

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени академика С.П. КОРОЛЕВА"

А.Н. ПЛОТНИКОВ

## СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия*

САМАРА  
Издательство СГАУ  
2008

УДК 519.21  
ББК 22.171  
П 396

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. А. Ф. К р у т о в  
д-р техн. наук, проф. В. Д. Ю ш и н

*Плотников А. Н.*  
П 396 **Статистическое моделирование и системный анализ технологи-  
ческих процессов:** учеб. пособие / А. Н. Плотников. – Самара: Изд-  
во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2008. – 155 с.

ISBN 978-5-7883-0687-2

Содержит краткое изложение вероятностных основ статистических методов в контексте их практического использования при анализе качества и надежности продукции машиностроительного производства. В главе 1 излагаются общие вероятностные основы и рассмотрены наиболее употребительные выборочные статистики нормальных совокупностей, в том числе порядковые статистики. Основная часть посвящена системам случайных величин и типам их взаимодействий. В главе 2 даны основы дисперсионного анализа и теории планирования эксперимента. В главах 3-5 рассмотрены модели функционирования контрольных, измерительных процессов, основы теории массового обслуживания и схемы статистического регулирования технологических процессов. В качестве иллюстраций приведены примеры статистических экспериментов по методу Монте-Карло, реализованные в пакете Mathcad-2001, которые могут быть использованы для аудиторного и самостоятельного лабораторного практикума по различным приложениям теории вероятностей.

Пособие предназначено для студентов специальностей «Стандартизация и сертификация» и «Управление качеством», а также других специальностей.

УДК 519.21  
ББК 22.171

ISBN 978-5-7883-0687-2

© Плотников А. Н.  
© Самарский государственный  
аэрокосмический университет, 2008

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	5	4.4. Статистическая оценка параметра показательного закона.....	122
Глава 1. Теоретические основы статистического моделирования случайных процессов.....	10	Глава 5. Статистическое моделирование случайных процессов.....	125
1.1. Преобразования случайных величин и сущность метода Монте-Карло.....	10	5.1. Модели процессов с непрерывным приращением.....	125
1.2. Системы случайных величин.....	13	5.2. Анализ схем статистического регулирования .....	129
1.3. Закон совместного распределения выборочных значений.....	27	5.3. Выборочные оценки числовых индексов воспроизводимости.....	138
1.4. Выборочные оценки параметров распределения.....	30	Список литературы.....	144
Глава 2. Основы теории планирования эксперимента.....	44	Приложения.....	145
2.1. Факторы эксперимента. Понятие об эффекте фактора.....	44	Приложение I. Алгоритмы Монте-Карло, экспериментальные и расчетные значения инвариантов структуры серий в последовательной выборке.....	145
2.2. Аппарат дисперсионного анализа.....	48	Приложение II. Таблица распределения Кохрена.....	151
2.3. Планы со смешиванием эффектов и дробные многофакторные планы.....	58	Приложение III. Таблица распределения выборочного размаха.....	153
2.4. Планы эксперимента для исследования поверхности отклика.....	69		
Глава 3. Системный анализ контрольных и измерительных процессов.....	81		
3.1. Модель функционирования системы контроля.....	81		
3.2. Принцип накопления и анализа информации. Оценка эффективности контроля.....	87		
3.3. Сущность процесса измерения и основные элементы измерительной системы.....	92		
3.4. Модель функционирования измерительной системы.....	95		
3.5. Модель функционирования измерительной системы при приемке по допуску.....	100		
Глава 4. Основы теории надежности технологических и информационных систем.....	102		
4.1. Потoki случайных событий и их свойства.....	102		
4.2. Парадокс инспекции и смежные вопросы.....	109		
4.3. Очереди и задачи обслуживания.....	112		

## ВВЕДЕНИЕ

1. Исходным понятием теории вероятностей является *случайное событие* – событие, которое может произойти или не произойти при воспроизводимой совокупности условий опыта (испытания, наблюдения). Например, появление орла при бросании монеты, выпадение 11 очков при бросании двух игральных костей, попадание в поле допуска размера очередной детали с автоматической производственной линии, существенное улучшение состояния у группы больных после лечения определенным препаратом и т.д. Из перечисленных примеров видно, что каждое событие обладает некоторой степенью возможности. В примере с монетой и игральными костями сразу можно решить, что выпадение орла более возможно, чем выпадение 11 очков при бросании двух игральных костей, а для анализа стабильности технологического процесса или действия лекарственного препарата необходимо иметь фактические результаты наблюдений. С понятием случайного события связано другое фундаментальное понятие теории вероятностей – понятие *случайной величины* (СВ). Под случайной величиной понимается величина, которая в опыте с несколькими возможными исходами может принимать то или иное значение. Например, число очков при бросании игральной кости, частота появления «орла» в серии повторных опытов с монетой, фактическое количественное значение параметра при контроле и испытаниях промышленной продукции, очередной результат в серии повторных измерений и т.д. Законом распределения случайной величины называется любое правило (функция), позволяющее однозначно определить вероятности возможных значений случайной величины. Наиболее просто обстоит дело, когда множество возможных значений случайной величины конечно либо счетно и может быть отождествлено с пространством событий. Например, появление любого из чисел от «1» до «6» при бросании игральной кости равновероятно с вероятностью  $p = \frac{1}{6}$ ; множество возможных значений частоты появления «орла» при трех бросаниях моне-

ты составляет  $v = \left\{0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1\right\}$  с вероятностями  $p(0) = p(1) = \frac{1}{8}$ ,  $p\left(\frac{1}{3}\right) = p\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{8}$ .

Очень важную роль при анализе СВ играют ее *числовые характеристики*, позволяющие определить ее положение на числовой оси, величину рассеивания – степень случайности и форму рассеяния. Важнейшей числовой характеристикой СВ является ее *среднее значение* или *математическое ожидание*, определяемой как

$$M[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \mu_X.$$

Если под  $p(x)$  понимать дискретное распределение единичной массы на тонком невесомом стержне, то среднее значение можно интерпретировать как  $x$  – координату центра масс такой системы. Рассеивание СВ около своего среднего значения характеризуется дисперсией

$$D[X] = M[X - \mu_X]^2 = M[X^2] - \mu_X^2 = \sum_k p_k x_k^2 - \mu_X^2.$$

В механической интерпретации  $D[X]$  есть момент инерции стержня переменной плотности относительно перпендикулярной оси, проходящей через точку  $x = M[X]$ . Для большей наглядности рассеивание СВ характеризуют *стандартным* или *средним квадратичным отклонением* (СКО)  $\sigma_x = \sqrt{D[X]}$ , которое имеет такую же размерность, что и сама СВ. Для более детального описания СВ используют также *асимметрию*  $S_x = \frac{M[X - \mu_X]^3}{(D[X])^{3/2}}$  и *эксцесс*  $E_x = \frac{M[X - \mu_X]^4}{(D[X])^2} - 3$ .

Для симметричного относительно  $\mu_X$  плотности распределения  $S_x = 0$ ,  $S_x > 0$ , если распределение быстрее стремится к нулю слева от  $\mu_X$ , и  $S_x < 0$  – если справа. Эксцесс характеризует рассеивание СВ около среднего значения по сравнению с нормальной СВ, у которой  $E_x = 0$ . Из определения  $M[X]$  и  $D[X]$  вытекают их следующие свойства:

- среднее значение неслучайной величины  $a$  равно ей самой,  $M[a]=a$ ;
- для любой пары СВ  $X$  и  $Y$  и неслучайных чисел  $a$  и  $b$   $M[aX+bY]=aM[X]+bM[Y]$ ;
- дисперсия неслучайной величины  $a$  равна нулю,  $D[a]=0$ ;
- для любой пары независимых СВ  $X$  и  $Y$  и неслучайных чисел  $a$  и  $b$   $D[aX+bY]=a^2D[X]+b^2D[Y]$ .

2. Наиболее употребительными являются следующие виды дискретных СВ. *Гипергеометрическое распределение* в наглядной интерпретации представляет собой распределение числа черных шаров в случайной выборке или без возвращения из корзины (числа дефектных единиц при выборочном контроле партии штучной продукции). Это распределение совпадает с законом «Спортлото»  $P\{X=k\} = \frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$ , где  $N$  – объем партии,  $D$  – число дефектных единиц,  $n$  – объем выборки<sup>1</sup>. Среднее и дисперсия гипергеометрического распределения равны:

$$\mu_X = \frac{nD}{N}; \sigma_X^2 = \frac{nD(N-D)}{N^2} + n(n-1) \left[ \frac{D(D-1)}{N(N-1)} - \frac{D^2}{N^2} \right].$$

*Биномиальное распределение.* Рассмотрим асимптотику при  $\frac{n}{N} \ll 1$ . Разлагая биномиальные коэффициенты через факториалы,

получим 
$$\frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n} = \frac{D!(N-D)!n!(N-n)!}{k!(D-k)!(n-k)!(N-D-n+k)!N!}.$$

<sup>1</sup> Биномиальный коэффициент  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$  есть число различных перестановок  $m$  красных и  $n-m$  белых шаров. При большом количестве цветов полиномиальный коэффициент определяется как  $R(n_1, n_2, n_3) = \frac{(n_1+n_2+n_3)!}{n_1!n_2!n_3!}$ .

После группировки сомножителей и выделения  $C_n^k$ , будем иметь  $\frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n} = C_n^k \frac{D!(N-D)!(N-n)!}{(D-k)!(N-D-n+k)!N!}$ . Попарно сокращая факториалы числителя и знаменателя, преобразуем последнее выражение к виду

$$C_n^k \frac{\overbrace{D(D-1)\dots(D-k+1)}^k \overbrace{(N-D)(N-D-1)\dots(N-D-n+k+1)}^{n-k}}{\underbrace{N(N-1)\dots(N-n+1)}_{n=k+n-k}}.$$

Откуда получаем асимптотику  $P\{X=k\} \approx C_n^k q^k (1-q)^{n-k}$ , где  $q = \frac{D}{N} \approx \text{const}$ .

В чистом виде биномиальное распределение возникает в выборке с возвращением, когда вероятность успеха каждого испытания не зависит от результатов других испытаний и является величиной постоянной. Числовые характеристики биномиального распределения имеют вид:  $\mu_X = nq$ ;  $\sigma_X^2 = nq(1-q)$ .

В предельном случае, когда количество опытов  $n$  в испытаниях неограниченно возрастает, а вероятность успеха  $q$  неограниченно убывает, но так, что их произведение  $nq$  имеет конечный предел:  $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ q \rightarrow 0}} nq = \lambda$ .

Перепишем биномиальный закон в виде

$$C_n^k q^k (1-q)^{n-k} = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{n!}{(n-k)!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \lambda^k \prod_{m=0}^{k-1} \frac{n-m}{n} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k.$$

Первые три сомножителя на основании второго замечательного предела дадут  $\frac{e^{-\lambda}}{k!} \lambda^k$ . Последний сомножитель при конечном  $k$  стремится к 1. Логарифмируя оставшийся сомножитель, получим

$$\sum_{m=1}^{k-1} \ln\left(1 - \frac{m}{n}\right) \approx \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{k-1} m = \frac{(k-1)k}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Таким образом, для распределения числа редких событий получаем асимптотику в виде *распределения Пуассона*:  $P\{X = k\} \approx \frac{e^{-\lambda}}{k!} \lambda^k$ .

Помимо рассмотренного «предельного» случая, распределение Пуассона (распределение вероятностей редких событий) является одним из фундаментальных результатов во многих других приложениях теории вероятностей (теория надежности, теория случайных процессов и т.д.). У пуассоновской СВ среднее и дисперсия равны между собой:  $\mu_X = \sigma_X^2 = \lambda$ .

3. Муавр, а позднее независимо от него Лаплас исследовали биномиальное распределение при больших  $n$  и установили приближенную формулу (теорема Муавра-Лапласа):

$$\sum_{k=0}^m C_n^m q^m (1-q)^{n-m} \approx \sum_{k=0}^m \frac{e^{-\frac{(k-nq)^2}{2nq(1-q)}}}{\sqrt{2\pi nq(1-q)}}.$$

При этом дискретные точки нормированной СВ  $Z_m = \frac{m - nq}{\sqrt{nq(1-q)}}$

располагаются на числовой оси настолько тесно, что ряд в функции распределения можно заменить интегралом:

$$\sum_{k=0}^m \frac{e^{-\frac{1}{2}z_k^2}}{\sqrt{2\pi nq(1-q)}} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-\sqrt{nq}}{\sqrt{1-q}}}^{\frac{m-nq}{\sqrt{nq(1-q)}}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz, \text{ где } dz \approx \frac{1}{\sqrt{nq(1-q)}}.$$

а нижний предел в интеграле при больших  $n$  можно положить равным  $-\infty$ .

Функция, стоящая под интегралом  $\varphi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$ , называется

*плотностью распределения стандартной нормальной случайной величины*.

Функцию распределения СВ  $Z$   $F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$  удобнее

представить в виде  $F(z) = \frac{1}{2} + \Phi_0(z)$ , где  $\Phi_0(z)$  – функция Лапласа,

или интеграл вероятностей, определяется уравнением

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Таким образом, можно осуществить переход от дискретных СВ к непрерывным, важнейшей из которых является именно нормальная СВ.

Плотность распределения и числовые характеристики СВ  $X$ , связанной с СВ  $Z$  отношением  $X = \sigma Z + \mu$ , имеют следующий вид:

$$f_x(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}; \quad M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} x dx = \mu;$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx = \sigma^2.$$

## Глава 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

### 1.1. Преобразования случайных величин и сущность метода Монте-Карло

1. Задача установления закона распределения и числовых характеристик функций от случайных величин представляет собой один из основных элементов статистического моделирования. Для простоты

рассмотрим только случай функций с ограниченным количеством интервалов монотонности.

Пусть СВ  $X$  и  $Y$  связаны между собой соотношением  $Y=X^2$ . В этом случае получим

$$f_y(y) = \frac{d}{dy} F_y(y) = \frac{d}{dy} P\{Y < y\} = \frac{d}{dy} P\{X < \sqrt{y}\} = \frac{d}{dy} [F_x(\sqrt{y}) - F_x(-\sqrt{y})] = \frac{f_x(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} + \frac{f_x(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}. \quad (1.1.1)$$

Для обратного преобразования  $Y = \sqrt{X}$  будем иметь

$$f_y(y) = 2yf_x(y^2). \quad (1.1.2)$$

Эти соотношения используются при построении многих важных для практического применения композиционных законов распределения. В частности, если СВ  $X$  имеет стандартное нормальное распределение, то СВ  $Y=X^2$ , имеющая плотность распределения

$$f_y(y) = \frac{e^{-\frac{1}{2}y}}{\sqrt{2\pi y}}, \quad (1.1.3)$$

представляет собой  $\chi_1^2$  (Хи-квадрат) с одной степенью свободы и широко применяется в математической статистике. Среднее и дисперсия СВ с плотностью (1.1.3) равны:  $M[Y]=1$ ;  $D[Y]=2$ .

Пусть случайные величины  $Y$  и  $X$  связаны соотношением  $Y = \ln X$ . Найдем ПР  $f_Y(y)$ :

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} P\{Y < y\} = \frac{d}{dy} P\{X < e^y\} = e^y f_X(e^y). \quad (1.1.4)$$

Для показательного преобразования  $Y = \exp(X)$ , обращая (1.1.4), получим

$$f_Y(y) = \frac{1}{y} f_X(\ln y). \quad (1.1.5)$$

Рассмотрим преобразование  $Y = \frac{1}{X}$ . Для ПР  $f_Y(y)$  получаем

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} P\{Y < y\} = \frac{d}{dy} P\left\{X > \frac{1}{y}\right\} = \frac{d}{dy} \left[1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right)\right] = \frac{1}{y^2} f_X\left(\frac{1}{y}\right). \quad (1.1.6)$$

2. Применим к непрерывной СВ  $X$  собственную ФР, т.е. рассмотрим преобразование  $Y = F_X(X)$ . В силу первого свойства ФР величина  $Y$  будет сосредоточена на отрезке  $[0,1]$ . Для ПР  $f_Y(y)$  получим

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} P\{Y < y\} = \frac{d}{dy} P\{X < F_X^{-1}(y)\},$$

где  $F_X^{-1}$  – функция, обратная к ФР  $X$ , существование которой следует из монотонности  $F_X$ .

Продолжив преобразование, получим

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{F_X^{-1}(y)} f_X(x) dx = \frac{1}{f_X[F_X^{-1}(y)]} f_X[F_X^{-1}(y)] = 1. \quad (1.1.7)$$

Таким образом, автопреобразование  $Y = F_X(X)$  переводит любую непрерывную СВ в  $R(0,1)$ . Отсюда с очевидностью вытекает и обратное утверждение: преобразование  $F_X^{-1}$  переводит СВ  $R(0,1)$  в СВ с ФР  $F_X$ . Полученное тождество используется при статистическом моделировании случайных процессов методом «Монте-Карло».

Генератор псевдослучайных чисел в серии повторных обращений выдает последовательную выборку из  $R(0,1)$  (имитирует рулетку с единичной окружностью). Преобразованием  $F_X^{-1}$  получается выборка из совокупности с ФР  $F_X$ . Например, преобразование  $X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-Y)$  дает СВ с показательным распределением  $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ,  $x \geq 0$ . Все типовые ПР реализованы в качестве стандартных функций в [6].

3. Моделирование целочисленных случайных величин осуществляется путем разбиения единичного отрезка на интервалы, равные вероятностям их возможных значений. Пусть, например, требуется смоделировать (разыграть) полиномиальную СВ, у которой три возможных значения реализуются с вероятностями:



$$P(AB) = P(A)P(B). \quad (1.2.1)$$

Если события не являются независимыми, то вероятность их совместного появления определяется через условную вероятность:

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B). \quad (1.2.2)$$

Под условной вероятностью  $P(B/A)$  понимается вероятность наступления события  $B$  при условии, что событие  $A$  произошло. Для независимых событий  $P(B/A) = P(B)$ ,  $P(A/B) = P(A)$ .

Установление независимости событий, либо определение условных вероятностей, часто делается из соображений по существу исследуемого процесса.

Рассмотрим пример. В механизм входят две одинаковые шестерни. Технические условия нарушаются, если они обе окажутся с плюсовыми отклонениями по толщине зуба. У сборщика имеется 10 шестерен, из которых 3 «+» и 7 «-». Определим вероятность нарушения технических условий при сборке. Пусть событие  $A \sim \{\text{первая шестерня «+»}\}$ , событие  $B \sim \{\text{вторая шестерня «-»}\}$ . По правилу умножения находим  $P(AB) = P(A)P(B/A)$ . Непосредственным подсчетом находим

$$P(A) = \frac{3}{10}; P(B/A) = \frac{2}{9}; P(AB) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}.$$

Если же шестерни последовательно устанавливаются на двух рабочих местах и у двух сборщиков одинаковые партии шестерен, то  $A$  и  $B$  можно считать независимыми. В этом случае

$$P(B/A) = P(B) = \frac{3}{10}; P(AB) = P(A)P(B) = \frac{9}{10}.$$

Из соотношения (1.2.2) следует *формула Байеса*:

$$P(B/A) = \frac{P(B)P(A/B)}{P(A)}. \quad (1.2.3)$$

Пусть событие  $A$  по условиям опыта может осуществляться только совместно с каким-нибудь из событий полной группы (одной из гипотез)  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , удовлетворяющих условиям

$$\sum_{k=1}^n P(H_k) = 1, P(H_i H_j) = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Безусловные вероятности  $P(H_k)$ ,  $k = \overline{1, n}$ , и априорные условные вероятности  $P(A/H_k)$ ,  $k = \overline{1, n}$ , предполагаются известными. Тогда вероятность события  $A$  определяется *формулой полной вероятности*:

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(H_k)P(A/H_k). \quad (1.2.4)$$

Апостериорные условные вероятности гипотез  $P(H_k/A)$ , то есть правдоподобие гипотез при условии, что событие  $A$  зафиксировано, определяются по формуле вероятностей правдоподобия гипотез Байеса:

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{k=1}^n P(H_k)P(A/H_k)}. \quad (1.2.5)$$

Пусть в партии смешаны изделия от трех поставщиков в количестве  $n_1, n_2, n_3$ . Известно, что вероятности дефектности для изделия 1-го, 2-го, 3-го поставщиков равны соответственно  $q_1, q_2, q_3$ . Взятое наугад изделие оказалось дефектным. Требуется найти вероятность того, что оно принадлежит 1-му, 2-му и 3-му поставщикам.

Пусть событие  $A \sim \{\text{изделие оказалось дефектным}\}$ . Гипотезы, образующие полную группу, заключаются в следующем:

$H_1 \sim \{\text{изделие 1-го поставщика}\}; H_2 \sim \{\text{изделие 2-го поставщика}\}; H_3 \sim \{\text{изделие 3-го поставщика}\}$ . Их вероятности равны:

$$P(H_k) = \frac{n_k}{n_1 + n_2 + n_3}, k = 1, 2, 3.$$

Из контекста задачи условные вероятности события  $A$  составляют:

$$P(A/H_k) = q_k, k = 1, 2, 3.$$

Апостериорные вероятности гипотез, вычисленные по формуле Байеса, после элементарных преобразований будут иметь вид

$$P(H_k/A) = \frac{n_k q_k}{n_1 q_1 + n_2 q_2 + n_3 q_3}, k = 1, 2, 3.$$

2. Пусть совокупность объемом  $N$  образуется по схеме Бернулли с вероятностью успеха  $p$ . Для наглядности представим, что корзина последовательно заполняется  $N$  шарами, которые независимо друг от

друга могут быть черными с вероятностью  $p$  и белыми с вероятностью  $1 - p$ . Ряд распределения числа черных шаров будет иметь вид

$$P\{X = k\} = C_N^k p^k (1 - p)^{N-k}.$$

Из корзины извлекается безвозвратная выборка объемом  $n < N$ . Пусть  $Y$  число черных шаров в выборке. Ряд условного выборочного распределения согласно п.1.1 составит

$$P\{Y = m | X = k\} = \frac{C_m^m C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n}, \quad (1.2.6)$$

$$m \leq k \leq N - n + m.$$

Найдем ряд безусловного распределения  $P\{X = m\}$ . Применяя формулу полной вероятности, получим

$$\begin{aligned} P\{Y = m\} &= \sum_{k=m}^{N-n+m} P\{X = k\} P\{Y = m | X = k\} = \\ &= \sum_{k=m}^{N-n+m} C_N^k \frac{C_m^m C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n} p^k (1-p)^{N-k}. \end{aligned}$$

Комбинаторный множитель в последнем выражении после элементарных преобразований составит  $C_n^m C_{N-n}^{k-m}$ . Продолжив преобразования, получим

$$\begin{aligned} P\{Y = m\} &= C_n^m \sum_{k=m}^{N-n+m} C_{N-n}^{k-m} p^k (1-p)^{N-k} = [l = k - m] = \\ &= C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \sum_{l=0}^{N-n} C_{N-n}^l p^l (1-p)^{N-n-l}. \end{aligned}$$

Сумма в последнем выражении представляет собой полную сумму биномиального ряда  $B(p, N-n)$ , стало быть равна 1.

Таким образом доказана следующая теорема:

*Безвозвратная выборка из конечной биномиальной совокупности сохраняет биномиальный закон распределения с той же вероятностью успеха:  $B(p, N) \rightarrow B(p, n)$ .*

**3.** Рассмотрим другую ситуацию. Пусть имеется двухзвенная технологическая цепь с вероятностями успешного завершения операций  $p_1$  и  $p_2$  соответственно. Положим, что результаты последовательного

прохождения компонентов полуфабриката (заготовок) независимы в совокупности, т.е. реализуется схема Бернулли. Пусть  $n$  – число заготовок, поступивших на вход первого звена. Тогда  $Y_1$  – число бездефектных полуфабрикатов на выходе первого звена будет подчиняться биномиальному закону  $P\{Y_1 = m_1\} \sim B(p_1, n)$ . Выход первого звена является входом второго, и условное распределение  $P\{Y_2 = m_2 | Y_1 = m_1\}$ ,  $m_1 \geq m_2$ , также будет биномиальным:  $B(p_2, m_1)$ . Безусловное распределение  $P\{Y_2 = m\}$  согласно формуле полной вероятности составит:

$$\begin{aligned} P\{Y_2 = m_2\} &= \sum_{m_1=m_2}^n P\{Y_1 = m_2\} P\{Y_1 = m_2 | Y_1 = m_1\} = \\ &= \sum_{m_1=m_2}^n C_n^{m_1} p_1^{m_1} (1-p_1)^{n-m_1} C_{m_1}^{m_2} p_2^{m_2} (1-p_2)^{m_1-m_2}. \end{aligned}$$

Объединяя комбинаторные множители и перегруппировывая факториальные сомножители, получаем тождество

$$C_n^{m_1} C_{m_1}^{m_2} = C_n^{m_2} C_{n-m_2}^{n-m_2} = C_n^{m_2} C_{n-m_2}^{m_1-m_2}.$$

Далее, вынося из под знака суммы множители, не зависящие от  $m_1$ , искомые вероятности получим в виде

$$\begin{aligned} P\{Y_2 = m_2\} &= C_n^{m_2} (p_1 p_2)^{m_2} (1-p_1)^{n-m_2} \times \\ &\times \sum_{m_1=m_2}^n C_{n-m_2}^{m_1-m_2} \left( p_1 \frac{1-p_2}{1-p_1} \right)^{m_1-m_2}. \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Совершив замену индекса  $k = m_1 - m_2$ , сумму в последнем выражении преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-m_2} C_{n-m_2}^k \left( p_1 \frac{1-p_2}{1-p_1} \right)^k &= \sum_{k=0}^{n-m_2} C_{n-m_2}^k \left( p_1 \frac{1-p_2}{1-p_1} \right)^k 1^{n-m_2-k} = \\ &= \left( 1 + p_1 \frac{1-p_2}{1-p_1} \right)^{n-m_2} = \left( \frac{1-p_1 p_2}{1-p_1} \right)^{n-m_2}. \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

Возвращая (1.2.8) в (1.2.7), окончательно получаем следующее тождество:

$$P\{Y_2 = m_2\} = C_n^{m_2} (p_1 p_2)^{m_2} (1 - p_1 p_2)^{n - m_2},$$

что является доказательством следующей теоремы:

*Число успехов при испытаниях по двухзвенной схеме Бернулли подчиняется биномиальному закону с вероятностью успеха, равной произведению вероятностей успеха составляющих звеньев:*

$$B\{p_1, n\} \times B\{p_2, n, p_1\} \rightarrow B\{p_1 p_2, n\}.$$

Из этой теоремы вытекает доказываемое с помощью элементарной индукции следствие: для любого числа последовательных звеньев схемы Бернулли число успехов на выходе подчиняется биномиальному закону с вероятностью успеха, равной произведению вероятностей составляющих звеньев.

4. При совместном рассмотрении нескольких СВ следует различать два принципиально различных типа взаимодействия.

Пусть имеется партия подшипниковых шариков, состоящая из продукции двух различных автоматов. Фактический диаметр шариков первого автомата имеет нормальное распределение с параметрами  $\mu_1, \sigma_1$ , второго -  $\mu_2, \sigma_2$ . Доли шариков первого и второго сорта равны соответственно  $p_1 = \alpha, p_2 = 1 - \alpha$ . Плотность распределения диаметра шариков в репрезентативной выборке из такой партии по формуле полной вероятности будет равна:

$$f(d) = \frac{\alpha}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(d - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{1 - \alpha}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(d - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}. \quad (1.2.9)$$

Если при этом  $|\mu_1 - \mu_2| > \sigma_1 + \sigma_2$ , то кривая плотности распределения будет иметь двухмодальный (двухгорбый) вид. Такой тип взаимодействия, когда с вероятностью  $\alpha$  появляется СВ  $X_1$ , а с вероятностью  $p = 1 - \alpha$  - СВ  $X_2$ , называется *суперпозицией* законов распределения. Если же продукцией автоматов являются, скажем, электрические сопротивления, которые затем соединяются в последовательную цепь, то номинальное сопротивление составных резисторов будет иметь ПР

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} e^{-\frac{(r - \mu_1 - \mu_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}}. \quad (1.2.10)$$

Такой тип взаимодействия, представляющий собой сложение независимых СВ, называется *композицией*.

При этом, если резисторы с двух линий смешиваются в общем накопителе в пропорции  $p_1 = \alpha, p_2 = 1 - \alpha$ , а затем соединяются в цепь, то номинал составных резисторов будет иметь трехмодальное распределение с плотностью

$$f(r) = \frac{\alpha^2}{2\sigma_1 \sqrt{\pi}} e^{-\frac{(r - 2\mu_1)^2}{4\sigma_1^2}} + \frac{\sqrt{2}\alpha(1 - \alpha)}{\sqrt{\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} e^{-\frac{(r - \mu_1 - \mu_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} + \frac{(1 - \alpha)^2}{2\sigma_2 \sqrt{\pi}} e^{-\frac{(r - 2\mu_2)^2}{4\sigma_2^2}}. \quad (1.2.11)$$

В данном случае имеет место совместное проявление суперпозиции и композиции двух СВ. Из этого простого примера ясно, что для результативности и эффективности любого статистического анализа необходимо детальное предметное рассмотрение схемы возникновения и взаимодействия СВ, что на практике нередко упускается из виду.

5. В приложениях математической статистики часто встречается задача установления закона распределения функции нескольких СВ. Сумма двух СВ  $Y = X_1 + X_2$  является частным случаем функции двух СВ. Исчерпывающей характеристикой пары СВ является функция их совместного распределения, которая определяется как вероятность совместности выполнения двух неравенств:

$$F(x_1, x_2) = P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2\}. \quad (1.2.12)$$

Функция распределения (1.2.12) обладает свойствами, аналогичными свойствам функции распределения одной СВ. Однако знание функций распределения  $F_1(x_1)$  и  $F_2(x_2)$  недостаточно для описания совместного распределения  $X_1$  и  $X_2$ , так как между ними возможно наличие стохастической зависимости — связи. При условии независимости

$X_1$  и  $X_2$ , что эквивалентно независимости событий  $A_1 \cong \{X_1 < x_1\}$  и  $A_2 \cong \{X_2 < x_2\}$ , функция совместного распределения факторизуется и для ее определения достаточно знать функции распределения компонент

$$F(x_1, x_2) = F(x_1)F(x_2). \quad (1.2.13)$$

Точно так же факторизуется и плотность совместного распределения:

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial F(x_1)}{\partial x_1} \frac{\partial F(x_2)}{\partial x_2} = f_1(x_1)f_2(x_2). \quad (1.2.14)$$

Функция распределения СВ  $Y = X_1 + X_2$  представляет собой интеграл

$$G(y) = \int_{D(y)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{y-x_1} f_2(x_2) dx_2, \quad (1.2.15)$$

где  $D(y)$  - область плоскости  $x_1 o x_2$ , определяемая из условия  $x_1 + x_2 < y$  (рис. 1.2.1).

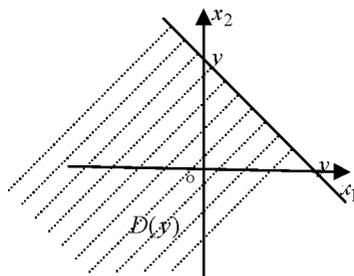


Рис. 1.2.1. Область интегрирования для определения ПР суммы двух СВ

Дифференцируя (1.2.15) по  $y$ , находим плотность распределения суммы:

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) f_2(y - x_1) dx_1, \quad (1.2.16)$$

или, учитывая симметрию функции  $Y = X_1 + X_2$ ,

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y - x_2) f_2(x_2) dx_2. \quad (1.2.17)$$

Интеграл (1.2.16) и эквивалентный ему (1.2.17) называется сверткой и обозначается символом

$$g = f_1 * f_2. \quad (1.2.18)$$

При композиции двух дискретных СВ интегралы (1.2.16) и (1.2.17) преобразуются в суммы:

$$P(y) = \sum_{i=1}^{n_1} P_1(x_1^{(i)}) P_2(y - x_1^{(i)}) = \sum_{i=1}^{n_1} P_1(y - x_1^{(i)}) P_2(x_2^{(i)}) . \quad (1.2.19)$$

В примере, приведенном в предыдущем пункте, был использован тот факт, что сумма двух нормальных величин также является нормальной, среднее значение и дисперсия которой равны соответственно сумме средних и сумме дисперсий слагаемых:  $\mu = \mu_1 + \mu_2$ ,  $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ . То же самое справедливо для любого числа независимых нормальных СВ. При этом плотность распределения суммы из  $n$  слагаемых будет представлять собой результат  $n$ -кратной последовательной свертки. Суммы непрерывных СВ с распределением, отличным от нормального, уже не сохраняют закон распределения слагаемых, даже если слагаемые распределены одинаково. Однако с увеличением числа слагаемых сумма всякий раз достаточно быстро нормализуется, что напрямую следует из центральной предельной теоремы.

Для иллюстрации центральной предельной теоремы рассмотрим сумму независимых СВ с равномерным распределением на отрезке

$$[0;1] Y_n = \sum_{i=1}^n X_i. \text{ Последовательно производя преобразование (1.2.16),}$$

получим для ПР  $g_n(y)$  следующие рекуррентные соотношения:

$$g_1(y) = \begin{cases} 1, & y \in [0,1] \\ 0, & y \notin [0,1] \end{cases} \quad (1.2.20)$$

$$g_{n+1}(y) = \int_{y-1}^y g_n(x) dx. \quad (1.2.21)$$

Графики функций  $g_2 \div g_4$  изображены на рис. 1.2.2.

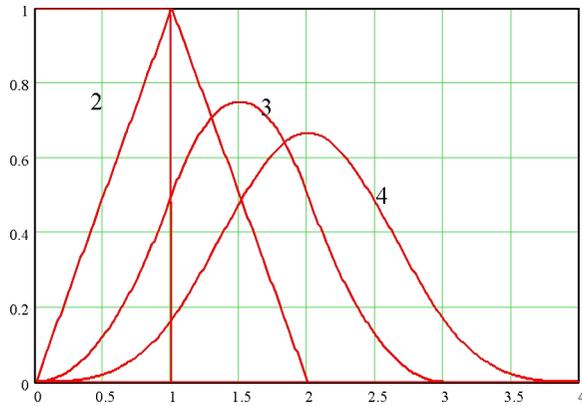


Рис. 1.2.2. Нормализация суммы случайных слагаемых  $R(0,1)$

Как видно, последовательность  $g_n$  достаточно быстро приближается к кривой плотности нормального распределения с параметрами  $\mu = \frac{n}{2}$ ,  $\sigma^2 = \frac{n}{12}$ . Если ввести нормированную величину  $Z_n = (Y_n - \frac{n}{2}) \cdot \sqrt{\frac{12}{n}}$ , то при  $n \geq 6$  получим кривую, практически не-

отличимую от стандартной нормальной кривой Гаусса:  $\varphi_0(z) = \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}}$ .

6. В п. 1.1 была найдена плотность распределения квадрата стандартной нормальной СВ. Используя соотношение (1.2.16), найдем плотность распределения суммы квадратов двух независимых стандартных нормальных СВ:  $Y = Z_1^2 + Z_2^2$ :

$$f(y) = \int_0^y \frac{e^{-\frac{1}{2}z_1^2}}{\sqrt{2\pi(y-z_1)}} dz_1 = \frac{e^{-\frac{1}{2}y}}{2\pi} \int_0^y \frac{dz}{\sqrt{z(y-z)}} = \left[ u = \frac{z - \frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y} \right] =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}y}}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}y}}{2\pi} \arcsin u \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}y}. \quad (1.2.22)$$

При произвольном  $k > 2$ , разделяя образующуюся последовательность по четным/нечетным номерам, ПР  $\chi_k^2 = \sum_{i=1}^k Z_i^2$  по индукции получаем в виде

$$f_{\chi_k^2}^{(y)} = \frac{y^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y}}{\Gamma(\frac{k}{2}) 2^{\frac{k}{2}}}, \quad (1.2.23)$$

где  $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$  – гамма-функция Эйлера, обладающая следующими свойствами:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(1) = 1.$$

Для целого аргумента  $\Gamma(n+1) = n!$

Распределение  $\chi_k^2$  играет очень важную роль при решении многих прикладных задач математической статистики. Среднее и дисперсия  $\chi_k^2$  равны:

$$M[\chi_k^2] = k; \quad D[\chi_k^2] = 2k. \quad (1.2.24)$$

В приложениях часто встречаются распределения, получающиеся из  $\chi_k^2$  путем его преобразования. Например,  $\chi_k = \sqrt{\chi_k^2}$ . Плотность распределения  $\chi_k$  найдем, используя полученное в п. 1.1 соотношение (1.1.2):

$$f_{\chi_k}(x) = \frac{x^{k-1} e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\Gamma(\frac{k}{2}) 2^{\frac{k-1}{2}}}. \quad (1.2.25)$$

При  $k=2$  возникает распределение Рэлея – распределение эксцентриситета параллельных осей вала и отверстия:  $f_{\chi_2}(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ .

При  $k=3$  возникает распределение Максвелла – распределение величины скорости молекулы газа в трехмерном пространстве:  $f_{\chi_3}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}x^2e^{-\frac{1}{2}x^2}$ .

Среднее и дисперсия величины  $\chi_k$  равны:

$$M[\chi_k] = \frac{\sqrt{2}\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})}; D[\chi_k] = M[\chi_k^2] - (M[\chi_k])^2 = k - \frac{2\Gamma^2(\frac{k+1}{2})}{\Gamma^2(\frac{k}{2})}.$$

7. Пусть СВ  $X_1, X_2$  имеют ПР совместного распределения  $f_{X_1X_2}(x_1, x_2)$ , а  $Y = X_1X_2$  - их произведение. Область  $D(y)$ , удовлетворяющая условию  $\{Y < y\}$ , показана на рис.1.2.3.

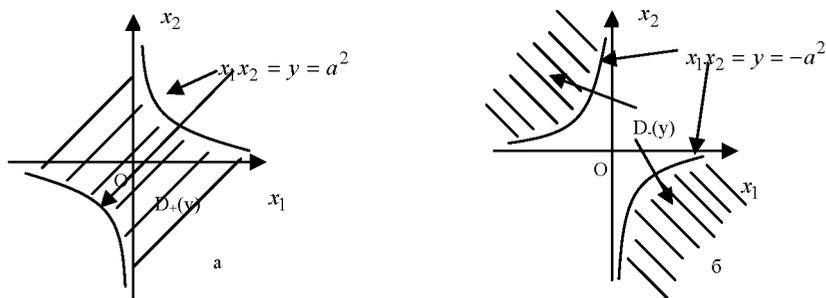


Рис.1.2.3. Область интегрирования для определения произведения двух СВ

Интегрируя ПР совместного распределения по области  $D(y)$ , находим ФР  $Y$ :

$$G(y) = \int_{-\infty}^0 \left( \int_{\frac{y}{x_1}}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 + \int_0^{\frac{y}{x_1}} \left( \int_{-\infty}^0 f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1. \quad (1.2.26)$$

Дифференцируя по  $y$ , находим ПР произведения:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}G(y) = - \int_{-\infty}^0 f(x, \frac{y}{x}) \frac{dx}{x} + \int_0^{\infty} f(x, \frac{y}{x}) \frac{dx}{x}. \quad (1.2.27)$$

Если  $X_1$  и  $X_2$  независимы и симметричны относительно нуля, то (1.2.27) преобразуется к виду

$$f_Y(y) = 2 \int_0^{\infty} f_1(x) f_2(\frac{y}{x}) \frac{dx}{x} = 2 \int_0^{\infty} f_1(\frac{y}{x}) f_2(x) \frac{dx}{x}. \quad (1.2.28)$$

Если же  $X_1, X_2$  независимые положительно-определенные СВ, то множитель 2 исчезает.

8. Для преобразования  $Y = \frac{X_2}{X_1}$  область  $D(y)$  показана на рис. 1.2.4.

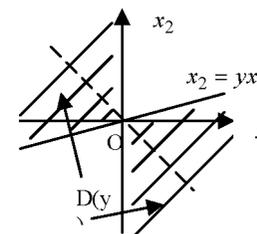


Рис.1.2.4. Область интегрирования для определения отношения двух СВ

Интегрируя, получаем ФР  $Y$  в виде

$$G(y) = \int_{-\infty}^0 \left( \int_{yx_1}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 + \int_0^{yx_1} \left( \int_{-\infty}^0 f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1. \quad (1.2.29)$$

Дифференцируем по  $y$ , находим ПР  $Y$ :

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}G(y) = \int_0^{\infty} xf(x, yx) dx - \int_{-\infty}^0 xf(x, yx) dx. \quad (1.2.30)$$

Для пары независимых и положительных СВ (1.2.30) преобразуется к виду

$$f_Y(y) = \int_0^{\infty} xf_1(x) f_2(yx) dx. \quad (1.2.31)$$

Пусть,  $Y = \frac{\chi_m^2}{\chi_n^2}$ . Подставляя в (1.2.31) ПР (1.2.23), получим

$$f_Y(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)y^{\frac{m-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(1+y)^{\frac{m+n}{2}}}, y \geq 0. \quad (1.2.32)$$

Для отношения средних квадратов  $Z = \frac{1}{m}\chi_m^2 / \frac{1}{n}\chi_n^2$ , связанного с  $Y$  линейным соотношением  $Z = \frac{n}{m}Y$ , будем иметь

$$f_Z(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}}z^{\frac{m-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{m}+z\right)^{\frac{m+n}{2}}}, z \geq 0. \quad (1.2.33)$$

Соотношение (1.2.33) есть ПР дисперсионного отношения Фишера – основной инструмент дисперсионного анализа.

**8.** Найдем дисперсию суммы двух СВ, полагая наличие связи между ними. Используя свойства средних и дисперсий, получим

$$D[X+Y] = M[X+Y]^2 - (\mu_X + \mu_Y)^2 = M[X^2] + M[Y^2] - \mu_X^2 - \mu_Y^2 + 2(M[XY] - \mu_X\mu_Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2(M[XY] - \mu_X\mu_Y). \quad (1.2.34)$$

С помощью тождественного преобразования вида  $X - \mu_X + \mu_X$  получаем, что последнее слагаемое в (1.2.34) представляет собой смешанный второй центральный момент  $2M[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$ . Таким образом, окончательно дисперсию суммы получаем в виде

$$\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\text{cov}(X, Y), \quad (1.2.35)$$

где  $\text{cov}(X, Y) = M[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$  - ковариация, служащая мерой линейной зависимости между  $X$  и  $Y$ . Удельная мера, или коэффициент корреляции, определяется как

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X\sigma_Y}.$$

Подставив (1.2.34) в (1.2.35), для дисперсии суммы будем иметь

$$\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\rho(X, Y)\sigma_X\sigma_Y. \quad (1.2.36)$$

Коэффициент корреляции, очевидно, сохраняет постоянное значение при масштабировании  $\tilde{X} = aX$ ,  $\tilde{Y} = bY$ , где  $a$  и  $b$  – произвольные положительные константы. Полагая  $a = \frac{1}{\sigma_X}$ ,  $b = \frac{1}{\sigma_Y}$ , получим

$\sigma_{\tilde{X}+\tilde{Y}}^2 = \sigma_{\tilde{X}}^2 + \sigma_{\tilde{Y}}^2 + 2\rho(X, Y)\sigma_{\tilde{X}}\sigma_{\tilde{Y}}$ . Так как  $\sigma_{\tilde{X}} = \sigma_{\tilde{Y}} = 1$ ,  $\sigma_{\tilde{X}+\tilde{Y}}^2 = 2(1 + \rho(X, Y))$ . Левая часть последнего соотношения неотрицательна, следовательно  $|\rho(X, Y)| \leq 1$ .

Множественная ковариация системы СВ  $X_k$  задается симметричной ковариационной матрицей  $n \times n$ . На главной диагонали стоят дисперсии  $\sigma_k^2 = \text{cov}(X_k, X_k)$ . Внедиагональные элементы представляют собой соответствующие ковариации  $\text{cov}(X_k, X_m)$ . Путем деления ковариационной матрицы на соответствующие дисперсии образуется корреляционная матрица, сохраняющая симметрию. На ее главной диагонали стоят 1, внедиагональными элементами являются коэффициенты корреляции  $\rho(X_k, X_m)$ .

### 1.3. Закон совместного распределения выборочных значений

**1.** Все множество объектов, из которого производится их случайный равновероятный отбор, или, в терминах случайной величины, множество всех ее возможных значений, называется *генеральной совокупностью*. Группа из конечного числа  $n$  объектов, охваченных обследованием, называется *случайной выборкой*, или *просто - выборкой*, а их количество  $n$  - объемом выборки. Выборка называется *репрезентативной* (представительной), если она достаточно точно повторяет пропорции генеральной совокупности. В вероятностной интерпретации набор выборочных значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  представляет собой  $n$  «экземпляров» одной и той же СВ  $X$ , т.е. последовательность значений СВ  $X$ , полученных в результате  $n$  независимых в совокупности испы-

таний. Именно это априорное уопостроение, кажущееся, с одной стороны, несколько искусственным, а с другой стороны, почти очевидным, позволяет применять к выборочным значениям аппарат теории вероятностей. При этом следует заметить, что *полная и замкнутая теория выборочных распределений построена только для выборок из нормальных совокупностей*. В связи с этим в дальнейшем изложении все рассматриваемые совокупности будут априорно полагаться нормальными (если не оговорено обратное). Интерпретация выборки как *последовательности независимых реализаций одной и той же СВ* позволяет однозначно установить связь между законом совместного распределения выборочных значений и законом распределения исследуемой СВ  $X$ :

$$F_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_X(x_1) F_X(x_2) \dots F_X(x_n). \quad (1.3.1)$$

В случае непрерывной СВ аналогичное соотношение справедливо и для плотности совместного распределения:

$$f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_X(x_1) f_X(x_2) \dots f_X(x_n). \quad (1.3.2)$$

При этом, поскольку все выборочные значения равновероятны с вероятностью  $p = \frac{1}{n}$ , выборочное среднее, определяемое как среднее

арифметическое  $\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ , представляет собой СВ

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X^{(i)}$  ( $n$  - кратную композицию величины  $\frac{1}{n}X$  с самой собой).

Плотность распределения выборочного среднего можно получить, воспользовавшись тем, что СВ  $U_n = \sum_{i=1}^n X^{(i)}$  имеет ПР, представляющую собой  $n$  - кратную свертку плотности распределения СВ  $X$ :

$$f_{U_n} = f_X * f_X * \dots * f_X. \quad (1.3.3)$$

Так как величины  $U_n$  и  $\bar{X}$  связаны линейным соотношением, то на основании правила линейного преобразования (п. 1.1.) получим

$$f_{\bar{X}}(x) = n f_{U_n}(nx). \quad (1.3.4)$$

2. Чтобы прояснить смысл соотношений (1.3.3), (1.3.4), рассмотрим следующий пример. Пусть  $X$  — стандартная нормальная СВ  $N(0,1)$ . Выборка объемом  $n=2$  представляет собой две независимых СВ  $X_1, X_2$  с плотностью совместного распределения

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}.$$

Свертка (1.3.3) дает следующий результат:

$$f_{U_2}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + (u-x)^2)} dx = \frac{e^{-\frac{u^2}{4}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}u)^2} dx =$$

$$= \left[ v = \sqrt{2} \left( x - \frac{1}{2}u \right) \right] = \frac{e^{-\frac{u^2}{4}}}{2\sqrt{\pi}}.$$

Совершив второе преобразование путем деления на 2, находим  $f_{\bar{X}_2}(x) = 2 f_{U_2}(2x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$ .

Выборочное среднее в данном случае имеет нормальное распределение с параметрами  $\mu = 0, \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . С увеличением объема выборки из  $N(0,1)$  СКО выборочного среднего уменьшается по закону  $\sigma = \frac{1}{\sqrt{n}}$ . При распределениях, отличных от нормального, выборочное среднее, представляющее собой композицию нескольких СВ с одним законом распределения, достаточно быстро нормализуется с увеличением объема выборки. Этот факт, являющийся следствием центральной предельной теоремы, был проиллюстрирован в п.1.2

Математическая статистика решает как бы «обратную задачу» теории вероятностей. То есть, если при классическом определении случайного события и вероятности по известным характеристикам генеральной совокупности вычислялись вероятности выборочных значений (результатов независимых испытаний), то в практических приложениях, наоборот, по имеющимся в распоряжении «наблюденным» выборочным значениям оцениваются неизвестные числовые характеристики и законы распределения генеральной совокупности.

#### 1.4. Выборочные оценки параметров распределения

1. При практическом применении статистических методов для анализа качества продукции, стабильности и точности технологических и измерительных процессов чаще всего приходится иметь дело со статистическим материалом ограниченного объема - 10÷100 измерений, либо сериями 5÷25 проб - малых выборок по 3÷7 измерений. Такого ограниченного материала недостаточно, чтобы найти заранее неизвестный закон распределения, хотя можно определить его важнейшие числовые характеристики: среднее и дисперсию либо параметры априорно известного закона распределения. Оценкой неизвестного параметра  $\theta$  называется СВ, представляющая собой функцию выборочных значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :  $\hat{\theta} = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ , вид которой определяется, исходя из «физического смысла» параметра  $\theta$  и информации о законе распределения СВ X.

В качестве оценки математического ожидания  $\hat{\mu}$  чаще всего используется выборочное среднее:  $\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ . Числовые характеристики  $\bar{X}$  равны:  $M[\bar{X}] = \mu$ ,  $D[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$ .

Несмещенная выборочная оценка дисперсии, как известно, имеет вид

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{n}{n-1} \bar{x}^2.$$

Однако выборочное СКО  $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$  не является несмещенной оценкой параметра  $\sigma$ . В этом легко убедиться, рассмотрев дисперсию  $s$ :  $D[S] = M[S^2] - (M[S])^2$ .

Поскольку  $M[S^2] = \sigma^2$ , приходим к очевидному выводу, что  $M[S] < \sigma$ .

Это отрицательное смещение оценки  $s$  при выборках небольшого объема может приводить к заниженной оценке средней ширины зоны рассеивания процесса, приводя тем самым к завышенной оценке числовых индексов (Ср, Срк и т.д.).

2. Для установления ПР величин  $S_n^2$ ,  $S_n$  и определения несмещенной оценки  $S_n^*$  рассмотрим нормированную сумму квадратов отклонений:  $\tilde{Q}_n = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 = \frac{S_{(n-1)}^2}{\sigma^2}$ . Используя тождественное преобразование, представим  $\tilde{Q}_n$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_n &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^n [x_k - \mu - (\bar{x} - \mu)]^2 = \frac{1}{\sigma^2} \left\{ \sum_{k=1}^n (x_k - \mu)^2 - 2(\bar{x} - \mu) \sum_{k=1}^n (x_k - \mu) + \right. \\ & \left. n(\bar{x} - \mu)^2 \right\} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^n (x_k - \mu)^2 - \frac{n}{\sigma^2} (\bar{x} - \mu)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^n (x_k - \mu)^2 - \\ & - \frac{1}{\sigma_{\bar{x}}^2} (\bar{x} - \mu)^2. \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

Внося  $\sigma^2$  и  $\sigma_{\bar{x}}^2$  под знак квадрата, убеждаемся, что каждое из слагаемых представляет собой СВ  $\chi_1^2$  - квадрат стандартной нормальной СВ. Перепишем (1.4.1) в виде  $\tilde{Q}_n + \chi_1^2 = \chi_n^2$ . Поскольку  $\chi_m^2$  аддитивна по степеням свободы ( $\chi_{m_1}^2 + \chi_{m_2}^2 = \chi_{m_1+m_2}^2$ ), приходим к выводу, что

$$\tilde{Q}_n = \frac{S^2(n-1)}{\sigma^2} = \chi_{n-1}^2. \quad (1.4.2)$$

Величина  $\chi_m^2$  была рассмотрена в п.1.2. Используя формулу линейного преобразования  $Y = aX$  ( $a = \frac{1}{n-1}$ ), найдем ПР  $\frac{S_n^2}{\sigma^2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{f_{S_n^2/\sigma^2}(x)}{\sigma^2} &= \frac{f_{\chi_{n-1}^2}(x)}{\chi_{n-1}^2} = (n-1) f_{\chi_{n-1}^2}((n-1)x) = \\ &= \frac{(n-1)^{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n-3}{2}} e^{-\frac{(n-1)x}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Среднее  $\frac{S^2}{\sigma^2}$  равно 1. Дисперсию найдем, используя соотношение  $\sigma_{\frac{S^2}{\sigma^2}}^2 = 2(n-1)$  и формулу для дисперсии нормированной СВ  $\sigma_{aX}^2 = a^2\sigma_X^2$ . Полагая  $a = \frac{1}{n-1}$ , получаем

$$\sigma_{\frac{S^2}{\sigma^2}}^2 = \sigma_{\frac{S^2}{\sigma^2}}^2 = \frac{2(n-1)}{(n-1)^2} = \frac{2}{n-1}. \quad (1.4.4)$$

Числовые характеристики выборочной дисперсии соответственно составят:

$$\mu_{\frac{S^2}{\sigma^2}} = \sigma^2, \quad \sigma_{\frac{S^2}{\sigma^2}}^2 = \frac{2\sigma^4}{n-1}. \quad (1.4.5)$$

Для нормированного выборочного СКО  $\frac{S_n}{\sigma} = \sqrt{\frac{\chi_{n-1}^2}{n-1}}$  ПР найдем, используя преобразование  $Y = \sqrt{X}$ :

$$\frac{f_{\frac{S_n}{\sigma}}(x)}{\sigma} = 2xf_{\frac{S_n}{\sigma}}(x^2) = \frac{2(n-1)^{\frac{n-1}{2}} x^{n-2} e^{-\frac{(n-1)x^2}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}. \quad (1.4.6)$$

Рассмотрим структуру последовательности  $\mu_{\frac{S_n}{\sigma}} = \mu_n$ . Для  $n = 2, 3$

$$\mu_n = \int_0^{\infty} xf_{\frac{S_n}{\sigma}}(x) dx \quad \text{легко вычисляются и составляют:} \quad \mu_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

$\mu_3 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . Рассмотрим случай  $n > 3$ :

$$\mu_n = 2 \int_0^{\infty} \frac{(n-1)^{\frac{n-1}{2}} x^{n-1} e^{-\frac{(n-1)x^2}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} dx =$$

$$= -2 \frac{(n-1)^{\frac{n-3}{2}} x^{n-2} e^{-\frac{(n-1)x^2}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \Big|_0^{\infty} + 2(n-2) \int_0^{\infty} \frac{(n-1)^{\frac{n-3}{2}} x^{n-3} e^{-\frac{(n-1)x^2}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} dx.$$

Первое слагаемое равно 0. Второе слагаемое подстановкой  $t = \sqrt{\frac{n-3}{n-1}}x$ , используя рекуррентное свойство  $\Gamma(z)$ , преобразуем к виду

$$\begin{aligned} & 2 \frac{(n-2)\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-3}} \int_0^{\infty} \frac{(n-3)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-3} e^{-\frac{(n-3)t^2}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} dt = \\ & = \frac{2(n-2)\sqrt{n-1}}{2^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{n-3}} \int_0^{\infty} \frac{(n-3)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-3} e^{-\frac{(n-3)t^2}{2}}}{2^{\frac{n-3}{2}} \Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)} dt = \frac{n-2}{\sqrt{(n-1)(n-3)}} \mu_{n-2}. \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Заменяя в рекуррентном соотношении (1.4.7)  $n' = n-2$  ( $n \geq 4$ ) и используя рекуррентное свойство Гамма-функции, по индукции получаем формулу общего члена последовательности  $\mu_n$ :

$$\mu_n = \frac{\sqrt{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{n-1} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}, \quad n \geq 2. \quad (1.4.8)$$

Таким образом, несмещенную точечную выборочную оценку СКО получим, устранив отрицательное смещение  $M[S]$  тем же приемом, что и для  $s^2$ :

$$s^* = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (1.4.9)$$

В табл. 1.4.1 приведена величина относительной ошибки  $\varepsilon_s = \frac{s^* - s}{s^*} \times 100\%$  в зависимости от объема выборки.

Таблица 1.4.1

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20
$\varepsilon_s, \%$	20,21	11,38	7,78	6,01	4,85	4,06	3,50	3,07	2,74	2,25	1,77	1,31

3. Эффективность полученной оценки будет определяться дисперсией СВ  $\frac{S_n^*}{\sigma}$ :

$$\sigma_{\frac{S_n^*}{\sigma}}^2 = M \left[ \frac{S_n^{*2}}{\sigma^2} \right] - \left( M \left[ \frac{S_n^*}{\sigma} \right] \right)^2 = \frac{n-1}{2} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \right]^2 - 1, \quad (1.4.10)$$

и при больших  $n$  имеет место асимптотика  $\sigma_{\frac{S_n^*}{\sigma}}^2 = \frac{1}{2n} \left( 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right)$ .

Можно указать еще один способ вычисления  $\sigma_{\frac{S_n^*}{\sigma}}^2 = \sigma_n^2$ . Внося

$\frac{n-1}{2}$  в (1.4.10) под знак квадрата и используя рекуррентное свойство  $\Gamma(z)$ , получаем рекуррентное соотношение:

$$\sigma_{n+1}^2 = \frac{1 - (n-1)\sigma_n^2}{(n-1)(1 + \sigma_n^2)}, \quad n \geq 2, \quad \sigma_2^2 = \frac{\pi}{2} - 1. \quad (1.4.11)$$

Точные значения  $\sigma_n$  приведены в табл. 1.4.2 в столбце  $\sigma_{\varepsilon_s}$ .

4. Другой способ получения оценок параметров распределения основан на порядковых статистиках. Рассмотрим выборку непрерыв-

ной СВ объемом  $n$ , полученную при стандартных условиях из совокупности с ФР  $F_X(x) = P\{X < x\}$  и ПР  $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} : x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Выборка, упорядоченная по возрастанию  $y_{n,1}, y_{n,2}, \dots, y_{n,n}$  ( $\forall m > k, y_{n,m} > y_{n,k}$ ), называется *вариационным рядом*. Член вариационного ряда с фиксированным номером  $y_{n,k}$  называется *элементарной порядковой статистикой*. Каждому номеру  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) соответствует случайная величина  $Y_{n,k}$  с законом распределения, зависящим от  $F_X, f_X, n, k$ . Основным исходным пунктом при установлении закона распределения  $Y_{n,k}$  служит биномиальное (точное полиномиальное) распределение дискретных случайных величин.

Используем универсальное автопреобразование  $U(X) = F_X(X)$  (п.1.2) и рассмотрим вариационный ряд  $U_{n,k}$ , все члены которого будут сосредоточены на отрезке  $[0;1]$  (рис. 1.4.1).

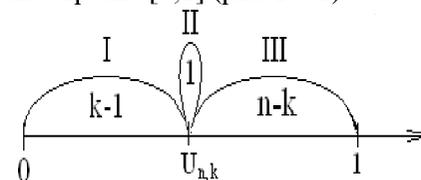


Рис.1.4.1. Схема расположения вариационного ряда выборки из совокупности  $R(0,1)$

Вариационный ряд  $U_{n,k}$ , очевидно, разбивается на 3 группы: I содержит  $k-1$  значение, меньшее  $U_{n,k}$ ; II – само значение  $U_{n,k}$ ; III –  $n-k$  значений, больших  $U_{n,k}$ . Пусть значение  $U_{n,k}$  находится в точке  $t$  ( $t = F_X(U_{n,k})$ ). Тогда вероятность того, что  $k-1$  значение окажется левее точки  $t$  составит  $t^{k-1}$ , вероятность того, что  $n-k$  значений окажется правее точки  $t$ , соответственно  $(1-t)^{n-k}$ . Вероятность всей композиции будет равна произведению  $t^{k-1}(1-t)^{n-k}$ . Количество комбинаций, реализующих такое расположение, согласно формуле

полиномиального распределения (см. ссылку. на стр. 7), составит  $R(k-1, 1, n-k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$ .

Таким образом, функция распределения  $U_{n,k}$  составит

$$F_{U_{n,k}}(u) = P\{U_{n,k} < u\} = \int_0^u \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} t^{k-1} (1-t)^{n-k} dt. \quad (1.4.12)$$

Дифференцируя последнее выражение по  $x$  и вспоминая, что  $u = F_X(x)$ ,  $\frac{du}{dx} = f_X(x)$ , получаем плотность распределения  $Y_{n,k}$ :

$$f_{n,k}(x) = n C_{n-1}^{k-1} F_X(x)^{k-1} [1 - F_X(x)]^{n-k} f_X(x), \quad (1.4.13)$$

или, используя свойство биномиальных коэффициентов  $C_n^k$ , получаем тождественную форму:

$$f_{n,k}(x) = k C_n^k F_X(x)^{k-1} [1 - F_X(x)]^{n-k} f_X(x). \quad (1.4.14)$$

В частности, для крайних членов вариационного ряда плотность распределения получаем, полагая  $k=1$  - для минимального:

$$f_{n,1}(x) = n [1 - F_X(x)]^{n-1} f_X(x), \quad (1.4.15)$$

и  $k=n$  - для максимального:

$$f_{n,n}(x) = n F_X(x)^{n-1} f_X(x). \quad (1.4.16)$$

В статистических приложениях большее распространение получили не сами элементарные порядковые статистики, а их композиции. Главным образом это размах  $R_n = Y_{n,n} - Y_{n,1}$  и медиана выборки четного объема  $M_n = \frac{1}{2}(Y_{n, \frac{n}{2}} + Y_{n, \frac{n+2}{2}})$ , представляющие собой соответственно разность и сумму двух членов вариационного ряда (медианой выборки нечетного объема служит статистика  $Y_{n, \frac{n+1}{2}}$ ).

Для установления законов распределения размаха и медианы необходимо знать закон совместного распределения двух элементарных порядковых статистик. Пусть их номера  $k$  и  $m$  ( $m > k$ ). Как и в предыдущем случае, применим универсальное автопреобразование  $U(X) = F_X(X)$  и используем аналогичную схему рассуждений. В

данном случае ряд  $U_k$  окажется разбитым на 5 групп (рис. 1.4.2) численностью  $k-1, 1, m-k-1, 1, n-m$  соответственно.

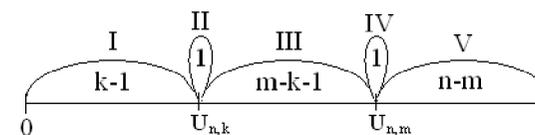


Рис. 1.4.2. Схема расположения вариационного ряда выборки из совокупности  $R(0,1)$  с двумя фиксированными членами

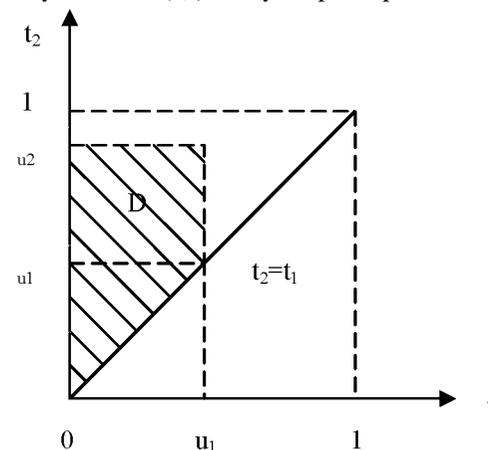


Рис. 1.4.3. Схема области интегрирования для определения закона совместного распределения двух порядковых статистик

Функцию совместного распределения двух порядковых статистик получаем в виде:

$$F_{k,m}(u_1, u_2) = P\{(t_1, t_2) \in D\} = \frac{n!}{(k-1)!(m-k-1)!(n-m)!} \iint_D t_1^{k-1} (t_2 - t_1)^{m-k-1} (1-t_2)^{n-m} dt_1 dt_2.$$

Дифференцируя  $F_{k,m}(u_1, u_2)$  по  $x_1$  и  $x_2$  и учитывая, что

$$u_j = F_X(x_j), \quad \frac{du_j}{dx_j} = f_X(x_j); \quad j=1,2,$$

окончательно получаем плотность распределения  $f_{k,m}(x_1, x_2)$  в виде

$$f_{k,m}(x_1, x_2) = \frac{n! f_X(x_1) f_X(x_2)}{(k-1)!(m-k-1)!(n-m)!} F_X(x_1)^{k-1} [F_X(x_2) - F_X(x_1)]^{m-k-1} [1 - F_X(x_2)]^{n-m}. \quad (1.4.17)$$

Эту схему рассуждений очевидно можно экстраполировать на любое количество членов вариационного ряда, и ПР совместного распределения всех членов вариационного ряда будет иметь вид

$$f_{1,2,\dots,n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = n! \prod_{j=1}^n f_X(x_j), \quad x_1 < x_2 < \dots, x_n. \quad (1.4.18)$$

**5. Закон распределения выборочного размаха найдем как частный случай разности между двумя членами вариационного ряда:**  $R_{n,k,m} = Y_{n,m} - Y_{n,k}$ ,  $m > k$ . Плотность распределения разности двух случайных величин имеет вид

$$f_{R_{k,m}}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{k,m}(x, y+x) dx, \quad y \geq 0, \quad (1.4.19)$$

где  $f_{k,m}$  – ПР совместного распределения (1.4.17).

Рассмотрим два частных случая:

- межвариационный (последовательный) размах. Полагая в (1.4.19)  $m = k+1$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ , получаем

$$f_{R_{k,k+1}}(y) = n(n-1) C_{n-2}^{k-1} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_X(y+x) F_X^{k-1} [1 - F_X(y+x)]^{n-k-1} dx, \quad y \geq 0, \quad n \geq 2; \quad (1.4.20)$$

- полный размах выборки (в дальнейшем просто размах).

Полагая в (1.4.17), (1.4.19)  $k = 1$ ,  $m = n$ , получаем

$$f_{R_n}(y) = n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_X(y+x) [F_X(y+x) - F_X(x)]^{n-2} dx, \quad y \geq 0. \quad (1.4.21)$$

Статистика  $R_n$  выборки из нормальной совокупности является одной из наиболее популярных, поэтому рассмотрим ПР  $f_{R_n}$  более детально. Как обычно в подобных случаях, рассмотрим совокупность  $N(0,1)$ , поскольку  $R_n$  от  $\mu$  не зависит, а при произвольном  $\sigma$  размах определяется умножением на  $\sigma$  размаха выборки из

$N(0,1)$  (другими словами рассматривается нормированный размах  $\frac{R_n}{\sigma}$  выборки из произвольной нормальной совокупности).

При оговоренных условиях  $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ,  $F_X(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x)$ .

Подставляя  $n = 2, 3$  в (1.4.21), находим:

$$f_{R_2}(y) = \frac{e^{-\frac{1}{4}y^2}}{\sqrt{\pi}}, \quad f_{R_3}(y) = \frac{6e^{-\frac{1}{4}y^2}}{\sqrt{\pi}} \Phi_0\left(\frac{y}{\sqrt{6}}\right). \quad (1.4.22)$$

Для  $n > 3$  точные формулы ПР существуют только в квадратуре и для больших  $n$  нужно исследовать их асимптотическое поведение. Вид ПР  $R_n$  для  $n = 2 \div 4, 10$  представлен на рис. 1.4.4.

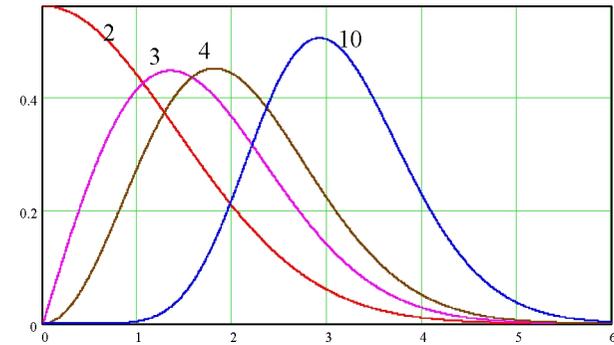


Рис. 1.4.4. Плотность выборочного размаха в зависимости от объема выборки  $n$

Асимптотика числовых характеристик нормированного размаха  $\frac{R_n}{\sigma}$  имеет вид

$$\mu_{\frac{R_n}{\sigma}} \approx \frac{4 \ln n - \ln \ln n - \ln 4\pi + 2C}{\sqrt{2 \ln n}} \approx 2\sqrt{2 \ln n}, \quad \sigma_{\frac{R_n}{\sigma}} \approx \frac{\pi}{\sqrt{6 \ln n}}. \quad (1.4.23)$$

При этом нормированный размах  $\frac{R_n}{\mu_{R_n}/\sigma}$ , очевидно, есть несмещенная оценка генерального СКО, т.е.  $\hat{\sigma}_R = \frac{R_n}{\mu_{R_n}/\sigma}$ . В свою очередь, СКО

полученной оценки будет совпадать с коэффициентом вариации нормированного размаха  $\sigma_{\hat{\sigma}_R} = v_{\frac{R_n}{\sigma}}$ , предельное значение которого составит

$$v_{\frac{R_n}{\sigma}} \approx \frac{\pi}{4\sqrt{3 \ln n}}. \quad (1.4.24)$$

Сравнительная эффективность оценки  $\hat{\sigma}_R$  приведена в табл. 1.4.2. Числовые характеристики и квантили нормированного размаха  $\frac{R_n}{\sigma}$  даны в приложении III.

6. При установлении закона распределения выборочной медианы рассмотрим два случая:

- медиана выборки нечетного объема.

В этом случае  $n = 2k + 1$ , и медианой служит срединная порядковая статистика с номером  $k + 1$ . Подставляя параметры статистики  $2k + 1$ ,  $k + 1$ , получаем общий вид плотности распределения медианы нечетной выборки:

$$f_{me_{2k+1}}(x) = f_{Y_{2k+1, k+1}} = \frac{(2k+1)!}{(k!)^2} f_X(x) [F_X(x) [1 - F_X(x)]]^k. \quad (1.4.25)$$

Для совокупности  $N(0, 1)$  получаем

$$f_{me_{2k+1}}(x) = \frac{(2k+1)!}{(k!)^2} \varphi_0(x) \left[ \frac{1}{4} - \Phi_0^2(x) \right]^k; \quad (1.4.26)$$

- при четном объеме выборки  $n = 2k$  в качестве медианы, вообще говоря, может рассматриваться любая точка из интервала  $(y_{n,k}, y_{n,k+1})$ . Для определенности медианой принято считать середину указанного интервала. Плотность распределения случайной величины  $\frac{Y_{n,k} + Y_{n,k+1}}{2}$

найдем путем последовательных преобразований. Сначала найдем

плотность распределения суммы, используя формулу суммы и ПР (1.4.14) и учитывая, что  $y_{n,k+1} > y_{n,k}$ :

$$f_{Y_{n,k} + Y_{n,k+1}}(y) = \int_0^\infty f_{k,k+1} \left( \frac{1}{2}y - x, \frac{1}{2}y + x \right) dx. \quad \text{Искомую ПР медианы}$$

получим из ПР суммы:

$$f_{me_{2k}}(y) = 2 \int_0^\infty f_{k,k+1}(y-x, y+x) dx. \quad (1.4.27)$$

Для нормальной совокупности окончательно получаем

$$f_{me_{2k}}(y) = 2 \frac{(2k)!}{[(k-1)!]^2} \int_0^\infty \varphi_0(y-x) \varphi_0(y+x) \left[ \frac{1}{2} + \Phi_0(y-x) \right] \left[ \frac{1}{2} - \Phi_0(y+x) \right]^{k-1} dx. \quad (1.4.28)$$

При  $n=2$  медиана совпадает с выборочным средним. Вид ПР медианы для  $n=3 \div 5$  представлен на рис. 1.4.5.

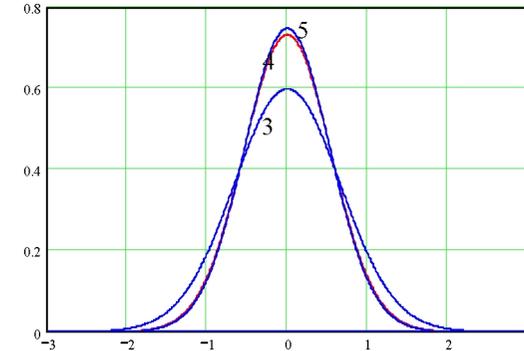


Рис. 1.4.5. Плотность распределения выборочной медианы в зависимости от объема выборки  $n$

При больших  $n$  для срединной порядковой статистики справедлива асимптотика

$$Y_{n,m} \rightarrow N \left( x_p, \frac{\sqrt{p(1-p)}}{f_X(x_p) \sqrt{n}} \right), \quad \text{где } p = \frac{m}{n}. \quad (1.4.29)$$

Таким образом, срединная порядковая статистика является *асимптотически нормальной оценкой генеральной квантили*  $x_p$

$(p \approx \frac{m}{n})$  при любом законе распределения  $f_X(x)$ . В частности, для нормальной совокупности  $N(\mu, \sigma)$  выборочная медиана распределена по нормальному закону  $N(\mu, \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2n}})$ , являясь несмещенной оценкой генерального среднего. При этом оценка по медиане при больших  $n$  в  $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1,253$  раз менее эффективна, чем по выборочному среднему, у

которого  $\sigma_{\bar{x}_n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

Сравнительная эффективность оценки генерального среднего нормальной совокупности по выборочной медиане в зависимости от  $n$  приведена в табл. 1.4.2.

Окончание табл. 1.4.2.

<b>15</b>	0,258	0,319	23,6	0,191	0,217	13,6
<b>20</b>	0,224	0,271	21,0	0,163	0,194	19,0
$\infty^{**})$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$	25,3	$\frac{1}{\sqrt{2n}}$	$\frac{\pi}{4\sqrt{3} \ln n}$	$\frac{\pi\sqrt{6n}}{12 \ln n}$

\*) Символы  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\sigma}$  означают несмещенные выборочные оценки генеральных параметров, индексы соответствуют используемой статистике.

\*\*) В последней строке приведен асимптотический вид СКО соответствующих статистик при больших  $n$ .

Приведенные в табл. 1.4.2 СКО используются, в частности, для определения контрольных границ при построении контрольных карт количественного признака (умножением на 3).

Таблица 1.4.2. Сравнительная эффективность точечных оценок параметров нормального распределения

<b>n</b>	$\sigma_{\hat{\mu}_{\bar{X}}}$ *)	$\sigma_{\hat{\mu}_{me}}$	$\frac{\sigma_{\hat{\mu}_{me}} - 1,}{\sigma_{\hat{\mu}_{\bar{X}}}}$ %	$\sigma_{\hat{\sigma}_s}$	$\sigma_{\hat{\sigma}_R}$	$\frac{\sigma_{\hat{\sigma}_R} - 1,}{\sigma_{\hat{\sigma}_s}}$ %
<b>2</b>	0,707	0,707	0	0,756	0,756	0
<b>3</b>	0,577	0,670	16,1	0,523	0,525	0,4
<b>4</b>	0,500	0,546	9,2	0,422	0,427	1,2
<b>5</b>	0,447	0,536	19,9	0,363	0,372	2,5
<b>6</b>	0,408	0,463	13,5	0,323	0,335	3,7
<b>7</b>	0,378	0,459	21,4	0,294	0,308	4,8
<b>8</b>	0,354	0,410	15,8	0,272	0,288	5,9
<b>9</b>	0,333	0,408	22,5	0,254	0,272	7,1
<b>10</b>	0,316	0,372	17,7	0,239	0,259	8,4

## Глава 2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

### 2.1. Факторы эксперимента. Понятие об эффекте фактора

1. Под экспериментом в контексте данного раздела будем понимать получение данных об исследуемом объекте в процессе многократной реализации искусственно созданной или контролируемой и неограниченно воспроизводимой совокупности внешних условий. Схематично модель системы «объект-эксперимент» можно представить, как показано на рис. 2.1.1.

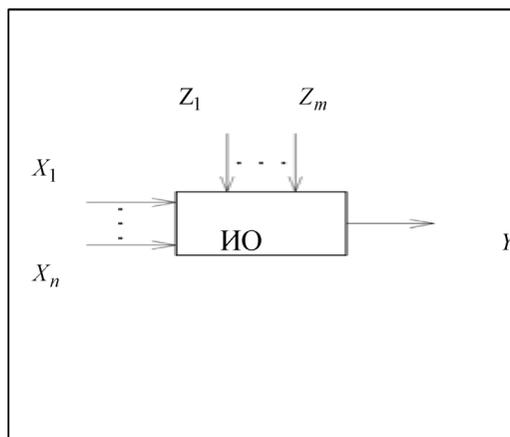


Рис. 2.1.1. Кибернетическая модель исследуемого объекта

Основоположителем планирования эксперимента принято считать английского математика Р. Фишера, который в своей работе «Планирование эксперимента и его статистическая основа» сформулировал основные принципы использования аппарата дисперсионного анализа для обработки результатов и оптимизации сельскохозяйственных экспериментов, главным образом, в растениеводстве. В связи с этим, сформировавшаяся в планировании эксперимента терминология во

многом сохранила отпечаток этого исторически первого объекта исследования, как, например, «планы с расщепленными делянками», «эффект способа обработки», «эффект дозы» и т.д. Специфика данного объекта очевидно такова, что конечный результат – урожай ( $Y$  на рис. 2.1.1) – зависит, как правило, от множества внешних условий – факторов ( $X$  на рис. 2.1.1): сорт растений, состав почвы, агротехнические приемы и т.д. Кроме того, влияние оказывают погодноклиматические и другие неподдающиеся управлению и контролю воздействия – случайные факторы ( $Z_k$  на рис. 2.1.1). Другими немаловажными обстоятельствами являются принципиальная ограниченность в объеме исходного статистического материала и то, что для повторения эксперимента необходимо ждать как минимум год. Таким образом, вероятностной моделью в планировании эксперимента является интерпретация зависимости  $Y(X_1, \dots, X_n)$  как стохастической. Причем, задача установления причинно-следственных связей, т.е. какого-либо естественно-научного механизма в данной зависимости, изначально не рассматривалась в качестве осуществимой, как, например, в статистической физике.

Доказав свою эффективность в сельском хозяйстве, математическое планирование эксперимента стало с успехом применяться в биологии, медицине, а затем при оптимизации технологических и других производственных процессов. Такой подход к исследованию многофакторных систем получил название *кибернетического* (безотносительно природы причинно-следственных связей). Таким образом, основные исходные понятия планирования эксперимента заключаются в следующем. Факторы эксперимента (или просто факторы) – входные параметры системы, непосредственно формирующие выходной параметр – отклик. Откликов, вообще говоря, может быть несколько, но в дальнейшем ограничимся рассмотрением ситуации с одним.

Основные требования к факторам:

- измеримость – возможность непосредственной количественной оценки;
  - возможность контролирования постоянного значения (на фиксированном уровне) в процессе единичной реализации эксперимента;
  - априорная взаимная независимость.
- Факторы подразделяются на два типа:
- Факторы с количественными уровнями (температура, давление, ток и т.д.).

- Факторы с альтернативными уровнями, т.е. такие, которые можно лишь пронумеровать натуральными числами (способы обработки, индивидуальные технологические линии, контролеры-операторы и т.д.).

К отклику предъявляется по существу единственное требование – однозначная измеримость.

2. Помимо факторов на формирование отклика оказывают влияние и другие входные параметры, остающиеся вне поля зрения экспериментатора ( $Z$  на рис. 2.1.1). Поэтому существует опасность ошибочной интерпретации результатов эксперимента, так называемого «ложного эффекта», когда флуктуация неконтролируемых входных параметров приводит к значимому изменению отклика и воспринимается как результат воздействия факторов. Эта проблема особенно актуальна при проведении серии параллельных испытаний (повторении откликов) на всех или нескольких сочетаниях уровней факторов. Для сведения к минимуму возможности подобных ошибок применяется *рандомизация* – установление случайной очередности реализации индивидуальных опытов. Например, если единственный фактор варьируется на четырех уровнях, и на каждом уровне проводится серия из двух повторных испытаний, то очередность осуществления восьми индивидуальных испытаний определяется случайной последовательностью натуральных чисел  $1 \div 8$ , получаемой с помощью генератора случайных чисел. «Физически» этот процесс можно представить как случайную выборку без возвращения восьми пронумерованных шаров из лототрона. В результате рандомизации возможные флуктуации неконтролируемых факторов равномерно распределяются по всей совокупности индивидуальных значений отклика и проявляют себя как увеличение случайной ошибки (погрешности) эксперимента.

3. Совокупность исходных данных, полученных в процессе эксперимента, представляет собой выборку, расслоенную на группы (подвыборки). Группообразующим признаком является постоянство сочетания уровней факторов, при котором были получены индивидуальные значения. Такая группа образует элементарную ячейку эксперимента. В различных ячейках может содержаться, вообще говоря, неодинаковое число значений. В вырожденном случае ячейка может содержать одно значение.

Условимся факторы обозначать заглавными буквами  $A, B, C, \dots$ , а прописными  $a, b, c, \dots$  - количество уровней соответствующего фактора. Количество ячеек при этом очевидно составит  $a \cdot b \cdot c \cdot \dots$ , в каждой из которых содержится  $n_i$  индивидуальных значений. И, наконец, общее количество индивидуальных значений  $\sum_i n_i$  условимся обозначать  $N$ .

Представим для наглядности структуру результатов однофакторного эксперимента, где фактор  $A$  варьируется на  $a$  уровнях, в виде табл. 2.1.1.

Таблица 2.1.1. Структура результатов однофакторного эксперимента

$j/i$	1	2	...	$a$
1	$y_{11}$	$y_{21}$	...	$y_{a1}$
2	$y_{12}$	$y_{22}$	...	$y_{a2}$
3	$y_{13}$	$y_{23}$	...	$y_{a3}$
...	...	...	...	...

Столбцы в табл. 2.1.1 являются элементарными ячейками с  $n_i, i = \overline{1, a}$ , индивидуальными значениями в каждой. В качестве наилучшей оценки значения отклика на  $i$ -м уровне фактора естественно принять групповые средние

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}. \quad (2.1.1)$$

Внутригрупповую изменчивость  $y_{ij} - \bar{y}_i$ , поскольку она не обусловлена никакими контролируемыми воздействиями, естественно интерпретировать как случайную ошибку эксперимента. Для оценки контролируемой изменчивости единственно возможным началом отсчета является общий средний результат

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{ij} y_{ij} = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^a \bar{y}_i. \quad (2.1.2)$$

Таким образом, полную изменчивость индивидуальных значений можно представить в виде суммы двух компонент: эффекта фактора и случайной ошибки:

$$y_{ij} - \bar{y} = (\bar{y}_i - \bar{y}) + (y_{ij} - \bar{y}_i). \quad (2.1.3)$$

## 2.2. Аппарат дисперсионного анализа

1. Рассмотрим структуру эффектов однофакторной схемы (2.1.3) (эффект  $A_i$  и ошибку  $\varepsilon_{ij}$ ). Для эффекта  $A_i$ , согласно (2.1.2), очевидно соотношение

$$\sum_{i=1}^a (\bar{y}_i - \bar{y}) \equiv 0. \quad (2.2.1)$$

Для двух других отклонений справедливы аналогичные соотношения:

$$\sum_{ij} (y_{ij} - \bar{y}) \equiv 0, \quad \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i) \equiv 0, \quad i = \overline{1, a}. \quad (2.2.2)$$

Рассмотрим сумму квадратов отклонений  $Q = \sum_{ij} (y_{ij} - \bar{y})^2$ . Произведя то же самое действие с правой частью (2.1.3), получим

$$Q = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} [(\bar{y}_i - \bar{y})^2 + 2(\bar{y}_i - \bar{y})(y_{ij} - \bar{y}_i) + (y_{ij} - \bar{y}_i)^2].$$

Суммируя почленно, будем иметь

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{y}_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^a (\bar{y}_i - \bar{y})^2 \sum_{j=1}^{n_i} 1 = \sum_{i=1}^a n_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2 = Q_A;$$

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 = Q_\varepsilon.$$

Суммируя оставшиеся слагаемые, получаем

$$2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{y}_i - \bar{y})(y_{ij} - \bar{y}_i) = 2 \sum_{i=1}^a (\bar{y}_i - \bar{y}) \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i),$$

откуда, на основании (2.2.1), (2.2.2), получаем тождественный ноль. Так, приходим к тождеству  $\sum_{ij} (y_{ij} - \bar{y})^2 = \sum_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{ij} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$ ,

или, в принятых обозначениях:

$$Q = Q_A + Q_\varepsilon. \quad (2.2.3)$$

Полученное соотношение (2.2.3) носит название *основное уравнение дисперсионного анализа*. Каждая из компонент суммы квадратов имеет число степеней свободы, как было показано в п.1.4, равное количеству независимых нормальных СВ (совокупности, из которых получены групповые выборки, априорно полагаются нормальными). Для определения числа степеней свободы существует простое мнемоническое правило:

*число степеней свободы = количество слагаемых в связывающей их сумме – количество уравнений.*

Для суммы квадратов эффекта  $Q_A$  имеем  $a$  слагаемых и одно уравнение (2.2.1). Следовательно, число степеней свободы составит  $r_A = a - 1$ . У суммы квадратов случайной ошибки  $Q_\varepsilon$  на  $N$  слагаемых приходится  $a$  уравнений (2.2.2) (по количеству групп). Число ее степеней ошибки  $r_\varepsilon = N - a$ . И, наконец, для полной суммы на  $N$  слагаемых приходится одно уравнение (первое (2.2.2)). Таким образом, приходим к следующему очевидному тождеству (используемому в практике дисперсионного анализа в качестве одной из операций проверочного расчета):

$$r = N - 1 = r_A + r_\varepsilon = a - 1 + N - a.$$

Таким образом, численной мерой изменчивости отклика служит сумма квадратов отклонений  $Q$ , которая, как гласит основное уравнение дисперсионного анализа, может быть представлена в виде суммы парциальных сумм квадратов  $Q_A + Q_\varepsilon$  – компонент, характеризующих вклад в полную изменчивость отклика каждого из источников изменчивости. Однако непосредственное сравнение величин  $Q_A$  и  $Q_\varepsilon$  не позволяет сделать обоснованный вывод о том, какой из источников является более значимым (весомым). Поскольку у каждой компоненты свое число степеней свободы, то представляется естественным сравнивать между собой средние квадраты отклонений (на одну степень свободы):

$$S_A^2 = \frac{Q_A}{r_A}, \quad S_\varepsilon^2 = \frac{Q_\varepsilon}{r_\varepsilon}. \quad (2.2.4)$$

При этом вполне очевидно, что методика сравнения (оценки значимости эффекта фактора) должна строиться исходя из вероятностного содержания основных исходных допущений (о нормальности и взаимной независимости всех индивидуальных значений). Единственно возможным в данной ситуации представляется использование аппарата дисперсионного анализа, конечно, если сами исходные данные не находятся в явном противоречии с теми самыми исходными допущениями.

2. В предыдущем пункте путем простых рассуждений было установлено, что численной мерой, характеризующей каждый из источников изменчивости, является средний квадрат отклонения и обоснована применимость дисперсионного анализа. Вероятностное содержание исходных допущений при более детальном рассмотрении заключается в наличии всего двух альтернативных гипотез:

- $H_0$  – все групповые выборки получены из одной нормальной совокупности;
- $H_1$  (альтернатива) – групповые выборки получены из нормальных совокупностей с одной генеральной дисперсией, но с разными генеральными средними.

По существу, все проблемы дисперсионного анализа, так или иначе, вращаются вокруг этих двух альтернатив. При этом к формулировке гипотезы  $H_1$  следует сделать небольшое уточнение:

1) очевидно, что она (вместе с  $H_0$ ) вложена в общую гипотезу о нормальности и постоянстве генеральной дисперсии. Сама же эта внешняя гипотеза непосредственно в дисперсионном анализе не проверяется.

2) поскольку  $H_0$  и  $H_1$  образуют полную группу внутри общей внешней гипотезы, правильнее было бы сказать: «не все генеральные средние групповых выборок равны между собой».

Для уяснения «механизма» использования дисперсионного анализа найдем МО средних квадратов (2.2.4) для каждой из гипотез. Для  $S_\varepsilon^2$  будем иметь

$$M[S_\varepsilon^2] = M\left[\frac{1}{N-a} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2\right] = M\left[\frac{1}{N-a} \sum_{i=1}^a \left(\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 - n_i \bar{Y}_i^2\right)\right].$$

Используя свойство МО (п.1.1), последнее соотношение преобразуем к виду

$$M[S_\varepsilon^2] = \frac{1}{N-a} \left( \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} M[Y_{ij}^2] - \sum_{i=1}^a n_i M[\bar{Y}_i^2] \right).$$

Далее, используя соотношение для дисперсии, получим

$$\begin{aligned} M[S_\varepsilon^2] &= \frac{1}{N-a} \left( \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (\sigma_\varepsilon^2 + \mu_i^2) - \sum_{i=1}^a n_i \left( \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n_i} + \mu_i^2 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{N-a} \left( (N-a)\sigma_\varepsilon^2 + \sum_{i=1}^a n_i \mu_i^2 - \sum_{i=1}^a n_i \mu_i^2 \right) = \sigma_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Данное тождество было получено применительно к условиям  $H_1$ . Очевидно, что оно справедливо и для  $H_0$  ( $\mu_i \equiv \mu$ ). Таким образом, приходим к выводу, что  $S_\varepsilon^2$  является несмещенной оценкой генеральной дисперсии (дисперсии случайной ошибки)  $\sigma_\varepsilon^2$ .

Теперь найдем МО  $S_A^2$  для  $H_0$ :

$$M[S_A^2] = M\left[\frac{1}{a-1} \sum_{i=1}^a n_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2\right] = M\left[\frac{1}{a-1} \left( \sum_{i=1}^a n_i \bar{Y}_i^2 - \bar{Y}^2 \sum_{i=1}^a n_i \right)\right].$$

Применяя аналогичную последовательность преобразований и учитывая, что  $\mu_i \equiv \mu$ , получаем

$$M[S_A^2] = \frac{1}{a-1} \left( \sum_{i=1}^a n_i \left( \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n_i} + \mu^2 \right) - N \left( \mu^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{N} \right) \right) = \sigma_\varepsilon^2. \quad (2.2.5)$$

Таким образом, можно считать доказанной теорему Фишера, которую в контексте предыдущего изложения можно сформулировать так:

При справедливости гипотезы  $H_0$  средние квадраты эффекта и ошибки есть несмещенные оценки генеральной дисперсии ошибки  $M[S_A^2] = M[S_\varepsilon^2] = \sigma_\varepsilon^2$ .

Отсюда следует, что отношение средних квадратов есть рассмотренное в п.1.2 дисперсионное отношение Фишера:

$$\frac{S_A^2}{S_\varepsilon^2} = \frac{\chi_{a-1}^2(N-a)}{\chi_{N-a}^2(a-1)} = F(a-1, N-a). \quad (2.2.6)$$

Здесь следует сделать следующее замечание. Закону Фишера будет (в рамках  $H_0$ ) подчиняться и обратное отношение:

$$\frac{S_\varepsilon^2}{S_A^2} = F(N-a, a-1).$$

Однако практический интерес представляет лишь ситуация  $S_A^2 > S_\varepsilon^2$ , и поскольку исторически сложилась практика оценки правдоподобия  $H_0$  по верхней 5% точке, т.е. когда  $F > 1$ , в литературе дисперсионное отношение фигурирует в виде (2.2.6). Возможно будет уместным замечание более общего характера о том, что в любом прикладном статистическом анализе никогда не следует отождествлять объект исследования с априорными вероятностными схемами, положенными в основу модели. В противном случае, как это не парадоксально звучит, в погоне за точностью можно не только потерять адекватность модели, но и вовсе прийти к абсурдным результатам и выводам. Впрочем, при ближайшем рассмотрении, никакого парадокса здесь нет, и это обстоятельство является естественным следствием специфики стохастических закономерностей.

Для МО  $S_A^2$  при справедливости  $H_1$  по аналогии получим:

$$\begin{aligned} M[S_A^2] &= M\left[\frac{1}{a-1} \sum_{i=1}^a n_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2\right] = \frac{1}{a-1} \left( \sum_{i=1}^a n_i M[\bar{Y}_i^2] - NM[\bar{Y}^2] \right) = \\ &= \frac{1}{a-1} \left( \sum_{i=1}^a n_i \left( \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n_i} + \mu_i^2 \right) - N \left( \frac{\sigma_\varepsilon^2}{N} + \bar{\mu}^2 \right) \right) = \sigma_\varepsilon^2 + \frac{1}{a-1} \left( \sum_{i=1}^a n_i \mu_i^2 - N\bar{\mu}^2 \right). \end{aligned}$$

В последнем выражении общее генеральное среднее  $\bar{\mu}$  находим по правилу суперпозиции (п.1.2):

$$\bar{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^a n_i \mu_i. \quad (2.2.7)$$

В результате после элементарных преобразований окончательно получаем

$$M[S_A^2] = \sigma_\varepsilon^2 + \frac{N}{a-1} \sum_{i=1}^a \alpha_i (\mu_i - \bar{\mu})^2, \quad (2.2.8)$$

где  $\alpha_i = \frac{n_i}{N}$  - парциальная доля  $i$ -й группы. Сумму во втором слагаемом (2.2.8) естественно интерпретировать как «дисперсию эффекта фактора»:

$$\sigma_A^2 = \sum_{i=1}^a \alpha_i (\mu_i - \bar{\mu})^2. \quad (2.2.9)$$

Несмещенная оценка этой компоненты дисперсии согласно (2.2.8) будет иметь вид

$$\hat{\sigma}_A^2 = \frac{a-1}{N} (S_A^2 - S_\varepsilon^2). \quad (2.2.10)$$

Таким образом, доказана *теорема Эрвина о выделении эффекта фактора*, и алгоритм дисперсионного анализа в простейшем однофакторном случае заключается в следующем:

1) вычисляются средние квадраты  $S_A^2$ ,  $S_\varepsilon^2$ ;

2) вычисляется их отношение  $\frac{S_A^2}{S_\varepsilon^2}$  и сравнивается с правой 5%

точкой статистики Фишера - с квантилью  $F_{1-\alpha}(a-1, N-a)$ . Если вы-

полняется условие  $\frac{S_A^2}{S_\varepsilon^2} < F_{1-\alpha}(a-1, N-a)$ , то  $H_0$  принимается как

правдоподобная (генеральные средние групповых выборок равны между собой ~ эффект фактора отсутствует). При этом наилучшей оценкой генеральной дисперсии ошибки будет средневзвешенный средний квадрат:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{(a-1)S_A^2 + (N-a)S_\varepsilon^2}{N-1};$$

3) если  $\frac{S_A^2}{S_\varepsilon^2} > F_{1-\alpha}(a-1, N-a)$ , то более правдоподобной признается

альтернативная гипотеза  $H_1$ . Соответственно ряд групповых сред-

них признается неоднородным, что эквивалентно значимости эффекта фактора.

3. Изложенные в предыдущем пункте результаты и методика легко обобщаются на случай двух и большего числа факторов. Наибольшую сложность и, соответственно, интерес представляет переход от однофакторной к двухфакторной схеме. Пусть факторы  $A$  и  $B$  варьируются на  $a$  и  $b$  уровнях соответственно. В каждой из  $a \cdot b$  элементарных ячеек содержится  $n_{ij}$  индивидуальных значений отклика. В дальнейшем, чтобы избежать громоздких формул, примем принципиальное ограничение  $n_{ij} \equiv n$ . Каждое индивидуальное значение теперь будет иметь 3 индекса:  $y_{ijk}$ , где  $i$  - номер уровня фактора  $A$ ;  $j$  - фактора  $B$ ;  $k$  - порядковый номер внутри ячейки. Как и в однофакторном случае, средний результат по ячейке  $\bar{y}_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_{ijk}$  дает оценку отклика на пересечении уровней  $i$  и  $j$ . Смысл средних по уровням каждого фактора вполне очевиден из их определения:

$$\bar{y}_{i\cdot} = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \bar{y}_{ij}; \quad \bar{y}_{\cdot j} = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^a \bar{y}_{ij}.$$

Точками условимся обозначать индексы, исчезающие при повышении порядка усреднения. Принимая за начало отсчета общий средний результат

$$\bar{y} = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^a \bar{y}_{i\cdot} = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \bar{y}_{\cdot j},$$

соотношения для эффектов получим в виде:

$$y_{ijk} - \bar{y} = (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}) + (\bar{y}_{\cdot j} - \bar{y}) + (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot j} + \bar{y}) + (y_{ijk} - \bar{y}_{ij}), \quad (2.2.11)$$

где  $\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y} = A_i$ ;  $\bar{y}_{\cdot j} - \bar{y} = B_j$ ;  $\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot j} + \bar{y} = A \times B_{ij}$ ,

$$y_{ijk} - \bar{y}_{ij} = \varepsilon_{ijk}.$$

Соотношение (2.2.11), являющееся очевидным тождеством, содержит уже 4 источника изменчивости. Принципиальным отличием двухфакторной схемы является наличие третьего слагаемого в (2.2.11)

– так называемого *взаимодействия факторов*. Первые два называются *главными эффектами факторов*. Последнее, как и в предыдущем случае, ошибка эксперимента. Для лучшего уяснения смысла вновь возникшего феномена –  $(A \times B)$ -взаимодействия – следует сделать небольшое отступление.

Факторы  $A$  и  $B$  априорно независимы. Поэтому термин *эффект взаимодействия* звучит на первый взгляд несколько странно. Взаимодействие факторов проявляется в том, что *при варьировании одного фактора отклик меняется по-разному в зависимости от уровня второго фактора*.

Наглядно это можно легко себе представить на простом модельном примере. Пусть  $y$  - выход продукта, а  $A$  и  $B$  соответственно давление и температура в реакторе. Пусть, для простоты, каждый фактор варьируется всего на двух уровнях.

Изобразим графически зависимость  $y(T)$ , а  $P$  интерпретируем как параметр.

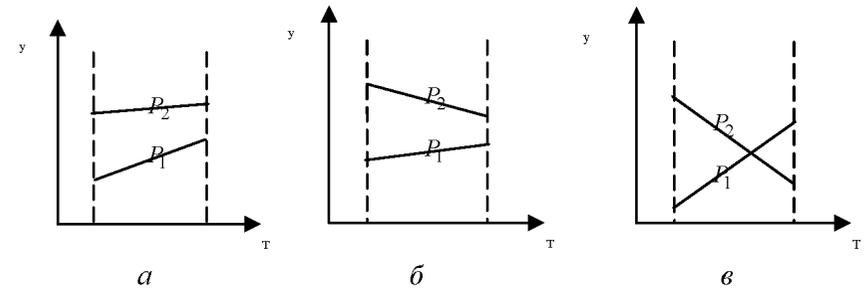


Рис. 2.2.1. Схема двухфакторного взаимодействия

На рис. 2.2.1а,б  $y(T)$  изменяется одинаково (или почти одинаково) на обоих уровнях  $P$ , что свидетельствует об отсутствии значимого взаимодействия (если и есть, то слабое). В варианте рис. 2.2.1в картина принципиально иная. Здесь налицо явные признаки значимого взаимодействия. То же самое будет наблюдаться в координатах  $P - y$ , когда  $T$  будет служить параметром.

При большем числе факторов геометрическую интерпретацию дать уже невозможно, но «механизм» взаимодействия будет тем же самым.

Возвращаясь к схеме дисперсионного анализа, возведем обе части (2.2.11) в квадрат и просуммируем по всем  $i, j, k$ :

$$Q = Q_A + Q_B + Q_{A \times B} + Q_\varepsilon, \quad (2.2.12)$$

где частичные суммы соответственно равны:

$$\begin{aligned} Q_A &= nb \sum_i (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y})^2; \quad Q_B = na \sum_j (\bar{y}_{\cdot j} - \bar{y})^2, \\ Q_{A \times B} &= n \sum_{ij} (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot j} + \bar{y})^2; \quad Q_\varepsilon = \sum_{ijk} (y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Вывод (2.2.12) не содержит ничего принципиально отличающегося от (2.2.3): перекрестные произведения при суммировании обнуляются, а это, в свою очередь, напрямую вытекает из соотношений, аналогичных (2.2.1), (2.2.2). Число степеней свободы каждой частичной суммы определяется, как и в однофакторной схеме: *количество слагаемых, входящих в сумму, – количество уравнений – связей*. Для  $Q_{A \times B}$  при фиксированном  $i$  получим  $b$  уравнений. Добавляя к ним оставшиеся  $a-1$  уравнений, образующихся при других значениях  $i$  и фиксированном  $j$ , получаем  $a+b-1$  уравнений. Таким образом, для взаимодействия число степеней свободы составит:

$$r_{A \times B} = ab - a - b + 1 = (a-1)(b-1). \quad (2.2.14)$$

Для остальных компонент соотношение очевидно, и получаем

$$r_A = a-1; \quad r_B = b-1; \quad r_\varepsilon = ab(n-1). \quad (2.2.15)$$

Далее, как и в однофакторной схеме, находим средние квадраты отклонений:

$$S_A^2 = \frac{Q_A}{a-1}; \quad S_B^2 = \frac{Q_B}{b-1}; \quad S_{A \times B}^2 = \frac{Q_{A \times B}}{(a-1)(b-1)}; \quad S_\varepsilon^2 = \frac{Q_\varepsilon}{ab(n-1)}. \quad (2.2.16)$$

Значимость каждого из трех источников контролируемой изменчивости оценивается по величине дисперсионного отношения  $\frac{S_\alpha^2}{S_\varepsilon^2}$ .

4. При увеличении количества факторов соотношения, аналогичные (2.2.11) ÷ (2.2.13), остаются справедливыми. Основное отличие заключается в том, что резко возрастает количество взаимодействий высших порядков. В силу коммутативности взаимодействий ( $A \times B \sim B \times A$ ) количество взаимодействий кратности  $m$  в  $k$ -

факторном эксперименте составит  $C_k^m$ . Парных взаимодействий будет  $\frac{k(k-1)}{2}$ , тройных  $\frac{k(k-1)(k-2)}{6}$  и т.д. Таким образом, структура эффектов трехфакторного эксперимента будет содержать три главных эффекта, три парных взаимодействия, одно тройное и ошибку:

$$\begin{aligned} y_{ijkl} - \bar{y} &= (\bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}) + (\bar{y}_{\cdot j\cdot} - \bar{y}) + (\bar{y}_{\cdot\cdot k} - \bar{y}) + (\bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y}) + \\ &+ (\bar{y}_{i\cdot k} - \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot k} + \bar{y}) + (\bar{y}_{\cdot jk} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot k} + \bar{y}) + \\ &+ (\bar{y}_{ijk} - \bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{i\cdot k} - \bar{y}_{\cdot jk} + \bar{y}_{i\cdot\cdot} + \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y}_{\cdot\cdot k} - \bar{y}) + (y_{ijkl} - \bar{y}_{ijk}). \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Частичные суммы квадратов и числа степеней свободы составят соответственно:

$$\begin{aligned} Q_A &= bcn \sum_i (\bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y})^2; \quad r_A = a-1; \quad Q_B = acn \sum_j (\bar{y}_{\cdot j\cdot} - \bar{y})^2; \quad r_B = b-1; \\ Q_C &= abn \sum_k (\bar{y}_{\cdot\cdot k} - \bar{y})^2; \quad r_C = c-1; \quad Q_{A \times B} = cn \sum_{ij} (\bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y})^2; \\ r_{A \times B} &= (a-1)(b-1); \\ Q_{A \times C} &= bn \sum_{ik} (\bar{y}_{i\cdot k} - \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot k} + \bar{y})^2; \quad r_{A \times C} = (a-1)(c-1); \\ Q_{B \times C} &= an \sum_{jk} (\bar{y}_{\cdot jk} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot k} + \bar{y})^2; \quad r_{B \times C} = (b-1)(c-1); \\ Q_{A \times B \times C} &= n \sum_{ijk} (\bar{y}_{ijk} - \bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{i\cdot k} - \bar{y}_{\cdot jk} + \bar{y}_{i\cdot\cdot} + \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y}_{\cdot\cdot k} - \bar{y})^2; \\ r_{A \times B \times C} &= (a-1)(b-1)(c-1); \\ Q_\varepsilon &= \sum_{ijkl} (y_{ijkl} - \bar{y}_{ijk})^2; \quad r_\varepsilon = abc(n-1). \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Значимость каждого из 7 источников контролируемой изменчивости оценивается точно так же по величине дисперсионного отношения

$$\frac{S_\alpha^2}{S_\varepsilon^2}.$$

5. Одной из важнейших задач дисперсионного анализа является ранжирование значимых источников изменчивости. По завершении процедуры собственно дисперсионного анализа значимыми признаются только те эффекты и взаимодействия, у которых средние квадраты значительно превышают средний квадрат случайной ошибки ( $S_{\alpha_i}^2 > S_{\epsilon}^2$ ), а остальные смешиваются со случайной ошибкой так же, как в однофакторной схеме. При этом в качестве более правдоподобной принимается альтернатива  $H_1$ , и несмещенной оценкой соответствующей компоненты дисперсии (парциальной дисперсии) является  $\hat{\sigma}_{\alpha_i}^2 = \frac{r_{\alpha_i}}{N}(S_{\alpha_i}^2 - S_{\epsilon}^2)$ . В сущности говоря, этот факт есть прямое следствие правила вычисления дисперсии суперпозиции (вероятностной смеси) СВ, рассмотренного в п.1.2. Оценкой дисперсии полной изменчивости будет сумма всех парциальных дисперсий, включая дисперсию случайной ошибки:

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_i \hat{\sigma}_{\alpha_i}^2 + \hat{\sigma}_{\epsilon}^2, \quad (2.2.19)$$

где  $\hat{\sigma}_{\epsilon}^2 = s_{\epsilon}^2$ . Ранжировать эффекты и взаимодействия, признанные значимыми по результатам эксперимента, целесообразно по величине удельной доли соответствующей парциальной дисперсии:

$$\gamma_{\alpha_i} = \frac{\hat{\sigma}_{\alpha_i}^2}{\hat{\sigma}^2} \times 100\%. \quad (2.2.20)$$

Именно на основании полученного по (2.2.19), (2.2.20) числового ряда и делаются выводы об объекте исследования в знакомой всем формулировке примерно такого содержания: «... продолжительность жизни на 30% определяется чистотой воздушной среды, на 20% - качеством потребляемой питьевой воды и т.д. ...».

### 2.3. Планы со смешиванием эффектов и дробные многофакторные планы

1. В п. 2.2 было определено понятие межфакторного взаимодействия, заключающегося в том, что изменчивость отклика при варьировании одного фактора зависит от уровня другого фактора (или других факторов). При явно значимом двухфакторном взаимо-

действии наблюдается инверсия эффекта одного фактора при смене уровней второго фактора. При этом аппарат многофакторного дисперсионного анализа (п. 2.2) позволяет оценивать значимость как главных эффектов, так и взаимодействий любого порядка, посредством единообразной вычислительной процедуры. Однако в ряде случаев возникают ситуации, когда взаимодействие, даже если оно является явно значимым, не может быть сколько-нибудь вразумительным образом интерпретировано. Одним из наиболее характерных примеров являются так называемые *эксперименты с группировкой*, или иерархические. Такая ситуация возникает, когда уровни одного фактора локализованы (сгруппированы) внутри уровней другого фактора (или внутри пересечения уровней нескольких факторов). В этом случае уровни вложенного фактора, очевидно, не пересекаются с уровнями внешних и, стало быть, ни о каком взаимодействии говорить не имеет смысла. В двухфакторном эксперименте с группировкой следует модифицировать схему дисперсионного анализа таким образом, чтобы эффект взаимодействия смешивался с главным эффектом вложенного фактора. Полученную смесь, т.е. сумму эффектов, вполне естественно можно интерпретировать как уточненный эффект вложенного фактора.

В качестве примера рассмотрим эксперимент, целью которого является оценка однородности продукции нескольких многопозиционных станков. Пусть 5 станков, на которых изготавливаются стеклянные держатели катода электронных ламп имеют по 4 позиции (головки), на которых формируются держатели. В результате образуется план-матрица двухфакторного эксперимента типа 5x4. Приняв численность каждой из 20 элементарных ячеек эксперимента  $n=4$  индивидуальных значений деформации держателя, получим  $N=80$  индивидуальных значений. Результаты полностью рандомизованного эксперимента приведены в табл. 2.3.1.

Таблица 2.3.1. Исходные данные эксперимента

$$Q_{G(S)} = Q_G + Q_{S \times G}, \quad r_{G(S)} = r_G + r_{S \times G}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 9 & 2 \\ \hline 7 & 4 & 2 \\ \hline \end{array} \quad (2.3.4)$$

где  $r_*$  – число степеней свободы парциальной суммы квадратов. Результаты вычислений по (2.3.3) сведены в таблицу дисперсионного анализа (табл. 2.3.2).

Таблица 2.3.2. Результаты дисперсионного анализа

Источник изменчивости	Число степеней свободы, $r$	Сумма квадратов, $Q$	Средний квадрат, $S^2$	Дисперсионное отношение, $F$
S	4	45,08	11,27	0,58

Окончание табл. 2.3.2

G(S)	15	282,87	18,86	1,76
$\varepsilon$	60	642,00	10,70	-
$\Sigma$	79	969,95	-	-

Окончание табл. 2.3.1

	7	0	7	0	3
4	4	3	2	8	7
	7	4	5	6	4
	9	1	4	5	0

Структура эффектов такого эксперимента будет иметь вид

$$y_{ijk} - \bar{y} = (\bar{y}_{\bullet j} - \bar{y}) + (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{\bullet j}) + (y_{ijk} - \bar{y}_{ij}). \quad (2.3.1)$$

Слагаемые в правой части (2.3.1) интерпретируются как эффект станка, эффект головки внутри станка и случайная ошибка эксперимента соответственно.

Возводя обе части (2.3.1) в квадрат и суммируя по всем  $j, i, n$ , получим сумму квадратов, структурированную по источникам изменчивости:

$$Q = Q_S + Q_{G(S)} + Q_\varepsilon, \quad (2.3.2)$$

где

$$Q_S = gn \sum_{i=1}^S (\bar{y}_{\bullet j} - \bar{y})^2; \quad Q_{G(S)} = n \sum_{j=1}^g \sum_{i=1}^S (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{\bullet j})^2; \quad Q_\varepsilon = \sum_{j=1}^g \sum_{i=1}^S \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2. \quad (2.3.3)$$

Легко заметить, что смешивание эффектов в данном случае сводится к суммированию соответствующих величин двухфакторного эксперимента с пересекающимися уровнями:

Следует отметить еще одно отличие в рассмотренной схеме дисперсионного анализа по сравнению с «обычным» двухфакторным экспериментом. Значимость эффекта вложенного фактора оценивается по дисперсионному отношению со средним квадратом ошибки

( $F_{G(S)} = \frac{S_{G(S)}^2}{S_\varepsilon^2}$ ). Если эффект оказывается незначимым, то его следует

смешать с ошибкой, объединив строки « $\varepsilon$ » и «G(S)» в строку « $\varepsilon$ » по вышеизложенному алгоритму. Если же эффект оказывается значимым, то мерой для оценки значимости изменчивости между станками будет изменчивость между головками одного станка ( $F_S = \frac{S_S^2}{S_{G(S)}^2}$ ).

По результатам табл. 2.3.2 можно сделать вывод, что следует обратить внимание на различие между головками одного станка. Дисперсионный анализ данных табл. 2.3.1 по схеме с выделенным эффектом взаимодействия привел бы и абсурдному выводу об однородности как головок, так и станков, но при наличии значимого взаимодействия между ними (рекомендуется убедиться в этом, проделав вычисления самостоятельно).

Сходная с рассмотренной ситуация возникает при интерпретации исходных данных контрольной процедуры статистической оценки

воспроизводимости и сходимости измерительного процесса, прописанной в разделе MSA ISO. Выборка операторов из состава оперативного персонала проводит серию контрольных измерений партии стандартных образцов. В образующемся двухфакторном эксперименте изменчивость между операторами (воспроизводимость) следует вычислять по схеме смещения главного эффекта оператора и взаимодействия оператор  $\times$  образец. В противном случае затруднительно интерпретировать результат индивидуального оператора, усредненный по всем образцам и попыткам.

2. В рассмотренных ситуациях необходимость смешивания эффектов и схема смешивания определяются, исходя из интерпретации самих исходных данных. Гораздо более интересными как в теоретическом, так и в практическом аспекте являются ситуации, когда смешивание является неизбежным следствием неполноты (усеченности) исходных данных, т.е. когда исходные данные представляют собой не все, а только часть точек (комбинаций уровней) факторного пространства. Усечение факторного пространства возможно двумя способами:

- разбиением на блоки (блочные многофакторные планы);
- насыщением дополнительными факторами, что фактически является построением одного блока из пространства большей размерностью (дробные многофакторные планы).

Следуя хронологии развития и сложившейся традиции изложения в учебных курсах по планированию эксперимента, блочные и дробные планы излагаются отдельно и именно в такой последовательности. Однако, поскольку имеется ввиду, по существу, один и тот же феномен, представляется целесообразным рассмотреть эти два типа планов совместно и с единых позиций. Попутно следует заметить, что именно на примере этих планов становится очевидным, насколько существенным является сам термин *планирование* и насколько велика его (планирования) практическая значимость.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример. Предположим, химик желает определить однородность раствора в лабораторном сосуде по глубине и расстоянию от стенки. Для этого он решает взять пробы в 4 точках сосуда в соответствии со схемой рис. 2.3.1.

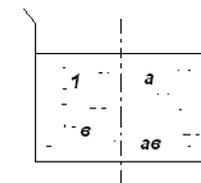


Рис. 2.3.1. Расположение точек забора проб

Полученный план имеет тип  $2^2$ ,  $A$  - расстояние от оси,  $B$  - глубина погружения. Однако у лаборанта всего две руки, и без специального приспособления он может брать только две пробы. Для реализации всего эксперимента потребуется два погружения, между которыми пройдет некоторое время, и концентрации в растворе, вообще говоря, могут измениться. Таким образом, весь эксперимент разделяется на два блока, которые являются «паразитным» источником изменчивости и выступают как неизбежное зло. Вопрос заключается в том, как путем надлежащего планирования минимизировать ущерб. Из  $C_4^2 = 6$  пар проб можно составлять 3 различных блока по 2 непересекающиеся пары проб, как показано в табл. 2.3.3.

Таблица 2.3.3. Варианты блоков

№погр.\№вар.	I	II	III
1	1, b	1, a	1, ab
2	a, ab	b, ab	a, b

Легко видеть, что в I варианте главный эффект  $A$  и  $A \times B$  взаимодействие смешиваются с эффектом блока. В варианте II с эффектом блока смешиваются  $B$  и  $A \times B$ . И только в III варианте оба главных эффекта отделяются от эффекта блока. Смешанным остается только  $A \times B$  взаимодействие.

3. Что бы оценить, в чем заключается сходство и различие между блочными и дробными планами, используем ту же самую модель эксперимента. Дополним эксперимент третьим фактором - временем  $C$ , который будет варьировать также на двух уровнях:  $t_1 \sim 1$ ,  $t_2 \sim c$ . В результате образуется эксперимент типа  $2^3$ . Для удобства вычислительной процедуры проведем кодирование уровней факторов, положив нижний -1, верхний +1, и впишем все 8 комбинаций условий эксперимента в табл. 2.3.4.

Таблица 2.3.4. Комбинации условий испытаний

A	B	C	AB	AC	BC	ABC
-1	-1	-1	1	1	1	-1
+1	-1	-1	-1	-1	1	+1
-1	+1	-1	-1	1	-1	+1
+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1
-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1
-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

Желая уложиться в 4 опыта, исследователь должен смириться с неизбежной потерей части информации. Априорно наименее ценным является старшее взаимодействие  $A \times B \times C$ . Группируя опыты (строки табл. 2.3.4) так, чтобы значение в столбце  $ABC$  имели одинаковый знак, получим 2 блока (2 полуреплики) эксперимента  $2^3$ . При этом тройное взаимодействие станет «невидимым», кроме того, произойдет смешивание главных эффектов с парными взаимодействиями:  $A \sim \pm BC$ ,  $B \sim \pm AC$ ,  $C \sim \pm AB$ . Таким образом, дробный многофакторный план представляет собой один из блоков полного плана. Знак в схеме смешивания определяется выбором блока, который, в свою очередь, выбирается случайно (блоки рандомизируются). Если блок рассматривать как источник изменчивости, равноправный с факторами (число уровней этого дополнительного фактора очевидно равно количеству блоков), то принципиальное различие между блочными и дробными планами и вовсе исчезает. Алгоритм разбиения на блоки, так называемый *метод определяющих контрастов*, строится с помощью элементов теории групп. Кемпторн предложил рассматривать линейную форму:

$$L = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n, \quad (2.3.5)$$

где  $\lambda_i$  – показатель степени  $i$ -го фактора в определяющем контрасте,  $X_i$  – уровень  $i$ -го фактора в данной комбинации условий. Сам определяющий контраст записывается как взаимодействие (или главный эффект), смешиваемое с эффектом блока. В рассмотренном примере контраст – парное взаимодействие  $A \times B$  имеет линейную форму  $L = X_1 + X_2$ . Все комбинации условий (уровней факторов) разбиваются на классы эквивалентности, как группа  $L \bmod m$ , где  $m$  – число уровней факторов (должно быть одинаковым). Блоки формируются из комбинаций, при-

надлежащих одному классу эквивалентности. При этом блок, содержащий комбинацию (1) (все факторы на нижних уровнях), называется основным. Для рассмотренного примера будем иметь:

$$(1): L = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0 \equiv 0 \bmod 2, \quad a : L = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1 \equiv 1 \bmod 2, \\ b : L = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1 \equiv 1 \bmod 2, \quad ab : L = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 \equiv 0 \bmod 2.$$

В результате получаем III вариант разбиения на блоки в соответствии с табл. 2.3.3.

В экспериментах типа  $2^n$  при  $n > 2$  количество возможных вариантов разбиения будет существенно большим. Для эксперимента  $2^3$  при возможности реализации лишь четырех комбинаций условий и смешивании с эффектом блока старшего взаимодействия  $A \times B \times C$ , будем иметь:  $L = X_1 + X_2 + X_3$ ,

$$(1): L \equiv 0 \bmod 2, \quad a : L \equiv 1 \bmod 2, \quad b : L \equiv 1 \bmod 2, \quad c : L \equiv 1 \bmod 2, \\ ab : L \equiv 2 \equiv 0 \bmod 2, \quad ac : L \equiv 2 \equiv 0 \bmod 2, \quad bc : L \equiv 2 \equiv 0 \bmod 2, \\ abc : L \equiv 3 \equiv 1 \bmod 2.$$

Группируя комбинации с равными значениями  $L \bmod 2$ , получаем 2 блока:

Блок I ( $L=0$ )

Блок II ( $L=1$ )

В таком блочном плане с эффектом блока смешивается старшее взаимодействие  $A \times B \times C$ . Все главные эффекты и парные взаимодействия остаются выделенными. В общем случае, при разбиении эксперимента типа  $2^n$  на  $m$  блоков ( $m$  должно быть кратно 2) с эффектом блока смешиваются  $m-1$  эффектов или взаимодействий. Какие именно эффекты будут смешаны с эффектом блока и составляет, собственно, предмет *планирования эксперимента*. В качестве примера рассмотрим эксперимент  $2^4$  в ситуации, когда в один блок могут входить только 4 комбинации условий, что соответствует 4-блочному плану эксперимента  $2^4$ . В качестве двух альтернатив рассмотрим две схемы смешения: а)  $A \times B$ ,  $C \times D$ ,  $A \times B \times C \times D$ ; б)  $A \times B \times C$ ,  $B \times C \times D$ ,  $A \times D$ . Легко заметить, что каждая тройка эффектов представляет собой группу относительно умножения  $\bmod 2$  (при перемножении любых двух эффектов из тройки

получится третий). Для каждой из альтернатив получаем два определяющих контраста:

а)  $L_1 = X_1 + X_2, L_2 = X_3 + X_4;$   
 б)  $L_1 = X_1 + X_2 + X_3, L_2 = X_2 + X_3 + X_4$  (или  $X_1 + X_4$ ). (2.3.6)

Блоки формируются по принципу соответствия  $L_1 \pmod{2}$  и  $L_2 \pmod{2}$ . Значения контрастов в 16 точках полного плана приведены в табл. 2.3.5 а, б.

Таблица 2.3.5 а

	1	a	b	c	d	ab	ac	ad	bc	bd	cd	abc	abd	acd	bcd	abcd
$L_1$	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0
$L_2$	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0

Таблица 2.3.5 б

	1	a	b	c	d	ab	ac	ad	bc	bd	cd	abc	abd	acd	bcd	abcd
$L_1$	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1
$L_2$	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1

Группируя комбинации условий по классам эквивалентности пары ( $L_1, L_2$ ), получаем два варианта разбиения на блоки, как показано в табл. 2.3.6 а, б.

Таблица 2.3.6 а

Блок 1 $L_1 = 0,$ $L_2 = 0$	Блок 2 $L_1 = 1,$ $L_2 = 0$	Блок 3 $L_1 = 0,$ $L_2 = 1$	Блок 4 $L_1 = 1,$ $L_2 = 1$
(1) ab cd abcd	a b acd bcd	c d abc abd	ac ad bc bd

Таблица 2.3.6 б

Блок 1 $L_1 = 0,$ $L_2 = 0$	Блок 2 $L_1 = 1,$ $L_2 = 0$	Блок 3 $L_1 = 0,$ $L_2 = 1$	Блок 4 $L_1 = 1,$ $L_2 = 1$
(1) bc abd acd	a bd cd abc	d ab ac bcd	b c ad abcd

4. Планы типа  $w^n$ , где  $w > 2$  простое число, разбиваются на кратное  $w$  число блоков. Блоки формируются в соответствии со структурой группы  $(\text{mod } w)$ . Например, если эксперимент типа  $3^2$ , содержащий 9 комбинаций условий, разбивается на 3 блока и с эффектом блока смешивается взаимодействие  $A \times B^2$ , то определяющий контраст имеет вид

$$L = X_1 + 2X_2. \quad (2.3.7)$$

Значения контраста в 9 вершинах факторного пространства приведены в табл. 2.3.7.

Таблица 2.3.7

	1	a	$a^2$	b	$b^2$	ab	$a^2b$	$ab^2$	$a^2b^2$
L	0	1	2	2	1	0	1	2	0

По классам эквивалентности  $L \pmod{3}$  получаем 3 блока эксперимента  $3^2$ , как показано в табл. 2.3.8.

Таблица 2.3.8

Блок 1 $L = 0$	Блок 2 $L = 1$	Блок 3 $L = 2$
1 ab $a^2b^2$	a $b^2$ $a^2b$	$a^2$ b $ab^2$

В таком блочном плане остаются выделенными оба главных эффекта и парное взаимодействие. Причем, взаимодействие, как и главные эффекты, имеет число степеней свободы  $r_{A \times B} = r_A = r_B = w - 1$

(в полностью рандомизованном эксперименте  $3^2 A \times B$  – взаимодействие имеет  $(w-1)^2$  степеней свободы). Недостающие  $(w-1)(w-2)$  степеней свободы переходят в эффект блока, и в результате 8 степеней свободы эксперимента  $3^2$  разделяются, как показано в табл. 2.3.9.

Таблица 2.3.9

Источник изменчивости	Число степеней свободы
A	2
B	2
$A \times B$	2
$A \times B^2 + \text{блок}$	2

5. Как уже было отмечено, дробный план, назначением которого является минимизация трудоемкости (ценой частичной потери информации), представляет собой один из блоков полного многофакторного плана. Соответственно, все вышесказанное о смешивании эффектов и об алгоритме расщепления полного плана на блоке остается справедливым и для дробных планов. Единственным отличием, имеющим скорее терминологический характер, является то, что в роли эффекта блока выступает один из эффектов или взаимодействий.

Некоторые авторы трактуют построение дробных планов как насыщение плана меньшей размерности дополнительными факторами. Пример насыщения эксперимента  $2^2$  третьим фактором (до полуреплики  $2^3$ ) был рассмотрен в плане параграфа. Следует заметить, что данный пример носит чисто иллюстративный характер, поскольку дробные реплики эксперимента типа  $w^3$  по большому счету не имеют практического значения (снижение трудоемкости незначительно, а потеря информации непомерно высока). Польза от дробных планов становится очевидной лишь при большом числе факторов ( $n \geq 4$ ).

В качестве примера рассмотрим план типа  $2^7$ , содержащий 128 комбинаций условий. Переходя к полуреплике из 64 комбинаций ценой потери старшего взаимодействия, получим определяющий контраст в виде

$$L=ABCDEFG. \quad (2.3.8)$$

Схему смешивания определяем поочередно, умножая (2.3.8) на символы главных эффектов и взаимодействий младших порядков, учитывая, что четные степени исчезают  $0 \pmod{2}$ :

$$A \cdot L = BCDEFG; \quad AB \cdot L = CDEFG \text{ и т.д.}$$

Таким образом, в полуреплике  $2^7$  наряду с исчезновением (смешиванием с эффектом блока) старшего взаимодействия, взаимодействия 6-го порядка смешиваются с главными эффектами (не участвующими во взаимодействии), взаимодействия 5-го порядка смешиваются с непересекающимися парными и, наконец, взаимодействия 4-го порядка смешиваются с непересекающимися тройными. При однократной реализации полуреплики  $2^7$  с выбранной схемой смешения взаимодействия 3-го и 4-го порядков можно использовать в качестве оценки ошибки, тогда, пренебрегая взаимодействиями более старшего порядка, можно оценивать все главные эффекты и парные взаимодействия.

При построении  $1/4$  реплики эксперимента  $2^7$  оказывается предпочтительнее исключить 2 взаимодействия 5-го порядка (а стало быть, и их произведение). В результате все главные эффекты смешиваются с взаимодействиями 3-го и более высокого порядков, но при этом из 21 парных взаимодействий 6 оказываются смешанными между собой. Исключив взаимодействия  $Ax Bx Cx Dx E$  и  $Cx Dx Ex Fx G$ , получим определяющий контраст следующего вида:

$$L = ABCDE = CDEFG = ABFG. \quad (2.3.9)$$

Схема смешения, соответствующая контрасту (2.3.9), приведена в табл. 2.3.10.

Таблица 2.3.10. Схема смешения  $1/4$  реплики эксперимента  $2^7$

Эффект	Совместные эффекты	Эффект	Совместные эффекты
A	BCDE~ACDEFG~BFG	CD	CD~ABE~EFG~ABCDFG
B	ACDE~BCDEFG~AFG	CE	CE~ABD~DFG~ABCEFG
C	ABDE~DEFG~ABCFG	CF	CF~ABDEF~DEG~ABCG
D	ABCE~CEFG~ABDFG	CG	CG~ABDEG~DEF~ABCF
E	ABCD~CDFG~ABEFG	DE	DE~ABC~CFG~ABDEFG
F	ABCDEF~CDEG~ABG	DF	DF~ABCEF~CEG~ABDG
G	ABCDEG~CDEF~ABF	DG	DG~ABCEG~CEF~ABDF
AB	CDE~ABCDEFG~FG	EF	EF~ABCDF~CDG~ABEG
AC	BDE~ADEFG~BCFG	EG	EG~ABCDG~CDF~ABEF
AD	BCE~ACEFG~BDFG	ACF	ACF~BDEF~ADEG~BCG
AE	BCD~ACDFG~BEFG	ACG	ACG~BDEG~ADEF~BCF
AF	BCDEF~ACDEG~BG	ADF	ADF~BCEF~ACEG~BDG
AG	BCDEG~ACDEF~BF	ADG	ADG~BCEG~ACEF~BDF
BC	ADE~BDEFG~ACFG	AEG	AEG~BCDG~ACDF~BEF
BD	ACE~BCEFG~ADFG	BEG	ACDG~BCDF~AEF
BE	ACD~BCDFG~AEFG	—	

В некоторых случаях насыщение планов дополнительными факторами и переход к дробным репликам оказывается предпочтительнее полных планов с меньшим числом факторов.

#### 2.4. Планы эксперимента для исследования поверхности отклика

1. Под понятием поверхность отклика подразумевается геометрическая интерпретация точной регрессионной зависимости, как функции многих переменных – факторов эксперимента:

$$\mu_{Y|X_1 \dots X_n} = f(X_1, \dots, X_n). \quad (2.4.1)$$

Целью эксперимента в данной ситуации является не столько установление собственно формы зависимости (2.4.1), а то, чтобы с минимальными временными и иными затратами по возможности определить положение экстремальной точки этой поверхности в реализуемом диапазоне варьирования факторов. Если отклик интерпретируется как выход некоего продукта, то очевидно целью является точка максимума. Если же отклик представляет собой издержки, то, соответственно, целью будет точка минимума. Задачи подобного типа известны в численных методах оптимизации, когда требуется найти экстремум некоторой детерминированной функции многих переменных, имеющей сложный вид. Общей проблемой здесь является то, что для гарантированной результативности какой-либо из простейших схем последовательного поиска необходимым условием является гладкость и унимодальность (существование не более чем одного экстремума) в исследуемой области пространства. Из сказанного ясно, что реальная практическая польза от экспериментов данного типа определяется тем, насколько соответствуют действительности эти априорные гипотезы.

Простейший вариант схемы эксперимента для поиска экстремума включает 2 этапа. Сначала по минимальному числу экспериментальных точек  $N=2^k$ , где  $k$ - число факторов, строится линейная аппроксимация регрессии. На полученной плоскости определяется направление градиентной линии, точки (ядро плана) смещаются в нужном направлении (по градиенту в сторону максимума и в противоположном – в сторону минимума), и эксперимент повторяется при новых значениях уровней факторов. Критерием остановки такой итерационной процедуры служит либо инверсия градиента на очередном шаге (такая ситуация характерна при большом шаге смещения), либо стабилизация направления градиента значений отклика. Вторая ситуация характерна для малой величины шага смещения по факторному пространству. В геометрической интерпретации это означает, что аппроксимирующая плоскость заняла положение, близкое к горизонтальному (достигла почти стационарной области). В рассмотренной процедуре, вообще

говоря, существует возможность выхода за границы реализуемого диапазона варьирования факторов без попадания в почти стационарную область. Это означает, что либо экстремума не существует, либо траектория движения прошла мимо области экстремума.

Вторая фаза активного эксперимента заключается в более детальном обследовании области предполагаемого экстремума. Для этого к ядру плана добавляется еще некоторое количество точек (рассмотрим схему  $N=2^k+2k+1$ ). Для оценки случайной ошибки эксперимент по рандомизированной процедуре дублируется во всех или нескольких точках нового плана. Затем по средним значениям методом наименьших квадратов регрессия отклика аппроксимируется поверхностью 2-го порядка. Если полученная аппроксимация имеет удовлетворительную адекватность, то в качестве искомого экстремума отклика принимается точка экстремума аппроксимирующей поверхности 2-го порядка. При этом следует сделать оговорку, что достоинства поверхностей 2-го порядка исчерпываются их полной классификацией (4 типа), минимальным объемом вычислений по методу наименьших квадратов и, в целом, тем, что они представляют собой простейшую степенную функцию, имеющую экстремум. О «физическом» смысле такой аппроксимации в общем случае сказать ничего нельзя.

2. Детали алгоритма и, в частности, ортогональные преобразования и вычислительную процедуру метода наименьших квадратов рассмотрим на модельном примере. В качестве модельного двухфакторного объекта возьмем биквадратный параболоид

$$Y = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{4}x_2^4 \quad (2.4.2)$$

в области  $D: \{-2 \leq x_1 \leq 2 \cap -2 \leq x_2 \leq 2\}$ .

Минимум (2.4.2) очевидно находится в точке  $(0,0)$ , но для наглядного представления о процедуре последовательного линейного градиентного спуска условимся, что наш виртуальный эксперимент будет заключаться в вычислении функции (2.4.2) в выбранных экспериментальных точках плоскости  $x_1, x_2$ . При этом «притворимся», что сама поверхность, задаваемая (2.4.2), нам не видна. В принципе можно добиться большого сходства с натурным экспериментом, добавив к

(2.4.2) случайное слагаемое  $Z$  с нулевым средним. Тогда при повторных вычислениях в одной точке функция будет изменяться, и вместо поверхности будем наблюдать поле рассеяния в 3-мерном пространстве, регрессией которого будет поверхность (2.4.2).

Пусть на первом шаге факторы варьируются в соответствии с табл. 2.4.1.

Таблица 2.4.1. План-матрица эксперимента

на первом шаге		
$x_1$	$x_2$	$Y$
$\frac{3}{2}$	1	1.52
2	2	8.00
$\frac{3}{2}$	2	5.27
2	1	4.25

Линейную аппроксимацию регрессии ищем в виде

$$\hat{Y} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2, \quad (2.4.3)$$

а неизвестные коэффициенты из условия минимализма суммы квадратов отклонений:

$$Q = \sum_i (\hat{Y}_i - Y_i)^2 = \sum_i (a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i} - Y_i)^2 \rightarrow \min. \quad (2.4.4)$$

Дифференцируя сумму квадратов по  $a_0, a_1, a_2$  и приравнявая частные производные к нулю, получаем систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial a_0} = 2 \sum_{i=1}^4 (a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i} - Y_i) = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=1}^4 x_{1i} (a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i} - Y_i) = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial a_2} = 2 \sum_{i=1}^4 x_{2i} (a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i} - Y_i) = 0. \end{cases} \quad (2.4.5)$$

Чтобы избежать себя от необходимости на каждой итерации решать систему уравнений вида (2.4.5), перейдем к безразмерным переменным (кодированным факторам), что дополнительно позволит уни-

фицировать вычислительный аппарат безотносительно фактического диапазона варьирования факторов:

$$z_{k_i} = 2 \frac{x_{k_i} - \frac{x_{k_2} + x_{k_1}}{2}}{x_{k_2} - x_{k_1}} = 2 \frac{x_{k_i} - \bar{x}_k}{\Delta x_k}. \quad (2.4.6)$$

План-матрица в кодированных уровнях приведена в табл. 2.4.2.

Таблица 2.4.2. План-матрица эксперимента в кодированных факторах

$z_1$	$z_2$	$Y$
-1	-1	1.52
-1	+1	5.27
+1	-1	4.25
+1	+1	8.00

Суммы столбцов  $z_1$  и  $z_2$ , а также их скалярное произведение теперь равны нулю, и система уравнений (2.4.5) автоматически приобретает диагональный вид:

$$\begin{cases} 4a_0 = \sum_{i=1}^4 Y_i, \\ 4a_1 = \sum_{i=1}^4 z_{1i} Y_i, \\ 4a_2 = \sum_{i=1}^4 z_{2i} Y_i, \end{cases} \quad (2.4.7)$$

откуда получаем систему разрешающих соотношений для коэффициентов линейной регрессии:

$$a_0 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 Y_i; \quad a_1 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 z_{1i} Y_i; \quad a_2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 z_{2i} Y_i. \quad (2.4.8)$$

Подставляя в (2.4.8) данные табл. 2.4.2, получаем уравнение линейной регрессии на первой итерации:

$$\hat{Y} = 4,76 + 1,37z_1 + 1,88z_2. \quad (2.4.9)$$

Линии уровня плоскости  $\hat{Y}(z_1, z_2) = \text{const}$ , очевидно представляют собой семейство параллельных прямых. Координаты направляющего вектора линии уровня в пространстве  $(z_1, z_2)$  (с точностью до линейного преобразования) находим, разрешив (2.4.9) относительно  $z_2$ :  $e_c = (1; -\frac{a_1}{a_2}) = (1; -0,73)$ . Направляющий вектор градиентной линии (перпендикуляра к линиям уровня) находим из условия  $(e_g, e_c) = 0$ :  $e_g = (1; \frac{a_2}{a_1}) = (1; 1,37)$ .

Значения линейной аппроксимации (2.4.9) в точках плана (2.4.2), линии уровня и градиентная линия, проходящие через центр плана, показаны на рис. 2.4.1.

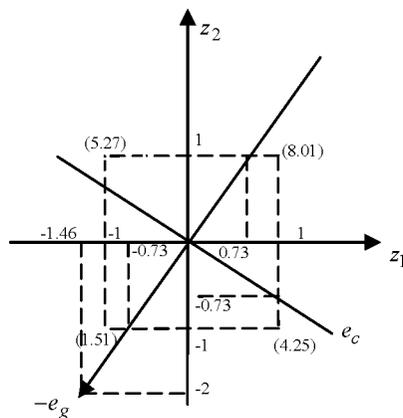


Рис. 2.4.1. Значения линейной аппроксимации и направление градиента на первой итерации

Из схемы на рис. 2.4.1 очевидно, что антиградиент направлен вниз и влево (противоположное направление является направлением градиентного восхождения). Примем “осторожную стратегию” движения, а именно, за новый центр ядра плана примем точку пересечения анти-

градиента с границей исходного ядра (рис. 2.4.1). Новые уровни  $z_1$  и  $z_2$  возьмем симметрично (влево/вправо, вверх/вниз) относительно нового центра:  $z_1 = \{-1,46; 0\}$ ,  $z_2 = \{-2; 0\}$ . Для «реализации» эксперимента необходимо совершить пересчет новых уровней вещественных факторов  $x_1$  и  $x_2$ . Обращая преобразования (2.4.6), получим

$$x_{ki}^{(2)} = \bar{x}_k^{(1)} + \frac{\Delta x_k^{(1)}}{2} z_{ki}, \quad (2.4.10)$$

где верхний индекс соответствует номеру итерации. Подставляя в (2.4.10) данные табл. 2.4.1, находим:

$$x_{11}^{(2)} = \frac{7}{4} - \frac{1}{4} \cdot 1,46 = 1,39; \quad x_{12}^{(2)} = \frac{7}{4} + \frac{1}{4} \cdot 0 = 1,75;$$

$$x_{21}^{(2)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 = 0,5; \quad x_{22}^{(2)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 = 1,5.$$

Подставляя найденные значения в (2.4.2) (реализуем новый эксперимент), и учитывая универсальность плана в кодированных переменных, получаем план-матрицу табл. 2.4.3.

Таблица 2.4.3. План-матрица эксперимента на второй итерации

$z_1$	$z_2$	$y$
-1	-1	0,95
-1	+1	2,2
+1	-1	2,36
+1	+1	3,61

По данным табл. 2.4.3 получаем уравнение линейной регрессии на второй итерации:

$$\hat{y} = 2,28 + 0,71z_1 + 0,63z_2. \quad (2.4.11)$$

Аналогично рис.2.4.1 строим новую схему расположения линии уровня и градиентной линии (рис. 2.4.2):

$$e_c = (1; -1,13), \quad e_g = (1; 0,89).$$

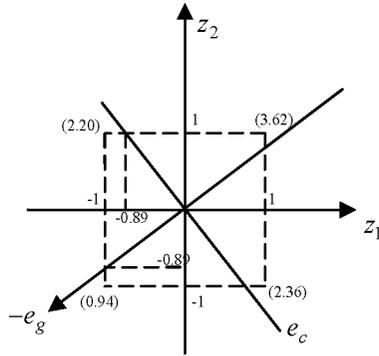


Рис.2.4.2. Значения линейной аппроксимации и направление градиента на второй итерации

Сравнивая рис. 2.4.2 с рис.2.4.1, замечаем, что градиентная линия немного развернулась по часовой стрелке. Новые значения уровней  $z_1$ ,  $z_2$  составят  $z_1 = \{-2; 0\}$ ,  $z_2 = \{-1,88; 0\}$ . Соответствующие им уровни  $x_1$ ,  $x_2$  находим, обновляя значения в (2.4.10):

$$x_{11}^{(3)} = 1,57 - \frac{0,36}{2} \cdot 2 = 1,21; \quad x_{12}^{(3)} = 1,57 + \frac{0,36}{2} \cdot 0 = 1,57;$$

$$x_{21}^{(3)} = 1 - \frac{1}{2} \cdot 1,88 = 0,06; \quad x_{22}^{(3)} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 1.$$

Обновленная план-матрица эксперимента приведена в табл.2.4.4.

Таблица 2.4.4. План-матрица эксперимента на третьей итерации

$z_1$	$z_2$	$y$
-1	-1	0,54
-1	+1	0,79
+1	-1	1,52
+1	+1	1,77

Уравнение линейной регрессии теперь примет вид:

$$\hat{y} = 1,16 + 0,49z_1 + 0,13z_2. \quad (2.4.12)$$

Схема плоскости (2.4.12) показана на рис.2.4.3.

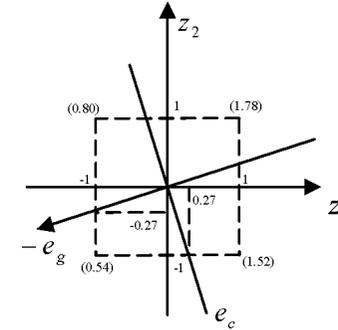


Рис.2.4.3. Значения линейной аппроксимации и направление градиента на третьей итерации

Значения уровней  $z$  и  $x$  теперь составят:  
 $z_1 = \{-2; 0\}$ ;  $z_2 = \{-0,54; 0\}$ ;  $x_1 = \{1,03; 1,39\}$ ;  $x_2 = \{0,28; 0,53\}$ .  
 Новая план-матрица приведена в табл. 2.4.5.

Таблица 2.4.5. План-матрица эксперимента на четвертой итерации

$z_1$	$z_2$	$y$
-1	-1	0,28
-1	+1	0,3
+1	-1	0,93
+1	+1	0,95

3. Как показывают результаты последовательного спуска, «осторожная» стратегия приближает к цели, хотя и не так быстро, как хотелось бы. В принципе, шаги в направлении антиградиента могли быть и больше. Однако в реальности вид исследуемой поверхности далеко не всегда так очевиден, как в нашем модельном примере. При большем числе факторов ситуация еще более усложняется, и потеря направления спуска на очередной итерации может привести к необходимости начинать эксперимент практически заново.

Предположим, что на очередной итерации алгоритм последовательного линейного градиентного спуска позволил достичь почти стационарной области, и ядро плана составили точки с координатами  $x_1 = \{-0,2; 0,3\}$ ,  $x_2 = \{-0,3; 0,1\}$ .

Далее переходим ко второй фазе активного эксперимента – аппроксимации поверхности отклика полиномом второго порядка. Уравнение регрессии теперь будем иметь в виде

$$\hat{y} = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2. \quad (2.4.13)$$

Уравнение (2.4.13) содержит уже 6 неизвестных коэффициентов, и соответственно система нормальных уравнений метода наименьших квадратов содержит также 6 линейных уравнений.

Для приведения этой системы уравнений к диагональному виду используется ортогональное преобразование (ортогональный центрально-композиционный план второго порядка). Рассмотрим данное преобразование в общем виде, т.е. для произвольного числа факторов  $k$ . К ядру плана, содержащему  $2^k$  точек (вершин гиперкуба с координатами  $-1; +1$ ), в пространстве кодированных переменных добавляется  $2k$  точек (по 2 для каждой оси), расположенных симметрично относительно центра плана на расстоянии  $a$ . Эти точки принято называть «звездными», и ортогонализация плана достигается за счет выбора величины  $\alpha$  – «плеча звездных точек». Здесь сразу следует отметить, что радиус гиперсферы, проведенной из центра плана через звездные точки, возрастает с увеличением  $k$ , т.е. с увеличением числа факторов звездные точки раздвигаются от центра, увеличивая таким образом эффективный объем обследуемой области факторного пространства.

Обозначим через  $\varphi$  средний скалярный квадрат (на одну точку плана) столбца уровней фактора. Учитывая, что из  $N=2^k+2k+1$  элементов столбца (точек плана)  $2^{k-1}$  равны  $-1$ , столько же имеют значение  $+1$ , по одному значению  $-a$  и  $+a$ , а остальные равны 0, получим

$$\varphi = \frac{2^k + 2a^2}{N} = \frac{2^k + 2\alpha^2}{2^k + 2k + 1}. \quad (2.4.14)$$

Таким образом, столбец  $\tilde{z}_i^2 = z_i^2 - \varphi$  будет иметь нулевую сумму. Приравнивая нулю скалярное произведение двух столбцов  $(\tilde{z}_i^2, \tilde{z}_j^2) = 0$ , получаем уравнение относительно  $\alpha$ :

$$2^k(1 - \varphi)^2 - 4\varphi(\alpha^2 - \varphi) + (2k - 1)\varphi^2 = 0. \quad (2.4.15)$$

Исключая из (2.4.15)  $\varphi$ , используя (2.4.14), после элементарных преобразований получаем

$$\alpha = \sqrt{\sqrt{(2^k + 2k + 1)2^{k-2} - 2^{k-1}}}. \quad (2.4.16)$$

При увеличении  $k$  от 2 до 4,  $\alpha$  согласно (2.4.16) возрастает от 1 до  $\sqrt{2}$ .

Разрешающие соотношения метода наименьших квадратов в ортогональных переменных будут иметь вид:

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i; \quad a_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \tilde{z}_{ji}^2} \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{ji} y_i = \frac{\sum_{i=1}^N \tilde{z}_{ji}^2 y_i}{2^k + 2\alpha^2};$$

$$a_{jj} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (\tilde{z}_{ji}^2)^2} \sum_{i=1}^N \tilde{z}_{ji}^2 y_i = \frac{\sum_{i=1}^N \tilde{z}_{ji}^2 y_i}{\frac{2^{k+1}(k - \alpha^2)}{2^k + 2k + 1} + 2\alpha^2(\alpha^2 - 1)};$$

$$a_{ji} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (z_{ji} z_{ji})^2} \sum_{i=1}^N z_{ji} z_{ji} y_i = \frac{\sum_{i=1}^N z_{ji} z_{ji} y_i}{2^k}. \quad (2.4.17)$$

Соотношение (2.4.17) можно облечь в простую естественную формулировку: коэффициент квадратичной регрессии определяется в виде дроби:

$$\frac{\text{скалярное произведение столбец - отклика * столбец - аргумент}}{\text{скалярный квадрат столбца - аргумента}}.$$

При переходе от переменных  $\tilde{z}_i$  и  $z_i$  требуется пересчитать только свободный член:

$$a'_0 = a_0 - \varphi \sum_{i=1}^N a_{ii} = a_0 - \frac{2^k + 2\alpha^2}{2^k + 2k + 1} \sum_{i=1}^N a_{ii}. \quad (2.4.18)$$

Возвращаясь к модельному примеру, получаем план-матрицу ЦКП в виде табл.2.4.6.

Параметры плана  $2^2$  составят:  $\alpha=1$ ,  $\varphi=\frac{2}{3}$ .

Таблица 2.4.6. План-матрица ЦКП второго порядка  $2^2$

i	$z_1$	$x_1$	$z_2$	$x_2$	$z_1 z_2$	$\tilde{z}_1^2$	$\tilde{z}_2^2$	$y \times 10^{-3}$
1	-1	-0,2	-1	-0,3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2,43
2	-1	-0,2	1	0,1	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0,43
3	1	0,3	-1	-0,3	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	4,05
4	1	0,3	1	0,1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2,05
5	$-\alpha(-1)$	-0,2	0	-0,1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0,43
6	$\alpha(1)$	0,3	0	-0,1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	2,05
7	0	0,05	$-\alpha(-1)$	-0,3	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	2,03
8	0	0,05	$\alpha(1)$	0,1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0,03
9	0	0,05	0	-0,1	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0,03

Подставляя данные табл. 2.4.6 в (2.4.17), находим коэффициенты уравнения квадратичной регрессии, умноженные на 1000:

$$\hat{y} = 1,49 + 0,81z_1 - z_2 + 2,72\tilde{z}_1^2 + 2,25\tilde{z}_2^2, \quad (2.4.19)$$

или, возвращаясь от переменных  $\tilde{z}_i^2$  к  $z_i^2$ ,

$$\hat{y} = -1,82 + 0,81z_1 - z_2 + 2,72z_1^2 + 2,25z_2^2. \quad (2.4.20)$$

Минимум квадратичной формы (2.4.20) достигается в точке  $z_1 = -0,149$ ;  $z_2 = 0,222$ , что соответствует уровням вещественных переменных  $x_1 = 0,013$ ;  $x_2 = -0,056$ .

Таким образом, как показывает приведенный демонстрационный пример, аппроксимация поверхности отклика полиномом 2-го порядка имеет сугубо ориентировочный характер. Поэтому при интерпретации результатов анализа такой модели, построенной по усеченным выборочным данным, следует соблюдать осторожность. По крайней мере, эти результаты не стоит абсолютизировать.

### Глава 3. СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ КОНТРОЛЬНЫХ И ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

#### 3.1. Модель функционирования системы контроля

1. Общая постановка задачи выборочного контроля в простейшем варианте одинарной выборки заключается в следующем. Объектом контроля является партия, содержащая  $N$  изделий или полуфабрикатов (единиц продукции). Каждая единица продукции в результате контрольной процедуры может быть однозначно отнесена к одной из двух категорий: годная (соответствующая) или негодная (несоответствующая). Из партии методом случайного отбора извлекается безвозвратная выборка объемом  $n < N$ , и по результатам контроля выбранных  $n$  единиц выносится заключение о качестве не-проконтролированного остатка партии в количестве  $N-n$  единиц. Заключение о качестве партии, в конечном счете, сводится к одной из двух альтернатив: партия либо принимается по выборке, либо отклоняется (бракуется). В последнем случае, в принципе, возможны также две альтернативы: возврат поставщику, либо разбраковка (сплошной контроль остатка партии). В дальнейшем ограничимся только рассмотрением этапа принятия решения по выборке, то есть приемка либо браковка предъявленной партии по результатам контроля единиц продукции, попавших в выборку. Для применения к такой контрольной процедуре аппарата теории вероятностей, очевидно, необходимо установить однозначные критерии принятия решения и годности партии. Такими критериями являются: число дефектных единиц в выборке  $d$  и предельно допустимое число дефектных единиц в партии  $D$ . То есть, если в предъявленной партии содержится не более чем  $D$  дефектных единиц, то она считается пригодной для использования по назначению (в противном случае – нет), и соответственно, если при контроле обнаружено не более чем  $d$  дефектных изделий, партия принимается. В противном случае бракуется. При этом очевидно, что поскольку фактическое число дефектных единиц в партии, точнее говоря в непроконтролированном остатке, в результате выборочного контроля остается неизвестным, то существует возможность ошибочных решений.

Можно напрасно забраковать годную партию (ошибка 1 рода, вероятность которой принято называть  $\alpha$  - риском), либо с вероятностью  $\beta$  ( $\beta$  - риск) принять несоответствующую партию. Таким образом, в терминах вероятностной схемы приходим к следующей системе СВ:  $X_0$  - число дефектных единиц в предъявленной партии – цело-

численная СВ с множеством возможных значений  $\{0, 1, \dots, N\}$ ;  $Y$  - число дефектных единиц в выборке – целочисленная СВ с возможными значениями  $\{0, 1, \dots, n\}$ ;  $X_1$  - число дефектных единиц в принятой партии с возможными значениями  $\{0, 1, \dots, N - n + Y\}$ ;  $X_2$  - число дефектных единиц в забракованной партии -  $\{Y, Y + 1, \dots, Y + N - n\}$ .

Каждая из СВ имеет свой ряд распределения, причем  $Y$  в результате контроля принимает определенное значение, а относительно  $X_0$ ,  $X_1$ ,  $X_2$  можно оперировать лишь оценками правдоподобия двух альтернативных гипотез:  $H_0 \sim \{X \leq D\}$ ,  $H_1 \sim \{X > D\}$ . Пусть  $X_0$  принимает фиксированное значение:  $X_0 = k$ . Тогда априорное условное распределение  $P\{Y = l | X = k\}$ , поскольку выборка бесповторная представляет собой закон «Спортлото»:

$$P\{Y = l | X_0 = k\} = \frac{C_k^l C_{N-k}^{n-l}}{C_N^n}, \quad l \leq k. \quad (3.1.1)$$

Частичная сумма ряда (3.1.1) для  $l=0, \dots, d$  называется *оперативной характеристикой контрольного плана*:

$$L(N, n, d, k) = \sum_{l=0}^d P\{Y = l | X_0 = k\} = \sum_{l=0}^d \frac{C_k^l C_{N-k}^{n-l}}{C_N^n}. \quad (3.1.2)$$

Сам же контрольный план (в простейшем случае одинарной выборки) полностью характеризуется тройкой чисел  $(N, n, d)$ . Оперативная характеристика (3.1.2) однозначно определяет вероятность приемки партии в зависимости от числа дефектных единиц в предъявленной партии  $k$ . В литературе и нормативных документах, посвященных вопросам выборочного контроля,  $\alpha$  - и  $\beta$  - риски устанавливаются непосредственно по оперативной характеристике. Это связано с тем, что априорный безусловный закон  $P_k = P\{X_0 = k\}$ , как правило, неизвестен. Однако следует иметь в виду, что задание одной только оперативной характеристики и определяемых по ней априорных рисков само по себе никак не характеризует фактическую эффективность контроля.

В терминах системного анализа этот факт становится очевидным. Оперативная характеристика представляет собой преобразователь,  $X_0$  - вход, а  $X_1$ ,  $X_2$  - два выхода (рис. 3.1.1).

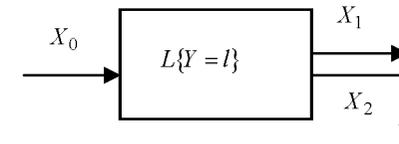


Рис. 3.1.1. Структурная схема системы выборочного контроля

Для однозначного определения выходных «сигналов» помимо характеристики преобразователя, очевидно, необходимо задание входного сигнала. Естественной вероятностной схемой в данной ситуации будет рассмотренная в п.1.3 формула вероятностей правдоподобия гипотез:

$$P\{X_1 = k | Y \leq d\} = \frac{P\{X_0 = k\}L(k)}{\sum_k P\{X_0 = k\}L(k)}, \quad (3.1.3)$$

$$P\{X_2 = k | Y > d\} = \frac{P\{X_0 = k\}[1 - L(k)]}{\sum_k P\{X_0 = k\}[1 - L(k)]}. \quad (3.1.4)$$

Величины в знаменателе (3.1.3), (3.1.4), представляющие собой вероятности приемки  $\pi_1$  и браковки  $\pi_2$  соответственно, связаны очевидным соотношением  $\pi_1 + \pi_2 = 1$ .

2. Для уяснения «механизма» функционирования системы выборочного контроля рассмотрим модельный пример. Пусть из партии объема  $N = 100$  отбирается для контроля  $n = 10$  единиц. Решение о приемке принимается по «чистой» выборке ( $d = 0$ ). Оперативная ха-

рактеристика такого плана будет иметь вид  $L(k) = \frac{C_{100-k}^{10}}{C_{100}^{10}}$ .

Пусть число дефектных единиц в предъявленной партии может принимать значения  $0 \div 5$  и имеет ряд распределения согласно табл. 3.1.1.

Таблица 3.1.1. Ряд распределения числа дефектных единиц в предъявленной партии

$P_0(k)$	0,40	0,30	0,20	0,07	0,02	0,01
----------	------	------	------	------	------	------

Результаты вычислений по формулам (3.1.3), (3.1.4), (3.1.5) сведены в табл. 3.1.2.

Таблица 3.1.2. Оперативная характеристика и распределение числа дефектных единиц в предъявленных и проконтролированных партиях

$k$	$L$	$P_0$	$P_1$	$P_2$
0	1	0,400	0,444	0
1	0,900	0,300	0,299	0,305
2	0,809	0,200	0,179	0,388
3	0,727	0,070	0,056	0,194
4	0,652	0,020	0,014	0,071
5	0,584	0,010	0,006	0,042

Как видно из табл. 3.1.2, в результате выборочного контроля происходит частичная сепарация предъявляемых партий. Ряд распределения  $P_1(k)$  смещается влево по оси  $k$  (к нулю), а ряд  $P_2(k)$ , соответственно, вправо. Величины средней дефектности составят:  $\mu_0 = 1,040$ ,  $\mu_1 = 0,905$ ,  $\mu_2 = 2,157$ . Вероятности приемки  $\pi_1 = 0,902$  и браковки  $\pi_2 = 0,098$  численно равны удельной доле принятой и забракованной продукции в объеме поставки (при данном плане контроля и неизменном качестве поставок).

Условимся, что партии с не более чем двумя дефектными единицами являются приемлемыми ( $D = 2$ ). Тогда  $\beta_0 = \sum_{k>2} P_0(k) = 0,1$  и

$\beta^* = \sum_{k>2} P_1(k) = 0,076$  являются оценками рисков потребителя в случае

приемки без контроля ( $\beta_0$ ) и при наличии контроля (полный апостериорный риск потребителя). При такой же системе подсчета удельная

доля годных партий среди забракованных (риск поставщика) оказывается непомерно велика:  $\alpha = \sum_{k>2} P_2(k) = 0,693$ .

Однако если принять «справедливую» оценку – удельную долю напрасно забракованной продукции в объеме всей поставки (полный апостериорный риск поставщика), то результат выглядит вполне приемлемым:  $\alpha^* = \pi_2 \alpha = 0,068$ .

3. В рассмотренном примере был принят «нуль - дефектный» план контроля ( $d = 0$ ). Главным недостатком такого плана является пологая оперативная характеристика. Однако при требовании нуль – дефектности поставок все многообразие планов естественным образом ограничивается планом с нулевым приемочным числом. Планы с  $d > 0$  и  $n > n_0$  имеют более крутую оперативную характеристику. Оперативные характеристики  $L(100,10,0,k)$  и  $L(100,30,2,k)$ , рассчитанные по (3.1.2), показаны на рис. 3.1.2.

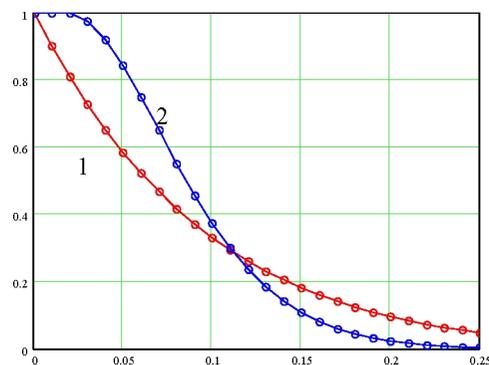


Рис. 3.1.2. Оперативные характеристики нуль – дефектного плана (1) и плана с  $d = 2$  (2)

Собственное «качество» контрольного плана определяется крутизной наклонного участка оперативной характеристики. Идеальная оперативная характеристика, имеющая вид ступенчатой функции (1 при  $k \leq D$  и 0 при  $k > D$ ), достигается только при сплошном контроле  $n = N$ .

Соотношение (3.1.2) не очень удобно для практических расчетов, поэтому при больших  $N$  и  $\frac{n}{N} \ll 1$  целесообразно пользоваться биномиальной асимптотикой гипергеометрического распределения (п.1.1):

$$L \approx \sum_{l=0}^d C_n^l q^l (1-q)^{n-l}, \quad (3.1.6)$$

где  $q = \frac{k}{N}$ . В свою очередь, при условии  $qn < 1$  биномиальный закон имеет пуассоновскую асимптотику:

$$L \approx e^{-\lambda} \sum_{l=0}^d \frac{\lambda^l}{l!}, \quad (3.1.7)$$

где  $\lambda = nq$ .

При этом соотношения (3.1.3), (3.1.4) остаются справедливыми при любом виде оперативной характеристики.

4. Более гибкими с точки зрения «настройки» оперативной характеристики по сравнению с планами одинарной выборки являются ступенчатые планы. Рассмотрим план двойной выборки, заключающийся в следующем:

- 1) Из партии извлекается выборка объема  $n_1$  (первая ступень).
- 2) Устанавливается приемочное число  $d_1$  и браковочное  $d_2 > d_1$ , то есть если число дефектных единиц в первой выборке  $< d_1$  партия принимается, если  $> d_2$  - бракуется.
- 3) Если число дефектных единиц имеет промежуточное значение  $d_1 < Y \leq d_2$ , то извлекается вторая выборка объема  $n_2$ .
- 4) Если суммарное число дефектных единиц не превосходит  $d_2$ , партия принимается. В противном случае - бракуется.

Вторая ступень, очевидно, представляет собой план с оперативной характеристикой  $L(N, n_1 + n_2, d_2, k)$ , которая «включается» в случае браковки первой ступенью:  $L(N, n_1, d_1, k)$ . Вероятность включения второй ступени составляет  $1 - L(N, n_1, d_1, k)$ .

Таким образом, согласно формуле полной вероятности (п.1.2) оперативная характеристика двухступенчатого плана будет иметь вид

$$L^{(2)} = L_1 + (1 - L_1)L_2. \quad (3.1.8)$$

Преимущества характеристики (3.1.8), по сравнению с  $L_1$  и  $L_2$ , заключаются в том, что она более приближается к идеальной. Данную схему рассуждений можно обобщить на произвольное число ступеней. В результате приходим к рекуррентному соотношению:

$$L^{(m+1)} = L^{(m)} + (1 - L^{(m)})L_{m+1}, \quad (3.1.9)$$

где  $L^{(m)}$  - оперативная характеристика  $m$  - ступенчатого плана,  $L_{m+1}$  - характеристика плана одинарной выборки объема  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_{m+1}$  с приемочным числом  $d_{m+1}$ . За счет увеличения числа ступеней можно при меньшем среднем объеме контроля все более приближать браковочный уровень дефектности к средней дефектности поставок либо при прочих равных условиях уменьшать априорные риски потребителя и поставщика, определяемые по оперативной характеристике.

Вычисление оперативной характеристики по рекуррентной формуле (3.1.9) представляет известные неудобства. Однако существует более простой способ приближенного задания плана с неограниченно большим числом ступеней, так называемого плана последовательного контроля [7,10].

### 3.2. Принцип накопления и анализа информации. Оценка эффективности контроля

1. Выборочный контроль по альтернативному признаку штучной промышленной и сельскохозяйственной продукции явился хронологически первым объектом практического приложения теории вероятностей еще в раннеиндустриальную эпоху. Примечательным является тот факт, что в данной ситуации классическая комбинаторная (урновая) вероятностная схема применима без всяких дополнительных допущений (единственным и естественным допущением является равновозможность попадания в выборку каждого из индивидуумов обследуемой совокупности). При этом, в силу условий тогдашнего производства и уровня развития транспортной инфраструктуры, не предполагалось какой-либо связи между качеством очередной партии и результатами контроля предыдущих партий. Все партии рассматривались, как изолированные. В соответствии с этим устанавливались процедуры контроля, включающие возможность полной разбраковки

(проверки) остатка партии, отклоненной по выборке, и формулировался математический аппарат. В современных же условиях такой подход является, по большей части, анахронизмом, поскольку производство осуществляется на автоматических поточных линиях с длительным периодом стабильности, а сотрудничество с поставщиками осуществляется на долгосрочной основе. Такая ситуация в соответствии с принятой терминологией характеризуется как установившееся производство, и последовательные партии вполне обоснованно можно рассматривать как части одной однородной большой партии. В настоящее время по данным нормативных документов ISO отчетливо наметилась общемировая тенденция перехода от контроля изолированных партий к однородному потоку штучной продукции. Такой поток полностью характеризуется одним числовым параметром – вероятностью выхода несоответствующей единицы  $p$  и, стало быть, число несоответствующих единиц подчиняется биномиальному закону распределения. Статистическую оценку можно неограниченно уточнять по мере накопления результатов контроля. По данным официальных отчетов компаний – мировых лидеров в области качества – дефектность их производства составляет несколько PPM ( $1PPM = 1 \times 10^{-6}$ ). При этих условиях, если объемы партий не превышают несколько тысяч единиц, то реальностью становится заветная мечта – нуль-дефектное производство, и сама актуальность выборочного контроля по существу утрачивается. Однако эра благоденствия пока еще к сожалению наступила не повсеместно, и выборочный контроль в обозримом будущем, по-видимому, останется весьма распространенным инструментом противодействия браку. В качестве переходной системы контроля, позволяющей частично реализовать выше-упомянутый принцип накопления и анализа информации, приняты две основные схемы:

1) многоступенчатый контроль (не путать с многоступенчатыми планами!);

2) skip lot (контроль с пропуском партий).

Многоступенчатый контроль предполагает выборочный контроль каждой из последовательных партий и может функционировать в трех режимах: усиленный, нормальный и ослабленный контроль. Усиленный контроль вводится при начале поставок либо при аномальном возрастании засоренности предъявленных партий. При этом партии рассматриваются как изолированные, но результаты контроля архиви-

руются для последующего анализа. Переход от усиленного к нормальному контролю, заключающемуся в уменьшении объема контролируемых выборок, осуществляется при стабилизации качества поставок, т.е. когда в значительном числе партий, прошедших усиленный контроль (это число зависит от конкретной специфики производства), уровень засоренности не превышает установленного норматива. При длительной стабильной работе нормального контроля осуществляется переход на ослабленный контроль, при котором объемы выборок становятся еще меньше.

Процедуры многоступенчатого контроля, включая правила перехода с одной ступени на другую, весьма подробно изложены в стандартах, других нормативных документах, а также в литературе, посвященной выборочному контролю. Поэтому представляется целесообразным сосредоточить внимание лишь на теоретико-вероятностном аспекте данной схемы. Получается парадоксальная, на первый взгляд, ситуация, когда по мере уменьшения засоренности поставок уменьшается и объем выборок, уменьшая тем самым вероятность попадания в выборку дефектной единицы. Получается, грубо говоря, что для визуализации все более мелких объектов используется менее мощная оптика. Однако этот парадокс является только кажущимся, поскольку при объединении партий объединяются также и выборки, и при меньшей удельной доле контролируемой продукции можно получить оперативную характеристику, по крайней мере, не худшую, чем при контроле изолированных партий с большей удельной долей контроля. Например, при переходе от приемки изолированных партий объема  $N=100$  по чистой выборке объема  $n=7$  удельная доля контроля снижается с 10% до 7%. При этом оперативная характеристика приобретает большую крутизну (т.е. лучшую фильтрующую способность). При уменьшении доли контроля до 4% за счет объединения 4 последовательных партий при объеме выборок  $n=4$  оперативная характеристика в пересчете на удельную долю дефектных единиц становится еще более круто падающей. Сравнительный вид трех вышеперечисленных оперативных характеристик показан на рис. 3.2.1.

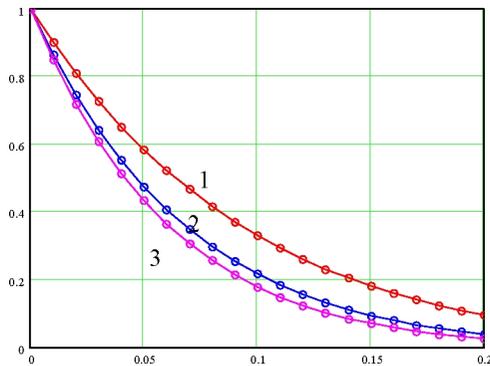


Рис.3.2.1. Оперативные характеристики планов:  
1-(100,10, 0); 2-(200,14,0); 3-(400,16,0)

Аналогичная закономерность имеет место и в случае приемочного числа  $d > 0$ , и весь вопрос заключается в том, насколько обоснованным является объединение нескольких последовательных партий и сколько партий можно объединять в одну.

Альтернативой многоступенчатому контролю является контроль с пропуском партий, именуемый в англоязычной литературе «skip lot». В данной процедуре контролю подвергается лишь одна, случайно выбранная из нескольких подряд предъявляемых партий. При этом снижение удельной доли контролируемой продукции достигается также за счет объединения нескольких последовательных партий в одну, но, в отличие от многоступенчатого контроля, контрольная выборка ассоциируется не только с проконтролированной партией, а результаты ее контроля экстраполируются на пропущенные партии. Выбор между процедурами многоступенчатого контроля и контроля с пропуском партий определяется соотношением между фиксированными затратами на контроль (установка контрольно-испытательного оборудования, командировка персонала и т.д.) и себестоимостью контроля единицы продукции. Если фиксированные затраты составляют значительную долю в общей себестоимости контроля, то более целесообразной с экономической точки зрения является процедура skip lot. При этом, очевидно, необходимой является большая «доверительность» в отношениях между поставщиком и потребителем, поскольку более половины предъявленных партий потребитель принимает без контроля.

2. Оценить фактическую эффективность контроля и сформулировать критерии оптимальности контрольного плана представляется возможным только при наличии надежной априорной информации о качестве предъявляемых поставок, полученной в течение значимого производственного периода (по достаточно большому числу проконтролированных партий). В большинстве случаев эта априорная информация может быть сведена к одному численному показателю — к оценке вероятности несоответствия предъявленной партии  $\beta_0$ . При оценке фактической эффективности контроля и формулировке критериев оптимальности контрольного плана следует исходить из наличия трех компонент совокупных издержек, возникающих из-за возможного наличия несоответствующей продукции и, как следствие, необходимости контроля:

- 1) издержки от пропущенного брака, пропорциональные апостериорному риску потребителя,  $\beta^*$ ;
- 2) издержки от напрасно забракованной продукции, пропорциональные полному апостериорному риску поставщика,  $\alpha^*$ ;
- 3) затраты на контроль, пропорциональные среднему объему выборки,  $n^*$  (или средней удельной доле контролируемой продукции  $\nu = \frac{n^*}{N}$ ).

Переменные составляющие совокупных издержек будут определяться следующим образом:

$$\beta^* = \frac{\beta_0 \beta}{(1 - \beta_0)(1 - \alpha) + \beta_0 \beta}, \quad (3.2.1)$$

$$\alpha^* = (1 - \beta_0)\alpha, \quad (3.2.2)$$

$$n^* = \frac{\ln \frac{1 - \beta}{\alpha} \ln \frac{\beta}{1 - \alpha}}{\ln \frac{q_1}{q_0} \ln \frac{1 - q_1}{1 - q_0}}. \quad (3.2.3)$$

Критерием фактической эффективности действующего плана контроля, очевидно, будет условие

$$Z(\nu) - C_\beta \beta_0 < 0, \quad (3.2.4)$$

а в качестве критерия оптимальности естественно принять условие минимума положительно-определенной линейной формы:

$$Z(v) = C_{\alpha} \alpha^* + C_{\beta} \beta^* + C_v v \rightarrow \min, \quad (3.2.5)$$

где  $C_{\alpha}$ ,  $C_{\beta}$ ,  $C_v$  - удельные затраты, соответствующие каждой из трех компонент, в пересчете на единицу продукции. В зависимости от соотношения удельных затрат величина оптимальной доли контроля  $v^*$ , в принципе, может изменяться от 0 (приемка без контроля) до 1 (сплошной контроль).

Задача существенно упрощается при условиях нуль-дефектного производства. В этом случае риск поставщика исчезает  $\alpha^* = \alpha \equiv 0$ , а все многообразие планов исчерпывается планом одинарной выборки с приемочным числом  $d = 0$ .

### 3.3. Сущность процесса измерения и основные элементы измерительной системы

1. Технические измерения являются неотъемлемой и очень важной составляющей любого производственного процесса. Адекватная оценка качества продукции и состояния производственного процесса возможна только при условии устойчивого функционирования измерительных и контрольных процессов, позволяющих делать выводы и принимать решения на основе фактов. Любой измерительный процесс с функциональной точки зрения заключается в сравнении какой-либо из характеристик измеряемого объекта с некоторым эталонным значением, принятым за единицу (мерой), и присвоении измеряемому объекту численного значения, полученного в результате такого сравнения. Однако сравнение осуществляется не напрямую, а при помощи измерительной системы, включающей в себя измерительное устройство, методику измерения и, как правило, человека (оператора).

Кроме того на функционирование измерительного процесса оказывает воздействие окружающая среда, изменение параметров которой (температура, влажность, запыленность, вибрации и т.д.) приводит к ошибке (погрешности) измерений.

При рассмотрении погрешностей измерений следует начать с декомпозиции процесса их образования и, по возможности, классифицировать для более детального изучения. Ошибки при измерении линейных размеров, имеющих наибольшую совокупную трудоемкость среди контрольных операций в машиностроительном производстве, принято подразделять на следующие составляющие:

- погрешность показаний средства измерения;
- погрешность мер, по которым устанавливается средство измерения;
- погрешность, вызываемая отклонениями температуры измерений от нормальной температуры («температурная» погрешность);
- погрешность, вызываемая деформацией объекта под действием измерительного усилия и собственного веса;
- погрешности макро- и микрогеометрической формы объекта, связанные с измеряемым его размером.

При составлении нормативов на предельные погрешности измерения длин в машиностроении практически учитывают лишь первые три «слагаемых».

Погрешность всякого метода или средства измерения и любого их «слагаемого», кроме того, подразделяется на две «составляющие»: систематическую и случайную.

Систематическая составляющая будет оставаться постоянной при измерениях, либо изменяться определенным образом в зависимости от изменения определенного, неслучайного фактора. В последнем случае систематическую ошибку можно было бы отнести к категории «функциональных» ошибок. Систематическая составляющая может получиться, например, за счет погрешностей мер, при установке в исходное положение данного средства измерения и за счет отклонений температуры измеряемого объекта и средства измерения при различных коэффициентах их линейного расширения от нормальной температуры при данной серии измерений. Ошибка, получающаяся от первой причины, будет постоянной, а ошибка от второй причины будет изменяться с изменением отклонений от нормальной температуры.

Случайная составляющая будет меняться от измерения к измерению случайным образом; она будет вызываться многочисленными факторами, действие которых по-разному складывается в повторных измерениях.

Наличие случайных ошибок приводит к тому, что результат каждого отдельного измерения представляет собой некоторую случайную величину. При нормальном законе распределения случайных ошибок с параметром рассеивания  $\sigma$  и при наличии систематической ошибки (смещения)  $\delta$  результат измерения объекта, истинное значение которого равно  $a$ , будет случайной величиной  $X_a$ , распределенной по закону:

$$\varphi_a(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[x-(a+\delta)]^2}{2a^2}}. \quad (3.3.1)$$

Трудность в определении погрешности измерений заключается в том, что оценка «истинного» значения величины на практике добывается из тех же или из других аналогичных измерений, не свободных от некоторых погрешностей в силу несовершенства измерительных инструментов и органов чувств наблюдателя. Поэтому «истинные» значения измеряемых объектов представляется возможным рассматривать лишь теоретически, как некоторую научную абстракцию, и затем производить их оценку надлежащими методами.

2. С понятием точности измерительной системы неразрывно связано другое фундаментальное понятие – разрешающая способность, характеризующее минимальное различие в величине параметра двух измеримых объектов, которое может быть обнаружено данной измерительной системой. Точность и разрешающая способность измерительной системы являются понятиями хотя и близкими, но не тождественными. Например, наличие систематической ошибки (смещения), постоянной в пределах некоторого диапазона, не ухудшает разрешающей способности системы. Однако точность при значительной величине такой ошибки может оказаться неприемлемой. Таким образом, разрешающая способность является необходимым (но еще недостаточным) условием обеспечения точности или, другими словами, разрешающая способность характеризует максимальную (принципиально достижимую) точность измерительной системы. В свою очередь, разрешающая способность чаще всего определяется ценой деления, являющейся одной из основных характеристик любого измерительного устройства.

При считывании показаний с измерительного устройства, имеющего градуированную шкалу, результат единичного измерения всегда будет представлять собой целое число, кратное цене деления шкалы. Это происходит вследствие того, что «фактические» показания округляются до ближайшего деления шкалы. При этом, очевидно, что если показания индикатора различаются на величину, меньшую половины минимального деления шкалы, то они становятся неразличимы. Таким образом, величина, равная половине цены деления шкалы, может рассматриваться в качестве предельной разрешающей способности измерительной системы. Для измерительных устройств с цифровой индикацией предельная

разрешающая способность будет определяться ценой последнего фиксируемого знака. Если измерения являются «грубыми», о чем будет свидетельствовать незначительное рассеивание результатов повторных измерений одного объекта (образца) при постоянных условиях или же полное отсутствие рассеивания, то вывод о приемлемости или неприемлемости измерительной системы можно сделать только на основе анализа предельной разрешающей способности. Для «точных» измерений, когда результаты серии повторных измерений одного образца обнаруживают рассеивание, значительно превосходящее величину цены деления, вывод о пригодности можно сделать только по результатам статистического анализа измерительного процесса. Однако в любом случае детальный анализ имеет смысл только при условии, что предельная разрешающая способность измерительной системы позволяет получить не менее 10 градаций измеряемого параметра внутри установленного по техническим условиям поля допуска. Еще лучше, если разрешающая способность позволяет получить 10 и более градаций внутри фактического рабочего диапазона варьирования измеряемого параметра, если этот диапазон сколько-нибудь значительно меньше ширины поля допуска.

### 3.4. Модель функционирования измерительной системы

1. Пусть  $X$  – истинное значение измеряемого параметра объекта (единицы продукции), случайного выбранного из некоторой совокупности, или истинное значение аналогового сигнала (напряжение, давление, температура и т.д.), поступающего на вход измерительного устройства. Результат измерения  $Y$ , вообще говоря, будет представлять собой случайную величину, отличную от  $X$  из-за наличия погрешностей. Модель функционирования будем строить в соответствии с общей схемой для двух случайных величин, находящихся в стохастической связи. Погрешность измерения будет иметь плотность распределения, соответствующую априорному условному распределению:

$$f_{Y/X}(x, y) = \frac{d}{dy} P\{Y < y | X = x\}. \quad (3.4.1)$$

Априорное безусловное распределение (входного сигнала) будем полагать известным –  $f_X(x)$ .

Тогда ПР совместного распределения согласно п.1.3 будет иметь вид

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_{Y/X}(x, y) \quad (3.4.2)$$

Закон распределения  $Y$  и ПР апостериорного условного распределения будут равны соответственно:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx, \quad (3.4.3)$$

$$f_{X/Y}(x, y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}. \quad (3.4.4)$$

В качестве первого варианта модели рассмотрим нормальный закон распределения случайной ошибки. Положим, что погрешность имеет только случайную составляющую (систематическая устранена метрологическими приемами). Тогда плотность распределения (3.4.1) будет иметь вид

$$f_{Y/X}(x, y) = \frac{1}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_Y^2}}, \quad (3.4.5)$$

где  $\sigma_Y$  - СКО случайной погрешности. Пусть входной сигнал  $X$  так же имеет нормальное распределение:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}}, \quad (3.4.6)$$

где  $\sigma_X$  - СКО входного сигнала. Среднее значение без ограничения общности принято за начало отсчета. Введем в рассмотрение отношение

$\nu = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$  и переобозначим  $\sigma = \sigma_X$ . В новых обозначениях ПР

(3.4.2) примет вид

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\nu} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{(x-y)^2}{\nu^2} + x^2\right)\right]. \quad (3.4.7)$$

Подставляя (3.4.7) в (3.4.3), (3.4.4), после элементарных преобразований получим:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(1+\nu^2)}} \exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma^2(1+\nu^2)}\right], \quad (3.4.8)$$

$$f_{X/Y}(x, y) = \frac{\sqrt{1+\nu^2}}{\nu\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1+\nu^2}{2\nu^2\sigma^2}\left(x - \frac{y}{1+\nu^2}\right)^2\right]. \quad (3.4.9)$$

Как видно из последних выражений, результат измерения  $Y$  представляет собой сумму независимых между собой истинного значения  $X$  и погрешности  $Z=Y-X$ . Апостериорное условное распределение

(3.4.9) также имеет нормальный вид с СКО  $\sigma_{X/Y} = \frac{\sigma_X\sigma_Y}{\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}}$ .

Однако более интересным результатом является то, что линия регрессии  $\mu_X(y)$  не совпадает с прямой  $x=y$  (рис. 3.4.1). Имеет место отрицательное смещение, линейно зависящее от  $y$ :

$$\mu_X(y) - y = \frac{y}{1+\nu^2} - y = -\frac{\nu^2}{1+\nu^2}y. \quad (3.4.10)$$

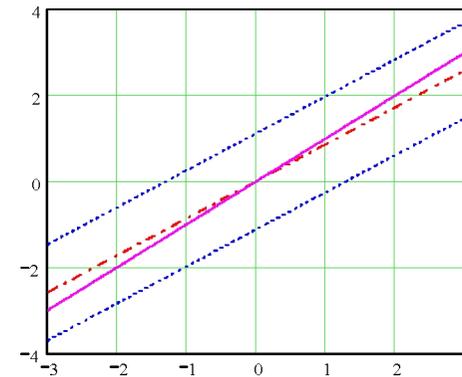


Рис. 3.4.1. Линия регрессии и 6- сигмовая полоса измеряемого сигнала при  $\nu=0,3$  в сравнении с идеальной линией  $x=y$

Таким образом, главный вывод состоит в том, что случайная компонента погрешности индуцирует систематическую составляющую погрешности. Эта составляющая («ножницы» между регрессией  $\mu_X(y)$  и главной биссектрисой, соответствующей идеальным измерениям) приводит к тому, что результат измерения  $Y$  завышает истинное значение  $X$ , и эта разница возрастает пропорционально удалению от центра рассеяния входного сигнала. Другой вывод состоит в том, что

коэффициент корреляции  $\rho(X, Y) = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}$  убывает до нуля по мере увеличения среднеквадратичного отклонения случайной погрешности. Это является следствием того, что с увеличением рассеяния отклонения  $Y - X$  ковариация  $\text{cov}(X, Y)$  остается постоянной.

2. В качестве другой модели случайной погрешности рассмотрим *ошибку отсчета* – округление показаний при считывании с градуированной шкалы измерительного прибора с ценой деления  $h$ . В этом случае (3.4.1) будет иметь вид:

$$f_{Y/X}(x, y) = \frac{1}{h} \begin{cases} 1, |y-x| \leq \frac{h}{2}, \\ 0, |y-x| > \frac{h}{2}. \end{cases} \quad (3.4.11)$$

Приняв распределение входного сигнала в том же виде (3.4.6) и проделав аналогичную предыдущему случаю цепочку вычислений, получим

$$f_{XY}(x, y) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{h\sigma\sqrt{2\pi}} \begin{cases} 1, |y-x| \leq \frac{h}{2}, \\ 0, |y-x| > \frac{h}{2}; \end{cases} \quad (3.4.12)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X/Y}(x, y) dx = \frac{1}{h\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{y-\frac{h}{2}}^{y+\frac{h}{2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{h} \left[ \Phi_0\left(\frac{y+\frac{h}{2}}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{y-\frac{h}{2}}{\sigma}\right) \right]; \quad (3.4.13)$$

$$f_{Y/X}(x, y) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi} \left[ \Phi_0\left(\frac{y+\frac{h}{2}}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{y-\frac{h}{2}}{\sigma}\right) \right]} \begin{cases} 1, |x-y| \leq \frac{h}{2}, \\ 0, |x-y| > \frac{h}{2}. \end{cases} \quad (3.4.14)$$

В данном случае регрессия будет иметь вид

$$\begin{aligned} \mu_X(y) &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi} \left[ \Phi_0\left(\frac{y+\frac{h}{2}}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{y-\frac{h}{2}}{\sigma}\right) \right]} \int_{\frac{y-\frac{h}{2}}{\sigma}^{\frac{y+\frac{h}{2}}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \\ &= \frac{\sigma \left[ e^{-\frac{(y-\frac{h}{2})^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(y+\frac{h}{2})^2}{2\sigma^2}} \right]}{\Phi_0\left(\frac{y+\frac{h}{2}}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{y-\frac{h}{2}}{\sigma}\right)}. \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

Нормируя все величины на  $\sigma$  и обозначив  $\varepsilon = \frac{h}{2\sigma}$ , приведем (3.4.15) к виду

$$\mu_X(y) = \frac{\varphi_0(y-\varepsilon) - \varphi_0(y+\varepsilon)}{\Phi_0(y+\varepsilon) - \Phi_0(y-\varepsilon)}. \quad (3.4.16)$$

Вид зависимости (3.4.16) показан на рис.3.4.2.

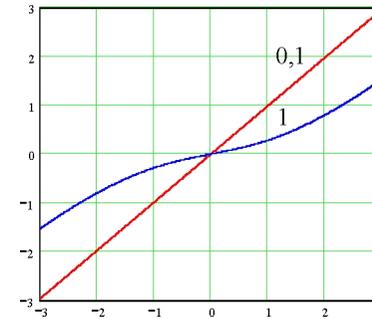


Рис. 3.4.2. Регрессия точного значения на показания измерения при наличии ошибки отсчета  $h=0,1\sigma$ ;  $\sigma$

### 3.5. Модель функционирования измерительной системы при приеме по допуску

1. В предыдущем пункте была рассмотрена модель функционирования измерительного процесса при использовании по прямому назначению, т.е. когда на выходе измеряемому объекту присваивается чис-

ленное значение – результат измерения. Однако очень часто задачей технических измерений в производственных условиях является разделение измеряемых объектов на две категории соответствующие/несоответствующие в зависимости от того, попадает ли результат измерения в заданный диапазон – поле допуска. В данной ситуации измерительный процесс работает в режиме калибровки, и его функционирование во многом аналогично рассмотренному в П.3.1 контролю по альтернативному признаку. При построении модели, как и в п.3.4, условимся, что СВ  $X$  – точное (фактическое) значение измеряемой величины, СВ  $Y$  – результат измерения. Погрешность (ошибку) измерения  $Y - X$  будем интерпретировать как нормальную СВ со средним значением  $\delta$  и СКО  $\sigma$ . Тогда ПР априорного условного распределения получим в виде

$$f_{Y|X}(x, y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(y-x-\delta)^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (3.5.1)$$

Параметр  $\delta$  – смещение начала отсчета измерительной шкалы примем за положительную константу. Началом отсчета будем считать центр поля допуска шириной  $2\Delta$ . При этих условиях ПР ошибки измерения (3.5.1) будет иметь вид, показанный на рис. 3.5.1.

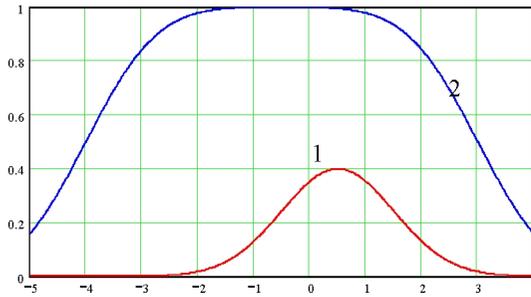


Рис. 3.5.1 Плотность распределения ошибки  $f$  (1) и оперативная характеристика  $L$  (2) измерительного процесса

Вероятность признания годным измеряемого объекта с фактическим значением  $X = x$ ,  $P\{-\Delta \leq Y \leq \Delta | X = x\}$  по аналогии с п. 3.1 будем называть оперативной характеристикой приемки по допуску:

$$L(x) = P\{-\Delta \leq Y \leq \Delta | X = x\} = \int_{-\Delta}^{\Delta} f_{Y|X}(x, y) dy = \left[ t = \frac{y-x-\delta}{\sigma} \right] = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\Delta+x+\delta}{\sigma}}^{\frac{\Delta-x-\delta}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \Phi_0\left(\frac{x+\Delta+\delta}{\sigma}\right) + \Phi_0\left(\frac{\Delta-x-\delta}{\sigma}\right). \quad (3.5.2)$$

Как видно на рис. 3.5.1, максимум  $L(x)$  величиной  $2\Phi_0\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right)$  смещается от центра поля допуска зеркально симметрично по сравнению со смещением ПР случайной ошибки.

Такое смещение оперативной характеристики происходит вследствие того, что измерительная система со смещением  $\delta$  принимает за ноль точку с координатой  $-\delta$ . Само смещение  $\delta$  может быть легко скомпенсировано метрологическими средствами. Однако этот параметр может, в принципе, служить настроечным для минимизации совокупных издержек, если нет возможности уменьшить  $\sigma$ , и при этом выход за одну границу поля допуска приводит к неустраняемому дефекту, а за другую – к устранимому.

2. Оперативная характеристика, как и в контроле по альтернативному признаку (п. 3.1), сепарирует исходную совокупность на две фракции: принятую и отклоненную. Обозначая  $f_0(x)$  ПР измеряемой величины в исходной совокупности, для выходных по формуле правдоподобия гипотез (см. п. 1.3) получим соотношения, аналогичные (3.1.3), (3.1.4), заменяя суммы интегралами:

$$f_1(x) = \frac{f_0(x)L(x)x}{\int_{-\infty}^{\infty} f_0(x)L(x)dx}; \quad f_2(x) = \frac{f_0(x)[1-L(x)]}{\int_{-\infty}^{\infty} f_0(x)[1-L(x)]dx}. \quad (3.5.3)$$

Для нормальной исходной совокупности

$$f_0(x) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}} \quad (3.5.4)$$

и оперативной характеристики (3.5.2), производя вычисления согласно (3.5.3), получим:

$$f_1(x) = \frac{f_0(x)L(x)}{\pi_1}, \quad f_2(x) = \frac{f_0(x)[1-L(x)]}{\pi_2}, \quad (3.5.5)$$

где

$$\pi_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(x)L(x)dx = \Phi_0\left(\frac{\Delta+\delta}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right) + \Phi_0\left(\frac{\Delta-\delta}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma^2}}\right), \quad \pi_2 = 1 - \pi_1. \quad (3.5.6)$$

Вид ПР (3.5.5) показан на рис. 3.5.2.

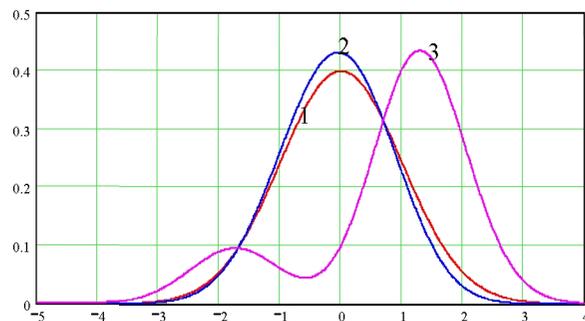


Рис.3.5.2. Плотности распределения измеряемого параметра в исходной (1), принятой (2) и забракованной (3) совокупностях

## Глава 4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ И ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

### 4.1. Потоки случайных событий и их свойства

1. Основным исходным понятием теории надежности является отказ – нарушение работоспособности объекта, в результате чего объект перестает функционировать в заданном режиме, и становится невозможным его дальнейшее использование по назначению.

Отказы подразделяются на две принципиально различные группы:

- постепенные или параметрические – причинно обусловленные износом или старением составных частей изделия.
- внезапные – не имеющие видимой причинно-следственной связи, т.е. вызванные случайным сочетанием неблагоприятных факторов.

Объектом исследования математической теории надежности являются отказы второго типа, и поскольку в данной ситуации отказ интерпретируется как случайное событие, основанием математической теории надежности служит аппарат теории вероятностей и математической статистики.

С понятием отказ неразрывно связано второе исходное понятие – наработка до отказа – время, исчисляемое от начала функционирования до момента отказа. Причем, наряду с собственно временем, величина наработки может иметь и иную физическую природу (пробег, количество циклов срабатывания и т.д.).

При такой трактовке отказа и интерпретации объекта как *невосстанавливаемого*, наработка до отказа представляет собой положительно определенную СВ. Пусть  $f_T(t)$  – ПР наработки до отказа  $T$ . Ее ФР имеет вероятностный смысл:  $F_T(t) = \int_0^t f_T(\tau)d\tau = P\{T < t\}$ . Функция надежности (ВБР) определяется как дополнение  $F_T$  до 1, т.е.

$$P_n(t) = 1 - F_T(t) = \int_t^{\infty} f_T(\tau)d\tau = P\{T > t\}. \quad (4.1.1)$$

Классификация технических объектов на *невосстанавливаемые* и *восстанавливаемые* определяется не собственно физической природой объекта, а, главным образом, выбранной в соответствии с целью исследования вероятностной схемой его функционирования. Например, осветительная лампа в светильнике или элемент в цепи электрического агрегата по своей природе являются одноразовыми, т.е. *невосстанавливаемыми*. Однако сам агрегат путем замены отказавшего элемента восстанавливает свою работоспособность. Показатели его надежности, очевидно, будут определяться законом распределения временного интервала между последовательными отказами. Если поиск и замена отказавшего элемента осуществляются не мгновенно, а также занимают некоторый временной интервал (детерминированный или случайный), то вероятностная схема должна быть соответствующим образом изменена. Но при любых возможных вариациях очевидно, что исходной, базовой вероятностной моделью служит поток однородных случайных событий. *Поток случайных событий*, или просто *случайный поток*, образуемый последовательностью однородных событий, происходящих в случайные моменты времени является принципиаль-

но отличным от ранее рассмотренных систем СВ. Наглядными примерами случайных потоков могут служить поток автомобилей на шоссе, поток вызовов на телефонной станции, заявок на станцию технического обслуживания, поток сбоев в работе компьютера, технологической линии и т.д. Смысл термина *случайное событие* применительно к потоку заключается не в том, какова вероятность его осуществления, а в том, сколько событий произойдет в течение временного интервала фиксированной длительности или через какое время произойдет очередное событие потока. Наиболее изученным и, в то же время, наиболее интересным с точки зрения практической применимости теоретических выводов являются *ординарные потоки*. Свойство ординарности заключается в том, что события происходят по одиночке (а не группами) или, строго говоря, вероятность одновременного появления двух и более событий пренебрежимо мала. При таких условиях единственным системообразующим элементом потока является интервал между соседними событиями  $T$ , представляющий собой положительно-определенную СВ. Время, исчисляемое от начала отсчета до наступления  $m$ -го события, представляет собой сумму

$$\theta_m = \sum_{k=1}^m T_k.$$

Наибольший интерес и практическую значимость представляет ситуация, когда все интервалы  $T_1, T_2, \dots$  являются независимыми в совокупности СВ с одним законом распределения. Такой поток называется *рекуррентным или потоком Пальма*. Сам термин *время* не следует воспринимать буквально. Под ним может подразумеваться величина иной физической природы: расстояние (пробег), тонно-километры, киловатт-часы и т.д. *Время* может и не иметь размерности, и быть дискретным: количество циклов срабатывания, объем последовательной выборки, в частности, число испытаний по схеме Бернулли.

2. В качестве модельного примера рассмотрим поток «счастливых билетов». Каждый трамвайный билет имеет шестизначный десятичный номер, и «счастливым» принято считать билет, у которого сумма трех первых цифр равна сумме трех последних. Покупка очередного билета увеличивает дискретное «время» на 1, при этом, результат очередного испытания не зависит от предыдущих (другая смена, другой маршрут и т.д.) и определяется постоянной (стационарной) вероятностью  $p$ . Таким образом, поток является рекуррентным, и после покупки счастливого билета отсчет начинается заново.

Вероятность  $p$  найдем по классической комбинаторной схеме. Общее число различных номеров составляет  $N=10^6$  (000 000÷999 999). Для определения числа счастливых комбинаций рассмотрим  $S^{(n)}$  – сумму  $n$  случайных десятичных цифр. Для  $n=1$  ряд распределения очевиден:

$$P_k^{(1)} = P\{S^{(1)} = k\} = \frac{1}{10}, k = \overline{0,9}. \quad (4.1.2)$$

Для  $n>1$  по теореме о свертке (п.1.3) будет справедливо рекуррентное соотношение:

$$P_k^{(n+1)} = \sum_{l=\max\{0, k-9\}}^k P_l^{(n)} P_{k-l}^{(1)}, k = \overline{0,9(n+1)}. \quad (4.1.3)$$

Для рассматриваемой задачи достаточно найти ряд  $P_k^{(3)}, k = \overline{0,27}$ , приведенный в табл.4.1.1 для одного из симметричных отрезков  $\{0\div 13\}; \{14\div 27\}$ .

Каждая комбинация первых трех цифр, удовлетворяющая условию  $S^{(3)}=k$ , может сочетаться с любой из комбинаций трех вторых, удовлетворяющей тому же условию. Следовательно, искомое число счастливых комбинаций равно скалярному квадрату строки  $P_k^{(3)}$  из

табл. 4.1.1:  $N^* = \sum_{k=0}^{27} [P_k^{(3)}]^2 = 55252$ , и искомая вероятность составит

$$p = 55252 \cdot 10^{-6} \approx \frac{1}{18}.$$

Таблица 4.1.1. Ряд распределения суммы 3 случайных десятичных цифр

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
$p_k^{(3)} \times 10^3$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	63	69	73	75	75	...
$(p_k^{(3)})^2 \times 10^6$	1	9	36	100	225	441	784	1296	2025	3025	3969	4761	5329	5625	5625	...

Интервал между последовательными событиями  $T$  будет иметь геометрическое распределение  $f_n = P\{T = n\} = p(1-p)^{n-1}, n = 1, 2, \dots$  Для вычисления числовых характеристик  $T$  введем *производящую функцию*:

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n t^n, \quad (4.1.4)$$

где  $0 < t < 1$  – вещественная переменная. Дважды дифференцируя (4.1.4), получим:

$$F'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n t^{n-1}, \quad F''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) f_n t^{n-2}. \quad (4.1.5)$$

Подставляя в (4.1.5)  $t = 1$ , замечаем, что  $F'(1) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n = M[T]$ ,

$$F''(1) + F'(1) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) f_n + \sum_{n=1}^{\infty} n f_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 f_n = M[T^2].$$

Таким образом, получаем соотношения:

$$M[T] = m = F'(1), \quad D[T] = F''(1) + F'(1) - [F'(1)]^2. \quad (4.1.6)$$

Раскрывая ряд (4.1.4), производящую функцию  $F(t)$  получим в виде

$$F(t) = pt \sum_{n=0}^{\infty} (qt)^n = \frac{pt}{1-qt}. \quad (4.1.7)$$

Подставляя (4.1.7) в (4.1.6), находим числовые характеристики:

$$m = \frac{1}{p} \approx 18, \quad D[T] = \frac{q}{p^2} \approx 306. \quad (4.1.8)$$

На основании (4.1.8) перепишем ряд распределения в виде

$$f_n = \frac{1}{m} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-1} \quad (4.1.9)$$

и условимся, что каждое испытание занимает время  $\Delta t \ll 1$ , так что  $n\Delta t = t$ ,  $m\Delta t = \mu_T$ .

Тогда для (4.1.9) будет справедлива асимптотика:

$$f(t) = \frac{f_n}{\Delta t} = \frac{1}{\mu_T} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{\frac{m}{\mu_T} \frac{t-\Delta t}{m}} \approx \frac{1}{\mu_T} e^{-\frac{t}{\mu_T}}. \quad (4.1.10)$$

Выражение (4.1.10) представляет собой ПР показательного закона

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad (4.1.11)$$

где  $\lambda = \frac{1}{\mu_T}$  – параметр распределения.

Величину  $e^{-\lambda t} = \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda \tau} d\tau$  можно истолковать как вероятность того,

что за время  $t$  не произойдет ни одного события. Соответственно,  $1 - e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} (e^{\lambda t} - 1)$  – есть вероятность наступления хотя бы одного события. Разлагая в последнем выражении  $e^{\lambda t}$  в ряд Маклорена, получаем полную группу по числу событий:

$$1 - P\{T > t\} = e^{-\lambda t} \left( \lambda t + \frac{1}{2} (\lambda t)^2 + \dots + \frac{1}{k!} (\lambda t)^k + \dots \right). \quad (4.1.12)$$

Объединяя (4.1.11) и (4.1.12), приходим к выводу, что число событий в потоке за интервал  $t$  имеет пуассоновское распределение с параметром  $\lambda t$ :

$$P\{N_t = k\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.1.13)$$

Пусть  $T^{(k)}$  – время реализаций  $k$  событий, тогда

$$P\{T^{(k)} < t\} = P\{N_t \geq k\} = 1 - P\{N_t < k\} = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^l}{l!} \quad (4.1.14)$$

Дифференцируя (4.1.14) по  $t$ , найдем ПР  $T^{(k)}$ :

$$f_{T^{(k)}}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \left( \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^l}{l!} - \sum_{l=0}^{k-2} \frac{(\lambda t)^l}{l!} \right) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}. \quad (4.1.15)$$

Полученная ПР представляет собой закон Эрланга  $k$ -го порядка ( $k$ -кратная автосвертка показательного закона).

3. Возвращаясь к простейшему показательному потоку, остановимся на условиях его возникновения. В большинстве практически значимых ситуаций модель исследуемого потока представима в виде суммы (суперпозиции) нескольких парциальных потоков. Так, например, рассмотренный поток счастливых билетов, представляет собой суперпозицию 28 элементарных парциальных потоков по числу возможных значений суммы 3 десятичных цифр. Сущность сложения потоков очевидна из рис. 4.1.2.

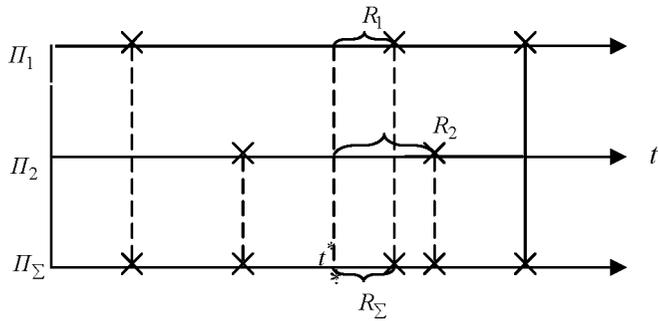


Рис. 4.1.2. Сложение случайных потоков

Суммарный поток складывается из событий всех парциальных потоков, так что время ожидания в суммарном потоке определяется как

$$R = \min\{R_1, R_2, \dots, R_n\}. \quad (4.1.16)$$

Закон распределения минимума в пределе при  $n \rightarrow \infty$  имеет показательный вид. Стало быть, такую же показательную ПР имеет интервал между соседними событиями потока. Чтобы среднее значение интервала  $\mu_\Sigma = \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k} \right]^{-1}$  не стремилось к нулю при увеличении  $n$ , время в суммарном потоке можно отмасштабировать  $t' = nt$ , что эквивалентно прореживанию потока в соотношении  $n:1$ . Тогда получим простейший поток с усредненной плотностью:

$$\mu'_\Sigma = \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k} \right]^{-1}. \quad (4.1.17)$$

Таким образом, показательный закон  $f(t) = e^{-t}$ , наряду с  $N(0,1)$  и  $R(0,1)$ , является одним из трех важнейших законов (стационарных точек) в пространстве непрерывных распределений. Для случайных потоков с непрерывным временем показательный закон имеет такое же значение, какое нормальный закон имеет для сумм СВ.

#### 4.2. Парадокс инспекции и смежные вопросы

1. Сами по себе числовые характеристики (4.1.8) носят сугубо иллюстративный характер, и собственно задача про счастливый билет выбрана из большого ряда аналогичных комбинаторно-вероятностных

схем для большей занимательности и наглядности. Гораздо более принципиально важным является фундаментальное свойство геометрического распределения, для иллюстрации которого и был приведен этот демонстрационный пример.

Зададимся вопросом: какова будет сравнительная продолжительность ожидания покупки счастливого билета, если в одном случае вести отчет от очередного счастливого билета, а в другом – от первого попавшегося?

Предположим, что из первых  $k$  испытаний ни одно не привело к успеху, тогда условная вероятность успеха в  $(k+1)$ -ом составит

$$P_{k,k+1} = \frac{f_{k+1}}{1 - \sum_{i=1}^k f_i} = \frac{f_{k+1}}{\sum_{i=k+1}^{\infty} f_i}. \quad (4.2.1)$$

Подставляя в (4.2.1) ряд распределения, получим

$$P_{k,k+1} = \frac{p(1-p)^k}{p(1-p)^k \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i} = p. \quad (4.2.2)$$

Таким образом, знание «истории» никак не влияет на прогноз относительно результата очередного испытания. Стало быть, каждый билет может считаться первым, и на поставленный вопрос можно дать вполне определенный ответ: *время ожидания не зависит от начала отсчета, и «счастливчик» имеет ровно такие же шансы на очередной успех, как и его менее удачливый попутчик.*

2. Из независимости от начала отсчета следует, что в качестве него может служить произвольная (случайная) точка  $t^*$  на оси  $t$ . Но тогда расстояние до ближайшего следующего события потока (время ожидания  $R$ ) и время, прошедшее от ближайшего предыдущего события (время опоздания  $Q$  на рис.4.2.1), имеют такой же закон распределения, как и интервал между событиями. В силу стационарности потока  $R$  и  $Q$  независимы, стало быть, их сумма – интервал, накрывающий случайную точку  $t^*$  имеет распределение Эрланга второго порядка:  $f_{T^*}(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$ .

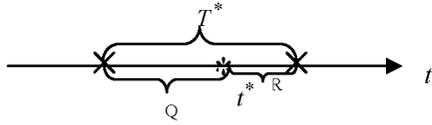


Рис. 4.2.1. Схема расположения событий потока на оси времени

Но, с другой стороны, интервал между соседними событиями имеет показательную ПР  $f_T(t) = \lambda te^{-\lambda t}$ . Возникающий, так называемый, *парадокс инспекции* разрешается довольно просто. В качестве наводящих рассуждений рассмотрим модельный пример. Пусть интервал между событиями (неперекрывающиеся отрезки на оси  $t$ ) может принимать только два возможных значения  $\tau_1, \tau_2$  с вероятностями  $p_1$  и  $p_2=1-p$  соответственно. На ось  $t$  бросается случайная точка  $t^*$ . Требуется найти закон распределения интервала, в который попала брошенная точка. В данной постановке применима формула Байеса. Гипотезы  $H_1: \{T = \tau_1\}$  и  $H_2: \{T = \tau_2\}$  имеют априорные маргинальные (безусловные) вероятности

$$p(H_1) = \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2}, \quad p(H_2) = \frac{\tau}{\tau_1 + \tau_2}, \quad (4.2.3)$$

а  $p$  и  $1-p$  есть условные априорные вероятности. Искомые апостериорные вероятности после сокращения полученных дробей, составят:

$$p_1^* = P\{T^* = \tau_1\} = \frac{p\tau_1}{p\tau_2 + (1-p)\tau_2},$$

$$p_2^* = P\{T^* = \tau_2\} = \frac{(1-p)\tau_2}{p\tau_2 + (1-p)\tau_2}. \quad (4.2.4)$$

Легко заметить, что оба выражения (4.2.4) можно объединить в одно:

$$p_k^* = \frac{\tau_k p_k}{\mu_T}, \quad k=1,2. \quad (4.2.5)$$

Ряд (4.2.5) сдвигается в сторону большего значения  $\tau_k$ , и среднее  $T^*$  составит

$$\mu_T^* = \sum_k \tau_k p_k^* = \frac{1}{\mu_T} \sum_k \tau_k^2 p_k = \frac{\mu_T^2 + \sigma_T^2}{\mu_T} = \mu_T + \frac{\sigma_T^2}{\mu_T}. \quad (4.2.6)$$

Для численной иллюстрации положим  $\tau_1 = 1, \tau_2 = 5, p = \frac{1}{2}$ . Результаты сведены в табл. 4.2.1.

Таблица 4.2.1

$\tau$	$p$	$p^*$	$\mu$	$\sigma^2$	$\mu^*$	$\sigma^{*2}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	3	4	$\frac{13}{3}$	$\frac{20}{9}$
5	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$				

Увеличивая количество возможных значений интервала и переходя в пределе к непрерывной ПР  $f_T(t)$ , получим следующее соотношение

$$f_{T^*}(t) = \frac{tf_T(t)}{\mu_T}, \quad (4.2.7)$$

где  $\mu_T = \int_0^{\infty} tf_T(t) dt$ .

В частности, для показательной ПР  $f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ ,  $f_{T^*}(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$ ,  $\mu_{T^*} = 2\mu_T$ . Таким образом, случайная точка (инспектор) изменяет закон распределения покрывающего ее интервала в сторону больших значений. Прежде чем этот *парадокс инспекции* был разрешен в 30-40 гг. прошлого века, он изрядно попортил нервы специалистам, занимающимся испытаниями на надежность.

3. Рассмотренная интерпретация является проявлением закономерности более общего характера. Пусть вероятность попадания случайной точки в область пространства, соответствующую  $dx$  пропорциональна  $\varphi(x)f_X(x)$ , где  $X$  – положительно-определенная СВ, а  $\varphi(x)$  – произвольная положительно-определенная функция без особенностей. Пропустив цепочку рассуждений, аналогичную только что рассмотренной, получим

$$f_\varphi(x) = \frac{\varphi(x)f_X(x)}{\mu_\varphi}, \quad (4.2.8)$$

где  $\mu_\varphi = \int_0^\infty \varphi(x) f_X(x) dx$ . (4.2.9)

Пусть, например,  $f_X(x)$  — ПР *гранулометрического спектра* порошкового материала (удельная доля числа частиц диаметром  $x$  среди попавших в поле микроскопа с большой глубиной резкости), частицы которого без большой натяжки можно считать шарами. Для пересчета ПР *массогранулометрического спектра* (удельной доли массы, содержащейся в частицах диаметром  $x$ ) нужно положить  $\varphi(x)=x^3$ . Если частицы имеют форму дисков, то  $\varphi(x)=x^2$  и т.д. В частности, для частиц игольчатой формы решение совпадает с (4.2.7). Можно решить и обратную задачу, т.е. если путем непосредственных измерений может быть определена  $f_\varphi$ , а требуется знать  $f_X$ . Поделив (4.2.8) на  $\varphi(x)$ , проинтегрируем левую и правую части по всей полубесконечной прямой:

$$\int_0^\infty \frac{f_\varphi(x)}{\varphi(x)} dx = \frac{1}{\mu_\varphi} \int_0^\infty f_X(x) dx = \frac{1}{\mu_\varphi}. \quad (4.2.10)$$

Разрешая (4.2.8) относительно  $f_X$  с учетом (4.2.10), получим:

$$f_X(x) = \left[ \int_0^\infty \frac{f_\varphi(x)}{\varphi(x)} dx \right]^{-1} \frac{f_\varphi(x)}{\varphi(x)}. \quad (4.2.11)$$

### 4.3. Очереди и задачи обслуживания

1. Рассмотрим несколько иную логическую схему вывода соотношений (4.1.12) – (4.1.15). Определим процесс Пуассона с помощью следующей конструктивной схемы. Обозначим  $P_n(t)$  вероятность того, что в течение интервала времени  $(0,t)$  произойдет ровно  $n$  событий и рассмотрим два смежных интервала  $(0,t)$  и  $(t,t+h)$ , где  $h=O(1)$ . Исходные постулаты Пуассона заключаются в том, что условная вероятность осуществления одного события в интервале  $(t,t+h)$  не зависит от  $t$  и равна  $\frac{h}{\mu_T} + o(h)$ , а вероятность осуществления более чем одного события есть величина высшего порядка малости  $o(h)$ .

Обозначим для большего удобства записи последующих соотношений:  $\lambda = \frac{1}{\mu_T}$ . Тогда для  $P_n(t+h)$  при  $n \geq 1$ , учитывая, что  $n$  событий

в интервале  $(0,t+h)$  могут осуществляться двумя альтернативными способами: 1)  $n$  событий за время  $(0,t)$  и ни одного – за время  $(t,t+h)$  с вероятностью  $P_n(t)(1-\lambda h + o(h))$ ; 2)  $n-1$  событий за время  $(0,t)$  и одно – за время  $(t,t+h)$  с вероятностью  $P_{n-1}(t)(\lambda h + o(h))$ , по формуле полной вероятности будем иметь:

$$P_n(t+h) = P_n(t)(1-\lambda h) + P_{n-1}(t)\lambda h + o(h), \quad (4.3.1)$$

откуда получаем разностное соотношение:

$$\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h}. \quad (4.3.2)$$

В пределе при  $h \rightarrow 0$  (4.3.2) преобразуется в систему рекуррентных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t), \quad n \geq 1. \quad (4.3.3)$$

При  $n=0$ , полагая в (4.3.3)  $P_{n-1}(t) \equiv 0$ , получаем однородное уравнение

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t), \quad (4.3.4)$$

решением которого, удовлетворяющим условию

$$0 \leq P_0(t) \leq 1, \text{ будет } P_0(t) = e^{-\lambda t}, \quad (4.3.5)$$

что соответствует формуле общего члена (4.1.13) при  $k=0$ . Подставляя (4.3.5) в (4.3.3), находим  $P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$  и все последующие члены ряда (4.1.13).

Вывод (4.3.1) – (4.3.3) предпочтительнее, чем используемый в п.4.1, с той точки зрения, что естественным образом допускает дальнейшие обобщения.

Процесс Пуассона можно рассматривать как простейший частный случай *процесса чистого размножения*. Его более общей стационарной формой является ситуация, когда  $\lambda$  зависит от  $n$ . В этом случае система дифференциальных уравнений (4.3.3), (4.3.4) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda_n P_n(t) + \lambda_{n-1} P_{n-1}(t), & n \geq 1, \\ \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t). \end{cases} \quad (4.3.6)$$

В соответствии с такой вероятностной схемой протекают процессы последовательных атомных радиоактивных превращений, накопления повреждений при эксплуатации технического объекта и т.д.

2. В зависимости от специфики реального процесса структура (4.3.6) может варьироваться, например, наличием терминального (поглощающего) состояния с номером  $m$ , так, что для всех  $n > m$   $\lambda_n = P_n(t) \equiv 0$ .

Начальным состоянием может быть необязательно нулевое, а произвольное  $n=k$ , такое, что  $P_k(0)=1$ , а для всех  $n \neq k$   $P_n(0)=0$ .

Следующим обобщением, более содержательным с точки зрения практических приложений задачи массового обслуживания, моделирования очередей и т.д., является ситуация, когда количество событий (объектов) с течением времени может не только возрасти, но и уменьшаться, так называемые процессы размножения и гибели. Система дифференциальных уравнений (4.3.6) в такой ситуации преобразуется к виду

$$\begin{cases} \frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda_n + \omega_n)P_n(t) + \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \omega_{n+1}P_{n+1}(t), & n \geq 1, \\ \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t) + \omega_1 P_1(t), \end{cases} \quad (4.3.7)$$

где  $\omega_n$  – величина, обратная средней продолжительности жизни в  $n$ -м поколении. Система (4.3.7) имеет предельное (при  $t \rightarrow \infty$ ) стационарное решение. Приравняв к нулю левые части (4.3.7), находим стационарные вероятности перехода:

$$\begin{aligned} p_{n,n+1} &= P\{U_n \rightarrow U_{n+1}\} = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \omega_n}; \\ p_{n,n-1} &= P\{U_n \rightarrow U_{n-1}\} = \frac{\omega_n}{\lambda_n + \omega_n}. \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

3. Прежде, чем переходить к содержательному рассмотрению приложений схемы процесса размножения и гибели, рассмотрим промежуточную ситуацию, когда продолжительность «жизни» является

детерминированной величиной. В наиболее наглядной (естественной) интерпретации суть рассматриваемой проблемы такова. При пересечении нерегулируемого перекрестка по второстепенной дороге необходимо дождаться «окна» длительностью  $\tau$  между автомобилями, движущимися по главной дороге. Каков будет закон распределения и числовые характеристики СВ  $T^*$  – времени ожидания на переезде «check time», если поток автомобилей на главной дороге образуется СВ  $T$  – интервалом между последовательными прибытиями (пересечениями) с показательным законом распределения:

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (4.3.9)$$

В другой интерпретации пуассоновский показательный поток образуется последовательными сбоями компьютера. Время, необходимое для решения задачи при безаварийной работе –  $\tau$ . Если при сбое происходит сброс программы, то время решения имеет закон распределения, подобный первому случаю. Единственным отличием будет сдвиг вправо по оси  $t$  на величину  $\tau$ . Аналогичная ситуация имеет место при работе счетчика радиоактивных частиц (первых моделей), последовательных разладках технологической линии и т.п. Далее будем рассматривать естественную интерпретацию «check time». Первое очевидное заключение состоит в том, что  $T^*$  является комбинированной СВ, непрерывной справа от точки  $t=0$  и с квантом в точке  $t=0$ . Следующее заключение состоит в том, что при случайном начале отсчета (момент появления на переезде никак не связан с потоком автомобилей) время ожидания первого события потока имеет тот же закон распределения, что и интервал движения (4.3.9). Данный факт, известный в литературе как «парадокс времени ожидания», был рассмотрен в п.4.2. Таким образом задачу можно переформулировать, совместив начало отсчета с одним из событий потока. Вывод ФР  $T^*$  начнем с кванта в нуле:

$$P\{T^* = 0\} = P\{T > \tau\} = e^{-\lambda\tau}. \quad (4.3.10)$$

Функцию распределения  $P\{T^* < t\}$  при  $t > 0$  будем искать, разлагая в полную группу по числу пропущенных автомобилей:

$$F_{T^*}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t). \quad (4.3.11)$$

Рассмотрим структуру ряда  $F_n(t)$  более детально. При  $n=1$  получим

$$F_1(t) = P\{T_1 < t < \tau, T_2 > \tau\} = e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda \tau}) \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda \tau}}, \quad (4.3.12)$$

где  $T_1$  - время от начала отсчета до первой машины,  $T_2$  - интервал между первой и второй. Для  $n=2$  будем иметь

$$F_2(t) = P\{T_1 < \tau, T_2 < \tau, T_3 > \tau, T_1 + T_2 < t\} = e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda \tau})^2 F_{\bar{T}(2)}(t), \quad (4.3.13)$$

где  $F_{\bar{T}(2)}$  - сумма двух независимых исходных СВ, усеченных на отрезке  $[0, \tau]$ . Продолжив аналогичные рассуждения, получим ПР  $T^*$  в следующем виде:

$$f_{T^*}(t) = e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda \tau})^n f_{\bar{T}(n)}(t), \quad (4.3.14)$$

где  $\bar{T}^{(n)}$  -  $n$ -кратная автокомпозиция СВ  $T$ , усеченной на отрезке  $[0, \tau]$ .

Рассмотрим последовательность  $f_{\bar{T}(n)}(t)$ .

При  $n=1$  вид ПР вполне очевиден:

$$f_{T(1)}(t) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda \tau}}, & 0 < t \leq \tau, \\ 0, & t > \tau. \end{cases} \quad (4.3.15)$$

При  $n=2$  воспользуемся приемом, рассмотренным в п. 1.3. и схемой рис. 4.3.1

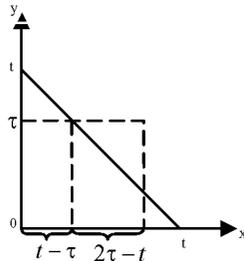


Рис. 4.3.1. Схема области интегрирования для вычисления автосвертки в интервале  $\tau < t \leq 2\tau$ . На интервале  $\tau < t \leq \tau$  ПР составит

$$f_{\bar{T}(2)}(t) = \frac{\lambda^2 t e^{-\lambda t}}{(1 - e^{-\lambda \tau})^2}. \quad (4.3.16)$$

Для  $\tau < t \leq 2\tau$  сначала найдем ФР, используя рис.4.3.1:

$$F_{\bar{T}(2)}(t) = \frac{\lambda^2}{(1 - e^{-\lambda \tau})^2} \left\{ \int_0^{\tau} e^{-\lambda y} dy \int_0^{t-\tau} e^{-\lambda x} dx + \int_0^{t-\tau} e^{-\lambda y} dy \int_{t-\tau}^{\tau} e^{-\lambda x} dx \right\}.$$

После дифференцирования окончательно получим

$$f_{\bar{T}(2)}(t) = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda t}}{(1 - e^{-\lambda \tau})^2} \begin{cases} t, & 0 < t \leq \tau, \\ 2\tau - t, & \tau < t < 2\tau. \end{cases} \quad (4.3.17)$$

Для  $n=3$  аналогичным образом получим

$$f_{\bar{T}(3)}(t) = \frac{\lambda^3 e^{-\lambda t}}{(1 - e^{-\lambda \tau})^3} \begin{cases} \frac{1}{2} t^2, & 0 < t \leq \tau, \\ 3\tau t - \frac{3}{2} \tau^3 - t^2, & \tau < t \leq 2\tau, \\ \frac{1}{2} (3\tau - t)^2, & 2\tau < t \leq 3\tau. \end{cases} \quad (4.3.18)$$

Выражение в фигурных скобках представляет собой ПР трехкратной автокомпозиции СВ  $R(0, \tau)$ . Таким образом, по индукции получаем формулу общего члена  $f_{\bar{T}(n)}(t)$  и окончательный вид ПР  $T^*$ :

$$f_{T^*}(t) = e^{-\lambda(t+\tau)} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \tau^{n-1} g_n\left(\frac{t}{\tau}\right), \quad (4.3.19)$$

где  $g_n(x)$  - ПР автокомпозиции СВ  $R(0, 1)$ , рассмотренная в п. 1.3;

$$g_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x < 0 \cup x > 1; \end{cases} \quad (4.3.20)$$

$$g_{n+1}(x) = \int_{x-1}^x g_n(y) dy.$$

Переходя к безразмерным переменным  $a = \lambda \tau$ ,  $x = \frac{t}{\tau}$ , получим

$$f^*(x) = e^{-a(x+1)} \sum_{n=1}^{\infty} a^n g_n(x). \quad (4.3.21)$$

При больших значениях  $a$  для практических расчетов следует перейти к логарифму  $\frac{T^*}{\tau}$ .

Вид зависимости (4.3.21) при  $a = 1,5$  приведен на рис. 4.3.2.

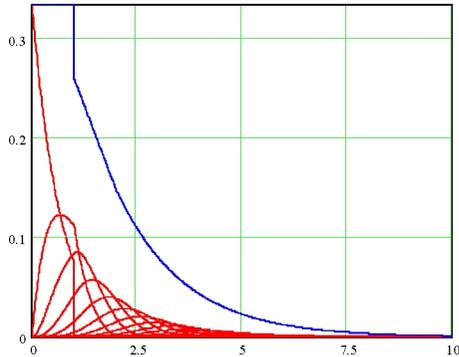


Рис.4.3.2. Плотность распределения относительного времени ожидания

Благодаря структуре ряда (4.3.21) для вычисления числовых характеристик достаточно вычислить характеристики исходного распределения, усеченного на отрезке  $[0,1]$ . Суммируя полученные ряды, находим:

$$\begin{aligned} \mu^* &= e^a - a - 1, \\ \sigma^{*2} &= e^a + 4a + a^2 - e^{-a}(1+a)^2. \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

При больших значениях  $a$  имеет место асимптотическое тождество  $\sigma^{*2} \approx \mu^* \approx e^a$ , что эквивалентно пуассоновской асимптотике с параметром  $\lambda_a = e^a$ . В свою очередь, преобразование  $\left(\frac{T^*}{\tau} - e^a\right)e^{-\frac{1}{2}a}$  будет иметь стандартную нормальную асимптотику  $N(0,1)$ . Полученное решение соответствует первой интерпретации «check time». На рис. 4.3.3 приведены результаты статистического моделирования методом Монте-Карло.

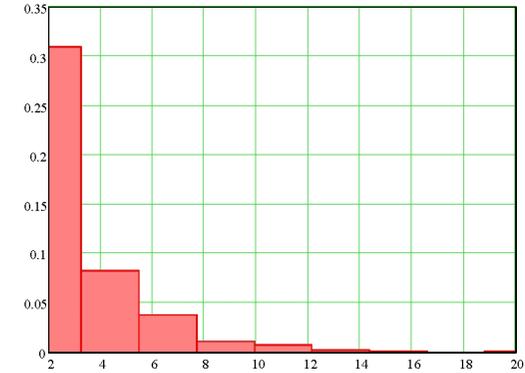


Рис.4.3.3. Результаты статистического эксперимента по модели «check time»

Пример с ЭВМ позволяет придать задаче другую, более актуальную применительно к теории надежности, интерпретацию. Пусть заявки на станцию техобслуживания, вызовы на телефонную станцию и т.д. образуют пуассоновский поток (нагрузку) с интенсивностью  $\lambda$ . Если время обработки одной заявки фиксировано и равно  $\tau$ , то средняя длина образующейся очереди составит:

$$\mu^* = e^{\lambda\tau} - \lambda\tau. \quad (4.3.23)$$

4. Естественным обобщением задачи check time (в интерпретации с работой ЭВМ) является ситуация, когда время обслуживания является СВ. Далее ограничимся рассмотрением только показательного времени обслуживания. Простейшая задача в естественной (и, исторически, первой) формулировке выглядит следующим образом. Пусть имеется бесконечно большое число телефонных линий, на которые поступает пуассоновская нагрузка с интенсивностью  $\lambda$ . Положим, что продолжительность одного разговора есть показательная СВ со средним значением  $\mu = \frac{1}{\omega}$ . Тогда, интерпретируя  $n$  как количество занятых линий, вероятности  $P_n(t)$  находим из системы уравнений (4.3.7), подставляя

$$\lambda_n = \lambda, \quad \omega_n = n\omega, \quad n \geq 0. \quad (4.3.24)$$

Для предельных вероятностей (приравняв к нулю производные по времени) получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \omega p_1, \\ (\lambda + n\omega)p_n = \lambda p_{n-1} + (n+1)\omega p_{n+1}, \end{cases} \quad (4.3.25)$$

откуда следует

$$p_n = e^{-\frac{\lambda}{\omega}} \frac{\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^n}{n!}. \quad (4.3.26)$$

Таким образом, предельное распределение числа занятых линий есть распределение Пуассона с параметром  $\frac{\lambda}{\omega}$ .

В более реалистичной постановке, когда число линий конечно и равно  $m$ , нужно рассматривать два случая:

- 1) при  $n \leq m$  результаты полностью совпадают с (4.3.25), (4.3.26);
- 2) при  $n > m$  дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda + m\omega)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + m\omega P_{n+1}(t). \quad (4.3.27)$$

Предельные вероятности для  $n > m$  составят

$$p_n = e^{-\frac{\lambda}{\omega}} \frac{\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^n}{m! m^{n-m}}, \quad (4.3.28)$$

и образуется очередь длиной  $n-m$ .

Сумма ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$  при  $\frac{\lambda}{\omega} > m$  расходится, что означает неограниченное удлинение очереди (как и в модели check time).

**5.** Небольшое изменение в вероятностной схеме приводит к «шведской» модели обслуживания автоматов (наиболее полные результаты по данной проблеме были получены Эрлангом и, впоследствии, Пальмом).

Пусть  $m$  автоматов (станков) подчиняются показательному закону функционирования со средним периодом нормальной работы  $\mu = \frac{1}{\lambda}$ .

Положим, что все  $m$  автоматов обслуживаются одним наладчиком, а время обслуживания подчиняется показательному закону со средним

$$\text{значением } \mu = \frac{1}{\omega} \left( \frac{\lambda}{\omega} \ll 1 \right).$$

Вероятности распределения числа простаивающих автоматов  $P_n(t)$ ,  $n=0,1,\dots, m$ , будут решением системы дифференциальных уравнений (4.3.7) с коэффициентами:

$$\begin{cases} \lambda_0 = m\lambda, \omega_0 = 0, \\ \lambda_n = (m-n)\lambda, \omega_n = n\omega, 0 < n \leq m. \end{cases} \quad (4.3.29)$$

Для предельных при  $t \rightarrow \infty$  вероятностей получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} m\lambda p_0 = \omega p_1, \\ [(m-n)\lambda + \omega]p_n = (m-n+1)\lambda p_{n-1} + \omega p_{n+1}, \end{cases} \quad (4.3.30)$$

откуда находим

$$p_n = \frac{m!}{(m-n)!} \left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^n e^{-\frac{\lambda m}{\omega}}, 0 \leq n \leq m. \quad (4.3.31)$$

Члены ряда (4.3.31) можно интерпретировать следующим образом. Вероятность  $p_0$  соответствует ситуации, когда все  $m$  автоматов не требуют обслуживания. Вероятность  $p_n$  при  $n \geq 2$  соответствует тому, что  $n$  автоматов простаивают, причем обслуживается только один, а  $n-1$  стоят в очереди на обслуживание. Средняя длина очереди, определяющая эффективность, а точнее говоря, сверхнормативные издержки на данном производственном участке, составит

$$v = \sum_{n=2}^m (n-1)p_n = m - \frac{\lambda + \omega}{\lambda} \left( 1 - e^{-\frac{\lambda m}{\omega}} \right). \quad (4.3.32)$$

Собственно «обслуживание по-шведски» заключается в «бригадном» методе, когда  $m$  автоматов обслуживаются  $r$  ( $r < m$ ) наладчиками.

В этом случае, как впервые установил Пальм, при аналогичной нагрузке на одного наладчика  $\left(\frac{m'}{r} = m\right)$  достигается существенное снижение простоя автоматов.

Коэффициенты системы уровней (4.3.7) при таком варианте вероятностной схемы будут определяться следующим образом:

$$\begin{cases} \lambda_0 = m\lambda, \omega_0 = 0, n = 0, \\ \lambda_n = (m-n)\lambda, \omega_n = n\omega, 1 \leq n < m, \\ \lambda_n = (m-n)\lambda, \omega_n = r\omega, r \leq n \leq m. \end{cases} \quad (4.3.33)$$

Для предельных при  $t \rightarrow \infty$  вероятностей получаем систему линейных рекуррентных уравнений:

$$p_{n+1} = \begin{cases} \frac{\lambda(m-n)}{\omega(n+1)} p_n, 0 \leq n < r, \\ \frac{\lambda(m-n)}{\omega r} p_n, r \leq n \leq m-1. \end{cases} \quad (4.3.34)$$

Оставшаяся неопределенной величина  $p_0$ , находится из условия нормировки:  $\sum_{n=0}^m p_n = 1$ .

#### 4.4. Статистическая оценка параметра показательного закона

1. Поскольку надежность проявляет себя только в процессе эксплуатации технического изделия, то единственным источником объективной информации о надежности являются испытания.

Под испытанием понимается сбор информации о функционировании объекта в процессе его реальной эксплуатации либо в процессе специально организованной процедуры, имитирующей условия эксплуатации.

В зависимости от цели исследования испытания подразделяются на 2 типа:

- определительные испытания – для установления закона функционирования изделий;
- контрольные испытания – для подтверждения соответствия по показателям надежности.

Отличительным признаком определенных испытаний является большой объем (репрезентативность) выборки однотипных изделий и испытания до последнего отказа, т.е. с большим числом полных реализаций (наработок до отказа).

Результаты контрольных испытаний представляют собой усеченные данные, и в процессе испытаний может быть не зарегистрировано

ни одного отказа. Проблеме испытаний на надежность посвящено большое число специализированных руководств, где методика сбора и обработки результатов классифицируются в зависимости от цели исследования, характера исходной информации и т.д.

Далее рассмотрим методику вычисления точечных и интервальных оценок средней наработки до отказа при показательном законе функционирования.

Пусть на испытания поставлено  $N$  однотипных изделий, и в течение времени испытаний  $T_n$  было зарегистрировано  $n$  отказов с наработками  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . С учетом независимости в совокупности отказов (и безотказных наработок) и, стало быть, применимости схемы Бернулли вероятность такой комбинации можно представить в виде

$$\begin{aligned} P\{T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n, T_{n+1} > T_n, \dots, T_N > T_n\} = \\ = C_N^n e^{-\frac{T_n(N-n)}{\mu}} \frac{1}{\mu^n} \prod_{k=1}^n e^{-\frac{t_k}{\mu}} = L(\mu). \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Методика точечной оценки неизвестного параметра  $\mu$  была предложена Р. Фишером и носит название метод максимального правдоподобия Фишера. Методика заключается в следующем. В качестве точечной оценки (наиболее вероятного значения) неизвестного параметра  $\mu$  принимается точка максимума  $L(\mu)$  (4.4.1). Поскольку  $L(\mu)$  является положительно-определенной, ее точка максимума, очевидно, совпадает с точкой максимума ее логарифма. Приравнивая  $\frac{d}{d\mu} \ln[L(\mu)]$

к нулю, получим  $n\mu - \sum_{k=1}^n t_k - Tn(N-n) = 0$

откуда находим

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \left[ \sum_{k=1}^n t_k + (N-n)T_n \right]. \quad (4.4.2)$$

Интерпретация точечной оценки (4.4.2) имеет вполне очевидный «физический» смысл. Выражение в квадратных скобках представляет собой суммарную наработку  $N$  изделий ( $\sum_{k=1}^n t_k$  - сумма всех полных реализаций – наработок до отказа,  $(N-n)T_n$  - сумма всех неполных ре-

лизаций – безотказных наработок). Таким образом  $\hat{\mu}$  по (4.4.2) представляет собой отношение полной суммарной наработки к числу отказов, зарегистрированных в течение времени испытаний  $T_n$ .

2. Для прогнозирования результата единичного опыта более адекватны доверительные интервальные оценки вида

$$P\{\mu_1 \leq \mu_T \leq \mu_2\} \geq \gamma, \quad (4.4.3)$$

где  $\gamma$  - доверительная вероятность (вероятность покрытия интервалом  $[\mu_1, \mu_2]$ ) неизвестного значения  $\mu_T$ . Показательный закон с ПР

$$f_T(t) = \frac{1}{\mu_T} e^{-\frac{t}{\mu_T}} \text{ преобразованием } X = \frac{2T}{\mu_T} \text{ приводится к виду}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}, \quad (4.4.4)$$

который, как было показано в п.1.3, представляет собой сумму квадратов двух независимых стандартных нормальных СВ, т.е.  $\chi^2_2$ . На основании аддитивности распределения  $\chi^2_m$  по степеням свободы (т.е.  $\chi^2_{m_1} + \chi^2_{m_2} = \chi^2_{m_1+m_2}$ ). Для суммарной наработки  $T_\Sigma$  будет справедливо соотношение  $\frac{2T_\Sigma}{\mu_T} = \chi^2_{2N}$ , откуда получаем

$$\mu_T = \frac{2T_\Sigma}{\chi^2_{2N}}. \quad (4.4.5)$$

Таким образом, доверительный интервал будет определяться межквантильной  $\gamma$ -широтой,

$$P\left\{ \frac{2T_\Sigma}{\chi^2_{2N_1 \frac{1+\gamma}{2}}} \leq \mu_T \leq \frac{2T_\Sigma}{\chi^2_{2N_1 \frac{1-\gamma}{2}}} \right\} = \gamma. \quad (4.4.6)$$

## Глава 5. СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

### 5.1. Модели процессов с непрерывным приращением

1. Наряду с рассмотренным в пп.4.1,4.3 потоком событий со случайным интервалом между событиями представляет интерес другая постановка проблемы. Например, отклонения от номинала параметров единиц продукции в порядке очередности их выхода с автоматической производственной линии, суточные колебания биржевых цен, котировок и валютных курсов, годовые колебания среднесезонной температуры, количества осадков и т.д. В процессах подобного типа выход, очевидно, формируется под воздействием множества случайных факторов, и, в силу центральной предельной теоремы, следовало бы ожидать нормальность выходного рассеяния. Однако, в действительности, рассеяние зачастую обнаруживает отклонения от нормальности, которые невозможно списать на случайные колебания выборочных распределений, то есть значимые.

Простейшей моделью для описания данного феномена может служить обобщение понятия случайной величины путем ее параметризации. Таким образом, вместо СВ  $X$  и ее ПР  $f_X(x)$  введем в рассмотрение  $X_t$  и соответственно ПР  $f_{X_t}(x, t)$ . Нормальная СВ, как было показано в п.1.1, однозначно определяется своим средним  $\mu$  и СКО  $\sigma$ . Следовательно, обобщение может заключаться в параметризации  $\mu(t)$  и  $\sigma(t)$ . Причем  $\mu(t)$  и  $\sigma(t)$  должны быть «адиабатическими инвариантами» процесса, то есть изменяться гораздо медленнее, чем характерная «скорость» процесса (в противном случае ситуация будет эквивалентна постоянным, равным усредненным по времени  $\tilde{\mu} = \langle \mu(t) \rangle$ ,  $\tilde{\sigma}^2 = \langle \sigma^2(t) \rangle + \langle (\mu(t) - \tilde{\mu})^2 \rangle$ ).

Для технологической линии длительность периода стабильности (почти постоянных  $\mu(t)$  и  $\sigma(t)$ ) должна соответствовать значимому технологическому циклу или времени выпуска продукции объемом, соответствующим репрезентативной выборке, для климатических колебаний время должно составлять несколько десятков лет и т.д.

Для читателя, которого термин «адиабатический инвариант» приводит в некоторое смущение, суть дела можно разъяснить с помощью простого умозрительного опыта. Рассмотрим сосуд с водой, раскачивающийся на длинной тонкой нити, – математический маятник. Представим, что нить перекинута через гвоздь, так что ее можно удлинять или укорачивать, а в дне сосуда имеется небольшое отверстие. При малых скоростях изменения длины нити и истечения воды период колебаний, очевидно, будет меняться, но с сохранением колебательного характера движения (строго говоря, под адиабатическим инвариантом гармонического осциллятора в теоретической физике понимается постоянство отношения средней за период энергии колебаний к длительности периода  $\frac{E}{T} = \text{const}$ ). Дать численную оценку того, насколько малыми должны быть скорости, не представляется возможным, однако очевидно, что существуют пороговые значения, превысив которые движение сразу потеряет исходную форму.

2. Таким образом, с помощью наглядной физической аналогии, естественным образом возникает понятие мгновенной плотности нормального распределения:

$$f(x, t) = \frac{1}{\sigma(t)\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - \mu(t))^2}{2\sigma^2(t)}\right]. \quad (5.1.1)$$

Усредненная за период наблюдения  $T$  ПР представляет собой наложение, т.е. рассмотренную в п.1.2 суперпозицию СВ или вероятностную смесь законов распределения. Парциальная доля мгновенной ПР (5.1.1) пропорциональна доле времени нахождения в окрестности точки  $(\mu(t), \sigma(t))$  пространства координат  $(\mu, \sigma)$ , т.е. обратно пропорциональна произведению скоростей:

$$d^2 f_T(x) \sim f(x, t) \left[ \frac{d\mu(t)}{dt} \frac{d\sigma(t)}{dt} \right]^{-1} dt^2. \quad (5.1.2)$$

Полная усредненная ПР, таким образом, будет представлять собой обобщение полученной в п.1.2 формулы суперпозиции на случай бесконечно большого числа компонент с бесконечно малыми удельными долями:

$$f_T(x) = \left[ \int_0^T \frac{dt}{\mu'_t(t)} \int_0^T \frac{dt}{\sigma'_t(t)} \right]^{-1} \int_0^T \frac{dt_1}{\mu'_t(t_1)} \int_0^T f(x, t_1, t_2) \frac{dt_2}{\sigma'_t(t_2)}. \quad (5.1.3)$$

Соотношение (5.1.3) допускает получение формул конечного вида только в некоторых частных случаях. Чаще всего приходится довольствоваться квадратурным представлением. Однако это неудобство, при наличии современного программно-математического обеспечения, является совершенно несущественным, зато открываются широкие возможности для статистического моделирования. На рис.5.1.1 показаны ПР (5.1.3), возникающие при модельном осциллирующем (синусоидальном) тренде среднего (а) и СКО (б). Как видно из графиков (что является прямым следствием вида зависимости (5.1.1)), наибольшую вариативность (поли-modalность, асимметрию) ПР приобретает из-за тренда среднего. Тренд СКО проявляет себя как чисто эксцессивная аномалия. По терминологии, принятой в статистическом контроле качества, тренд среднего принято интерпретировать как *разладку по настройке, или смещение центра настройки*. Тренд СКО (главным образом возрастающий) интерпретируется как *разладка по рассеянию*.

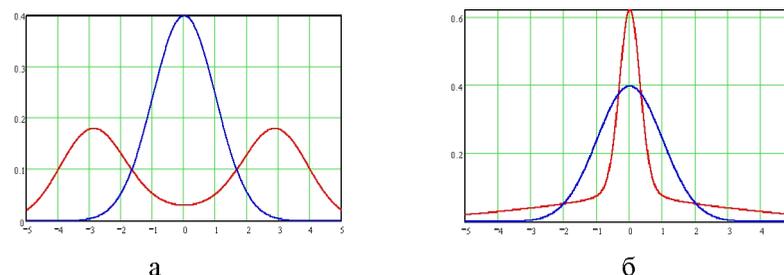


Рис.5.1.1. Вид плотности распределения совокупности с осциллирующим трендом среднего (а) и осциллирующим трендом СКО (б) в сравнении с кривой Гаусса

Путем комбинирования элементарных трендов можно получить неограниченное многообразие модельных процессов для статистического моделирования и анализа схем управления.

3. В качестве примера рассмотрим простейшие виды трендов, при которых ПР (5.1.3) допускает получение формул конечного вида. Пусть  $\mu(t) = \mu_0 + vt$ ,  $\sigma(t) \equiv \sigma_0$  (равномерный тренд среднего). Исключив из (5.1.3) равные нулю  $\sigma'_t$ , получим

$$f_T(x) = \frac{1}{T\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^T \exp\left[-\frac{(x - \mu_0 - vt)^2}{2\sigma^2}\right] dt = \frac{1}{vT} \left[ \Phi_0\left(\frac{vT + \mu_0 - x}{\sigma}\right) + \Phi_0\left(\frac{x - \mu_0}{\sigma}\right) \right]. \quad (5.1.4)$$

Совершив замену переменных  $u = \frac{x - \mu_0}{\sigma}$ ,  $w = \frac{vT}{\sigma}$ , преобразуем (5.1.4) к виду

$$\tilde{f}_T(u) = \frac{\sigma}{vT} [\Phi_0(w - u) + \Phi_0(u)]. \quad (5.1.5)$$

Вид ПР (5.1.5) показан на рис.5.1.2.

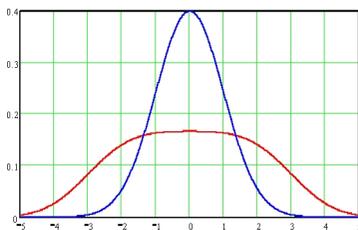


Рис. 5.1.2. Плотность распределения совокупности с равномерным трендом среднего в сравнении с кривой Гаусса

Распределение (5.1.5) имеет ту же форму, что и рассмотренная в п.3.5 оперативная характеристика измерительной системы при приеме по допуску. Однако в данном случае (5.1.5) является именно плотностью, в частности, она удовлетворяет условию нормировки. При равномерном тренде СКО вид ПР аналогичен приведенной на рис.5.1.1б.

Равноускоренный тренд среднего смоделируем зависимостью  $\mu(t) = \mu_0 + vt + \frac{1}{2}at^2$ ,  $\sigma(t) \equiv \sigma$ . При этих условиях (5.1.3) примет вид

$$f_T(x) = \frac{a}{\sigma \cdot \ln\left(1 + \frac{aT}{v}\right) \sqrt{2\pi}} \int_0^T \frac{\exp\left[-\frac{\left(x - \mu_0 - vt - \frac{1}{2}at^2\right)^2}{2\sigma^2}\right]}{v + at} dt. \quad (5.1.6)$$

Вид ПР (5.1.6) при  $\mu_0 = -3$ ,  $vT = \frac{1}{2}aT^2 = 3$  показан на рис.5.1.3.

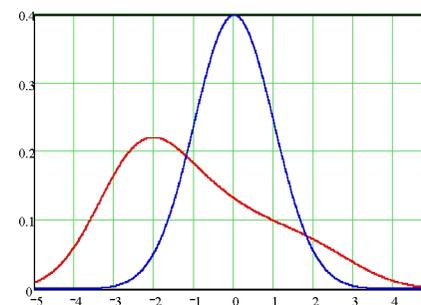


Рис. 5.1.3. Плотность распределения совокупности с ускоренным слева направо (замедленным справа налево) трендом среднего в сравнении с кривой Гаусса

Как видно из последнего графика, ПР приобретает асимметрию (удлиненный хвост) в направлении увеличения скорости. Часто в литературе распределения подобного вида трактуются как «ускоренный износ инструмента». Однако это не вполне корректно, поскольку ускоренное смещение центра рассеяния вправо – всего лишь одна из возможных причин. Такой же вид будет иметь ПР, например при замедлении движения в противоположном направлении. Отклонения от нормальной формы, подобные рассмотренным, проявляются на гистограммах, построенных по репрезентативным выборкам реальных процессов.

## 5.2. Анализ схем статистического регулирования

1. Под статистическим регулированием (не всегда осознанно) подразумевается некий алгоритм автоматического регулирования или, в более общей постановке, наличие системы автоматического управления процессом. Ключевым элементом такой системы, как явствует из выводов соответствующей теории автоматического управления (ТАУ), является отрицательная обратная связь, формирующая релаксирующий управляющий сигнал на выход процесса. В связи с этим следует уточнить смысловое содержание самого термина статистическое регулирование (управление). В контексте положений ТАУ статистическое управление является не каким-то специальным «прогрессивным» способом автоматического управления, а всего лишь его суррогатом, или управлением со значимым запаздыванием, поскольку управляющий сигнал формируется апостериорно, после реализации выходного сигнала. По образному выражению одного из последователей В. Шухарта и Э. Дэйминга, статистическое управление похоже «...на управление автомобилем через зеркало заднего вида...». К этому можно было бы добавить, что зеркало является не идеально чистым и отражает лишь усеченную информацию о выходе процесса.

В п.5.1 были рассмотрены модели процессов, формируемых трендами среднего  $\mu(t)$  и СКО  $\sigma(t)$  мгновенного нормального распределения. Соответственно, идеально настроенный процесс характеризуется постоянными значениями параметров нормального закона  $\mu(t) \equiv \mu_0$ ,  $\sigma(t) \equiv \sigma_0$ , и без ограничения общности достаточно рассмотреть стандартную нормальную совокупность  $N(0,1)$ . Разладки условимся классифицировать по характеру зависимостей  $\mu(t)$  и  $\sigma(t)$  на внезапные, когда  $\mu$  и  $\sigma$  меняются скачком от идеальных значений  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$ , и параметрические (постепенные), когда  $\mu(t)$  и  $\sigma(t)$  являются гладкими функциями времени. При этом будем различать разладку по смещению центра настройки ( $\mu \neq 0$ ) и разладку по рассеиванию ( $\sigma > 1$ ). Последний классифицирующий признак обусловлен следующими соображениями. Устранение разладки по рассеиванию в «физической» интерпретации требует ремонта изношенного оборудования либо его замены на образцы с более высокой точностью, т. е. связано с остановкой процесса. Разладка по смещению центра настройки может быть устранена в автоматическом режиме, без остановки процесса, и

потому в дальнейшем изложении ограничимся рассмотрением только разладок по смещению центра настройки.

Еще одним допущением, необходимым для применимости статистического моделирования методом Монте-Карло, является переход к дискретному времени, т. е. будем полагать, что в каждую фиксированную единицу времени формируется 1 отсчет регулируемого процесса (входного сигнала по отношению к системе регулирования) и 1 отсчет управляющего сигнала.

2. Для лучшего уяснения сути дела рассмотрим простейшую схему. Пусть выход процесса есть композиция входного и управляющего сигналов:

$$Y_k = X_k + Z_k. \quad (5.2.1)$$

Управляющий сигнал  $Z_k$  определим в виде отрицательной обратной связи с запаздыванием:

$$\begin{cases} Z_1 = 0, \\ Z_{k+1} = -hY_k, k \geq 1, \end{cases} \quad (5.2.2)$$

где  $0 < h < 1$  – коэффициент передачи обратной связи.

Тогда выходной сигнал будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1, \\ Y_2 &= X_2 - hX_1, \\ &\dots\dots\dots \\ Y_n &= X_n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k h^k X_{n-k}. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Пусть в сигнале  $X$  возникла внезапная разладка  $\mu_X = \delta$  (при неизменном СКО  $\sigma_X = 1$ ). Тогда, с учетом априорной независимости в совокупности последовательности  $X_k, k = 1, 2, \dots, n$ , устремив  $n \rightarrow \infty$  и суммируя образующиеся геометрические прогрессии, находим:

$$\mu_Y = \frac{\delta}{1+h}, \quad \sigma_Y^2 = \frac{1}{1-h^2}. \quad (5.2.4)$$

Таким образом, частичная компенсация разладки  $\mu_X - \mu_Y = \frac{\delta h}{1+h}$  достигается за счет увеличения дисперсии  $\sigma_Y^2 - \sigma_X^2 = \frac{h^2}{1-h^2}$ , и возника-

ет задача оптимизации схемы по параметру  $h$  по критерию минимальной оценки вероятности результирующего брака. В качестве такой оценки можно принять вероятность выхода за границы «стандартного  $6\sigma$ » интервала. Обозначив относительное смещение центра  $\varepsilon = \frac{\delta}{\sigma}$ ,

оценку после элементарных преобразований получим в виде

$$\beta(h, \varepsilon) = 1 - \Phi_0 \left[ \sqrt{\frac{1-h}{1+h}} (3(1+h) + \varepsilon) \right] + \Phi_0 \left[ \sqrt{\frac{1-h}{1+h}} (3(1+h) - \varepsilon) \right]. \quad (5.2.5)$$

Оптимальным значением  $h=h^*$  естественно принять точку минимума зависимости (5.2.5), вид которой показан на рис. 5.2.1.

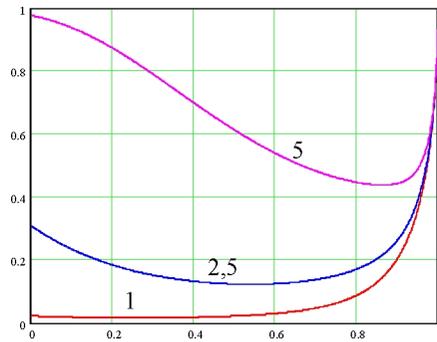


Рис.5.2.1. Оценка вероятности брака в зависимости от  $h$  при значениях смещения  $\delta$  в долях  $\sigma$ : 1; 2.5; 5

Рассмотренная простейшая схема является, вообще говоря, не совсем статистической, поскольку управляющий сигнал формируется по одному отсчету выходного. Однако и из нее можно извлечь поучительный вывод, заключающийся в том, что при  $h=1$  система очень быстро идет «в разнос» по рассеянию ( $\sigma_y$  неограниченно возрастает). Согласно принятой в ТАУ терминологии, такая ситуация квалифицируется как потеря устойчивости. Соответственно схема регулирования, когда управляющим сигналом служит отклонение индивидуального значения выхода от номинала, является совершенно непригодной.

3. При формировании управляющего сигнала по скользящему среднему  $m \geq 2$  отсчетов выходного возникает уже собственно статистическое регулирование, и при любом  $m \geq 2$  значение коэффициента

передачи  $h=1$  находится в области устойчивости. При  $m=2$  схема будет иметь вид

$$\begin{cases} Y_1 = X_1, \\ Y_2 = X_2, \\ Y_{n+2} = X_{n+2} - \frac{1}{2}(Y_{n+1} + Y_n), \quad n \geq 1. \end{cases} \quad (5.2.6)$$

Диаграммы процесса с разладкой по смещению  $\delta = 3\sigma$  в сравнении с регулируемым по схеме (5.2.6) показаны на рис. 5.2.2.

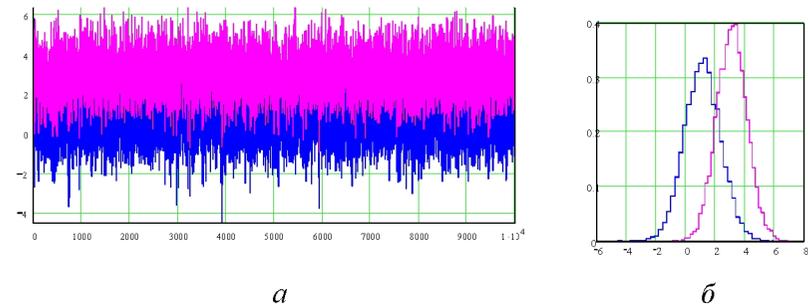


Рис.5.2.2. Диаграмма (временная развертка) (а) и гистограмма (б) процесса с внезапной разладкой по среднему, регулируемого по схеме (5.2.6), в сравнении с исходным (нерегулируемым)

Для исследования асимптотики схемы (5.2.6) положим, что  $n$  велико ( $n \rightarrow \infty$ ), и рассмотрим ретроспективное рекуррентное соотношение (5.2.6), при произвольном  $h$ :

$$Y_n = X_n - \frac{h}{2}(Y_{n-1} + Y_{n-2}). \quad (5.2.7)$$

Применяя операцию МО к обеим частям (5.2.7) и полагая, что существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} M[Y_n] = \mu_Y$ , приходим к рекурсивному соотношению:

$$\mu_Y = \mu_X - h\mu_Y, \quad (5.2.8)$$

откуда находим

$$\mu_Y = \frac{\mu_X}{1+h}. \quad (5.2.9)$$

Аналогично для  $\sigma_Y^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} D[Y_n]$ , с учетом независимости пары  $(X_n, Y_k)$  при любом  $k \neq n$ , получим

$$\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 + \frac{h^2}{2} \sigma_Y^2 (1 + \rho), \quad (5.2.10)$$

где  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho[Y_n, Y_{n-1}]$  - предельное значение коэффициента корреляции между соседними выходными отсчетами.

Умножая обе части (5.2.7) на  $Y_{n-1}$  и применяя к обеим частям полученного тождества операцию МО, получим

$$M[Y_n Y_{n-1}] = M \left[ X_n Y_{n-1} - \frac{h}{2} (Y_{n-1}^2 + Y_{n-1} Y_{n-2}) \right]. \quad (5.2.11)$$

На основании результатов п.1.2 соотношения (5.2.9) и (5.2.11), с учетом независимости пары  $(X_n, Y_{n-1})$ , преобразуем к рекурсивному соотношению:

$$\rho \sigma_Y^2 + \mu_Y^2 = \mu_X \mu_Y - \frac{h}{2} [(1 + \rho) \sigma_Y^2 + 2\mu_Y^2],$$

откуда находим

$$\sigma_Y^2 \left[ \rho \left(1 + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2} \right] = \frac{\mu_X^2}{1+h} \left[ 1 - \frac{1}{1+h} - \frac{h}{1+h} \right]. \quad (5.2.12)$$

Правая часть (5.2.12) тождественно равна нулю, следовательно,

$$\rho = -\frac{h}{2+h}. \quad (5.2.13)$$

Подставляем (5.2.13) в (5.2.10), окончательно получаем

$$\sigma_Y^2 = \frac{2+h}{(1+h)(2-h)} \sigma_X^2. \quad (5.2.14)$$

Как видно из последнего соотношения, область устойчивости схемы статистического регулирования по скользящему среднему порядка  $m=2$  составляет  $0 \leq h \leq 2$ . При этом предельно достижимая компенсация отклонения среднего составляет  $\mu_Y^* = \frac{1}{3} \mu_X$ .

Одним из принципиальных вопросов всякого автоматического управления, и в особенности статистического, является поведение процесса при излишней регулировке. В данном контексте ответ на него вполне очевиден. При использовании схемы (5.2.7) в условиях фактического отсутствия разладки ( $\mu_X=0$ ) будет происходить такая же

потеря точности мгновенного рассеяния  $\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = \sqrt{\frac{2+h}{(1+h)(2-h)}}$ , но уже без полезного эффекта ( $\mu_Y = \mu_X = 0$ ).

Для оптимизации схемы (5.2.7) по параметру  $h$  можно сформулировать задачу, аналогичную (5.2.5).

4. Рассмотрим схему регулирования по скользящим средним с  $m=3$ :

$$Y_n = X_n - \frac{h}{3} (Y_{n-1} + Y_{n-2} + Y_{n-3}), \quad n > 3. \quad (5.2.15)$$

Для  $\mu_Y$  получим соотношение, аналогичное (5.2.9):

$$\mu_Y = \frac{\mu_X}{1+h}. \quad (5.2.16)$$

Для  $\sigma_Y^2$ , действуя аналогично случаю  $m=2$ , получим

$$\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 + \frac{h^2}{9} (3\sigma_Y^2 + (4\rho_1 + 2\rho_2)\sigma_Y^2),$$

откуда следует

$$\sigma_Y^2 = \frac{\sigma_X^2}{1 - \frac{h^2}{9} (3 + 4\rho_1 + 2\rho_2)}, \quad (5.2.17)$$

где

$$\rho_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho[Y_n, Y_{n-1}], \quad \rho_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho[Y_n, Y_{n-2}].$$

Последовательно умножая (5.2.15) на  $Y_{n-1}$ ,  $Y_{n-2}$  и действуя аналогично случаю  $m=2$ , получим систему двух уравнений для определения  $\rho_1$  и  $\rho_2$ :

$$\begin{cases} \rho_1 + \frac{h}{3} (1 + \rho_1 + \rho_2) = 0, \\ \rho_2 + \frac{h}{3} (1 + 2\rho_1) = 0. \end{cases} \quad (5.2.18)$$

Решив систему уравнений (5.2.18), находим

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{h}{h+3}. \quad (5.2.19)$$

Подставив (5.2.19) в (5.2.17), окончательно получаем

$$\sigma_Y^2 = \frac{3+2h}{(1+h)(3-h)} \sigma_X^2. \quad (5.2.20)$$

Таким образом, область устойчивости схемы с  $m=3$  составляет  $0 \leq h < 3$  при предельно достижимой компенсации  $\mu_Y^* = \frac{1}{4} \mu_X$ .

5. Для произвольного  $m$  можно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho[Y_n, Y_{n-k}] = \rho = -\frac{h}{m + (m-1)h}, \quad k = \overline{1, m}, \quad (5.2.21)$$

$$\mu_Y^* = \frac{1}{m+1} \mu_X, \quad (5.2.22)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{Y_n}^2 = \sigma_Y^2 = \frac{m + (m-1)h}{(1+h)(m-h)} \sigma_X^2. \quad (5.2.23)$$

Примеры модельных реализаций процессов с различными вариантами разладок, компенсируемых по схеме скользящего среднего с  $m=5$ ,  $h=2$ , приведены на рис.5.2.3-5.2.5.

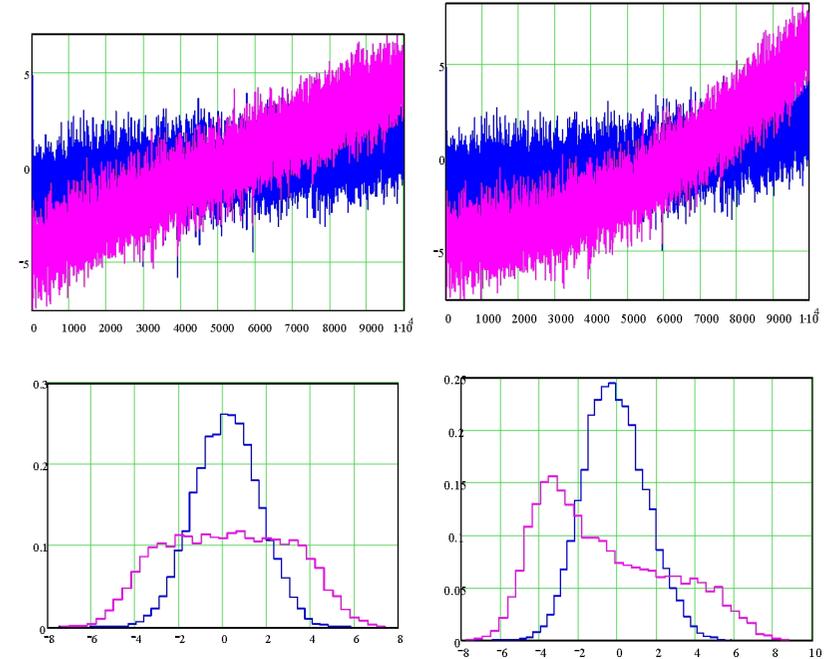


Рис.5.2.3. Диаграмма и гистограмма процесса с равномерным трендом среднего, регулируемого по схеме скользящего среднего с  $m=5$ ,  $h=2$ , в сравнении с исходным

Рис.5.2.4. Диаграмма и гистограмма процесса с ускоренным слева направо трендом среднего, регулируемого по схеме скользящего среднего с  $m=5$ ,  $h=2$ , в сравнении с исходным

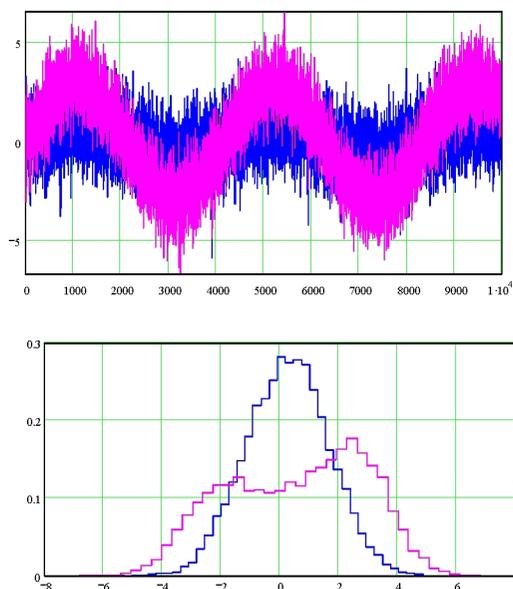


Рис.5.2.5. Диаграмма и гистограмма процесса с осциллирующим трендом среднего, регулируемого по схеме скользящего среднего с  $m = 5$ ,  $h = 2$ , в сравнении с исходным

Как видно из графиков, диаграмма (временная развертка процесса), отражающая последовательность индивидуальных значений, является более информативной, нежели гистограмма. Точки на диаграмме могут отображать индивидуальные значения не подряд, а с некоторой периодичностью, либо отображать статистики (среднее, медиана, СКО, размах) последовательных малых выборок. Такая форма представления исходных данных применительно к контролю технологических процессов была предложена В. Шухартом и Э. Демингом, а затем, стараниями их горячих последователей, была канонизирована и получила название «метод контрольных карт». Методика работы с контрольными картами весьма широко представлена как в литературе, так и в нормативных документах (стандарты, Т/У и т.д.), что избавляет от необходимости подробно на них останавливаться. Хотя, к слову

сказать, в некоторых публикациях можно встретить глубокомысленные рассуждения о контурах грядущей всеобъемлющей «теории контрольных карт». В ответ на это можно лишь заметить, что под теорией обыкновенно понимается информационный эквивалент некоего реально существующего (самостоятельного) феномена. Контрольные карты таковыми конечно же не являются.

Контрольные карты, при всем их кажущемся многообразии, в основе своей имеют общие довольно простые априорные положения:

- контролируемый параметр является СВ с типовым законом распределения;
- нормальным, если СВ является непрерывной;
- биномиальным или пуассоновским, если СВ целочисленная;
- контрольные границы для всех карт определяются «стандартным  $6\sigma$ » интервалом (о законах распределения выборочных статистик см. п.1.5).

Финансисты и метеорологи также используют графическое представление результатов своих наблюдений, но по-видимому, будучи людьми более прагматичными, попросту отображают индивидуальные значения последовательной выборки, пытаясь экстраполировать тренды и предугадать скачки. При этом скромно именуют свои графики диаграммами.

### 5.3. Выборочные оценки числовых индексов воспроизводимости

1. В литературе и нормативных документах, посвященных статистическому контролю производственных процессов, в недавнее время широкое распространение получила методика оценки значимости технологического рассеяния и правильности настройки посредством так называемых индексов воспроизводимости:

$$C_p = \frac{2\Delta}{6\sigma} \text{ и } C_{pk} = \min\left\{\frac{\mu - a}{3\sigma}, \frac{b - \mu}{3\sigma}\right\},$$

где  $\Delta$  - полуширина поля допуска;  $\sigma$  - СКО технологического рассеяния;  $\mu$  - фактический номинал настройки процесса;  $a$  и  $b$  - соответственно нижняя и верхняя границы поля допуска.

Вероятностный и «физический» смысл величин  $C_p, C_{pk}$  при таком определении вполне прозрачен и не вызывает никакой двусмысленно-

сти. Однако на практике числовые характеристики  $\mu$  и  $\sigma$ , как правило, неизвестны и заменяются выборочными оценками  $\hat{\mu} = \bar{x}, \hat{\sigma} = s$  (п.1.4). При этом объем выборки обычно невелик и составляет порядка 50 значений. В данной ситуации  $C_p, C_{pk}$  превращаются в выборочные статистики, а стало быть СВ, и для того чтобы оценка процесса посредством  $C_p, C_{pk}$  была адекватной, необходимо установить их законы распределения. В качестве исходного соотношения рассмотрим ПР выборочного СКО стандартного нормального распределения (п.1.4):

$$f_{S_n}(x) = \frac{2\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} x^{n-2} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (5.3.1)$$

Пусть  $\alpha = \frac{\Delta}{3\sigma}$  - «точное» значение индекса  $C_p$  (принято руководствоваться двумя контрольными нормативами:  $\alpha \geq 1$  - удовлетворительная воспроизводимость,  $\alpha \geq \frac{4}{3} \approx 1,33$  - хорошая воспроизводимость). Выборочную оценку  $\hat{C}_p = \frac{\Delta}{3s}$  преобразуем к виду  $\hat{C}_p = \frac{\Delta}{3\sigma \frac{s}{\sigma}} = \frac{\alpha\sigma}{s}$ . Таким образом, при любом значении  $\sigma$  (от  $\mu C_p$  в

принципе, не зависит) ПР выборочной  $\hat{C}_p$  идентична ПР СВ  $\frac{\alpha}{s}$ , где  $s$  - выборочное СКО стандартной нормальной совокупности. Искомую ПР величины  $\frac{\alpha}{s}$  найдем путем суперпозиции преобразований  $Y = \frac{1}{X}, Y = aX$  (п.1.1):

$$f_{C_p}(z) = \frac{2\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \alpha^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) z^n} e^{-\frac{\alpha^2(n-1)}{2z^2}}. \quad (5.3.2)$$

2. При выводе ПР выборочного  $C_{pk}$  будем полагать, что процесс настроен на центр поля допуска ( $\mu = 0$ ). В этом случае точные значения  $C_p$  и  $C_{pk}$  будут совпадать:  $C_{pk} = C_p = \frac{\Delta}{3\sigma} = \alpha$ . Из определения  $C_{pk}$  очевидно, что его можно представить в виде

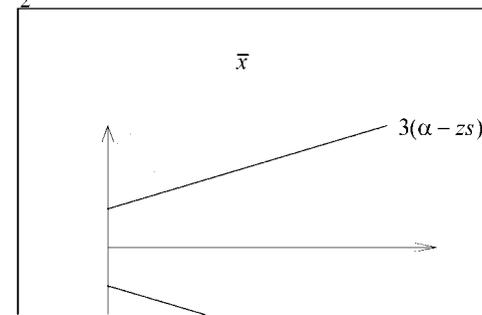
$$C_{pk} = \frac{3\alpha - \left| \frac{\bar{X}}{\sigma} \right|}{3 \frac{s}{\sigma}}. \quad (5.3.3)$$

Таким образом, поскольку  $C_{pk}$  не зависит от  $\sigma$ , достаточно рассмотреть выборку из  $N(0,1)$ . При этом ограничение  $\mu = 0$  также несущественно и при  $\mu \neq 0$  сводится лишь к сдвигу по параметру  $\alpha' = \alpha - \frac{\mu}{3\sigma}$ .

Закон распределения выборочного  $C_{pk}$  найдем как ПР функции от  $\bar{X}$  и  $s$ . Сначала, согласно общей методике (п.1.3), найдем  $G(z) = P\left\{\frac{3\alpha - |\bar{X}|}{3s} < z\right\}$ . Для этого придется рассмотреть 2 случая:  $z \leq 0$  и  $z > 0$  (рис.5.3.1, 5.3.2).

Плотность совместного распределения СВ  $\bar{X}$  и  $s$ , как следует из установленной в п.1.4 их независимости, равна произведению ПР компонент. Интегрируя ПР совместного распределения по области  $D(z)$ , получаем

$$G(z)|_{z \leq 0} = P\{s < \infty, |\bar{X}| > 3(\alpha - sz)\} = \int_0^{\infty} f_S(t) \left[ \int_{-\infty}^{-3(\alpha-zt)} f_X(x) dx + \int_{3(\alpha-zt)}^{\infty} f_X(x) dx \right] dt = \int_0^{\infty} \frac{2\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} t^{n-2} e^{-\frac{(n-1)t^2}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left[ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-3(\alpha-zt)} e^{-\frac{nx^2}{2}} dx + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{3(\alpha-zt)}^{\infty} e^{-\frac{nx^2}{2}} dx \right] dt. \quad (5.3.4)$$



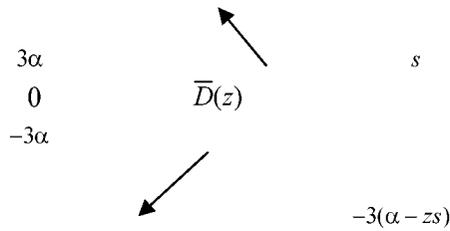


Рис. 5.3.1. Схема области интегрирования для определения  $G(z)$  в координатах  $(s, \bar{x})$  при  $z \leq 0$

Дифференцируя (5.3.4) по  $z$ , находим:

$$f_{c_{pk}}(z)|_{z \leq 0} = \frac{d}{dz} G(z)|_{z \leq 0} = \frac{12\sqrt{n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{2\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \times \int_0^{\infty} t^{n-1} \exp\left[-\frac{(n-1)t^2}{2} - \frac{9n(\alpha - tz)^2}{2}\right] dt. \quad (5.3.5)$$

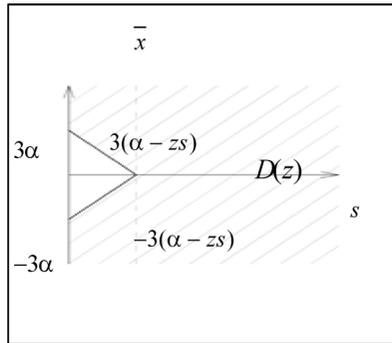


Рис. 5.3.2. Схема области интегрирования для определения  $G(z)$  в координатах  $(s, \bar{x})$  при  $z > 0$

Для  $z > 0$  вместо (5.3.4) будем иметь

$$G(z)|_{z > 0} = P\left\{s < \frac{\alpha}{z}, |\bar{X}| > 3(\alpha - sz)\right\} + P\left\{s \geq \frac{\alpha}{z}\right\}. \quad (5.3.6)$$

После дифференцирования по  $z$  получим

$$f_{c_{pk}}(z)|_{z > 0} = \frac{12\sqrt{n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{2\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \times \int_0^{\frac{\alpha}{z}} t^{n-1} \exp\left[-\frac{(n-1)t^2}{2} - \frac{9n(\alpha - tz)^2}{2}\right] dt. \quad (5.3.7)$$

3. Как видно из формул (5.3.5), (5.3.7),  $f_{c_{pk}}(z)$  имеет, вообще говоря, особенность в точке  $z = 0$ . Однако эта особенность является устранимой (непрерывность в точке  $z = 0$  не нарушается) и, поскольку левый «хвост»  $f_{c_{pk}}(z)$  при  $z \leq 0$  ничтожно мал, не представляет практического интереса. Интерес представляет тот факт, что выборочные оценки  $C_p$  и  $C_{pk}$  имеют значительное положительное смещение, которое по непонятным причинам игнорируется как в литературе, так и в нормативных документах (стандартах, методических указаниях и т.д.), посвященных статистическому контролю производственных процессов. Имеющиеся в распоряжении ПР (5.3.5), (5.3.7) в принципе позволяют, вычислив средние значения статистики  $C_p$  и  $C_{pk}$ , определить величину смещения и скомпенсировать его по аналогии с выборочными дисперсией и СКО (п.1.4) посредством поправочных коэффициентов. Однако даже с учетом этих уточнений придется признать, что общепринятая на сегодняшний день методика определения числовых индексов воспроизводимости сформулирована не совсем удачно. Более рациональным представляется перейти к обратным величинам:

$$C'_p = \frac{6s}{2\Delta}; \quad C'_{pk} = \frac{3s}{\min\{\bar{x} - a, b - \bar{x}\}}; \quad \alpha' = \frac{1}{\alpha}.$$

Главным доводом в пользу этого является существенное повышение эффективности оценок (СКО «штрихованных» статистик примерно в 4 раза меньше, чем у исходных). Кроме того, устанавливается единообразие с другими числовыми показателями качества: с оценкой вероятности выхода несоответствующей единицы продукции, оценкой доли несоответствующих единиц продукции в партии, рисков поставщика и потребителя и т.д., где идеальному процессу соответствуют

нулевые значения показателей. В предлагаемом варианте область значений удовлетворительного процесса составит  $\leq 1$ , хорошего –  $\leq \frac{3}{4}$

вместо  $\geq \frac{4}{3} \approx 1,33$ . Их ПР легко вычисляются с помощью преобразования

ния  $f_{\frac{1}{x}}(y) = \frac{1}{y^2} f_X\left(\frac{1}{y}\right)$  (п.1.1), и возникающее отрицательное смещение можно без проблем компенсировать. Однако более предпочтительным с точки зрения практической применимости представляется определение для каждого нормативного значения одностороннего доверительного (90%-95%) интервала, выход за верхнюю границу которого естественно интерпретировать как разладку процесса. Сравнительный вид ПР величин  $C_p, C_{pk}, C'_p, C'_{pk}$  приведен на рис.5.3.3.

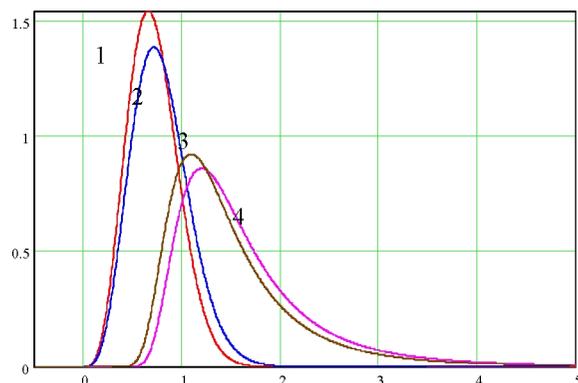


Рис. 5.3.3. Плотности распределения величин  $C_p$  (1),  $C_{pk}$  (2),  $C'_p$  (3),  $C'_{pk}$  (4) при  $\alpha = \frac{4}{3}, n = 5$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бернштейн, С.Н. Теория вероятностей / С.Н. Бернштейн.— Изд. 4-е перераб. и доп. – М.-Л.: ОГИЗ, 1946.

2. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров.— М.: Высш. шк., 2000.

3. Вентцель, Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. — М.: Высш. шк., 2003.

4. Крамер, Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. — М.: Мир, 1976.

5. Корн, Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн.— М.: Наука, 1984.

6. Макаров, Е.Г. MathCAD – 2001: учебный курс / В.В. Макаров. — СПб.: Питер, 2004.

7. Смирнов, Н.В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть) / Н.В. Смирнов, И.В. Барковский.— М.: Наука, 1965.

8. Плотников, А.Н. Закон распределения длины максимальной серии и его статистические приложения / А.Н. Плотников // Известия СНЦ РАН. – 2006. – Т. 8. – №4. – С.1047-1056.

9. Плотников, А.Н. Об инвариантах структуры серий и критериях случайности последовательной выборки / А.Н. Плотников // Известия СНЦ РАН. – 2006. – Т.8. – №4. – С.1142-1147.

10. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1 / В. Феллер.— М.: Мир, 1983.

11. Финни, Д. Введение в теорию планирования эксперимента / Д. Финни.— М.: Наука, 1970.

12. Хикс, Ч. Основные принципы планирования эксперимента / Ч. Хикс.— М.: Мир, 1997.

### ПРИЛОЖЕНИЕ I

Алгоритмы Монте-Карло, экспериментальные и расчетные значения инвариантов структуры серий в последовательной

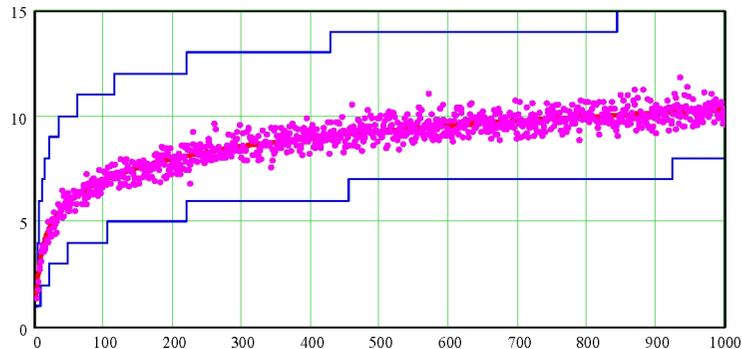
### выборке<sup>1</sup>

А. Текст программы статистического моделирования, расчетное среднее значение и границы 90% доверительного интервала, а также усредненные по 20 реализациям экспериментальные значения длины максимальной «знаковой» серии (положений относительно медианы) в зависимости от объема последовательной выборки из  $N(0,1)$ .

```

lxx :=
  R ← 20
  N ← 1000
  for r ∈ 1..R
    for n ∈ 2..N
      x ← morm(n,0,1)
      lxn,r ← 1
      kx ← 1
      for i ∈ 0..n-2
        kx ← if(xi · xi+1 > 0, kx + 1, 1)
        lxn,r ← max(lxn,r, kx)
      return lx
  r := 1..20  n := 2..1000
  lxxn := 1/20 · ∑r=120 lxn,r

```



Б. Текст программы статистического моделирования, расчетное среднее значение, границы доверительного 90% интервала и усредненные по 20 реализациям экспериментальные значения длины максимальной

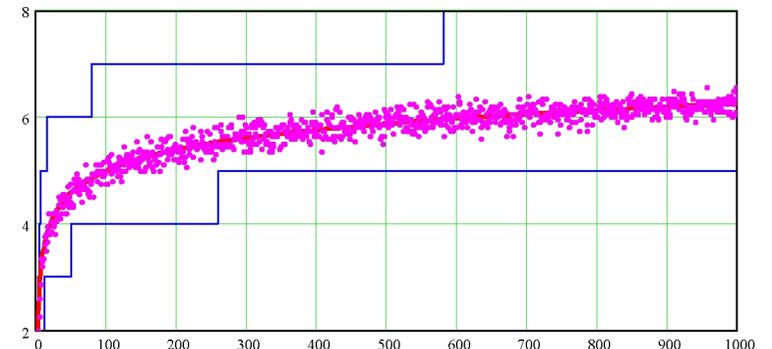
<sup>1</sup> Краткий очерк теории серий см. в монографии [10], см. также статьи [8,9]

«трендовой» серии в зависимости от объема последовательной выборки из  $N(0,1)$ .

```

lzz :=
  R ← 20
  N ← 1000
  for r ∈ 1..R
    for n ∈ 2..N
      x ← morm(n,0,1)
      for i ∈ 1..n-1
        zi ← if(i < n-1, xi+1 - xi, 0)
      lzzn,r ← 2
      kz ← 2
      for i ∈ 0..n-2
        kz ← if(zi · zi+1 > 0, kz + 1, 2)
        lzzn,r ← max(lzzn,r, kz)
      return lzz
  r := 1..20  n := 2..1000
  lzzn := 1/20 · ∑r=120 lzzn,r

```



В. Расчетные средние значения, СКО и границы 90% доверительного интервала для длины максимальной «знаковой» (табл.1) и «трендовой» (табл.2) серий. В скобках указаны границы 95% доверительного интервала.

Таблица 1

Объем выборки, $n$	$\mu_{L_1}$	$\sigma_{L_1}$	НГ	ВГ
2	1,50	0,50	1	2
3	2,00	0,71	1	3
4	2,38	0,86	1	4
5	2,69	0,98	1	5
6	2,94	1,09	2(1)	5(6)
7	3,16	1,18	2	5(6)
8	3,34	1,25	2	6
9	3,51	1,30	2	6(7)
10	3,66	1,35	2	6(7)
12	3,92	1,43	2	7
14	4,15	1,48	2	7(8)
16	4,34	1,52	3(2)	7(8)
18	4,51	1,55	3(2)	7(8)
20	4,66	1,58	3	8
25	4,98	1,63	3	8(9)
30	5,24	1,66	3	8(9)
40	5,66	1,70	4(3)	9(10)
50	5,98	1,73	4	9(10)
100	6,98	1,79	5(4)	10(11)
200	7,98	1,83	6(5)	11(12)
300	8,56	1,84	6	12(13)
500	9,30	1,85	7	13(14)
700	9,78	1,86	7	13(14)
1000	10,30	1,86	8	14(15)

Таблица 2

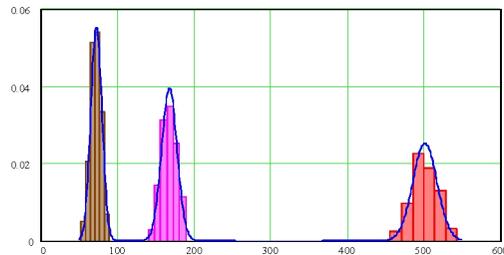
Объем выборки, $n$	$\mu_{L_2}$	$\sigma_{L_2}$	НГ	ВГ
2	2,00	0,00	2	2
3	2,33	0,47	2	3
4	2,67	0,62	2	4
5	2,90	0,68	2	4
6	3,08	0,70	2	4(5)
7	3,22	0,71	2	4(5)
8	3,33	0,71	2	5
9	3,42	0,72	3(2)	5
10	3,50	0,73	3(2)	5
12	3,63	0,75	3	5
14	3,74	0,76	3	5
16	3,83	0,77	3	5
18	3,92	0,78	3	5(6)
20	3,99	0,78	3	5(6)
25	4,14	0,77	3	5(6)
30	4,27	0,77	3	6
40	4,45	0,76	3	6
50	4,58	0,76	4	6
100	4,99	0,76	4	6(7)
200	5,39	0,73	4	7
300	5,61	0,72	5	7
500	5,88	0,73	5	7
700	6,06	0,71	5	7(8)
1000	6,25	0,69	5	7(8)

Г. Генерирующая программа, гистограмма 200 реализаций, сглаживающие теоретические функции Гаусса и числовые характеристики спектра знаковых серий.

```

rxz:=
R ← 200
lrx1 ← 1
lrx2 ← 2
lrx3 ← 3
for r ∈ 1..R
  nr ← 1000
  x ← morm(nr, 0, 1)
  for i ∈ 0..nr - 1
    yi ← xi - 1/nr · ∑j=0nr-1 xj
    zi ← if(i < nr - 1, xi+1 - xi, 0)
    rxz1,r ← 0
    rxz2,r ← 0
    rxz3,r ← 0
    lx ← 1
    lxx ← 1
    for i ∈ 0..nr - 2
      lx ← if(xi · xi+1 > 0, lx + 1, 1)
      rxz1,r ← if(lxx = lrx1 ∧ lx = 1, rxz1,r + 1, rxz1,r)
      rxz2,r ← if(lxx = lrx2 ∧ lx = 1, rxz2,r + 1, rxz2,r)
      rxz3,r ← if(lxx = lrx3 ∧ lx = 1, rxz3,r + 1, rxz3,r)
      lxx ← lx
    return rxz

```



Среднее значение и дисперсия числа знаковых серий в зависимости от длины серии  $l$

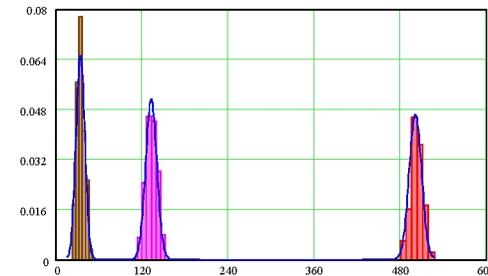
$l$	1	2	3	4	5	6	$\geq 7$
$\frac{\mu}{n}$	0,5	0,167	0,071	0,033	0,016	0,008	$\frac{1}{2^{l+1}}$
$\frac{\sigma^2}{n}$	0,25	0,102	0,052	0,027	0,014	0,007	$\frac{1}{2^{l+1}}$

Д. Генерирующая программа, гистограмма 200 реализаций, сглаживающие теоретические функции Гаусса и числовые характеристики спектра трендовых серий.

```

rxz :=
R ← 200
lrx1 ← 1
lrx2 ← 2
lrx3 ← 3
for r ∈ 1..R
  nr ← 1000
  x ← morm(nr, 0, 1)
  for i ∈ 0..nr - 1
    yi ← xi - 1/nr · ∑j=0nr-1 xj
    zi ← if(i < nr - 1, xi+1 - xi, 0)
    rxz1,r ← 0
    rxz2,r ← 0
    rxz3,r ← 0
    lx ← 1
    lxx ← 1
    for i ∈ 0..nr - 2
      lx ← if(zi · zi+1 > 0, lx + 1, 1)
      rxz1,r ← if(lxx = lrx1 ∧ lx = 1, rxz1,r + 1, rxz1,r)
      rxz2,r ← if(lxx = lrx2 ∧ lx = 1, rxz2,r + 1, rxz2,r)
      rxz3,r ← if(lxx = lrx3 ∧ lx = 1, rxz3,r + 1, rxz3,r)
      lxx ← lx
    return rxz

```



Средние и дисперсии числа трендовых серий в зависимости от длины серии

$l$	2	3	4	5	$\geq 6$
$\frac{\mu}{n-1}$	0,5	0,132	0,034	$6,9 \cdot 10^{-3}$	$\frac{l}{(l+1)!}$
$\frac{\sigma^2}{n-1}$	0,074	0,060	0,026	$6,5 \cdot 10^{-3}$	$\frac{l}{(l+1)!}$

Таблица распределения Кохрена

Значения 95% квантилей статистики Кохрэна для оценки дисперсионной однородности совокупности и ее подгрупп ( $n$  – объем подгрупп,  $k$  – число подгрупп)

$$G_{0,05}(n-1, k)$$

$k \setminus n-1$	1	2	3	4	5	6	7
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332
3	0,9669	0,8709	0,7977	0,7457	0,7071	0,6771	0,6530
4	0,9065	0,7679	0,6841	0,6287	0,5895	0,5598	0,5365
5	0,8412	0,6838	0,5981	0,5440	0,5063	0,4783	0,4564
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184	0,3980
7	0,7271	0,5612	0,4800	0,4307	0,3974	0,3726	0,3535
8	0,6798	0,5175	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185
9	0,6385	0,4775	0,4027	0,3584	0,3286	0,3067	0,2901
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823	0,2666
12	0,5410	0,3924	0,3264	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299
15	0,4709	0,3346	0,2758	0,2419	0,2195	0,2034	0,1911
20	0,3894	0,2705	0,2205	0,1921	0,1735	0,1602	0,1501
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286
30	0,2929	0,1980	0,1593	0,1377	0,1237	0,1137	0,1061
40	0,2370	0,1576	0,1259	0,1082	0,0968	0,0887	0,0827
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0583
120	0,0998	0,0632	0,0495	0,0419	0,0371	0,0337	0,0312

$$G_{0,05}(n-1, k)$$

Окончание прил. II

$k \setminus n-1$	8	9	10	16	36	144	$\infty$
2	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	0,6333	0,6167	0,6025	0,5466	0,4748	0,4031	0,3333
4	0,5175	0,5017	0,4884	0,4366	0,3720	0,3093	0,2500
5	0,4387	0,4241	0,4118	0,3645	0,3066	0,2513	0,2000
6	0,3817	0,3682	0,3568	0,3135	0,2612	0,2119	0,1667
7	0,3384	0,3259	0,3154	0,2756	0,2278	0,1833	0,1429
8	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250
9	0,2768	0,2659	0,2568	0,2226	0,1820	0,1446	0,1111
10	0,2541	0,2439	0,2353	0,2032	0,1655	0,1308	0,1000
12	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
15	0,1815	0,1736	0,1671	0,1429	0,1144	0,0889	0,0667
20	0,1422	0,1357	0,1303	0,1108	0,0879	0,0675	0,0500
24	0,1216	0,1160	0,1113	0,0942	0,0743	0,0567	0,0417
30	0,1002	0,0958	0,0921	0,0771	0,0604	0,0457	0,0333
40	0,0780	0,0745	0,0713	0,0595	0,0462	0,0347	0,0250
60	0,0552	0,0520	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0,0292	0,0279	0,0266	0,0218	0,0165	0,0120	0,0083

### ПРИЛОЖЕНИЕ III

Таблица распределения выборочного размаха

Значения  $q$ -% квантилей выборочного размаха  $R_n$ , отнесенного к параметру  $\sigma$  исходного распределения; математическое ожидание

$$M\left(\frac{R_n}{\sigma}\right) \text{ и среднее квадратическое отклонение } \sqrt{D\left(\frac{R_n}{\sigma}\right)}$$

этого же отношения в долях параметра  $\sigma$  исходного распределения

$n$	$M(R_n/\sigma)$	$\alpha(R_n/\sigma)$	$\sigma(R_n/\sigma)$	Вероятность $q$ в процентах									
				$M(R_n/\sigma)$	0,05	0,1	0,5	1,0	2,5	5,0	10,0	20,0	30,0
2	1,128	0,853	0,756	0,00	0,00	0,01	0,02	0,04	0,09	0,18	0,36	0,55	
3	1,693	0,888	0,525	0,04	0,06	0,13	0,19	0,30	0,43	0,62	0,90	1,14	
4	2,059	0,880	0,427	0,16	0,20	0,34	0,43	0,59	0,76	0,98	1,29	1,53	
5	2,326	0,864	0,371	0,31	0,37	0,55	0,66	0,85	1,03	1,26	1,57	1,82	
6	2,534	0,848	0,335	0,47	0,54	0,75	0,87	1,06	1,25	1,49	1,80	2,04	
7	2,704	0,833	0,308	0,61	0,69	0,92	1,05	1,25	1,44	1,68	1,99	2,22	
8	2,847	0,820	0,288	0,75	0,83	1,08	1,20	1,41	1,60	1,83	2,14	2,38	
9	2,970	0,808	0,272	0,88	0,96	1,21	1,34	1,55	1,74	1,97	2,28	2,51	
10	3,078	0,797	0,259	1,00	1,08	1,33	1,47	1,67	1,86	2,09	2,39	2,62	
11	3,173	0,787	0,248	1,10	1,20	1,45	1,58	1,78	1,97	2,20	2,50	2,72	
12	3,258	0,778	0,239	1,21	1,30	1,55	1,68	1,88	2,07	2,30	2,59	2,82	
13	3,336	0,770	0,231	1,30	1,39	1,64	1,77	1,97	2,16	2,39	2,68	2,90	
14	3,407	0,762	0,224	1,38	1,48	1,72	1,86	2,06	2,24	2,47	2,75	2,97	
15	3,472	0,755	0,217	1,46	1,56	1,80	1,93	2,14	2,32	2,54	2,83	3,04	
16	3,532	0,749	0,212	1,53	1,63	1,88	2,01	2,21	2,39	2,61	2,89	3,11	
17	3,588	0,743	0,207	1,60	1,69	1,94	2,07	2,27	2,45	2,67	2,95	3,17	
18	3,640	0,738	0,20	1,66	1,75	2,01	2,14	2,34	2,51	2,73	3,01	3,22	
19	3,689	0,733	0,199	1,72	1,82	2,07	2,20	2,39	2,57	2,79	3,06	3,27	
20	3,735	0,729	0,195	1,78	1,88	2,12	2,25	2,45	2,63	2,84	3,11	3,32	

Окончание прил. III

$n$	Вероятность в процентах											
	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	95,0	97,5	99,0	99,5	99,9	99,95
2	0,74	0,95	1,20	1,47	1,81	2,33	2,77	3,17	3,64	3,97	4,65	4,92
3	1,36	1,59	1,83	2,09	2,42	2,90	3,31	3,68	4,12	4,42	5,06	5,31
4	1,76	1,98	2,21	2,47	2,78	3,24	3,63	3,98	4,40	4,69	5,31	5,56
5	2,04	2,26	2,48	2,73	3,04	3,48	3,86	4,20	4,60	4,89	5,48	5,72
6	2,26	2,47	2,69	2,94	3,23	3,66	4,03	4,36	4,76	5,03	5,62	5,86
7	2,44	2,65	2,86	3,10	3,39	3,81	4,17	4,49	4,88	5,15	5,73	5,96
8	2,59	2,79	3,00	3,24	3,52	3,93	4,29	4,61	4,99	5,26	5,82	6,04
9	2,71	2,92	3,12	3,35	3,63	4,04	4,39	4,70	5,08	5,34	5,90	6,12
10	2,83	3,02	3,23	3,46	3,73	4,13	4,47	4,79	5,16	5,42	5,97	6,19
11	2,93	3,12	3,32	3,55	3,82	4,21	4,55	4,86	5,23	5,49	6,04	6,25
12	3,01	3,21	3,41	3,63	3,90	4,29	4,62	4,92	5,29	5,54	6,09	6,31
13	3,09	3,29	3,48	3,70	3,97	4,35	4,69	4,99	5,35	5,60	6,14	6,36
14	3,17	3,36	3,55	3,77	4,03	4,41	4,74	5,04	5,40	5,65	6,19	6,40
15	3,23	3,42	3,62	3,83	4,09	4,47	4,80	5,09	5,45	5,70	6,23	6,45
16	3,30	3,48	3,67	3,89	4,14	4,52	4,85	5,14	5,49	5,74	6,28	6,49
17	3,35	3,54	3,73	3,94	4,19	4,57	4,89	5,18	5,54	5,79	6,32	6,52
18	3,41	3,59	3,78	3,99	4,24	4,61	4,93	5,22	5,57	5,82	6,35	6,56
19	3,46	3,64	3,83	4,03	4,29	4,65	4,97	5,26	5,61	5,86	6,38	6,59
20	3,51	3,69	3,87	4,08	4,33	4,69	5,01	5,30	5,65	5,89	6,41	6,62

Учебное издание

*Плотников Андрей Николаевич*

**СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

Учебное пособие

Редактор Л. Я. Чегодаева  
Компьютерная верстка О. А. Ананьев

Подписано в печать 05.06.2008 г. Формат 60x84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 9,75.  
Тираж 200 экз. Заказ Арт. С – 7/2008.

Самарский государственный аэрокосмический  
университет. 443086, Самара, Московское шоссе, 34.

---

Изд-во Самарского государственного аэрокосмического  
университета. 443086, Самара, Московское шоссе, 34.