) и среднее квадратическое отклонение σ(x).

Р е ш е н и е.

1) Случайная величина X может принимать следующие возможные значения:

$x_1 = 1$ – один белый шар среди трех шаров,

$x_2 = 2$ – два белых шара среди трех шаров,

$x_3 = 3$ – все три шара белые.

Находим вероятности, с которыми принимаются эти значения, используя классическую формулу вероятности (p = m/n)

$$p_1=\frac{C_3^1\cdot C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10};\quad p_2=\frac{C_3^2\cdot C_2^1}{C_5^3}=\frac{6}{10};\quad p_3=\frac{1}{C_5^3}=\frac{1}{10}.$$

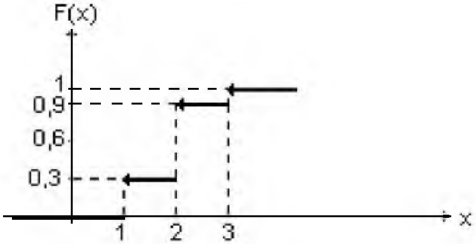
Закон распределения имеет вид:

x_i	1	2	3
p_i	0,3	0,6	0,1

$$\sum_{i=1}^{3} p_i = 0,3+0,6+0,1=1.$$

2) Исходя из закона распределения случайной величины X, запишем функцию распределения F(x):

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 1;\\ 0,3 & \text{при } 1<x\le 2;\\ 0,3+0,6=0,9 & \text{при } 2<x\le 3;\\ 1 & \text{при } x>3.\end{cases}$$



3) $M(x)=1\cdot 0,3+2\cdot 0,6+3\cdot 0,1=1,8$;

4) $D(x)=(1-1,8)^2\cdot 0,3+(2-1,8)^2\cdot 0,6+(3-1,8)^2\cdot 0,1=0,36$;

$\sigma(x)=\sqrt{D(x)}=\sqrt{0,36}=0,6.$

<u>Задача 9.6.</u> Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0;\\ a\,(1-\cos x) & \text{при } 0<x\le\pi;\\ 1 & \text{при } x>\pi.\end{cases}$$

Найти: 1) неизвестный параметр a и f(x),

2) построить график функций F(x) и f(x),

3) вероятность попаданий случайной величины в интервал (0; π/4),

4) математическое ожидание M(x), дисперсию D(x) и среднее квадратическое отклонение σ(x).

Р е ш е н и е.

1) Для нахождения неизвестного параметра a воспользуемся свойством:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Функция плотности вероятности f(x) = F' (x)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ a \sin x & \text{при } 0 < x \le \pi; \\ 0 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

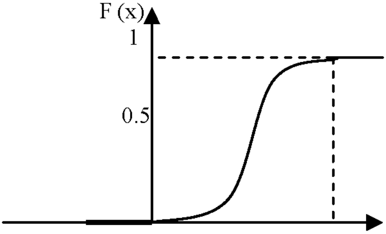
$$\int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{\pi} a \sin x\, dx + \int_{\pi}^{+\infty} 0\, dx = 1;$$

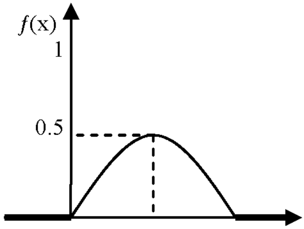
$$a \int_{0}^{\pi} \sin x\, dx = 1 \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{-\cos x\big|_0^\pi} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x) & \text{при } 0 < x \le \pi; \\ 1 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ \frac{1}{2} \sin x & \text{при } 0 < x \le \pi; \\ 0 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$





3) $P\left(0<X<\frac{\pi}{4}\right) = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}(1 - \cos 0) =$

$= \frac{2-\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}146$ или

$$P\left(0<X<\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin x dx = -\frac{1}{2}\cos x \Big|_0^{\pi/4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}146.$$

4) $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\sin x dx = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57.$

Примечание: интеграл берется по частям.

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_x)^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \sin x\,dx = \frac{\pi^2-8}{2} \approx 0{,}93.$$

Примечание: интеграл берется по частям дважды.

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}93} = 0{,}96.$

<u>Задача 9.7.</u> Непрерывная случайная величина X задана функцией плотности вероятностей в виде:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ \frac{1}{2}x & \text{при } 0 < x \le 2; \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти: 1) функцию распределения F(x),

2) построить графики f(x) и F(x),

3) $P(1 \le X < 2)$, 4) $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

<u>Р е ш е н и е.</u>

1) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

Найдем выражения функции распределения F(x) на различных участках:

$-\infty < x \le 0$; $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$,

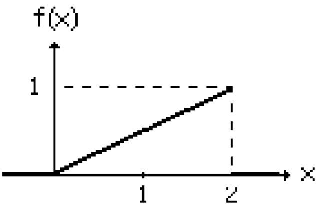
$0 < x \le 2$; $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int\limits_{0}^{x} \frac{1}{2}\,t\,dt = \frac{x^2}{4}$,

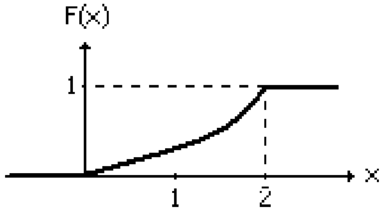
$x > 2$; $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{2} \frac{1}{2} t\,dt + \int\limits_{2}^{x} 0dt = 1$.

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ \dfrac{x^2}{4} & \text{при } 0 < x \le 2; \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

2)





3) $P(1 \le X < 2) = F(2) - F(1) = \frac{2^2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$;

4) $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx = \int\limits_{-\infty}^{0} x\cdot 0\ dx + \int\limits_{0}^{2} x\cdot\frac{1}{2}x\ dx + \int\limits_{2}^{+\infty} x\cdot 0\, dx =$

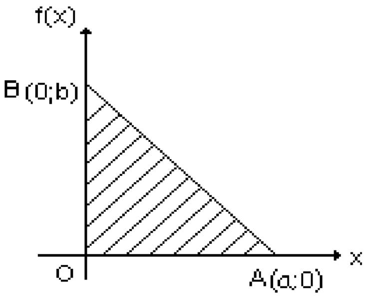
$=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} x^2dx = \frac{1}{2}\ \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{4}{3};$

$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x)\ dx = \int\limits_{0}^{2} (x - \frac{4}{3})^2 x\ dx = \int\limits_{0}^{2} (x^3 - \frac{8}{3}x^2 +$

$+\frac{16}{9}x)\ dx = (\frac{x^4}{4} - \frac{8}{9}x^3 + \frac{8}{9}x^2)\Big|_0^2 = \frac{2}{9} \approx 0{,}22;$

$\sigma(X) = \sqrt{\frac{2}{9}} = 0{,}47.$

Задача 9.8. Плотность случайной величины X распределена по «закону прямоугольного треугольника» в интервале (0; a).



1) Написать выражение плотности распределения.

2) Найти функцию распределения F(x).

3) Найти вероятность попадания случайной величины X на участок от $\frac{a}{2}$ до a

4) Найти M(X), D(X), σ(X).

Р е ш е н и е.

1) Воспользуемся свойством функции плотности $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$, которое в данном случае будет выглядеть $\int\limits_0^a f(x)dx = 1$. Этот интеграл означает равенство единице площади треугольника OAB.

В результате получим:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ \frac{2}{a}(1-\frac{x}{a}) & \text{при } 0 < x \le a; \\ 0 & \text{при } x > a. \end{cases}$$

2) Так как $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, то на участке $(-\infty; 0)$: $F(x) = 0$;

на участке $(0; a]$: $F(x) = \int\limits_0^x \frac{2}{a}(1-\frac{t}{a})\,dt = \frac{2}{a}\left(t \Big|_0^x - \frac{1}{2a}t^2 \Big|_0^x \right) =$

$= \frac{x}{a}(2-\frac{x}{a})$;

на участке $(a; +\infty)$: $F(x) = \int\limits_0^a \frac{2}{a}(1-\frac{t}{a})\,dt = \frac{2}{a}\left(t \Big|_0^a - \frac{1}{2a}t^2 \Big|_0^a \right) = 1$.

Таким образом, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ \frac{x}{a}(2-\frac{x}{a}) & \text{при } 0 < x \le a; \\ 1 & \text{при } x > a. \end{cases}$

3) $P(\frac{a}{2} < X < a) = F(a) - F(\frac{a}{2}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

4) $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \frac{2}{a}\int\limits_0^a x(1-\frac{x}{a})\,dx =$

$= \frac{2}{a}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3a}x^3\right)\Big|_0^a = \frac{a}{3}$;

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x)\,dx = \frac{2}{a}\int_0^a (x - \frac{a}{3})^2 (1 - \frac{x}{a})dx =$$

$$= \frac{2}{9a}\int_0^a (3x - a)^2 (a - x)dx = \frac{2}{9a}\int_0^a (15ax^2 - 7a^2x - 9x^3 + a^3)dx =$$

$$= \frac{a^2}{18};$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{a^2}{18}} = \frac{a}{3\sqrt{2}}.$$

Задача 9.9. В партии из 6 деталей имеется 4 стандартных. Наудачу отобраны 3 детали. 1) Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных. 2) Найти функцию распределения F(x) и построить ее график. 3) Вычислить M(X), D(X), σ(X).

Ответ.

1)

2)
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1; \\ 0{,}2 & \text{при } 1 < x \le 2; \\ 0{,}8 & \text{при } 2 < x \le 3; \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

3) M(X) = 2; D(X) = 0,4; σ(X) = 0,63.

Задача 9.10. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1; \\ \frac{1}{2}(x^2 - x) & \text{при } 1 < x \le 2; \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

2) $P(\frac{\ }{3} \le X < \frac{\ }{3})$, 3) M(X), D(X).

<u>Ответ.</u>

1) $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1; \\ x - 0{,}5 & \text{при } 1 < x < 2; \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

2) $P(\frac{4}{3} \le X < \frac{5}{3}) = \frac{1}{3}$; 3) $M(X) = \frac{19}{12}$; $D(X) = \frac{11}{144}$.

<u>Задача 9.11</u>. Плотность распределения случайной величины X задана функцией:

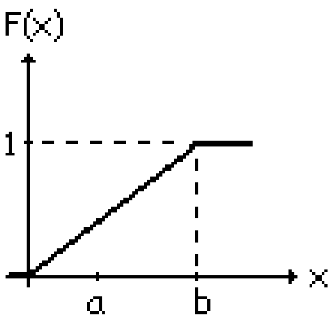
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -1; \\ a\,x^2 & \text{при } -1 < x < 1; \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти: 1) параметр a, 2) функцию распределения F(x), 3) M(X), D(X).

<u>Ответ.</u>1) $a = \frac{3}{2}$.

2) $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -1; \\ \frac{1}{2}(x^3+1) & \text{при } -1 < x \le 1; \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$ 3) $M(x) = 0$, $D(x) = \frac{3}{5}$.

<u>Задача 9.12</u>. Функция распределения случайной величины X задана графиком. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.



О т в е т. $M(X) = \frac{a+b}{2}$; $D(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$.

Задача 9.13. Следующая таблица представляет распределение годовой прибыли (случайная величина X) фирмы.

X	-10	-5	0	0,10	20	25
p	0,05	0,15	0,25	0,30	0,20	0,05

Определить ожидаемую прибыль, среднее квадратическое отклонение, вероятность положительной прибыли.

О т в е т. $M(X) = 7$, $\sigma(X) = 10{,}04$, $P(X > 0) = 0{,}55$.

§ 10. Некоторые типичные законы распределения случайных величин

1. Б и н о м и а л ь н ы й з а к о н р а с п р е д е л е н и я.

Формула Бернулли определения вероятности появления события А «к» раз в n независимых опытах, если вероятность появления события А в каждом опыте одна и таже и равна p: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $0<p<1$, $q = 1-p$, выражает закон распределения случайных чисел $0 \le к \le n$ появления события А в n опытах. При этом ряд распределения будет иметь вид

к	0	1	2	. . . . .	n
$P_n(k)$	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2)$	. . . . .	$P_n(n)$

Данное распределение называется биномиальным законом распределения вероятностей или законом Бернулли, т.к. вероятности $P_n(к)$ являются членами разложения бинома $(p+q)^n = q^n + C_n^1 q^{n-1}p + \ldots p^n$.

Математическое ожидание числа к : $M(к) = np$.

Дисперсия $D(к) = npq$.

Задача 10.1. Производятся три независимых опыта, в каждом из которых событие А появляется с вероятностью 0,4. Рассматривается случайная величина Х – число появлений события А в трех опытах. Построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины Х. Найти ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

Решение.

Случайная величина Х дискретная и имеет возможные значения: 0, 1, 2, 3. Вероятности этих возможных значений определяются по формуле Бернулли.

$p = 0,4; \quad q = 1 - p = 0,6; \quad n = 3;$

$P(0) = q^3 = 0.6^3 = 0,216;$

$P(1) = C_3^1\, pq^2 = 3 \cdot 0,4 \cdot 0,6^2 = 0.432;$

$P(2) = C_3^2\, p^2 q = 3 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6 = 0,288;$

$P(3) = p^3 = 0,4^3 = 0,064.$

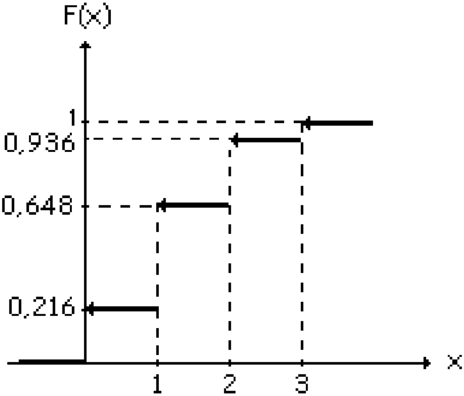
Ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

Находим функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ 0,216 & \text{при } 0 < x \le 1; \\ 0,216+0,432=0,648 & \text{при } 1 < x \le 2; \\ 0,648+0,288=0,936 & \text{при } 2 < x \le 3; \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Построим график функции F(x):



Найдем числовые характеристики:
M(X) = np= 3 · 0,4 = 1,2;
D(X) = npq = 3 · 0,4 · 0,6 = 0,72.
$\sigma(X) = \sqrt{0,72} = 0,85$.

Задача 10.2. Монету подбрасывают 6 раз. Рассматривается случайная величина X – число выпавших гербов. Построить ряд распределения этой случайной величины и найти ее характеристики: M(X), D(X), σ(X)

О т в е т.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	$1/2^6$	$6/2^6$	$15/2^6$	$20/2^6$	$15/2^6$	$6/2^6$	$1/2^6$

M(x) = 3; D(x) = 1,5; σ(x) = 1,224.

2. Г е о м е т р и ч е с к о е р а с п р е д е л е н и е.

Пусть проводится ряд независимых опытов до первого появления события A, после чего опыты прекращаются. Вероятность события A в каждом опыте равна p. Случайная величина X – число произведенных опытов. Найдём ряд распределения величины X, ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Возможные значения случайной величины X: 1, 2, 3,… (теоретически они ничем не ограничены). Для того чтобы величина X приняла значение 1, необходимо, чтобы событие A произошло в первом же опыте; вероятность этого равна p. Для того чтобы величина X приняла значение 2, нужно, чтобы в первом опыте событие A не появилось, а во втором – появилось. Вероятность этого равна pq, где q = 1 – p и т.д. Ряд распределения величины X имеет вид:

X	1	2	3	…	i	…
p_i	p	pq	q^2p	…	$q^{i-1}p$	…

Название “геометрическое распределение” объясняется тем, что вероятности, записанные во второй строке таблицы, образуют геометрическую прогрессию.

Математическое ожидание величины X выражается суммой ряда:

$m_x=1\cdot p+2\cdot qp+3\cdot q^2p+\ldots+i\cdot q^{i-1}p+\ldots=p(1+2q+3q^2+\ldots+iq^{i-1}+\ldots)$.

Нетрудно видеть, что ряд, стоящий в скобках, представляет собой результат дифференцирования ряда, состоящего из членов бесконечной геометрической прогрессии: $q+q^2+q^3+\ldots+q^i+\ldots=\dfrac{q}{1-q}$.

Следовательно,

$$1+2q+3q^2+\ldots+iq^{i-1}+\ldots=\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right)=\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{1}{p^2}. \qquad (*)$$

В результате $m_x=p\cdot\dfrac{1}{p^2}=\dfrac{1}{p}$.

Дисперсию вычисляем по формуле:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2p_i-m_x^2.$$

Сначала вычислим $\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i^2p_i$.

$$\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2p_i=1^2p+2^2qp+3^2q^2p+\ldots+i^2q^{i-1}p+\ldots=$$

$$=p(1^2+2^2q+3^2q^2+\ldots+i^2q^{i-1}+\ldots).$$

Для вычисления суммы ряда, стоящего в скобках, умножим на q ряд (*):

$$q+2q^2+3q^3+\ldots+iq^i+\ldots=\frac{q}{(1-q)^2}.$$

Дифференцируя этот ряд по q, получим:

$$1+2^2q+3^2q^2+\ldots+i^2q^{i-1}+\ldots=\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{(1-q)^2}\right)=\frac{1+q}{(1-q)^3}.$$

В результате, имея в виду, что p=1-q,

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^{\,2} p_i = p\cdot\frac{1+q}{(1-q)^3}=(1-q)\frac{1+q}{(1-q)^3}=\frac{1+q}{(1-q)^2}.$$

Теперь дисперсия будет равна

$$D_x=\frac{1+q}{(1-q)^2}-\frac{1}{1-q}=\frac{q}{(1-q)^2}=\frac{q}{p^2}=\frac{1-p}{p^2},$$

$$\sigma_x=\sqrt{D_x}=\frac{\sqrt{q}}{p}=\frac{\sqrt{1-p}}{p}.$$

Выпишем окончательно формулы числовых характеристик для задач подобного типа: $m_x=\dfrac{1}{p}$, $D_x=\dfrac{1-p}{p^2}$, $\sigma_x=\dfrac{\sqrt{1-p}}{p}$.

Задача 10.3. На базе рассмотренной задачи положим вероятность появления события А в одном опыте равной р =0,1. Найдём по выведенным выше формулам математическое ожидание случайной величины Х (ожидаемое число опытов до первого появления события А) и среднее квадратическое отклонение.

Р е ш е н и е.

$$m_x=\frac{1}{0{,}1}=10; \qquad \sigma_x=\frac{\sqrt{1-0{,}1}}{0{,}1}\approx 9.$$

Задача 10.4. Для обнаружения источника неисправности в вычислительной машине проводятся пробы (тесты). В каждой пробе неисправность независимо от других проб локализуется с вероятностью р=0,2. На каждую пробу в среднем уходит 3 мин. Найти математическое ожидание времени, которое потребуется для локализации неисправности.

Р е ш е н и е.

$$m_x=\frac{1}{p}=\frac{1}{0{,}2}=5.$$

На эти пять проб потребуется в среднем 5 · 3 = 15 (минут).

3. З а к о н   П у а с с о н а.

Дискретная случайная величина X называется распределенной по закону Пуассона, если ее возможные значения: 0,1,2,…,k,…, а вероятность того, что x=k, выражается формулой

$$P(k) = \frac{a^{\kappa}}{\kappa!} \cdot e^{-a},$$

где $a > 0$ – параметр закона Пуассона.

Закон распределения Пуассона является предельным для биномиального распределения, когда число повторения опытов n велико ($n \to \infty$), а вероятность p осуществления события A в одном опыте мала ($p \to 0$), но произведение np=a=const. Примерами случайных величин, имеющих распределение Пуассона, являются следующие: число вызовов на телефонной станции за время t ; число опечаток в большом тексте; число бракованных деталей в большой партии; число α - частиц, испускаемых радиоактивным источником, и т.д. При этом считается, что события появляются независимо друг от друга с постоянной средней интенсивностью, харак-теризующейся параметром a=np.

Ряд распределения случайной величины X, распределенной по закону Пуассона, имеет вид:

x_k	0	1	2	…	k	…
p_k	e^{-a}	$\frac{a}{1!} \cdot e^{-a}$	$\frac{a^2}{2!} \cdot e^{-a}$	…	$\frac{a^{\kappa}}{\kappa!} \cdot e^{-a}$	…

Ряд $\sum_{\kappa=0}^{\infty} P(\kappa) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{a^{\kappa} e^{-a}}{\kappa!}$ сходится, и его сумма равна 1. Математическое ожидание M(X)=a, дисперсия D(X)=a.

<u>Задача 10.5</u>. Случайная величина X подчинена закону Пуассона с математическим ожиданием a= 3. Построить ряд распределения и многоугольник распределения. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем ее математическое ожидание.

<u>Р е ш е н и е.</u> Ряд распределения имеет вид:

x_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8

p_k	$e^{-3}\approx$ 0,05	$3e^{-3}\approx$ 0,15	$4{,}5e^{-3}\approx$ 0,225	$4{,}5e^{-3}\approx$ 0,225	$\frac{27}{8}\cdot e^{-3}\approx$ 0,17	$\frac{81}{40}\cdot e^{-3}\approx$ 0,10	$\frac{81}{80}\cdot e^{-3}\approx$ 0,05	$\frac{243}{560}\cdot e^{-3}\approx$ 0,02	$\frac{729}{4480}\cdot e^{-3}\approx$ 0,01

На рис. 13 представлен многоугольник распределения
$P(X<3) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=P_0 +P_1 + P_2 = 0{,}05+0{,}15+0{,}225 =0{,}425$.

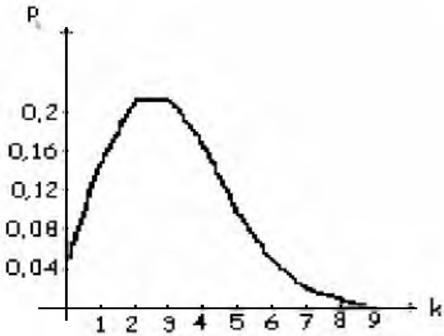


Рис.13

Задача 10.6. При работе электронной вычислительной машины время от времени возникают неисправности (сбои). Среднее число сбоев за сутки равно 1,5. Найти вероятности следующих событий:

A – за двое суток не будет ни одного сбоя;

B – в течение суток произойдет хотя бы один сбой;

C – за неделю работы машины произойдет не менее трех сбоев.

Р е ш е н и е. a =1,5 – среднее число сбоев за сутки.

1) Среднее число сбоев за двое суток: $a_2 = 2 \cdot 1{,}5 = 3$; k=0.

$P(A) = P(X=0)=e^{-3} \approx 0{,}05$;

2) $a_1 =1{,}5$; $k \geq 1$;

$P(B) = P(X \geq 1)=1-P(X=0)=1 - e^{-a1} = 1- e^{-1,5} = 1-0{,}223 =0{,}777$;

3) $a_3 = 1{,}5 \cdot 7 =10{,}5$; $k =0$; $k_1=1$; $k_2=2$;

$P_0 = e^{-10.5}$; $P_1 = 10.5\, e^{-10.5}$; $P_2 = \frac{10{,}5^2}{2}\cdot e^{-10,5}$;

$P(C) = 1 -(P_0 +P_1+P_2) = 1 - 66{,}625\, e^{-10.5} = 1 - 0{,}002 =0{,}998$.

Задача 10.7. Математическое ожидание числа вызовов, поступающих на телефонную станцию за час, равно 30. Найти вероятность того, что за минуту поступит не менее двух вызовов.

Ответ. 0,09.

4. Показательный закон распределения.

Непрерывная случайная величина X имеет показательное распределение, если ее плотность имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$ – параметр показательного закона.

Показательное распределение наиболее часто встречается в теории надежности. В задачах надежности X означает время между двумя смежными случайными отказами приборов, $\frac{1}{\lambda}$ – среднее время между моментами наступления отказов. Этот закон используется также при описании распределения модулей векторных погрешностей в технологии машиностроения.

Математическое ожидание $M(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Дисперсия $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

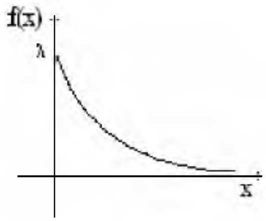
Задача 10.8.

Случайная величина X подчинена показательному закону с параметром λ.

а) Построить кривую распределения; б) найти функцию распределения F(x); в) найти вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше ее математического ожидания.

Решение.

а)



б) при $x > 0$ $F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t}\Big|_0^x =$

$= 1 - e^{-\lambda x}$.

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x<0; \\ 1-e^{-\lambda x} & \textit{при} \quad x>0. \end{cases}$$

в) $M(X) = \frac{1}{\lambda}$; $P(X < \frac{1}{\lambda}) = F(\frac{1}{\lambda}) = 1 - e^{-1} \approx 0{,}632$.

Задача 10.9. Испытываются два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы приборов имеет показательное распределение с параметрами 0,04 и 0,08. Найти вероятность того, что за 6 часов: а) оба элемента откажут; б) хотя бы один элемент откажет; в) откажет только один элемент.

Р е ш е н и е. Введем обозначения:

Событие А – откажет первый элемент;

Событие В – откажет второй элемент.

$P(A) = F_1(6) = 1 - e^{-0.04 \cdot 6} = 0{,}213$;

$P(B) = F_2(6) = 1 - e^{-0.08 \cdot 6} = 0{,}361$;

а) $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}213 \cdot 0{,}361 = 0{,}081$;

б) $P(A\bar{B} + \bar{A}B + AB) = 1 - P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 1 - 0{,}787 \cdot 0{,}619 = 0{,}513$;

в) $P(A\bar{B} + \bar{A}B) = 0{,}213 \cdot 0{,}619 + 0{,}787 \cdot 0{,}381 = 0{,}432$.

Задача 10.10. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение с параметром 0,01. Найти вероятность того, что за время x=50 часов: а) элемент откажет; б) элемент не откажет.

Ответ. а) 0,39; б) 0,61.

Рассмотренные законы распределения описывают распределения случайных величин дискретного типа, в этих законах устанавливается непосредственная зависимость между значениями случайной величины и вероятностями ее осуществления.

Законы распределения случайных величин непрерывного типа, как правило, задаются с помощью функции плотности их вероятностей.

5. Равномерный закон распределения.

Непрерывная случайная величина X называется равномерно распределенной в конечном интервале (a,b), если все ее значения лежат в пределах этого интервала и ее плотность распределения в этом интервале постоянна:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a; \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при } a < x < b; \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

График функции плотности f(x) имеет вид: (рис. 14)

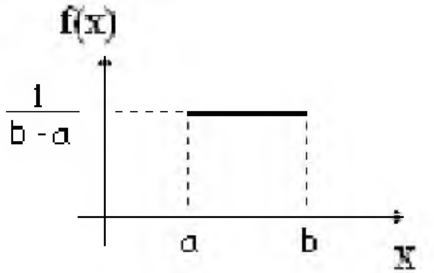


Рис. 14

Математическое ожидание $M(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

Дисперсия $D(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

<u>Задача 10.11</u>. На перекрестке стоит автоматический светофор, в котором 1 минуту горит зеленый свет и 0,5 минуты – красный, затем опять 1 минуту горит зеленый свет, 0,5 минут – красный и т.д. Некто подъезжает к перекрестку на машине в случайный момент, не связанный с работой светофора. Найти вероятность того, что он проедет перекресток, не останавливаясь.

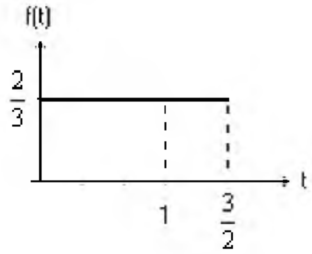


Рис. 15

Р е ш е н и е. Момент проезда автомашины через перекресток распределен равномерно в интервале, равном периоду смены цветов в светофоре. Этот период равен 1 + 0,5 = 1,5 (мин)

$$f(t) = \frac{b-a}{2} = \frac{\frac{3}{2}-0}{2} = \frac{2}{3}.$$

Для того чтобы машина проехала через перекресток, не останавливаясь, достаточно, чтобы момент проезда перекрестка пришелся на интервал времени (0, 1). Для случайной величины, подчиненной закону постоянной плотности в интервале (0; 1,5), вероятность того, что она попадет в интервал (0, 1), равна площади прямоугольника со сторонами 1 и $\frac{2}{3}$: $1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ (рис.15).

6. Нормальный закон распределения.

Нормальный закон распределения имеет широкое применение в практике. Этому закону при некоторых общих условиях подчиняются случайные величины, которые являются суммой большого числа независимых и относительно малых слагаемых (схема сумм). По этой схеме распределяются, например, случайные погрешности размеров, возникающие в машиностроении при обработке деталей, поскольку они представляют результаты суммарного действия погрешностей станка, инструмента, приспособления, заготовок и т.д.

Непрерывная случайная величина X называется распределенной по нормальному закону, если ее плотность распределения равна:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

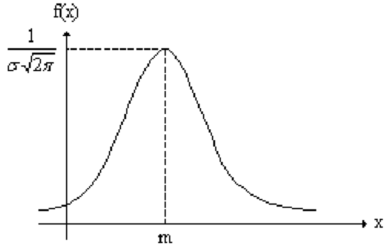


Рис.16

График функции плотности вероятностей нормального распределения изображен на рис.16.

Математическое ожидание M(X) = m, дисперсия D(X) = σ^2.

Вероятность попадания случайной величины X в интервал (α, β) выражается формулой

$$P\ (\alpha<x<\beta) = \Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right).$$

Функция распределения нормального закона распределения

$$F(x)= \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e - \frac{(x-m)2}{2\sigma 2} dx = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа являющаяся табулированной функцией (табл. П2).

Вероятность попадания случайной величины на симметричный интервал относительно математического ожидания равна: $P(|X-m|<\delta) = 2\Phi(\frac{\delta}{\sigma})$.

Мода и медиана для нормального закона совпадают с математическим ожиданием, асимметрия равна 0, эксцесс равен 3.

Разберите следующие задачи:

<u>Задача 10.12.</u> Случайная величина X распределена нормально. Среднее квадратическое отклонение этой величины σ = 2, а математическое ожидание m = 6.

Найти:

а) вероятность того, что X примет значение, заключённое в интервале (4;7);

б) вероятность того, что отклонение случайной величины от её математического ожидания по абсолютной величине меньше 0,3;

в) X примет значение, большее 15.

Р е ш е н и е.

а) Так как $\alpha = 4$, $\beta = 7$, то

$$P(4 < X < 7) = \Phi(\frac{7-6}{2}) - \Phi(\frac{4-6}{2}) = \Phi(0{,}5) - \Phi(-1) = \Phi(0{,}5) + \Phi(1) =$$

$$= 0{,}1915 + 0{,}3413 = 0{,}5328;$$

б) $\delta = 0{,}3$, поэтому

$$P(|X-6| < 0{,}3) = 2\Phi(\frac{0{,}3}{2}) = 2\Phi(0{,}15) = 2 \cdot 0{,}0596 = 0{,}1192;$$

в) так как разность между значениями X и математическим ожиданием m больше 9, а $9 > 3\sigma = 6$, то в соответствии с правилом трёх сигм $P(X>15) = 0$.

Задача 10.13. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно 3, дисперсия 4. Найти $P(-1 \le X < 5)$.

Р е ш е н и е. По условию $m=3, \sigma^2 = 4$, $\sigma =2$, $\alpha = -1$, $\beta = 5$.

$$P(-1 \le X < 5) = \Phi(\frac{5-3}{2}) - \Phi(\frac{-1-3}{2}) = \Phi(1) + \Phi(2).$$

Здесь использовано свойство: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

$P(-1 \le X < 5) = 0{,}34+0{,}48 = 0{,}82$.

Задача 10.14. Браковка шариков для подшипников производится следующим образом: если шарик не проходит через отверстие диаметром d_1, но проходит через отверстие диаметром $d_2 > d_1$, то его размер считается приемлемым. Если какое-нибудь из этих условий не выполняется, то шарик бракуется. Известно, что диаметр шарика есть нормально распределенная случайная величина с числовыми характеристиками:

$$m = \frac{d_1 + d_2}{2}, \qquad \sigma = \frac{d_2 - d_1}{4}.$$

Определить вероятность p того, что шарик будет забракован.

Р е ш е н и е. Случайная величина X – диаметр шарика. По условию она распределена по нормальному закону.

$$P = 1- P(d_1 < X < d_2) = 1 - [\Phi(\frac{d_2 - m}{\sigma}) - \Phi(\frac{d_1 - m}{\sigma})];$$

$$\frac{d_2 - m}{\sigma} = \frac{d_2 - \frac{d_1 + d_2}{2}}{\sigma} = \frac{d_2 - d_1}{2\sigma};$$

$$\frac{d_1 - m}{\sigma} = \frac{d_1 - \frac{d_1 + d_2}{2}}{\sigma} = \frac{d_1 - d_2}{2\sigma} = -\frac{d_2 - d_1}{2\sigma};$$

$$p = 1 - [\ \Phi(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma}) - \Phi(-\ \frac{d_2 - d_1}{2\sigma})] = 1 - [\ \Phi(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma}) +$$

$$+\Phi(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma})] = 1 - 2\Phi(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma});$$

$$\frac{d_2 - d_1}{2\sigma} = \frac{d_2 - d_1}{2 \cdot \frac{d_2 - d_1}{4}} = 2.$$

$$p = 1 - 2\Phi(2) = 1 - 2 \cdot 0{,}48 = 0{,}04.$$

Задача 10.15. Случайная величина X подчинена нормальному закону с математическим ожиданием m = 0. Вероятность попадания этой случайной величины на участок от $-a$ до a равна 0,5. Найти σ.

О т в е т. $\sigma = 1{,}48\, a$.

§11. Центральная предельная теорема

В различных процессах природы, в производстве, экономике происходят случайные события, характеризуемые случайной величиной X, которая определяется совокупным действием большого числа независимых событий со случайными величинами X_1, X_2, …, X_n так, что

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \ .$$

Примеры:

1. В технологии машиностроения производится массовая обработка однотипных деталей, с тем чтобы ее определенный размер был равен наперед заданному (номинальному) числу A, однако в действи-

тельности это число случайное – X. Отклонение X-A определяется действием многочисленных факторов: погрешностью при закреплении детали в приспособлении, погрешностью закрепления приспособления на станке, колебаниями станка, погрешностью угла заточки резца, его затуплением и т.п.

2. Производятся измерение длины или веса какого-нибудь предмета. Показания прибора являются случайной величиной X. На величину X влияют многочисленные факторы: дефекты измерительного прибора, влияние на него колебаний температуры, атмосферного давления, ошибки наблюдателя и многое другое. Таких примеров можно привести много.

Центральная предельная теорема состоит в следующем. Если случайная величина X является суммой последовательности случайных величин (X_1, X_2, X_n), т.е. X=$\sum_{i=1}^{n} X_i$, то при весьма общих и не слишком жестких ограничениях распределение величины X с увеличением n приближается к нормальному закону с функцией распределения

F(x)=$\frac{1}{2}+\Phi(\frac{x-m}{\sigma^2})$, где $-\infty < x < +\infty$, m, σ - соответственно математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, а $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ – функция Лапласа (табулированная функция).

Условие осуществления предельного перехода к нормальному распределению обеспечивается тем, что число членов последовательности (факторов, влияющих на величину X) n $\to \infty$ и ни один из членов не являются превалирующими, т.е. все факторы влияют на X почти одинаково.

Вследствие этой теоремы, для расчетов пределов изменения случайной величины X (что важно для определения в технологии машиностроения припусков) не нужно исследовать законы распределения слагаемых величин, достаточно найти (как правило, статистическим путем) математическое ожидание и дисперсию X. Тогда

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - m_x}{\sigma_X}) - \Phi(\frac{\alpha - m_x}{\sigma_X}).$$

Предельную теорему сформулировали и доказали в начале XX столетия русские математики А.А. Марков и А.М. Ляпунов (ученики выдающегося русского математика П. Чебышева). Установление этой теоремы позволило применить методы теории вероятностей к исследованию многих вопросов физики, химии, биологии, экономики, технологии машиностроения и других наук. Теория вероятностей, наука исследующая азартные игры, стала одним из основных методов общего научного исследования.

Частным случаем центральной предельной теоремы для дискретных случайных величин является теорема Муавра-Лапласа.

Если производится n независимых опытов, в каждом из которых событие А появляется с вероятностью p, то справедливо соотношение

$$P\ (\alpha < \frac{У - np}{\sqrt{npq}} < \beta\ ) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha),$$

где У – число появлений события А в n опытах, q = 1-p.

Задача 11.1. По полосе укреплений противника сбрасывается 100 серий бомб. При сбрасывании одной такой серии математическое ожидание числа попаданий равно 2, а среднее квадратическое отклонение числа попаданий равно 1,5. Найти приближенно вероятность того, что при сбрасывании 100 серий в полосу попадет от 180 до 220 бомб.

Р е ш е н и е.

Представим общее число попаданий как сумму чисел попаданий бомб в отдельных сериях:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i,$$

где X_i – число попаданий i-й серии.

Условия центральной предельной теоремы соблюдены, так как величины

$X_1, X_2, \ldots X_{100}$ распределены одинаково. Будем считать число n = 100 достаточным для того, чтобы можно было применить предельную теорему (на практике она обычно применима и при гораздо меньших n). Имеем:

$$m_x = \sum_{i=1}^{100} m_i = 200, \qquad \sum_{i=1}^{100} D_i = \sum_{i=1}^{100} 1{,}5^2 = 225.$$

Применяя формулу (38), получим

$$P\,(180<X<220) = \Phi\left(\frac{220-200}{\sqrt{225}}\right) - \Phi\left(\frac{180-200}{\sqrt{225}}\right) \approx 0{,}82,$$

то есть с вероятностью 0,82 можно утверждать, что общее число попаданий в полосу не выйдет за пределы 180 ÷ 220.

Задача 11.2 Происходит групповой воздушный бой, в котором участвуют 50 бомбардировщиков и 100 истребителей. Каждый бомбардировщик атакуется двумя истребителями. Таким образом, воздушный бой распадается на 50 элементарных воздушных боев, в каждом из которых участвует один бомбардировщик и два истребителя. В каждом элементарном бою вероятность сбития бомбардировщика равна 0,4. Вероятность того, что в элементарном бою будут сбиты оба истребителя, равна 0,2; вероятность того, что будет сбит ровно один истребитель, равна 0,5. Требуется: 1) найти вероятность того, что в воздушном бою будет сбито не менее 35% бомбардировщиков; 2) оценить границы, в которых с вероятностью 0,9 будет заключено число сбитых истребителей.

Решение.

1) Обозначим X – число сбитых бомбардировщиков.

$$X = \sum_{i=1}^{50} X_i$$

где X_i – число бомбардировщиков, сбитых в i-м элементарном бою.

Ряд распределения величины X_i имеет вид:

x_i	0	1
p_i	0,6	0,4

Отсюда $m_{xi} = 0{,}4$; $D_{xi} = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$; $m_x = 50 \cdot 0{,}4 = 20$;

$$\sigma_x = \sqrt{50 \cdot 0{,}24} \approx 3{,}464.$$

Полагаем $\beta = 50$ (равносильно, что $\beta = \infty$) , $\alpha = 17$.

Применим теперь формулу (38) :

$$P(17<X) = \frac{1}{2} - \Phi(\frac{17-20}{3{,}464}) \approx 0{,}807.$$

2) Обозначим У – число сбитых истребителей:

$$У = \sum_{i=1}^{50} У_i,$$

где $У_i$ – число истребителей, сбитых в i-м элементарном бою.

Ряд распределения величины $У_i$ имеет вид :

y_i	0	1	2
p_i	0,3	0,5	0,2

Отсюда находим математическое ожидание и дисперсию величины $У_i$:

$m_{yi} = 0{,}9$; $D_{yi} = 0{,}49$.

Для величины У: $m_y = 50 \cdot 0{,}9 = 45$; $D_y = 24{,}5$; $\sigma_y = 4{,}96$.

Определим границы участка, симметричного относительно $m_y = 45$, в который с вероятностью 0,9 попадет величина У. Обозначим половину длины этого участка l, тогда $p(|У - m_y| < l) = 2\Phi(\frac{l}{\sigma_y}) = 0{,}9$.

$$\Phi(\frac{l}{\sigma_y}) = 0{,}45.$$

По таблицам функции $\Phi(\frac{l}{\sigma_y})$ находим то значение аргумента, для которого $\Phi(x) = 0{,}45$. Это значение приближенно равно $x = 1{,}645$, т.е. $\frac{l}{\sigma_y} = 1{,}645 \rightarrow l = 8{,}14 \approx 8$.

Следовательно, с вероятностью около 0,9 можно утверждать, что число сбитых истребителей будет заключено в пределах $m_y \pm l$, то есть в пределах от 37 до 53.

§ 12. Закон больших чисел

Закон больших чисел устанавливает условия того, что с большой уверенностью можно ожидать наступления события, зависящего от большого числа событий, мало влияющих на его осуществление. Он выражается с помощью ряда неравенств и теорем.

Неравенство Чебышева. 1. Если случайная величина $X \geq 0$ и существует математическое ожидание m_x, то при любом $\varepsilon > 0$

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{m_x}{\varepsilon} \text{ или } P(X < \varepsilon) > 1 - \frac{m_x}{\varepsilon}.$$

2. Если существует математическое ожидание m_x и дисперсия D_x случайной величины X, то

$$P(|X - m_x| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D_x}{\varepsilon^2}.$$

Теорема Чебышева. Если последовательность попарно независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ имеет конечные математические ожидания и дисперсии этих величин равномерно ограничены (не превышают постоянного числа C), то среднее арифметическое случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий, то есть если ε – любое положительное число, то

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(x_i)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Задача 12.1. Вероятность наступления события А в каждом из 1000 независимых опытов равна 0,8. Найти вероятность того, что число наступлений события А в этих 1000 опытах отклонится от своего математического ожидания по абсолютной величине меньше чем на 50.

Р е ш е н и е. Пусть X – число наступлений события А в указанных 1000 опытах. Тогда $M(x) = 1000 \cdot 0{,}8 = 800$ и $D(x) = 1000 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 160$.

Воспользуемся неравенством:

$$P(|X - 800| \leq 50) \geq 1 - \frac{160}{2500} = 0{,}936.$$

Задача 12.2. Дисперсия каждой из 1000 независимых случайных величин

X_i = (i=1,2,...,1000) равна 4. Оценить вероятность того, что отклонение средней арифметической этих величин от средней арифметической их математических ожиданий по абсолютной величине не превзойдет 0,1.

Р е ш е н и е.

$$P\left(\left|\frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000}X_i - \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000}M(x_i)\right| < 0{,}1\right) \geq 1 - \frac{4}{1000\cdot 0{,}1^2} = 0{,}6.$$

Задачи к § 1 – 2, 5 – 6

1. Три стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75; для второго – 0,8; для третьего – 0,9. Найти вероятность того, что: 1) все три стрелка попадут в цель; 2) все трое промахнутся; 3) только один стрелок попадёт в цель; 4) хотя бы один стрелок попадёт в цель.

2. В первом ящике 6 белых и 4 чёрных шара, во втором – 7 белых и 3 чёрных. Из каждого ящика наугад вынимают по одному шару. Чему равна вероятность того, что вынутые шары разного цвета?

3. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность поражения для первого стрелка равна 0,65, для второго – 0,7. Найти вероятность того, что: а) оба стрелка поразят мишень, б) оба стрелка промахнутся, в) хотя бы один из стрелков поразит мишень.

4. Имеются три транзистора с разных заводов. Вероятность выхода из строя в течение года транзистора с первого завода равна 0,1, со второго – 0,4, с третьего – 0,2. Найти вероятность того, что в течение года выйдут из строя только два транзистора.

5. Из партии, в которой 20 деталей без дефектов и 5 деталей с дефектами, берут наудачу 3 детали. Чему равна вероятность того, что: 1) все три детали без дефектов; 2) по крайней мере, одна деталь без дефектов?

6. Электрическая цепь состоит из трёх элементов с вероятностями безотказной работы соответственно 0,5; 0,9; 0,7. Для работы цепи достаточно работы двух элементов. Какова вероятность, что цепь работает?

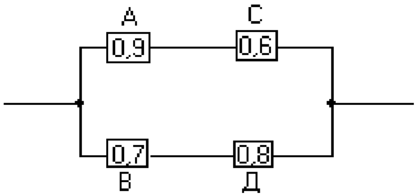
7. Ящик содержит 10 деталей, среди которых 3 стандартных. Найти вероятность того, что из наудачу отобранных 5 деталей окажется не более одной стандартной.

8. Брошены два одинаковых игральных кубика. Найти вероятность того, что цифра 6 появится хотя бы на одной грани.

9. Для поражения цели достаточно попадания хотя бы одного снаряда. Произведено два залпа из двух орудий (4 выстрела). Найти вероятность поражения цели, если вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,3, а из второго – 0,4.

10. В урне лежат 12 белых и 8 красных шаров. Вынули 8 шаров. Какова вероятность того, что: 1) три из них красные, 2) красных шаров вынуто не более трёх?

11. Найти вероятность безотказной работы схемы, если указаны вероятности безотказной работы каждого элемента.

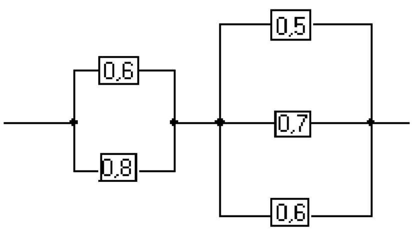


12. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность поражения мишени ими обоими равна 0,2; вероятность поражения мишени хотя бы одним из них – 0,9. Найти вероятность поражения мишени первым, если известно, что вероятность промаха у второго равна 0,3.

13. В урне два белых и три чёрных шара. Два игрока поочерёдно вынимают из урны наугад по одному шару без возвращения. Выигрывает тот, кто раньше вытащит белый шар. Найти вероятность того, что выиграет первый игрок.

14. В лотерее из 500 билетов 50 билетов являются выигрышными. Найти вероятность того, что среди трёх купленных билетов имеется хотя бы один выигрышный.

15. Найти вероятность обрыва электрической цепи, если на схеме указаны вероятности безотказной работы элементов.



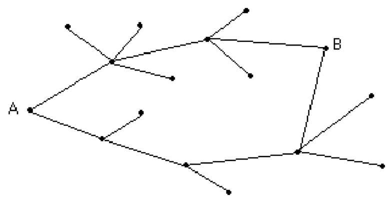
16. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и набирает её наудачу. Но он помнит, что она нечётная. Найти вероятность того, что он будет звонить не более чем в три места.

17. Человек, идущий по улице, может оказаться с вероятностью 0,2 брюнетом, с вероятностью 0,3 блондином, с вероятностью 0,4 шатеном, с вероятностью 0,1 рыжим. Какова вероятность, что среди трёх человек, идущих по улице, будет один брюнет и хотя бы один блондин?

18. Информация, закодированная 0 или 1, передаётся через три прибора А, В, С. Приборы могут с вероятностью 0,1 искажать информацию (1 заменять на 0 или наоборот). Какова вероятность получения достоверной информации?

19. На 20 карточках написаны 20 вопросов. Студент берёт одну карточку, и если отвечает на вопрос, то получает зачёт. Если он не знает ответа, то карточку откладывает и берёт другую. Можно использовать три карточки. Какова вероятность получить зачёт, если студент знает ответы на 12 вопросов?

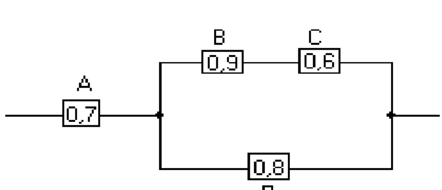
20. Найти вероятность попадания из пункта А в пункт В, если на развилках дорога выбирается случайным образом с равновероятным выбором пути?



21. Из 20 банок 5 имеют трещины. Выбрали 3 банки. Какова вероятность того, что среди них менее двух имеют трещины?

22. Из колоды в 36 карт вынимают три карты (без возвращения). Найти вероятность того, что первой вынута карта бубновой масти, второй – туз пик, а третьей – карта тёмной масти.

23. Участок электрической цепи состоит из четырёх элементов с указанной на них вероятностью безотказной работы. Какова вероятность безотказной работы схемы?



24. Вероятность уничтожения цели при одном выстреле равна p=0,5. Определить число выстрелов n, необходимых для поражения цели, с вероятностью, большей или равной 0,95.

25. В первом ящике 2 белых и 10 чёрных шаров, во втором ящике 8 белых и 4 чёрных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность того, что один из вынутых шаров белый, а другой– чёрный?

26. В ящике 6 белых и 8 чёрных шаров. Из ящика вынули два шара. Найти вероятность того, что хотя бы один из них белый.

27. На складе имеется 10 ящиков со стеклом, причём 6 из них содержат стекло повышенного качества. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых трёх ящиков хотя бы два окажутся со стеклом повышенного качества.

28. Из урны, в которой находится 5 белых и 3 чёрных шара, взяли 2 шара, отметили их цвет, затем вернули в урну, перемешали и снова взяли 2 шара. Найти вероятность того, что было зафиксировано 2 белых и 2 чёрных шара.

29. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,2. Какова вероятность того, что обладатель 5 лотерейных билетов выиграет: а) по всем пяти билетам; б) хотя бы по одному; в) ни по одному.

30. Рабочий обслуживает четыре однотипных станка. Вероятность того, что любой станок потребует внимания рабочего в течение смены, равна 0,6. Предполагая, что неполадки на станках независимы, найти вероятность того, что в течение смены потребуют внимания рабочего: а) все четыре станка; б) ни один из станков; с) по крайней мере, один станок.

31. Компания “Кока-кола” разыгрывает 10 призов. Для этого она выпускает первую партию из 10 бутылок с изображением на внутренних сторонах пробок половинки каждого приза, а затем – вторую партию с другой половинкой этих же призов. Для выигрыша нужно предъявить две половинки одного и того же приза. Глеб покупает одну бутылку из первой партии и одну из второй. Найти вероятность того, что он выиграет приз. Какова вероятность выиграть приз, если покупать по 2 бутылки из каждой партии?

Задачи к § 7

1. Имеются 4 урны. В первой 1 белый и 1 чёрный шар, во второй 2 белых и 3 чёрных шара, в третьей 3 белых и 5 чёрных шаров, в четвёртой 4 белых и 4 чёрных шара. Из наугад выбранной урны вынимают шар. Какова вероятность, что это белый шар?

2. По линии связи передаются два сигнала "точка" и "тире", причём первый с вероятностью 0,75, второй – 0,25. $1/8$ часть сигналов "точка" искажается и принимается как "тире" и, наоборот, $1/10$ часть "тире" принимается как "точка". Какова вероятность того, что будет принят сигнал "тире"?

3. В урне лежит шар неизвестного цвета с равной вероятностью белый или чёрный. В урну опустили белый шар, а затем извлекли один шар. Он оказался белый. Какова вероятность, что в урне остался чёрный шар?

4. Из ящика с 5 красными и 7 синими стержнями переложили 2 стержня во второй ящик с 3 красными стержнями. Затем из второго ящика взяли один стержень. Какова вероятность, что он синий?

5. Число грузовых автомашин, проезжающих мимо бензоколонки, относится к числу легковых автомашин как 7:3. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,3, а легковая – 0,4. К колонке подъехала машина. Найти вероятность того, что это грузовик.

6. В первой урне 10 белых шаров и 2 чёрных, во второй 3 белых и 3 чёрных. Из первой переложили во вторую один шар, а затем извлекли из второй урны один шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что до перекладывания он находился во второй урне?

7. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попасть для первого 0,8, для второго – 0,6. Если произошло одно попадание в мишень, то она падает с вероятностью 0,5, а если два, то с вероятностью 0,9. Какова вероятность падения мишени?

8. В первом ящике имеются 10 яблок и 5 груш, во втором – 5 яблок и 8 груш. Случайным образом из первого ящика во второй переложили один плод, а затем из второго достали два плода. Ими оказались два яблока. Какова вероятность того, что переложили грушу?

9. В автобусе ехало 7 пассажиров, из них четверо с проездными. Двое пассажиров пересели в другой автобус, в котором из 15 пассажиров только 4 имели проездные. На первой остановке сошёл один пассажир. Какова вероятность того, что у него есть проездной?

10. Для сигнализации используют один из трёх типов индикаторов. Вероятность выбора индикатора первого типа равна 0,2, второго типа – 0,3, третьего типа – 0,5. Для индикаторов каждого из типов вероятность срабатывания при аварии равна соответственно 1; 0,75; 0,9. От индикатора получен сигнал. К какому типу, вероятнее всего, принадлежит просигналивший индикатор?

11. В цель выпущены три ракеты. Вероятность попадания первой 0,7, второй – 0,8, третьей – 0,9. Если в цель попала одна ракета, то цель уничтожается с вероятностью 0,8, если две или три, то с вероятностью 1. Определить вероятность уничтожения цели.

12. На факультете 3 группы первого курса. Декан наудачу взял список одной из групп и вызвал наудачу одного из студентов. Какова вероятность того, что им оказался юноша, если в первой группе было 10 девушек и 9 юношей, во второй – соответственно 7 и 13, в третьей – 12 и 8?

13. В трёх магазинах продаются арбузы, причём отличные среди них составляют соответственно 50, 80 и 85 %. Выбрав наудачу магазин, покупатель покупает арбуз, оказавшийся отличного качества. Найти вероятность того, что арбуз куплен во втором магазине.

14. По линии связи передаются два сигнала А и В с вероятностями 0,8 и 0,2. Из-за помех 20% сигналов А принимаются как сигналы В, а 30% сигналов В как А. Принят сигнал А. Какова вероятность того, что он был передан?

15. В первой урне 3 белых и 4 чёрных шара, во второй 2 белых и 3 чёрных шара. Из первой урны переложили во вторую два шара, а затем из второй урны извлекли один шар. Какова вероятность, что он белый?

16. В цель выпущены 3 торпеды. Вероятность попадания первой 0,5, второй – 0,6, третьей – 0,8. Если в цель попадёт одна торпеда, то она взрывается с вероятностью 0,6, если две, то с вероятностью 0,8, а если три, то она взрывается с вероятностью 1. Определить вероятность того, что цель не взорвётся.

17. Цех изготавливает стандартное изделие с вероятностью 0,92. Схема контроля несовершенна и признаёт стандартными 95% стандартных изделий и 6% нестандартных. Схема контроля признала стандартным случайно отобранное изделие. Какова вероятность того, что изделие стандартное на самом деле?

18. Три преподавателя принимают экзамен. За один час первый преподаватель успевает опросить троих, второй – четверых, а третий – пятерых. Первый преподаватель в среднем каждому второму ставит оценку "неудовлетворительно", второй такую же оценку ставит в среднем каждому третьему, третий – каждому четвёртому. Какова вероятность, что студент, пришедший на экзамен, сдаст его?

19. Продукция первого завода содержит 5% телевизоров со скрытым дефектом, второго – 6% и третьего – 3%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 10 телевизоров с первого завода, 50 со второго, 40 – с третьего?

20. В урне 2 шара, каждый из которых с равной вероятностью либо белый, либо чёрный. В урну опускают белый шар, после чего из неё извлекают шар, который оказывается белым. Какова вероятность того, что в урне остались только чёрные шары?

21. В магазин поступают однотипные консервы от четырёх поставщиков. Вероятность брака для каждого из поставщиков соответственно равна 0,04; 0,03; 0,06; 0,02. От первого поставщика получено 300 банок, от второго – 200, от третьего – 500, от четвёртого – 250. Какова вероятность, что купленная банка окажется бракованной?

22. На склад готовой продукции поступает 75% из первого цеха и 25% из второго цеха. Продукция первого цеха имеет 0,2% брака, продукция второго цеха – 0,3% брака. Найти вероятность того, что наугад взятое со склада изделие окажется бракованным.

23. На двух станках производятся одинаковые детали. Вероятность того, что деталь, произведённая на первом станке, будет стандартной, равна 0,8, а на втором – 0,9. Производительность второго станка втрое больше производительности первого. Детали с обоих станков поступают на транспортёр. Найти вероятность того, что взятая наудачу с транспортёра деталь будет стандартной?

24. На сборку поступают однотипные изделия из четырёх цехов. Вероятности брака в каждом из цехов соответственно равны 0,04; 0,03; 0,06; 0,02. Первый цех поставляет 30 изделий, второй – 20 изделий, третий – 50 изделий, четвёртый – 25 изделий. Найти вероятность того, что взятое наудачу изделие окажется бракованным.

25. Сборщик получил 3 ящика деталей. В первом ящике 40 деталей, из них 20 окрашенных, во втором – 50 деталей, из них 10 окрашенных, в третьем – 30 деталей, из них 15 окрашенных. Найти вероятность того, что деталь, извлечённая наудачу из взятого ящика, окажется окрашенной.

26. Прибор может работать в двух режимах: нормальном и аварийном. Нормальный режим наблюдается в 95% всех случаях работы прибора, аварийном – в 5% всех случаев. Вероятность выхода из строя прибора за время t в нормальном режиме – 0,1, в аварийном – 0,7. Найти полную вероятность выхода из строя прибора за время t.

27. Электролампы изготавливаются на двух заводах. Первый завод производит 60% общего количества ламп, второй – 40%. Продукция первого завода содержит 70% стандартных ламп, второго – 80%. В магазин поступает продукция обоих заводов. Найти вероятность, что купленная в магазине лампа окажется стандартной.

28. На сборку поступают детали с двух автоматов. Первый автомат даёт 70 % необходимых для сборки деталей, второй – 30%. Вероятность появления бракованной детали с первого автомата равна 0,02; со второго – 0,01. Какова вероятность поступления на сборку бракованной детали?

29. На склад поступили одинаковые электроутюги. Первый завод поставляет 80%, а второй – 20% всего количества. Известно, что первый завод выпускает 90% продукции, способной прослужить положенный срок, а второй – 95%. Какова вероятность того, что наугад взятый утюг прослужит положенный срок?

30. Имеются две партии изделий по 10 и 15 штук. В каждой партии одно изделие бракованное. Изделие, взятое наудачу из первой партии, переложено во вторую. После этого выбирается наудачу изделие из второй партии. Определить вероятность извлечения бракованного изделия из второй партии.

Задачи к § 8

1. Вероятность появления события А при одном испытании равна 0,1. Найти вероятность того, что при трёх независимых испытаниях оно появится: 1) не менее двух раз; 2) хотя бы один раз.

2. Игральную кость подбрасывают три раза. Найти вероятность того, что дважды появится число очков, кратное трём.

3. При каждом выстреле из орудия вероятность поражения цели равна 0,8. Найти вероятность того, что при пяти выстрелах будет сделано не менее четырёх попаданий.

4. Вероятность поражения стрелком мишени при одном выстреле равна 0,85. Найти вероятность того, что при четырёх последовательных выстрелах будет не более двух промахов.

5. Вероятность хотя бы одного попадания при двух выстрелах равна 0,99. Найти вероятность трёх попаданий при четырёх выстрелах.

6. В квартире четыре электролампочки. Для каждой лампочки вероятность оказаться неисправной в течение года равна $5/6$. Какова вероятность того, что в течение года придётся заменить не менее половины лампочек?

7. Игральную кость бросают 8 раз. Найти вероятность того, что цифра 6 появится: а) ровно 3 раза; б) более двух раз.

8. Вероятность того, что телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из трёх телевизоров: 1) не более одного потребуют ремонта; 2) хотя бы один не потребует ремонта.

9. Вероятность всхожести семян ржи составляет 90%. Чему равна вероятность того, что из 7 семян взойдут не менее 5?

10. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие нестандартно, равна 0,1. Найти вероятность того, что: 1) из трёх проверенных изделий только одно нестандартное; 2) нестандартным будет только третье, по порядку проверенное изделие.

11. Прибор состоит из 7 узлов. Вероятность безотказной работы в течение времени t для каждого узла 0,8. Найти вероятность того, что за время t откажут: а) два узла; б) меньше двух узлов.

12. Две игральные кости бросают одновременно 6 раз. Какова вероятность того, что дублей будет не меньше двух?

13. В классе 20 мальчиков и 10 девочек. На каждый из четырёх вопросов, заданных учителем, ответили по одному ученику. Какова вероятность того, что среди ответивших было более двух мальчиков?

14. Давление в котле превышает норму с вероятностью 0,2. В котельной установлено 7 котлов. Какова вероятность того, что менее чем в трёх давление превышает норму?

15. В приборе 6 ламп. За время работы прибора лампа выходит из строя с вероятностью 0,3. Какова вероятность, что выйдут из строя не более двух ламп?

16. Среди населения города 15% составляют дошкольники. Какова вероятность того, что среди 10 пассажиров автобуса не более двух дошкольников?

17. Монету подбрасывают 8 раз. Какова вероятность того, что более 6 раз она упадёт гербом вверх (считать, что вероятности выпадения герба и решётки одинаковы)?

18. Какова вероятность того, что в столбике из 6 монет не менее двух лежат гербом вверх?

19. Вероятность появления события А равна 0,3. Найти вероятность того, что в 7 испытаниях событие А появится более двух раз.

20. В сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Какова вероятность того, что в течение недели будет более трёх дождливых дней?

21. В ящике лежат несколько тысяч одинаковых предохранителей. Половина из них изготовлена I заводом, остальные – II заводом. Наудачу вынули пять предохранителей. Чему равна вероятность того, что I заводом из них изготовлены: 1) два предохранителя; 2) менее двух предохранителей; 3) более двух предохранителей?

22. Событие В появится в случае, если событие А появится не менее четырёх раз. Найти вероятность того, что наступит событие В, если будет произведено пять независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равна 0,5.

23. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,25. Какова вероятность того, что лицо, имеющее 5 билетов, выиграет: а) по двум билетам; б) по одному билету; в) ни по одному из билетов; г) по всем билетам?

24. В некоторых условиях вероятность своевременного прибытия поезда на станцию равна 0,8. Определить вероятность того, что из 4 ожидаемых поездов прибудут своевременно: а) три; б) не менее трёх; в) не более трёх; г) по крайней мере, один из поездов.

25. При выпуске приборов на заводе 25% бывают недостаточно точными. Берут наудачу 12 приборов. Найти вероятность того, что из них не менее 10 будут точными.

26. В некоторой партии имеется 30% цветных катушек ниток. Какова вероятность того, что среди 5 наудачу взятых катушек ниток не более трёх – цветные?

27. Вероятность того, что компьютер потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из 6 компьютеров потребуют ремонта не более одного компьютера.

28. В группе 75% студентов сдали все экзамены и зачёты, а 25% имеют академическую задолженность. Найти вероятность того, что среди 5 наудачу выбранных студентов окажется без академической задолженности: а) не менее двух; б) не более двух студентов.

29. Изделия некоторого производства содержат 9% брака. Найти вероятность того, что среди 5 взятых наудачу изделий окажется: а) одно бракованное; б) хотя бы одно бракованное.

30. Отдел технического контроля проверяет партию из 10 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,75. Найти вероятность того, что стандартных деталей среди 10 будет не менее 4 деталей.

31. Игральную кость подбрасывают 500 раз. Какова вероятность того, что цифра 1 при этом выпадет 50 раз?

32. Вероятность попадания в мишень при каждом из 400 выстрелов равна 0,75. Какова вероятность того, что в мишени будет от 280 до 330 пробоин?

33. Чему равна вероятность того, что среди 100 случайных прохожих окажутся 32 женщины (предполагается, что число женщин и мужчин в городе одинаково)?

34. Вероятность наступления события А в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие А появится в этих испытаниях: 1) ровно 90 раз; 2) не менее 80 и не более 90 раз?

35. Вероятность выздоровления больного в результате применения нового способа лечения равна 0,8. Сколько вылечившихся из 100 больных можно ожидать с вероятностью 0,85?

36. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,02. Какова вероятность того, что из двухсот пассажиров, купивших билет на этот поезд, опоздают к отправлению не более пяти?

37. При проведении эксперимента монету подбрасывают 4096 раз, причём герб выпал 2068 раз. С какой вероятностью можно было ожидать этот результат?

38. Найти вероятность того, что в партии из 900 изделий число изделий высшего сорта заключено между 600 и 700. Вероятность появления изделия высшего сорта в партии равна 0,8.

39. Игральный кубик подбросили 125 раз. Какова вероятность того, что цифра 6 появилась не более 60 раз?

40. Завод отправил на базу 10000 стаканов. Стакан разбивается в пути с вероятностью 0,0002. Какова вероятность того, что в пути разобьется менее трёх стаканов?

41. Из 1000 звонков рекламного агента в 10 случаях с ним не хотят говорить. В пятницу агент позвонил 100 раз. Какова вероятность того, что неудача постигла его менее трёх раз.

42. Среди найденных самородков золота крупный попадается с вероятностью 0,0001. Какова вероятность того, что среди 2000 обнаруженных самородков будет хотя бы один крупный?

43. Найти вероятность того, что при 900 бросаниях игральной кости 6 очков выпадет не менее 790, но не более 830 раз.

44. Задачник издан тиражом 20000 экземпляров. Вероятность того, что он сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит более трёх бракованных книг.

45. Вероятность перегореть в течение месяца для лампочек данной партии равна 0,02. Найти вероятность того, что в партии из 100 штук этих лампочек перегорит не более 4.

46. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,001. Найти вероятность того, что в цель попало хотя бы три пули, если произведено 2000 выстрелов.

47. Вероятность опоздания пассажира на поезд равна 0,002. Какова вероятность того, что из 600 пассажиров, имеющих билеты на поезд, опоздают хотя бы два?

48. Рыбак забрасывает удочку 100 раз. Вероятность поймать рыбу при одном забрасывании равна 0,2. Какова вероятность того, что рыбак принёс домой 15 рыбок?

49. В стае 1000 птиц, из них 50 окольцованных. Поймано 100 птиц. Какова вероятность того, что среди них не более трёх окольцованных?

50. Среди 5000 семян 0,03% сорняков. Найти вероятность того, что будет найдено не менее двух семян сорняков.

51. Всхожесть семян ноготков равна 0,9. Найти вероятность того, что из 900 посаженных семян не менее 790 дадут всходы.

52. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение минуты равна 0,003. Найти вероятность того, что в течение минуты произойдёт более трёх обрывов.

53. Прибор состоит из 200 деталей, каждая из которых может выйти из строя с вероятностью 0,01. Найти вероятность того, что выйдут из строя не более трёх деталей.

54. Книжный блок может быть вклеен "вверх ногами" с вероятностью 0,002. Какова вероятность того, что при проверке 1000 книг будут обнаружены 2 бракованные?

55. Вероятность наступления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти вероятность того, что в 100 испытаниях событие произойдёт не менее 20 и не более 30 раз.

56. Вероятность того, что покупателю необходима обувь 41-го размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что из 750 покупателей не более 120 потребуют обувь этого размера.

57. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,07. Найти вероятность того, что в 1400 испытаниях событие наступит 28 раз.

58. На опытной станции посеяно 150 семян кукурузы. Всхожесть семян 95%. Найти вероятность того, что из 150 семян взойдёт не менее 90%.

59. Завод отправил на базу 5000 изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудет три повреждённых изделия.

Задачи к § 9, 10

I. Найти: 1) закон распределения случайной величины X; 2) математическое ожидание M(x); 3) дисперсию D(x); 4) среднее квадратичное отклонение σ(x); 5) функцию распределения F(x); 6) построить график F(x).

1. В партии 5% нестандартных деталей. Наудачу отобраны три детали. Случайная величина X – число нестандартных деталей среди трёх стандартных.

2. Производятся выстрелы из орудия с вероятностью попадания 0,8 при каждом выстреле. Стрельба ведётся до первого попадания, но не свыше четырёх выстрелов. Случайная величина X – число произведённых выстрелов.

3. Вероятность промаха при одном выстреле равна 0,4. Сделано 4 выстрела. Случайная величина X – число промахов при 4-х выстрелах.

4. В одной урне 3 белых и 9 чёрных шаров, в другой – 8 белых и 4 чёрных шара. Из каждой урны взяли по одному шару. Случайная величина X – число белых шаров среди этих двух.

5. Устройство состоит из двух независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого из них в одном опыте 0,2. Случайная величина X – число отказавших элементов в одном опыте.

6. Вероятность выиграть по одному билету денежно-вещевой лотереи равна 0,08. Человек купил 3 билета. Случайная величина X – число выигравших билетов.

7. Игральный кубик бросают три раза. Случайная величина X – число выпадений 6 очков.

8. Два баскетболиста забрасывают мяч в корзину с вероятностями соответственно 0,8 и 0,9. Сделано три последовательных броска, причём начинает бросать более слабый игрок. Случайная величина X – число заброшенных мячей.

9. Бросают три раза кубик, у которого две грани окрашены в белый цвет, а четыре – в чёрный. Случайная величина X – число раз появления белой грани.

10. В цехе имеется 3 резервных мотора. Для каждого мотора вероятность быть включённым в данный момент равна 0,2. Случайная величина X – число включённых моторов в данный момент.

11. Производится три выстрела со следующими вероятностями попадания в цель: 0,3; 0,4; 0,7. Случайная величина X – число попаданий в цель.

12. Два шахматиста, играющие в равную силу, сыграли матч из шести партий (ничьих не было). Случайная величина X – возможное число побед первого шахматиста.

13. В партии из 10 деталей 3 нестандартных. Наудачу отобраны 3 детали. Случайная величина X – число нестандартных деталей среди трёх отобранных.

14. В группе из 12 студентов трое родились в январе. Случайная величина X – число студентов, родившихся в январе, среди трёх отобранных студентов.

15. На заводе три автоматические линии. Вероятность того, что в течение смены первая линия не потребует регулировки, равна 0,9, вторая – 0,8, третья – 0,7. Случайная величина X – число линий, не потребовавших регулировки.

16. Одновременно бросают три монеты достоинством 1, 3 и 5 копеек. Случайная величина X – сумма выпавших цифр (выпадению герба отвечает цифра 0).

17. Случайная величина X – число отказов устройства в 5 независимых опытах, причём вероятность отказа в каждом опыте равна 0,2.

18. При выполнении штрафных бросков баскетболист попадает в первый раз с вероятностью 0,6, во второй раз с вероятностью 0,8, в третий раз с вероятностью 0,9. Случайная величина X – число очков, набранных баскетболистом.

19. Имеются 7 диодов, среди которых 3 неисправны. Случайная величина X – число работающих диодов среди четырёх отобранных.

20. В радиоприёмнике 5 ламп, каждая из которых за год работы приёмника может выйти из строя с вероятностью $^1/_3$. Случайная величина X – число ламп, вышедших из строя в течение года.

21. Имеются два кубика. У первого кубика две грани красные, а четыре зелёные. У второго кубика число красных и зелёных граней одинаково. Случайная величина X – число выпавших красных граней при однократном бросании обоих кубиков.

22. В урне 5 белых и 3 чёрных шара. Из урны достали 3 шара. Случайная величина X – число извлечённых белых шаров.

23. В цель выпущены две ракеты. Вероятность попадания для первой – 0,8, для второй – 0,7. Случайная величина X – число попаданий в мишень.

24. Из колоды карт (36 штук) вынимают 2 карты. Случайная величина X – число извлечённых карт червовой масти.

25. В баскетбольную корзину два раза бросают мяч. Вероятность попасть при каждом броске равна 0,7. Случайная величина X – число попаданий мяча в корзину.

26. Бросают три раза кубик, у которого две грани окрашены в белый цвет, а четыре – в чёрный. Случайная величина X – число раз появления белой грани.

27. На пути движения автомашины 4 светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает автомашине движение. Случайная величина X – число светофоров, пройденных автомашиной до первой остановки.

28. Бросают два игральных кубика. Случайная величина X – сумма очков, выпадающих на их верхних гранях.

29. Партия из 100 изделий содержит 90% изделий I сорта и 10% изделий II сорта. Случайная величина X – число изделий I сорта среди трёх просмотренных изделий (после просмотра изделия возвращали в партию).

30. Каждая из семи цифр 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9 написана на карточке. Извлекают 4 карточки с возвращением. Случайная величина X – число извлечённых чётных цифр.

II. Случайная величина X задана функцией распределения F(x). Найти: 1) плотность распределения вероятностей f(x); 2) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение; 3) построить графики функций F(x), f(x); 4) вероятность попадания в интервал (a;b) исходя из F(x).

1. $F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le 0 \\ x^2/16 & при \quad 0 < x \le 4; \\ 1 & при \quad x > 4 \end{cases}$

$a=1$; b=2.

2. $F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le 0 \\ 0{,}2x & при \quad 0 < x \le 5; \\ 1 & при \quad x > 5 \end{cases}$

$a=1$; b=3.

3. $F(x)=\begin{cases}0 & npu \quad x\le -1\\ \dfrac{x+1}{3} & npu \quad -1<x\le 2;\\ 1 & npu \quad x>2\end{cases}$

$a=0;$ b=2.

4. $F(x)=\begin{cases}0 & npu \quad x\le 0\\ \dfrac{x^2}{36} & npu \quad 0<x\le 6;\\ 1 & npu \quad x>6\end{cases}$

$a=1;$ b=2.

5. $F(x)=\begin{cases}0 & npu \quad x\le 0\\ 0{,}25x+0{,}5 & npu \quad 0<x\le 2;\\ 1 & npu \quad x>2\end{cases}$

$a=1;$ b=2.

6. $F(x)=\begin{cases}0 & npu \quad x\le 2\\ \dfrac{x}{2}-1 & npu \quad 2<x\le 4;\\ 1 & npu \quad x>4\end{cases}$

$a=3;$ b=4.

7. $F(x)=\begin{cases}0 & npu \quad x\le 1\\ \dfrac{x-1}{2} & npu \quad 1<x\le 3;\\ 1 & npu \quad x>3\end{cases}$

$a=2;$ b=3.

8. $F(x)=\begin{cases}0 & npu \quad x\le 0\\ 3x^2+2x & npu \quad 0<x\le \dfrac{1}{3};\\ 1 & npu \quad x>\dfrac{1}{3}\end{cases}$

$a=\dfrac{1}{6};$ b=$\dfrac{1}{4}$.

9. $F(x)=\begin{cases}0 & npu \quad x\le 2\\ \dfrac{x}{2}-1 & npu \quad 2<x\le 4;\\ 1 & npu \quad x>4\end{cases}$

$a=3;$ b=4.

10. $F(x)=\begin{cases}0 & npu \quad x\le 0\\ x^3 & npu \quad 0<x\le 1;\\ 1 & npu \quad x>1\end{cases}$

$a=\dfrac{1}{2};$ b=1.

11. $F(x)=\begin{cases}0 & npu \quad x\le 0\\ \dfrac{4}{\pi}arctgx & npu \quad 0<x\le 1;\\ 1 & npu \quad x>1\end{cases}$

$a=\dfrac{1}{\sqrt{3}};$ b=$\sqrt{3}$.

12. $F(x)\begin{cases}0 & npu \quad x\le 0\\ \dfrac{3x}{2x+2} & npu \quad 0<x\le 2;\\ 1 & npu \quad x>2\end{cases}$

a = -0,5; b=1,5.

13. $F(x)=\begin{cases}0 & npu \quad x\le 1\\ \ln x & npu \quad 1<x\le e;\\ 1 & npu \quad x>e\end{cases}$

$a=0;$ b=2.

14. $F(x)=\begin{cases}0 & npu \quad x\le 1\\ \sqrt{x-1} & npu \quad 1<x\le 2;\\ 1 & npu \quad x>2\end{cases}$

$a=-1;$ b=1,5.

15. $F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 2\\ \dfrac{x^4+x^3-24}{84} & при \quad 2\le x<3;\\ 1 & при \quad x>3\end{cases}$

$a=1$; b=4.

16. $F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1\\ \dfrac{x^2+5x-6}{18} & при \quad 1<x\le 3;\\ 1 & при \quad x>3\end{cases}$

$a=2$; b=4.

17. $F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ \dfrac{x^3}{3\sqrt{3}} & при \quad 0<x\le\sqrt{3};\\ 1 & при \quad x>\sqrt{3}\end{cases}$

$a=1$; b=2.

18. $F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le\dfrac{3}{2}\\ x^2-\dfrac{3}{2}x & при \quad \dfrac{3}{2}<x\le 2;\\ 1 & при \quad x>2\end{cases}$

$a=1$; b=3.

19. $F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ \ln(x+1) & при \quad 0<x\le e-1;\\ 1 & при \quad x>e-1\end{cases}$

$a=1$; b=2.

20. $F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le -1\\ 1+x^3 & при \quad -1<x\le 0;\\ 1 & при \quad x>0\end{cases}$

$a=-\dfrac{1}{2};\quad b=\dfrac{1}{2}.$

21. $F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1\\ (x-1)^3 & при \quad 1<x\le 2;\\ 1 & при \quad x>2\end{cases}$

$a=\dfrac{1}{2};\; b=\dfrac{3}{2}.$

22. $F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 4\\ \sqrt{x-4} & при \quad 4<x\le 5;\\ 1 & при \quad x>5\end{cases}$

$a=$ 4,5; b=6.

23. $F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le -1\\ \sqrt[3]{x+1} & при \quad -1<x\le 0;\\ 1 & при \quad x>0\end{cases}$

$a=$ -0,5; b=0,5.

24. $F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le -1\\ \dfrac{1}{2}\sqrt{x+1} & при \quad -1<x\le 3;\\ 1 & при \quad x>3\end{cases}$

$a=1$; b=4.

25. $F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1\\ (x-1)^2 & при \quad 1<x\le 2;\\ 1 & при \quad x>2\end{cases}$

$a=$ 1,5; b=3.

26. $F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 3\\ (x-3)^3 & при \quad 3<x\le 4;\\ 1 & при \quad x>4\end{cases}$

$a=2$; b=5.

27. F(x)= $\begin{cases} 0 & при \quad x \le -4 \\ \dfrac{x+4}{10} & при \quad -4 < x \le 6; \\ 1 & при \quad x > 6 \end{cases}$

$a = -\dfrac{1}{3}$; b=0.

28. F(x)= $\begin{cases} 0 & при \quad x \le 0 \\ e^{ч} - 1 & при \quad 0 < x \le \ln 2; \\ 1 & при \quad x > \ln 2 \end{cases}$

$a = \ln\dfrac{3}{2}$; b=1.

29. F(x)= $\begin{cases} 0 & при \quad x < 0 \\ \dfrac{x^2}{16} & при \quad 0 \le x < 2 \\ x - \dfrac{7}{4} & при \quad 2 \le x < \dfrac{11}{4} \\ 1 & при \quad x > \dfrac{11}{4} \end{cases}$

$a = 1$; b=1,5.

III. Заданы неотрицательная функция f(x) и промежуток [a;b). Найти:

1) параметр c, при котором f(x) является плотностью случайной величины X;
2) функцию распределения F(x);
3) вероятность P(a ≤X<b) исходя из f(x);
4) дисперсию случайной величины X.

1. $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ c(3x^2 + 2x) & 1 < x < 2; \\ 0 & x > 2 \end{cases}$

$a = \dfrac{1}{2}$; b=$\dfrac{3}{2}$.

2. $f(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ c(x^2 + 2x + 1) & -1 < x < 1; \\ 0 & x > 1 \end{cases}$

$a = -2$; b=0.

3. $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 3 \\ c(x^2 - 9) & 3 < x < 6; \\ 0 & x > 6 \end{cases}$

a =4; b=7.

4. $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \dfrac{1}{4}x^3 + c & 1 < x < 2; \\ 0 & x > 2 \end{cases}$

a =1,5; b=2,5.

5. $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 3 \\ c(-x^2 + 8x - 15) & 3 < x < 5; \\ 0 & x > 5 \end{cases}$

a =4; b=6.

6. $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ c(x^2 + 3x + 1) & 0 < x < 2; \\ 0 & x > 2 \end{cases}$

a =1,5; b=2,5.

7. $f(x)=\begin{cases} 0 & x<-2 \\ c(\frac{x}{2}+1) & -2<x<2; \\ 0 & x>2 \end{cases}$

$a=1$; b=3.

8. $f(x)=\begin{cases} 0 & x<2 \\ c(-x^2+6x-8) & 2<x<4; \\ 0 & x>4 \end{cases}$

$a=1$; b=3.

9. $f(x)=\begin{cases} 0 & x\le 1 \\ c(2x-1) & 1<x\le 2; \\ 0 & x>2 \end{cases}$

$a=1{,}2$; b=3.

10. $f(x)=\begin{cases} 0 & x<-1 \\ c(3x^2+2) & -1<x<2; \\ 0 & x>2 \end{cases}$

$a=-2$; b=1.

11. $f(x)=\begin{cases} 0 & при & x<1 \\ c(1-\frac{x}{3}) & при & 1<x<3; \\ 0 & при & x>3 \end{cases}$

$a=0$, b=2.

12. $f(x)=\begin{cases} 0 & при & x\le 1 \\ c(4x-x^3) & при & 1<x<2; \\ 0 & при & x>2 \end{cases}$

$a=1{,}5$, b=3.

13. $f(x)=\begin{cases} 0 & при & x\le 1 \\ cx^2 & при & 1<x<4; \\ 0 & при & x>4 \end{cases}$

$a=3$, b=5.

14. $f(x)=\begin{cases} 0 & при & x\le 1 \\ c(4x-x^3) & при & 1<x<2 \\ 0 & при & x>2 \end{cases}$

$a=-2$, b=0.

15. $f(x)=\begin{cases} 0 & при & x<2 \\ c(x^2-2) & при & 2<x<3; \\ 0 & при & x>3 \end{cases}$

$a=0$, b=4.

16. $f(x)=\begin{cases} 0 & при & x<7 \\ c(x^2-6x-7) & при & 7<x<9; \\ 0 & при & x>9 \end{cases}$

$a=0$, b=8.

17. $f(x)=\begin{cases} 0 & при & x<2 \\ cx+\frac{1}{6} & при & 2<x<5; \\ 0 & при & x>5 \end{cases}$

$a=3$, b=6.

18. $f(x)=\begin{cases} 0 & при & x<1 \\ cx^4 & при & 1<x<3; \\ 0 & при & x>3 \end{cases}$

$a=2$, b=4.

19. $f(x)=\begin{cases} 0 & при & x<1 \\ \frac{3x^2}{40}+cx & при & 1<x<3; \\ 0 & при & x>3 \end{cases}$

$a=2$, b=4.

20. $f(x)=\begin{cases} 0 & при & x<3 \\ c(x^2+2x) & при & 3<x<5; \\ 0 & при & x>5 \end{cases}$

$a=2$, b=4.

21. $f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<1 \\ c(3x+x^3) & при \quad 1<x<\sqrt{3}; \\ 0 & при \quad x>\sqrt{3} \end{cases}$

$a=1$, b=2.

22. $f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<1 \\ cx+\dfrac{x^3}{3} & при \quad 1<x<2; \\ 0 & при \quad x>2 \end{cases}$

$a=-0{,}5$, b=1,5.

23. $f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<-1 \\ c(x^2+1) & при \quad -1<x<1; \\ 0 & при \quad x>1 \end{cases}$

$a=-2$, b=0.

24. $f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<1 \\ c(x+3) & при \quad 1<x<3; \\ 0 & при \quad x>3 \end{cases}$

$a=2$, b=4.

25. $f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<3 \\ c(x^2+4x) & при \quad 3<x<5; \\ 0 & при \quad x>5 \end{cases}$

$a=4$, b=6.

26. $f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 1 \\ \dfrac{x^3}{3}+cx & при \quad 1<x\le 3; \\ 0 & при \quad x>3 \end{cases}$

$a=-1$, b=2.

27. $f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<-1 \\ c(x^2+2) & при \quad -1\le x\le 1; \\ 0 & при \quad x>1 \end{cases}$

$a=-2$, b=0.

28. $f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<2 \\ c(x^2+1) & при \quad 2\le x\le 3; \\ 0 & при \quad x>3 \end{cases}$

$a=2{,}5$, b=3,5.

29. $f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<1 \\ c(x^2+x) & при \quad 1\le x\le 3; \\ 0 & при \quad x>3 \end{cases}$

$a=0{,}5$, b=2.

30. $f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<1 \\ cx-\dfrac{1}{2} & при \quad 1<x<2; \\ 0 & при \quad x>2 \end{cases}$

$a=0$, b=2,5.

Задачи к § 10

Известно математическое ожидание m и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределённой случайной величины X. Найти вероятность попадания значений этой величины в заданный интервал (α; β).

№	m	σ	α	β	№	m	σ	α	β
1	10	4	2	13	16	10	2	11	13
2	9	5	5	14	17	9	4	15	19
3	8	1	4	9	18	8	2	6	15
4	7	2	3	10	19	7	5	2	22
5	6	3	2	11	20	6	3	0	9
6	5	1	1	12	21	15	2	9	19
7	4	5	2	11	22	14	4	10	20
8	3	2	3	10	23	13	4	11	21
9	2	5	4	9	24	12	5	12	22
10	2	4	6	10	25	11	4	13	23
11	15	2	16	25	26	10	8	14	18
12	14	4	18	34	27	9	3	9	18
13	13	4	15	17	28	8	4	8	12
14	12	5	17	22	29	7	2	6	10
15	11	3	17	26	30	6	2	4	12

Библиографический список

1. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. - М.: Наука, 1969.
2. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмуран. - М.: Высшая школа, 1998.
3. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмуран. - М.: Высшая школа, 1979.
4. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. - М.: Наука, 1969.
5. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. III / П.Е. Данко, А.Г Попов. - М.: Высшая школа, 1971.

Таблица П1

Значения функций $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$; $\varphi(-x) = \varphi(x)$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3882	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2568	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001

Таблица П2

Значения функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$;   Ф(-х) = -Ф(х)

х	Ф(х)	х	Ф(х)	х	Ф(х)	х	Ф(х)
0,00	0,0000	0,24	0,0948	0,48	0,1844	0,72	0,2642
0,01	0,0040	0,25	0,0987	0,49	0,1879	0,73	0,2673
0,02	0,0080	0,26	0,1026	0,50	0,1915	0,74	0,2703
0,03	0,0120	0,27	0,1064	0,51	0,1950	0,75	0,2734
0,04	0,0160	0,28	0,1103	0,52	0,1985	0,76	0,2764
0,05	0,0199	0,29	0,1141	0,53	0,2019	0,77	0,2794
0,06	0,0239	0,30	0,1179	0,54	0,2054	0,78	0,2823
0,07	0,0279	0,31	0,1217	0,55	0,2088	0,79	0,2852
0,08	0,0319	0,32	0,1255	0,56	0,2123	0,80	0,2881
0,09	0,0359	0,33	0,1293	0,57	0,2157	0,81	0,2910
0,10	0,0398	0,34	0,1331	0,58	0,2190	0,82	0,2939
0,11	0,0438	0,35	0,1368	0,59	0,2224	0,83	0,2967
0,12	0,0478	0,36	0,1406	0,60	0,2257	0,84	0,2995
0,13	0,0517	0,37	0,1443	0,61	0,2291	0,85	0,3023
0,14	0,0557	0,38	0,1480	0,62	0,2324	0,86	0,3051
0,15	0,0596	0,39	0,1517	0,63	0,2357	0,87	0,3078
0,16	0,0636	0,40	0,1554	0,64	0,2389	0,88	0,3106
0,17	0,0675	0,41	0,1591	0,65	0,2422	0,89	0,3133
0,18	0,0714	0,42	0,1628	0,66	0,2454	0,90	0,3159
0,19	0,0753	0,43	0,1664	0,67	0,2486	0,91	0,3186
0,20	0,0793	0,44	0,1700	0,68	0,2517	0,92	0,3212
0,21	0,0832	0,45	0,1736	0,69	0,2549	0,93	0,3238
0,22	0,0871	0,46	0,1772	0,70	0,2580	0,94	0,3264
0,23	0,0910	0,47	0,1808	0,71	0,2611	0,95	0,3289
							0,4332
0,96	0,3315	1,14	0,3729	1,32	0,4066	1,50	
0,97	0,3340	1,15	0,3749	1,33	0,4082	1,51	0,4345
0,98	0,3365	1,16	0,3770	1,34	0,4099	1,52	0,4357
0,99	0,3389	1,17	0,3790	1,35	0,4115	1,53	0,4370
1,00	0,3413	1,18	0,3810	1,36	0,4131	1,54	0,4382
1,01	0,3438	1,19	0,3830	1,37	0,4147	1,55	0,4394
1,02	0,3461	1,20	0,3849	1,38	0,4162	1,56	0,4406
1,03	0,3485	1,21	0,3869	1,39	0,4177	1,57	0,4418
1,04	0,3508	1,22	0,3883	1,40	0,4192	1,58	0,4429
1,05	0,3531	1,23	0,3907	1,41	0,4207	1,59	0,4441
1,06	0,3554	1,24	0,3925	1,42	0,4222	1,60	0,4452
1,07	0,3577	1,25	0,3944	1,43	0,4236	1,61	0,4463
1,08	0,3599	1,26	0,3962	1,44	0,4251	1,62	0,4474
1,09	0,3621	1,27	0,3980	1,45	0,4265	1,63	0,4484
1,10	0,3643	1,28	0,3997	1,46	0,4279	1,64	0,4495
1,11	0,3665	1,29	0,4015	1,47	0,4292	1,65	0,4505
1,12	0,3686	1,30	0,4032	1,48	0,4306	1,66	0,4515
1,13	0,3708	1,31	0,4049	1,49	0,4319	1,67	0,4525

Окончание табл. П2

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
1,68	0,4535	1,91	0,4719	2,28	0,4887	2,74	0,4969
1,69	0,4545	1,92	0,4726	2,30	0,4893	2,76	0,4971
1,70	0,4554	1,93	0,4732	2,32	0,4898	2,78	0,4973
1,71	0,4564	1,94	0,4738	2,34	0,4904	2,80	0,4974
1,72	0,4573	1,95	0,4744	2,36	0,4909	2,82	0,4976
1,73	0,4582	1,96	0,4750	2,38	0,4913	2,84	0,4977
1,74	0,4591	1,97	0,4756	2,40	0,4918	2,86	0,4979
1,75	0,4599	1,98	0,4761	2,42	0,4922	2,88	0,4980
1,76	0,4608	1,99	0,4767	2,44	0,4927	2,90	0,4981
1,77	0,4616	2,00	0,4772	2,46	0,4931	2,92	0,4982
1,78	0,4625	2,02	0,4783	2,48	0,4934	2,94	0,4984
1,79	0,4633	2,04	0,4793	2,50	0,4938	2,96	0,4985
1,80	0,4641	2,06	0,4803	2,52	0,4941	2,98	0,4986
1,81	0,4649	2,08	0,4812	2,54	0,4945	3,00	0,49865
1,82	0,4656	2,10	0,4821	2,56	0,4948	3,20	0,49931
1,83	0,4664	2,12	0,4830	2,58	0,4951	3,40	0,49966
1,84	0,4671	2,14	0,4838	2,60	0,4953	3,60	0,499841
1,85	0,4678	2,16	0,4846	2,62	0,4956	3,80	0,499928
1,86	0,4686	2,18	0,4854	2,64	0,4959	4,00	0,499968
1,87	0,4693	2,20	0,4861	2,66	0,4961	4,50	0,499997
1,88	0,4699	2,22	0,4868	2,68	0,4963	5,00	0,499997
1,89	0,4706	2,24	0,4875	2,70	0,4965		
1,90	0,4713	2,26	0,4881	2,72	0,4967		

Учебное издание

Беликова Нина Алексеевна
Савельева Ольга Геннадьевна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебное пособие

Редактор Т.И. Кузнецова
Доверстка О.А. Ананьев

Подписано в печать 22.09.08. Формат 60 х 84 $^1/_{16}$.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л.7,0
Тираж 400 экз. Заказ . Арт. С – 12/2008

Самарский государственный аэрокосмический университет. 443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного аэрокосмического университета. 443086, Самара, Московское шоссе, 34.