

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

Л.Л. ДОСКОЛОВИЧ

**РАСЧЕТ ДИФРАКЦИОННЫХ РЕШЕТОК
В РАМКАХ СТРОГОЙ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ТЕОРИИ**

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве методических указаний*

САМАРА
Издательство СГАУ
2007

УДК 535.42
ББК 22.343
Д703



**Инновационная образовательная программа
"Развитие центра компетенции и подготовка
специалистов мирового уровня в области аэро-
космических и геоинформационных технологий"**

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, профессор В.В. Ивахник,
д-р физ.-мат. наук, профессор И.П. Завершинский.

Д703 **Досколович Л.Л.**
**Расчет дифракционных решеток в рамках строгой электромаг-
нитной теории:** учеб. пособие / Л.Л. Досколович. – Самара: Изд-во
Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2007. – 80 с.: 30 ил.

ISBN 978-5-7883-0607-0

Рассмотрены методы решения прямых и обратных задач дифракции на одномерных и двумерных дифракционных решетках в рамках электромагнитной теории. Прямые задачи состоят в расчете отраженного (прошедшего) поля, возникающего при дифракции света на рельефе дифракционной решетки. Обратные задачи состоят в расчете профиля периода решетки из условия формирования заданной интенсивности порядков дифракции. Методы применимы к расчету многослойных покрытий и фотонных кристаллов. Предназначено для студентов специальностей и направлений «Прикладные математика и физика», «Прикладные математика и информатика».

УДК 535.42
ББК 22.343

ISBN 978-5-7883-0607-0

© Досколович Л.Л., 2007
© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
1. Дифракция на идеально проводящих решетках со ступенчатым профилем.....	5
1.1. ТЕ-поляризация.....	7
1.2. ТМ-поляризация.....	9
2. Дифракция на идеально отражающих решетках с непрерывным профилем (приближение Рэлея).....	13
3. Дифракция на диэлектрических дифракционных решетках.....	16
3.1. Дифракция на диэлектрических решетках с непрерывным профилем (ТМ-поляризация).....	17
3.2. Дифракция на бинарных диэлектрических решетках (ТМ-поляризация).....	22
3.3. Дифракция на диэлектрических решетках с непрерывным профилем (ТЕ-поляризация).....	25
3.4. Дифракция на бинарных диэлектрических решетках (ТЕ-поляризация).....	27
3.5. Примеры расчета решеток.....	29
4. Градиентные методы решения обратной задачи расчета дифракционных решеток ...	32
4.1. Расчет отражающих решеток со ступенчатым профилем.....	32
4.2. Расчет диэлектрических бинарных решеток.....	35
4.3. Расчет идеально проводящих решеток с непрерывным профилем в приближении Рэлея.....	47
5. Дифракция на двумерных диэлектрических решетках.....	53
5.1. Дифракция на бинарных дифракционных решетках.....	63
5.2. Синтез субволновых антиотражающих покрытий.....	67
5.3. Расчет поля от линзовых растров.....	72
Заключение.....	76
Список контрольных вопросов.....	77
Список специальных терминов.....	78
Библиографический список.....	79

ВВЕДЕНИЕ

Дифракционные решетки как прибор для пространственно-частотного разделения компонент спектра оптического сигнала являются важными компонентами большого числа оптических систем. Если характерные размеры ступенек микрорельефа дифракционной решетки, на которых происходит дифракция света, сравнимы с длиной волны, то скалярное приближение не позволяет адекватно описать процесс дифракции. В этом случае требуется использовать общую электромагнитную теорию света, основанную на уравнениях Максвелла. В пособии приведены решения ряда прямых и обратных задач дифракции на одномерных и двумерных дифракционных решетках в рамках электромагнитной теории. В разделе 1 рассматривается дифракция плоской волны на одномерной идеально отражающей дифракционной решетке, период которой представляет собой набор прямоугольных ступенек различной глубины. Эта задача включает в себя задачу дифракции на одномерной бинарной решетке. В разделе 2 рассматривается задача дифракции на одномерной отражающей решетке с непрерывным профилем в приближении Рэлея. Приближение Рэлея представляет собой вариант использования строгой теории дифракции и приближенных граничных условий. В разделе 3 рассматривается задача дифракции на одномерных диэлектрических решетках с непрерывным и бинарным рельефом. Для решения задачи дифракции использован удобный матричный формализм. В разделе 4 рассматриваются методы решения обратных задач расчета одномерных дифракционных решеток. Обратные задачи состоят в расчете профиля решеток из условия формирования заданных интенсивностей дифракционных порядков. Методы решения обратных задач основаны на минимизации функционалов-критериев с помощью градиентных методов. Методы раздела 4 обобщают итерационные алгоритмы расчета дифракционных решеток, разработанные в рамках скалярной теории дифракции. В разделе 5 рассматриваются задачи дифракции на двумерных диэлектрических дифракционных решетках. С использованием представленных методов произведен синтез двумерных антиотражающих покрытий и исследована работоспособность бинарных линзовых растров с размерами линз всего в несколько длин волн.

Рассмотренные в пособии методы решения прямых и обратных задач дифракции на дифракционных решетках непосредственно применимы к расчету многослойных покрытий, фотонных кристаллов, композитных структур. Материал пособия также является дополнением к созданному в рамках ПРОГРАММЫ программному обеспечению Grating для расчета и моделирования дифракционных решёток.

1. ДИФРАКЦИЯ НА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИХ РЕШЕТКАХ СО СТУПЕНЧАТЫМ ПРОФИЛЕМ

Рассмотрим дифракционную решетку, изготовленную из абсолютно проводящего материала и имеющую K прямоугольных штрихов на периоде d (рис. 1). Положение l -го штриха определяется координатой x_l начала штриха, шириной штриха c_l и глубиной штриха h_l . Предположим, что дифракционная решетка освещается плоской монохроматической волной с единичной амплитудой и волновым вектором

$$\mathbf{k} = k_0 \sqrt{\varepsilon_0} (\sin(\theta), -\cos(\theta), 0),$$

где $k_0^2 = \omega^2 / c^2 = (2\pi / \lambda_0)^2$, λ_0 — длина волны, ε — диэлектрическая проницаемость среды, θ — угол падения (рис. 1).

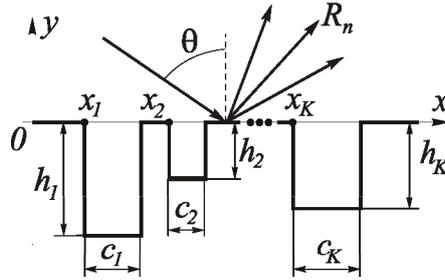


Рис. 1. Дифракционная решетка со ступенчатым профилем

В среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(x, y)$ и магнитной проницаемостью равной единице поле описывается следующими базовыми уравнениями [1]:

$$\begin{cases} \text{rot} \mathbf{H}(x, y, z) = -ik_0 \varepsilon(x, y) \mathbf{E}(x, y, z), \\ \text{rot} \mathbf{E}(x, y, z) = ik_0 \mathbf{H}(x, y, z). \end{cases} \quad (1)$$

Поскольку свойства среды не зависят от переменной z , то электрическое и магнитное поля имеют вид

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(x, y), \quad \mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{H}(x, y). \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$\begin{aligned} \partial_y H_z = -ik_0 \varepsilon E_x, \quad -\partial_x H_z = -ik_0 \varepsilon E_y, \quad \partial_x H_y - \partial_y H_x = -ik_0 \varepsilon E_z, \\ \partial_y E_z = ik_0 H_x, \quad -\partial_x E_z = ik_0 H_y, \quad \partial_x E_y - \partial_y E_x = ik_0 H_z, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$. Используя (3), представим компоненты поля E_x, E_y, H_x, H_y через компоненты E_z, H_z в виде

$$E_x = \frac{-1}{ik_0\epsilon} \partial_y H_z, \quad E_y = \frac{1}{ik_0\epsilon} \partial_x H_z, \quad H_x = \frac{1}{ik_0} \partial_y E_z, \quad H_y = \frac{-1}{ik_0} \partial_x E_z, \quad (4)$$

где компоненты E_z, H_z удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_0^2 \epsilon E_z = 0, \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_0^2 \epsilon H_z = 0. \quad (5)$$

Задача дифракции плоской волны на одномерной дифракционной решетке сводится к рассмотрению двух независимых задач: задачи дифракции плоской волны с ТЕ-поляризацией ($E_z \neq 0, H_z = 0$) и задачи дифракции плоской волны с ТМ-поляризацией ($H_z \neq 0, E_z = 0$) [1]. При этом плоская волна с произвольной ориентацией вектора поляризации может быть представлена в виде линейной суперпозиции волн этих двух типов. Уравнения Гельмгольца (5) должны быть дополнены граничными условиями. Граничное условие на поверхности абсолютного проводника имеет вид

$$E_t = 0, \quad (6)$$

где E_t — тангенциальная составляющая электрического поля. Условие (6), с учетом (4), принимает вид

$$\begin{cases} E_x \sim \partial_y H_z = 0 \\ E_z = 0 \end{cases} \quad (7)$$

для горизонтальных участков профиля решетки и

$$\begin{cases} E_z = 0 \\ E_y \sim \partial_x H_z = 0 \end{cases} \quad (8)$$

для вертикальных участков профиля решетки.

Кроме того, компоненты электрического поля должны быть непрерывны при $y=0$. Граничные условия (7), (8) должны быть дополнены условием непрерывности тангенциальных компонент H_x, H_z магнитного поля при $y=0$ в области штрихов, то есть при $x_i \leq x \leq x_i + c_i, i = \overline{1, K}$ [1-6]. Компоненты магнитного поля при $y=0$ между штрихами, в отличие от компонентов электрического поля, терпят разрыв, равный плотности поверхностного тока.

Рассмотрим решение задачи дифракции с использованием так называемого модового метода [1-6]. Метод основан на сшивке при $y=0$ тангенциальных компонент двух полей. Первое поле является решением уравнения Гельмгольца внутри штрихов при $x_i \leq x \leq x_i + c_i, -h_i \leq y < 0, i = \overline{1, K}$, а второе — решением уравнения Гельмгольца в области над штрихами при $y > 0$.

Поле в области над штрихами представляется в виде разложения Рэлея:

$$u(x, y) = \exp\left(ik_0\sqrt{\varepsilon}(\alpha_0x - \beta_0y)\right) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp\left(ik_0\sqrt{\varepsilon}(\alpha_nx + \beta_ny)\right), \quad (9)$$

где R_n — коэффициенты отражения дифракционных порядков (рис. 1),

$$\alpha_n = \sin(\theta) + \frac{\lambda_0 n}{d\sqrt{\varepsilon}}, \quad \beta_n = \sqrt{1 - \alpha_n^2}. \quad (10)$$

Скалярная функция $u(x, y)$ в (9) соответствует компоненте $E_z(x, y)$ для случая ТЕ-поляризации и компоненте $H_z(x, y)$ для случая ТМ-поляризации. Разложение Рэлея (9) является решением уравнения Гельмгольца (5), представленным в виде суперпозиции плоских волн (порядков дифракции). Отметим, что разложение (9) содержит однородные плоские волны ($\alpha_n^2 < 1$) и неоднородные плоские волны ($\alpha_n^2 > 1$), экспоненциально-затухающие при удалении от поверхности дифракционной решетки. Слагаемое $(\lambda_0 n)/d\sqrt{\varepsilon}$ в (10) вытекает из теоремы Флоке и характеризует наличие постоянного фазового сдвига между соседними периодами решетки.

Решение задачи дифракции состоит в определении коэффициентов отражения R_n из граничных условий при $y=0$. Представление для компонент поля внутри штрихов решетки различно для случаев ТЕ и ТМ-поляризации.

1.1. ТЕ-поляризация

Для ТЕ-поляризации электрическое поле $E_z^l(x, y)$ внутри l -го штриха удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta E_z^l + k_0^2 \varepsilon E_z^l = 0 \quad (11)$$

с граничным условием $E_z^l(x, y)|_{(x, y) \in C_l} = 0$, (12)

где C_l — контур штриха, состоящий из трех отрезков $x = x_l$, $y \in [-h_l, 0]$, $x = x_l + c_l$, $y \in [-h_l, 0]$ и $y = -h_l$, $x \in [x_l, x_l + c_l]$.

Условие (12) является конкретизацией условий (7), (8). Используя метод разделения переменных для решения уравнения Гельмгольца, получим поле внутри l -го штриха в виде следующего разложения по ортогональным функциям:

$$E_z^l(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^l \sin\left(\frac{\pi n}{c_l}(x - x_l)\right) \sin(\mu_n(y + h_l)), \quad (13)$$

где

$$\mu_n^2 = k^2 - \left(\frac{\pi n}{c_l}\right)^2, \quad k = k_0\sqrt{\varepsilon}. \quad (14)$$

Дальнейшее решение задачи дифракции сводится к нахождению коэффициентов R_n и B_n^l из граничных условий при $y=0$. Запишем условие непрерывности z -компоненты электрического поля $E_z(x, y)$ при $y = 0$:

$$\begin{aligned} & \exp(ik\alpha_0 x) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp(ik\alpha_n x) = \\ & = \sum_{l=1}^K \operatorname{rect}\left(\frac{x-x_l-c_l/2}{c_l}\right) \sum_{n=1}^{\infty} B_n^l \sin\left(\frac{\pi n}{c_l}(x-x_l)\right) \sin(\mu_n h_l), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{где } \operatorname{rect}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 0,5 \\ 0, & |x| > 0,5 \end{cases}$$

Заменим уравнение (15) условием равенства коэффициентов Фурье в разложении правой и левой частей данного уравнения. Для этого умножим (15) на $\exp(-ik\alpha_p x)$, $p = -\infty, \infty$ и проинтегрируем по периоду. В результате получим следующую систему линейных уравнений:

$$R_p + \delta(p) = \sum_{l=1}^K \sum_{n=1}^{\infty} AA_{pn}^l B_n^l, \quad p = \overline{-\infty, \infty}, \quad (16)$$

$$\text{где } \delta(p) = \begin{cases} 1, & p = 0 \\ 0, & p \neq 0 \end{cases},$$

$$AA_{pn}^l = \frac{\sin(\mu_n h_l)}{kd} \exp(-ik\alpha_p x_l) \int_0^{kc_l} \sin\left(\frac{\pi m}{kc_l} \xi\right) \exp(-i\alpha_p \xi) d\xi. \quad (17)$$

Система линейных уравнений (16) содержит две последовательности коэффициентов $\mathbf{R} = (R_n)$ и $\mathbf{B} = (B_n^l)$. Для того, чтобы найти второе уравнение связи между наборами коэффициентов \mathbf{R} и \mathbf{B} , воспользуемся условием непрерывности для тангенциальных составляющих магнитного поля. Тангенциальная составляющая магнитного поля $H_x \sim \partial_y E_z$ должна быть непрерывной при $y=0$ в области штрихов, то есть при $x_l \leq x \leq x_l + c_l$, $l = \overline{1, K}$. Условие непрерывности $H_x \sim \partial_y E_z$ при $y=0$ имеет вид

$$\begin{aligned} & -ik\beta_0 \exp(ik\alpha_0 x) + ik \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \beta_n \exp(ik\alpha_n x) = \\ & = \sum_{m=1}^{\infty} B_m^l \mu_m \sin\left(\frac{\pi m}{c_l}(x-x_l)\right) \cos(\mu_m h_l) \end{aligned} \quad (18)$$

при $x_l \leq x \leq x_l + c_l$, $l = \overline{1, K}$. Умножая (18) на $\sin(\pi m(x - x_l)/c_l)$, $m = \overline{-\infty, \infty}$ и интегрируя по x на отрезке $[x_l, x_l + c_l]$, получим выражение для коэффициентов разложения внутри l -го штриха в виде:

$$B_m^l = \frac{2ik}{\mu_{lm} \cos(\mu_{lm} h_l)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n (R_n - \delta(n)) DD_{nm}^l, \quad (19)$$

где

$$DD_{nm}^l = \frac{1}{kc_l} \exp(ik\alpha_n x_l) \int_0^{kc_l} \sin\left(\frac{\pi m}{kc_l} \xi\right) \exp(i\alpha_n \xi) d\xi. \quad (20)$$

Подставляя (19), (20) в (16), получим систему линейных уравнений для нахождения коэффициентов Рэлея:

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} AA_{ps} \cdot R_s = D_p, \quad p = \overline{-\infty, \infty}, \quad (21)$$

$$\text{где } AA_{ps} = \beta_s M_{ps} - \delta(p - s), \quad (22)$$

$$M_{ps} = \frac{2ik}{d} \sum_{l=1}^K \sum_{n=1}^{\infty} c_l \frac{\text{tg}(\mu_{ln} h_l)}{\mu_{ln}} DD_{ns}^l (DD_{np}^l)^*, \quad (23)$$

$$D_p = \beta_0 M_{p0} + \delta(p). \quad (24)$$

При расчете система бесконечного числа линейных уравнений (21) заменяется конечной системой из $2N + 1$ уравнений:

$$\mathbf{AA} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{D}, \quad (25)$$

$$\text{где } \mathbf{AA} = (AA_{ps})_{-N}^N, \quad \mathbf{R} = (R_p)_{-N}^N, \quad \mathbf{D} = (D_p)_{-N}^N. \quad (26)$$

При этом ряды в (19) заменяются суммами из n_l , $l = \overline{1, K}$ членов. Эта замена предполагает, что для представления поля внутри l -го штриха достаточно n_l членов.

1.2. ТМ-поляризация

Решение для случая ТМ-поляризации во многом аналогично рассмотренному решению для ТЕ-поляризации. Внутри l -го штриха решетки магнитное поле $H_z^l(x, y)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\Delta H_z^l + k^2 H_z^l = 0, \quad k = k_0 \sqrt{\varepsilon} \quad (27)$$

с граничным условием

$$\left. \frac{\partial H_z^l(x, y)}{\partial \mathbf{n}} \right|_{(x, y) \in C_l} = 0, \quad (28)$$

где \mathbf{n} — вектор нормали к контуру штриха C_l . Условие (28) являются следствием общих граничных условий (7), (8). Используя метод разделения переменных для уравнения Гельмгольца (27), получим $H_z^l(x, y)$ в виде следующего ряда:

$$H_z^l(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^l \cos\left(\frac{\pi n}{c_l}(x - x_l)\right) \cos(\mu_n(y + h_l)), \quad (29)$$

где коэффициенты μ_n определены в уравнении (14).

Для нахождения коэффициентов R_n и B_n^l воспользуемся граничными условиями при $y = 0$. Условие непрерывности z -компоненты магнитного поля $H_z(x, y)$ при $y = 0$ в области штрихов решетки дает следующее функциональное уравнение:

$$\exp(ik\alpha_0 x) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp(ik\alpha_n x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^l \cos\left(\frac{\pi n}{c_l}(x - x_l)\right) \cos(\mu_n h_l), \quad (30)$$

где $x_l \leq x \leq x_l + c_l$ и $l = \overline{1, K}$. Граничное условие для тангенциальной составляющей электрического поля $E_x \sim \partial_y H_z$ требует при $y = 0$ равенства нулю производной $\partial_y H_z$ на горизонтальных участках профиля и непрерывности производной $\partial_y H_z$ в области штрихов (при $x_l \leq x \leq x_l + c_l$, $l = \overline{1, K}$). Данные условия дают второе функциональное уравнение для коэффициентов R_n и B_n^l в виде

$$\begin{aligned} -ik\beta_0 \exp(ik\alpha_0 x) + ik \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \beta_n \exp(ik\alpha_n x) = \\ = -\sum_{l=1}^K \text{Rect}\left(\frac{x - x_l - c_l/2}{c_l}\right) \sum_{m=1}^{\infty} B_m^l \mu_m \cos\left(\frac{\pi m}{c_l}(x - x_l)\right) \sin(\mu_m h_l). \end{aligned} \quad (31)$$

Умножая (30) на $\cos(\pi m(x - x_l)/c_l)$, $m = \overline{-\infty, \infty}$ и интегрируя по x на отрезке $[x_l, x_l + c_l]$, получаем следующее уравнение для коэффициентов разложения внутри l -го штриха:

$$B_m^l = \frac{2}{\cos(\mu_m h_l)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (R_n + \delta(n)) DD_{mn}^l, \quad (32)$$

$$\text{где } DD_{mn}^l = \frac{1}{kc_l} \exp(ik\alpha_n x_l) \int_0^{kc_l} \cos\left(\frac{\pi m}{kc_l} \xi\right) \exp(i\alpha_n \xi) d\xi. \quad (33)$$

Далее заменим уравнение (31) условием равенства коэффициентов Фурье для правой и левой частей. В результате получим следующую систему линейных уравнений:

$$-\beta_0 \delta(p) + \beta_p R_p = i \sum_{l=1}^K \sum_{m=1}^{\infty} B_m' A A_{pm}', \quad p = -\infty \dots \infty, \quad (34)$$

$$A A_{pm}' = \frac{\sin(\mu_m h_l)}{kd} \left(\frac{\mu_m}{k} \right) \exp(-ik\alpha_p x_l) \int_0^{kc_l} \cos\left(\frac{\pi m}{kc_l} \xi\right) \exp(-i\alpha_p \xi) d\xi. \quad (35)$$

Подставляя (32), (33) в (34), получим систему линейных уравнений относительно коэффициентов Рэлея в виде (21), (25), где

$$A A_{ps} = M_{ps} - \beta_p \delta(p-s), \quad (36)$$

$$M_{ps} = \frac{2ki}{d} \sum_{l=1}^K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_l}{\mu_{ln}} \operatorname{tg}(\mu_{ln} h_l) D D_{ns}' (D D_{np}')^*, \quad (37)$$

$$D_p = -M_{p0} - \beta_0 \delta(p). \quad (38)$$

В скалярном приближении Кирхгофа интенсивности дифракционных порядков определяются как квадраты модулей коэффициентов Фурье $|c_n|^2$ функции $\exp(i\varphi(x))$, где функция $\varphi(x)$ описывает набег фазы, формирующийся при отражении плоской волны от профиля решетки. Введем понятие интенсивности порядка для отражающей решетки в рамках электромагнитной теории. Рассмотрим область D , ограниченную снизу профилем решетки, сверху отрезком прямой $x=p$, $p>0$, справа и слева – отрезками прямых $x=0$, $x=d$. Используя закон сохранения энергии, приравняем к нулю поток вектора Умова—Пойнтинга $\mathbf{S} = (c/8\pi) \operatorname{Re}[\mathbf{E}, \mathbf{H}^*]$ через область D [1]. В результате получим следующее условие нормировки [1]:

$$\beta_0 = \sum_{n \in U} |R_n|^2 \beta_n, \quad (39)$$

где $U = \{n | \alpha_n^2 < 1\}$ — множество индексов, соответствующих распространяющимся отраженным плоским волнам (порядкам дифракции) в (9). Величины β_n определены в (16) и равны косинусам углов между осью Oy и направлениями отраженных порядков. Уравнение (39) имеет ясную физическую интерпретацию: энергия падающей волны равна сумме энергий отраженных порядков. Согласно (39), под интенсивностями порядков следует понимать следующие нормированные значения коэффициентов Рэлея:

$$I_n = |R_n|^2 \frac{\beta_n}{\beta_0}, \quad \left(\sum_{n \in U} I_n = 1 \right). \quad (40)$$

Пример 1. Рассмотрим работу простейшей бинарной решетки с одним штрихом длины $d/2$ на периоде d . На рис. 2 приведены зависимости интенсивностей 0-го и -1-го порядков от глубины штриха h . Интенсивности порядков

рассчитывались по формулам (25), (36) — (38) при $d=\lambda$ и угле падения $\theta = 30^\circ$ для случая ТМ-поляризации. Отметим, что при указанных параметрах выполняется условие Брэгга [1,4] $m \cdot \lambda = -2d \cdot \sin(\theta)$ при $m = -1$. В этом случае существуют только 0-й и -1-й распространяющиеся порядки. При этом направление распространения -1-го порядка противоположно направлению падающей волны. Все остальные порядки соответствуют неоднородным волнам ($\alpha_n^2 > 1$), экспоненциально затухающим при удалении от поверхности решетки. Рис. 2 показывает следующие интересные моменты в работе бинарной решетки. Во-первых, при глубинах штриха $h \approx 0,1\lambda, 0,42\lambda, 0,57\lambda$ и $0,93\lambda$ энергия делится пополам между 0-м и -1-м порядками, то есть решетка работает как делитель пучка. Во-вторых, при глубинах штриха $0,22\lambda$ и $0,72\lambda$ энергия падающей волны концентрируется в -1-м порядке, т.е. при данных глубинах решетку можно использовать как дефлектор (отклонитель) пучка. По общему виду графиков на рис. 2 можно предположить, что интенсивности 0-го и -1-го порядков меняются периодически. На рис. 3 приведена зависимость интенсивностей порядков бинарной решетки от глубины штриха для ТЕ-поляризации. Для ТЕ-поляризации бинарная решетка не обладает свойством концентрировать излучение в -1-ом порядке. Как делитель пучка решетка работает при глубине штриха $h \approx 0,55\lambda$.

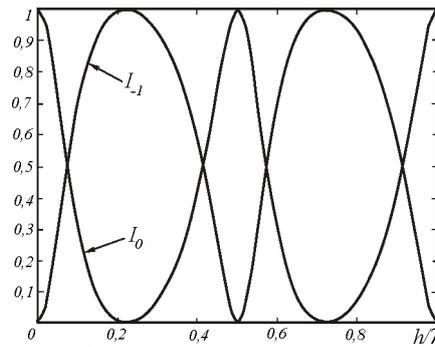


Рис. 2. Зависимость интенсивностей -1-го (I_{-1}) и 0-го (I_0) порядков бинарной решетки от высоты штриха для ТМ-поляризации при $d = \lambda, \theta = 30^\circ$

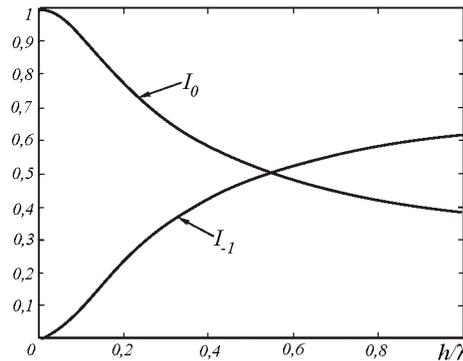


Рис. 3. Зависимость интенсивностей -1-го (I_{-1}) и 0-го (I_0) порядков бинарной решетки от высоты штриха для ТЕ-поляризации при $d = \lambda, \theta = 30^\circ$

2. ДИФРАКЦИЯ НА ИДЕАЛЬНО ОТРАЖАЮЩИХ РЕШЕТКАХ С НЕПРЕРЫВНЫМ ПРОФИЛЕМ (ПРИБЛИЖЕНИЕ РЭЛЕЯ)

Рассмотрим решение задачи дифракции на идеально отражающей дифракционной решетке (период d) с непрерывным профилем $y=f(x)$ в приближении Рэлея [1,5,6]. Согласно (9), поле над профилем дифракционной решетки при $y > a = \max_{0 \leq x \leq d} (f(x))$ представляется в виде разложения Рэлея. Из этого не следует, что при $y < a$ поле также описывается разложением Рэлея. Однако при неглубоком и гладком профиле $f(x)$ эту гипотезу можно считать оправданной. Приближение Рэлея предполагает, что разложение (9) описывает поле не только над решеткой при $y > a$, но и внутри решетки при $y < a$. Напомним, что скалярная функция $u(x, y)$ в (9) соответствует компоненте E_z электрического поля для ТЕ-поляризации или компоненте H_z магнитного поля для ТМ-поляризации.

Для расчета коэффициентов Рэлея R_n в (9) достаточно воспользоваться граничным условием (6) при $y=f(x)$. Согласно (6), поле (9) должно удовлетворять граничному условию

$$u(x, y) \Big|_{y=f(x)} = 0 \quad (41)$$

для ТЕ-поляризации и граничному условию

$$\frac{du(x, y)}{dn} \Big|_{y=f(x)} = 0 \quad (42)$$

для ТМ-поляризации, где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к профилю решетки.

Подставляя (9) в (41), получаем в случае ТЕ-поляризации для расчета коэффициентов R_n следующее уравнение:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp\left(ik\left((\alpha_n - \alpha_0)x + (\beta_n - \beta_0)f(x)\right)\right) = -\exp(-2ik\beta_0 f(x)). \quad (43)$$

Заменяя (43) условием равенства коэффициентов Фурье в разложении правой и левой частей, получим для расчета R_n следующую систему линейных уравнений:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} AA_{pn} \cdot R_n = B_p, \quad p = -\infty, \infty, \quad (44)$$

где $AA_{pn} = \int_0^{2\pi} \exp\left(i\xi(n-p) + i(\beta_n - \beta_0)H(\xi)\right) d\xi,$ (45)

$$B_p = -\int_0^{2\pi} \exp\left(-2i\beta_0 H(\xi) - ip\xi\right) d\xi, \quad (46)$$

$$H(\xi) = kf \left(\frac{\xi d}{2\pi} \right) \quad (47)$$

— нормированная высота.

Проводя аналогичные вычисления, несложно получить в случае ТМ-поляризации для расчета коэффициентов R_n систему линейных уравнений вида (44), где

$$AA_{pn} = \int_0^{2\pi} \left(\beta_n - \alpha_n \frac{\lambda}{d} H'(\xi) \right) \exp(i\xi(n-p) + i(\beta_n - \beta_0)H(\xi)) d\xi, \quad (48)$$

$$B_p = \int_0^{2\pi} \left(\beta_0 + \alpha_0 \frac{\lambda}{d} H'(\xi) \right) \exp(-2i\beta_0 H(\xi) - ip\xi) d\xi. \quad (49)$$

На практике для расчета коэффициентов R_n используется конечная система из $2N+1$ уравнений:

$$\mathbf{AA} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{B}, \quad (50)$$

где $\mathbf{AA} = (AA_{pn})_{-N}^N$, $\mathbf{R} = (R_n)_{-N}^N$, $\mathbf{B} = (B_n)_{-N}^N$.

При $d \gg \lambda$ приближении Рэлея переходит в приближение Фраунгофера. Действительно, при $d \gg \lambda$ $(\beta_n - \beta_0) \approx 0$ и $(\lambda/d)H'(\xi) \approx 0$. В этом случае матрица \mathbf{AA} в (50) становится диагональной ($\mathbf{AA} = 2\pi \mathbf{E}$) и коэффициенты Рэлея будут пропорциональны коэффициентам Фурье в разложении функции $\exp(i\varphi(x))$, где функция

$$\varphi(x) = -2\beta_0 k \cdot f(xd/2\pi) \quad (51)$$

описывает набег фазы, формируемый при отражении плоской волны от решетки с высотой $f(xd/2\pi)$. Интересно отметить, что приближение Фраунгофера соответствует выбору первого члена в асимптотическом разложении для коэффициентов Рэлея. Действительно, используя матричное разложение

$$(\mathbf{E} + \mathbf{C})^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-\mathbf{C})^j,$$

представим коэффициенты Рэлея в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{AA}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2\pi} (\mathbf{E} + \mathbf{AA}_1)^{-1} \mathbf{B} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} (-\mathbf{AA}_1)^j \cdot \mathbf{B} = \pm \mathbf{F} - \sum_{j=1}^{\infty} (-\mathbf{AA}_1)^j \cdot \mathbf{F}, \end{aligned} \quad (52)$$

где \mathbf{F} — вектор коэффициентов Фурье, а \mathbf{AA}_1 — матрица с элементами

$$AA_{1pn} = \begin{cases} AA_{pn} / 2\pi, & p \neq n, \\ AA_{pn} / 2\pi - 1, & p = n. \end{cases} \quad (53)$$

Пример 2. Для оценки точности приближения Рэля рассмотрим работу косинусоидальной решетки с профилем

$$f(x) = \frac{h}{2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right). \quad (54)$$

Для характеристики точности приближения Рэля введем относительную ошибку

$$\varepsilon_n(h) = \frac{|I_n^{Int}(h) - I_n^{Rel}(h)|}{I_n^{Int}(h)}, \quad (55)$$

где h — амплитуда профиля, $I_n^{Int}(h)$, $I_n^{Rel}(h)$ — интенсивности n -го порядка, рассчитанные точным интегральным методом [1,5,6] и в приближении Рэля по формулам (44) — (47).

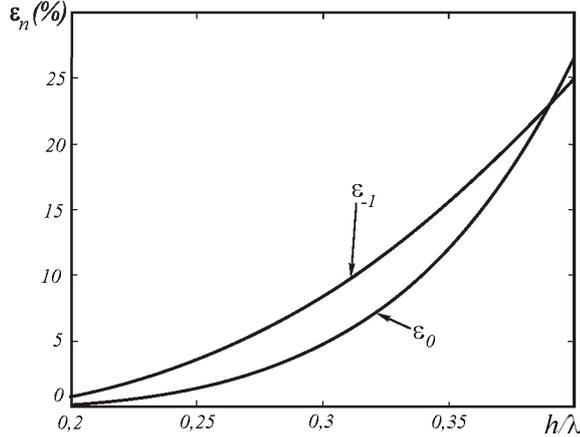


Рис. 4. Ошибка приближения Рэля для интенсивностей -1 -го ($\varepsilon_{-1}(h)$) и 0 -го ($\varepsilon_0(h)$) порядков косинусоидальной решетки в зависимости от амплитуды для ТЕ-поляризации при $d = \lambda$, $\theta = 30^\circ$

На рис. 4 приведены графики относительной ошибки для интенсивностей 0 -го и -1 -го порядков в зависимости от нормированной амплитуды профиля h/λ при периоде $d = \lambda$ и угле падения $\theta = 30^\circ$ для ТЕ-поляризации. Из рис. 4 видно, что приближение Рэля дает ошибку менее 10% при $h < 0,325\lambda$. Приведенный пример показывает, что приближение Рэля применимо при гладких неглубоких профилях ($h < d/3$), даже при периодах близких к длине волны.

3. ДИФРАКЦИЯ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ДИФРАКЦИОННЫХ РЕШЕТКАХ

Рассмотрим дифракцию плоской волны с волновым вектором $\mathbf{k} = k(\sin(\theta), -\cos(\theta), 0)$, $k = k_0\sqrt{\varepsilon_0}$ на диэлектрической решетке с профилем $y=f(x)$ и периодом d . Геометрия задачи дифракции приведена на рис. 5, где R_n и T_n — коэффициенты отражения и пропускания дифракционных порядков. Для приведенной геометрии задачи имеются три зоны с различной диэлектрической проницаемостью ε . Зона 1 соответствует области над решеткой при $y > a$, где a — максимальная высота профиля решетки. Зона 2 соответствует зоне профиля решетки $0 < y < a$. Зона 3 соответствует области подложки $y < 0$. В зонах 1 и 3 диэлектрическая проницаемость постоянна. Без ограничения общности будем считать, что в первой зоне $\varepsilon = 1$, а в третьей зоне $\varepsilon > 1$. Во второй зоне — зоне модуляции, диэлектрическая проницаемость является функцией $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$.

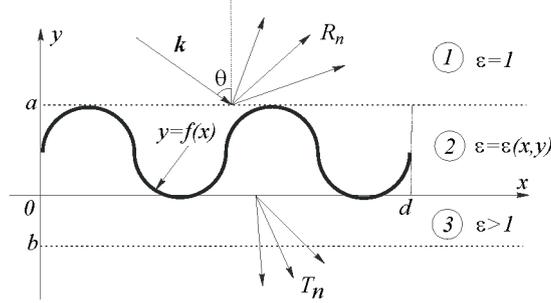


Рис. 5. Геометрия задачи дифракции на диэлектрической решетке

Как и в пункте 1, достаточно рассмотреть две независимых задачи дифракции: задачу дифракции плоской волны с ТЕ-поляризацией ($E_z \neq 0$, $H_z = 0$) и задачу дифракции плоской волны с ТМ-поляризацией ($H_z \neq 0$, $E_z = 0$). В зонах 1 и 3 z -компоненты полей являются решениями уравнений Гельмгольца (5). Решения уравнений Гельмгольца могут быть представлены в виде разложений Рэлея (суперпозиций плоских волн). В зоне 1 z -компоненты полей имеют вид

$$u(x, y) = \exp(ik_0(\alpha_0 x - \beta_0 y)) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp(ik_0(\alpha_n x + \beta_n y)), \quad (56)$$

$$\text{где } \alpha_n = \sin(\theta) + n \frac{\lambda_0}{d}, \quad \beta_n = \sqrt{1 - \alpha_n^2}. \quad (57)$$

Как и ранее, функция $u(x, y)$ представляет компоненту $E_z(x, y)$ электрического поля для случая ТЕ-поляризации и компоненту $H_z(x, y)$ магнитного поля для случая ТМ-поляризации. В зоне 3 z -компоненты имеют вид

$$u(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n \exp\left(ik_0(\alpha_n x - \tilde{\beta}_n y)\right), \quad (58)$$

$$\text{где } \tilde{\beta}_n = \sqrt{\varepsilon - \alpha_n^2}. \quad (59)$$

Разложения Рэлея (56), (58) являются решениями уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (60)$$

при $k^2 = k_0^2$ и $k^2 = k_0^2 \varepsilon$, соответственно.

3.1. Дифракция на диэлектрических решетках с непрерывным профилем (ТМ-поляризация)

В зоне модуляции поле описывается системой дифференциальных уравнений, различных для случаев ТЕ- и ТМ-поляризаций. Для ТМ-поляризации ($\mathbf{H}(x, y) = (0, 0, H_z(x, y))$) уравнения (1) примут вид

$$\begin{aligned} \partial_y H_z(x, y) &= -ik_0 \varepsilon(x, y) E_x(x, y), \quad \partial_z E_y(x, y) = 0, \\ \partial_x H_z(x, y) &= ik_0 \varepsilon(x, y) E_y(x, y), \quad \partial_z E_x(x, y) = 0, \\ E_z(x, y) &= 0, \quad \partial_x E_y(x, y) - \partial_y E_x(x, y) = -ik_0 H_z(x, y). \end{aligned} \quad (61)$$

Из первых двух уравнений в (61) получим:

$$E_x(x, y) = \frac{-1}{ik_0 \varepsilon(x, y)} \partial_y H_z(x, y), \quad E_y(x, y) = \frac{1}{ik_0 \varepsilon(x, y)} \partial_x H_z(x, y). \quad (62)$$

Подставляя (62) в последнее уравнение в (61), будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{k_0^2 \varepsilon(x, y)} \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{k_0^2 \varepsilon(x, y)} \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial y} \right) + H_z(x, y) = 0. \quad (63)$$

Для дальнейших выкладок удобно ввести функцию:

$$\tilde{E}_x(x, y) = \frac{1}{k_0^2 \varepsilon(x, y)} \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial y}. \quad (64)$$

Введение функции (64) оказывается удобным, поскольку, согласно (62), функция $\tilde{E}_x(x, y)$ пропорциональна второй тангенциальной компоненте поля $E_x(x, y)$ на границах зоны модуляции $y=0$, $y=a$. Представим (63) в виде системы из 2-х уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial y} = k^2 \tilde{E}_x(x, y), \\ \frac{\partial \tilde{E}_x(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{k^2} \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial x} \right) - H_z(x, y). \end{cases} \quad (65)$$

Функция $H_z(x, y)$ является квазипериодической [1,5-9]:

$$H_z(x, y) = v(x, y) \exp(ik_0 \alpha_0 x), \quad \alpha_0 = \sin(\theta), \quad (66)$$

где $v(x, y)$ — периодическая по x функция с периодом d . Разлагая $v(x, y)$ в ряд Фурье по переменной x , представим $H_z(x, y)$ в виде

$$H_z(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_m(y) \exp(ik_0 \alpha_m x), \quad \alpha_m = \alpha_0 + m\lambda_0 / d. \quad (67)$$

Функция $\tilde{E}_x(x, y)$ также является квазипериодической:

$$\tilde{E}_x(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{E}_m(y) \exp(ik_0 \alpha_m x). \quad (68)$$

В дальнейшем будем считать, что функции $\tilde{E}_x(x, y)$, $H_z(x, y)$ в зоне модуляции могут быть аппроксимированы отрезками своих рядов (57), (58) с $2N+1$ членами.

Функции $k^2(x, y) = k_0^2 \cdot \varepsilon(x, y)$ и $1/k^2(x, y)$ являются периодическими по x с периодом d :

$$k^2(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(1)}(y) \exp\left(i \frac{2\pi}{d} nx\right), \quad (69)$$

$$\frac{1}{k^2(x, y)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(2)}(y) \exp\left(i \frac{2\pi}{d} nx\right).$$

Подставим разложения (67) — (69) в систему (65) и, при учете $2N+1$ членов разложений, получим:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=-N}^N \frac{dH_m(y)}{dy} \exp(ik_0 \alpha_m x) &= \sum_{l=-N}^N \tilde{E}_l(y) \exp(ik_0 \alpha_l x) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(1)}(y) \exp\left(i \frac{2\pi}{d} nx\right), \\ \sum_{m=-N}^N \frac{d\tilde{E}_m(y)}{dy} \exp(ik_0 \alpha_m x) &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(2)}(y) \exp\left(i \frac{2\pi}{d} nx\right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{l=-N}^N ik_0 \alpha_l H_l(y) \exp(ik_0 \alpha_l x) \right) - \sum_{m=-N}^N H_m(y) \exp(ik_0 \alpha_m x). \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях $\exp\left(i \frac{2\pi}{d} mx\right)$,

$m = \overline{-N, N}$, приведем уравнения (70) к системе $4N+2$ дифференциальных уравнений, не зависящих от x :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dH_p(y)}{dy} &= \sum_{l=-N}^N \tilde{E}_l(y) c_{p-l}^{(1)}(y), \quad p = \overline{-N, N}, \\ \frac{d\tilde{E}_p(y)}{dy} &= k_0^2 \alpha_p \sum_{l=-N}^N \alpha_l c_{p-l}^{(2)}(y) H_l(y) - H_p(y), \quad p = \overline{-N, N}. \end{aligned} \right. \quad (71)$$

Таким образом, в зонах 1 и 3 решения имеют вид (56) и (58), а в зоне модуляции необходимо решать систему уравнений (71). Для поиска общего решения системы (61) необходимо найти $4N+2$ линейно-независимых частных решений. При отсутствии модуляции ($\varepsilon(x, y) = \varepsilon$) система (71) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{dH_p(y)}{dy} = \tilde{E}_p(y)c_0^{(1)}, & p = -\overline{N, N}, \\ \frac{d\tilde{E}_p(y)}{dy} = k_0^2\alpha_p^2c_0^{(2)}H_p(y) - H_p(y), & p = -\overline{N, N}, \end{cases} \quad (72)$$

$$\text{где } c_0^{(1)} = k_0^2\varepsilon, \quad c_0^{(2)} = 1/k_0^2\varepsilon. \quad (73)$$

Базисные решения системы (72) имеют вид

$$\begin{cases} H_p^\pm(y) = \exp(\pm ik_0\tilde{\beta}_p y), & p = -\overline{N, N}, \\ \tilde{E}_p^\pm(y) = \pm \frac{i\tilde{\beta}_p}{k_0\varepsilon} \exp(\pm ik_0\tilde{\beta}_p y), & p = -\overline{N, N}. \end{cases} \quad (74)$$

Для согласования решения в зоне модуляции с решением (74) в зоне 3, граничные условия для системы (71) определим в виде

$$\begin{cases} H_{mj}^+(0) = \delta_{m-j}, & m, j = -\overline{N, N}, \\ \tilde{E}_{mj}^+(0) = \mp i\tilde{\beta}_m \delta_{m-j} / (k_0\varepsilon), & m, j = -\overline{N, N}, \end{cases} \quad (75)$$

$$\text{где } \delta_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0, & m \neq 0. \end{cases}$$

Для удобства выкладок введем $4N + 2$ объединённых векторов начальных условий вида

$$\left(\begin{pmatrix} \mathbf{H}_{-N}^+(0) \\ \tilde{\mathbf{E}}_{-N}^+(0) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \mathbf{H}_N^+(0) \\ \tilde{\mathbf{E}}_N^+(0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{-N}^-(0) \\ \tilde{\mathbf{E}}_{-N}^-(0) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \mathbf{H}_N^-(0) \\ \tilde{\mathbf{E}}_N^-(0) \end{pmatrix} \right). \quad (76)$$

Обозначим $\Psi_i(y)$, $i = \overline{1, 4N+2}$ вектора функций:

$$\left(\begin{pmatrix} \Psi_{-N}^+(y) \\ \tilde{\Psi}_{-N}^+(y) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \Psi_N^+(y) \\ \tilde{\Psi}_N^+(y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Psi_{-N}^-(y) \\ \tilde{\Psi}_{-N}^-(y) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \Psi_N^-(y) \\ \tilde{\Psi}_N^-(y) \end{pmatrix} \right), \quad (77)$$

являющихся решениями системы (71) с граничными условиями (76). При этом общее решение системы принимает вид

$$H_m(y) = \sum_{j=-N}^N C_j^- \Psi_{mj}^-(y) + \sum_{j=-N}^N C_j^+ \Psi_{mj}^+(y), \quad m = \overline{-N, N}, \quad (78)$$

$$\tilde{E}_m(y) = \sum_{j=-N}^N C_j^- \tilde{\Psi}_{mj}^-(y) + \sum_{j=-N}^N C_j^+ \tilde{\Psi}_{mj}^+(y), \quad m = \overline{-N, N}. \quad (79)$$

Для определения коэффициентов пропускания T_n и отражения R_n в уравнениях (56), (58) воспользуемся условиями непрерывности функций $H_z(x, y)$, $\tilde{E}_x(x, y)$ на границах зоны модуляции при $y=0$ и при $y=a$.

Условия непрерывности при $y=0$ дают следующие функциональные уравнения:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N T_n \exp(ik_0 \alpha_n x) &= \sum_{n=-N}^N H_n(0) \exp(ik_0 \alpha_n x) = \\ &= \sum_{n=-N}^N \left(\sum_{j=-N}^N C_j^- \Psi_{nj}^-(0) + \sum_{j=-N}^N C_j^+ \Psi_{nj}^+(0) \right) \exp(ik_0 \alpha_n x) = \end{aligned} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=-N}^N (C_n^- + C_n^+) \exp(ik_0 \alpha_n x), \\ -\frac{i}{k_0 \varepsilon} \sum_{n=-N}^N \tilde{\beta}_n T_n \exp(ik_0 \alpha_n x) &= \sum_{n=-N}^N \tilde{E}_n(0) \exp(ik_0 \alpha_n x) = \\ &= \sum_{n=-N}^N \left(\sum_{j=-N}^N C_j^- \tilde{\Psi}_{nj}^-(0) + \sum_{j=-N}^N C_j^+ \tilde{\Psi}_{nj}^+(0) \right) \exp(ik_0 \alpha_n x) = \end{aligned} \quad (81)$$

$$= \sum_{n=-N}^N \frac{i \tilde{\beta}_n}{k_0 \varepsilon} (C_n^+ - C_n^-) \exp(ik_0 \alpha_n x).$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях $\exp\left(i \frac{2\pi}{d} px\right)$,

$p = \overline{-N, N}$, получим:

$$T_p = C_p^- + C_p^+, \quad -T_p = -C_p^- + C_p^+, \quad p = \overline{-N, N}. \quad (82)$$

Решение системы линейных уравнений (82) имеет вид:

$$T_p = C_p^-, \quad C_p^+ = 0, \quad p = \overline{-N, N}. \quad (83)$$

Согласно (83), поле в зоне модуляции имеет вид:

$$\begin{pmatrix} H_m(y) \\ \tilde{E}_m(y) \end{pmatrix} = \sum_{j=-N}^N C_j^- \begin{pmatrix} \Psi_{mj}^-(y) \\ \tilde{\Psi}_{mj}^-(y) \end{pmatrix} = \sum_{j=-N}^N T_j \begin{pmatrix} \Psi_{mj}^-(y) \\ \tilde{\Psi}_{mj}^-(y) \end{pmatrix}, \quad m = \overline{-N, N}. \quad (84)$$

Условия непрерывности функций $H_z(x, y)$, $\tilde{E}_x(x, y)$ на верхней границе зоны модуляции ($y=a$) дают следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N R_n \exp(i) + \exp(ik_0(\alpha_0 x - \beta_0 a)) &= \sum_{n=-N}^N H_n(a) \exp(ik_0 \alpha_n x) = \\ &= \sum_{n=-N}^N \left(\sum_{j=-N}^N T_j \Psi_{nj}^-(a) \right) \exp(ik_0 \alpha_n x), \end{aligned} \quad (85)$$

$$\begin{aligned} \frac{i\beta_n}{k_0} \sum_{n=-N}^N R_n \exp(ik_0(\alpha_n x + \beta_n a)) - \frac{i\beta_0}{k_0} \exp(ik_0(\alpha_0 x - \beta_0 a)) &= \\ = \sum_{n=-N}^N \tilde{E}_n(a) \exp(ik_0 \alpha_n x) = \sum_{n=-N}^N \left(\sum_{j=-N}^N T_j \tilde{\Psi}_{nj}^-(a) \right) \exp(ik_0 \alpha_n x). \end{aligned} \quad (86)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях $\exp\left(i\frac{2\pi}{d}px\right)$, $p = -\overline{N}, \overline{N}$, получим две системы линейных уравнений вида:

$$\sum_{j=-N}^N T_j \Psi_{pj}^-(a) = R_p \exp(ik_0 \beta_p a) + \delta_p \exp(-ik_0 \beta_0 a), \quad p = -\overline{N}, \overline{N}, \quad (87)$$

$$\sum_{j=-N}^N T_j \tilde{\Psi}_{pj}^-(a) = R_p \exp(ik_0 \beta_p a) \frac{i\beta_p}{k_0} - \delta_p \exp(-ik_0 \beta_0 a) \frac{i\beta_0}{k_0}, \quad p = -\overline{N}, \overline{N}. \quad (88)$$

Системы линейных уравнений (87), (88) представим в матричном виде:

$$\mathbf{H}_{01} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{H}_{02} \mathbf{R} + \exp(-ik_0 \beta_0 a) \cdot \boldsymbol{\delta}, \quad (89)$$

$$H_{01pj} = \Psi_{pj}^-(a), \quad H_{02pj} = \delta_{p-j} \cdot \exp(ik_0 \beta_p a), \quad p, j = -\overline{N}, \overline{N},$$

$$\mathbf{H}_{11} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{H}_{12} \mathbf{R} - \frac{i\beta_0}{k_0} \exp(-ik_0 \beta_0 a) \cdot \boldsymbol{\delta}, \quad (90)$$

$$H_{11pj} = \tilde{\Psi}_{pj}^-(a), \quad H_{12pj} = \delta_{p-j} \cdot \frac{i\beta_p}{k_0} \exp(ik_0 \beta_p a), \quad p, j = -\overline{N}, \overline{N}.$$

Здесь $\boldsymbol{\delta}$ — вектор столбец, центральный элемент которого равен единице, а остальные элементы равны нулю. Из уравнений (89), (90) получим вектора коэффициентов Рэлея в виде:

$$\mathbf{T} = 2 \exp(-ik_0 \beta_0 a) (\mathbf{H}_{01} - \mathbf{D}_\beta \cdot \mathbf{H}_{11})^{-1} \cdot \boldsymbol{\delta}, \quad (91)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}_{12}^{-1} \mathbf{H}_{11} \cdot \mathbf{T} + \exp(-2ik_0 \beta_0 a) \cdot \boldsymbol{\delta}, \quad (92)$$

где \mathbf{D}_β — диагональная матрица с элементами $k_0 / i\beta_p$, $p = -\overline{N}, \overline{N}$.

3.2. Дифракция на бинарных диэлектрических решетках (ТМ-поляризация)

В случае решетки с непрерывным профилем для решения системы (71) используются численные методы типа метода Рунге — Кутты. Для бинарной решетки коэффициенты Фурье функций $k^2(x, y)$, $1/k^2(x, y)$ (69) не зависят от переменной y :

$$c_n^{(1)} = \begin{cases} \frac{ik_0^2(\varepsilon-1)}{2\pi n} \sum_{j=1}^{2K} (-1)^j \exp\left(-i\frac{2\pi}{d}nx_j\right), & n \neq 0, \\ k_0^2 + \frac{k_0^2(\varepsilon-1)}{d} \sum_{j=1}^{2K} (-1)^j x_j, & n = 0, \end{cases} \quad (93)$$

$$c_n^{(2)} = \begin{cases} \frac{i(1/\varepsilon-1)}{2\pi nk_0^2} \sum_{j=1}^{2K} (-1)^j \exp\left(-i\frac{2\pi}{d}nx_j\right), & n \neq 0, \\ 1/k_0^2 + \frac{(1/\varepsilon-1)}{k_0^2 d} \sum_{j=1}^{2K} (-1)^j x_j, & n = 0, \end{cases} \quad (94)$$

где K — число штрихов решетки, x_1, \dots, x_{2K} — координаты границ штрихов (см. рис. 6). В этом случае поле в зоне модуляции описывается системой дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d}{dy} \begin{pmatrix} \mathbf{H}(y) \\ \tilde{\mathbf{E}}(y) \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{TM} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{H}(y) \\ \tilde{\mathbf{E}}(y) \end{pmatrix}, \quad (95)$$

где $\mathbf{H}(y)$, $\tilde{\mathbf{E}}(y)$ — вектора из функций $H_p(y)$, $\tilde{E}_p(y)$, $p = \overline{-N, N}$, \mathbf{A}^{TM} — матрица системы.

Согласно (71), матрица системы имеет вид

$$\mathbf{A}^{TM} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_0^2 \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{D}_\alpha \mathbf{T}_2 \mathbf{D}_\alpha - \mathbf{E} & 0 \end{pmatrix}, \quad (96)$$

где нули обозначают матрицы с нулевыми элементами, \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 — матрицы вида

$$F_{1i,j} = c_{i-j}^{(1)}, \quad F_{2i,j} = k_0^2 \alpha_i \alpha_j c_{i-j}^{(2)} - \delta_{i-j}, \quad i, j = \overline{-N, N}, \quad (97)$$

\mathbf{T}_1 , \mathbf{T}_2 — матрицы из Фурье коэффициентов функций $\varepsilon(x, y)$ и $1/\varepsilon(x, y)$

$$T_{1i,j} = c_{i-j}^{(1)} / k_0^2, \quad T_{2i,j} = k_0^2 c_{i-j}^{(2)}, \quad i, j = \overline{1, 2N+1}, \quad (98)$$

\mathbf{E} -единичная матрица, \mathbf{D}_α - диагональная матрица с элементами α_i , $i = \overline{-N, N}$.

Отметим, что система (95) $4N+2$ дифференциальных уравнений первого порядка может быть также сведена к системе $2N+1$ дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d^2}{dy^2} \mathbf{H}(y) = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{H}(y) = k_0^2 \mathbf{T}_1 (\mathbf{D}_\alpha \mathbf{T}_2 \mathbf{D}_\alpha - \mathbf{E}) \mathbf{H}(y), \quad (99)$$

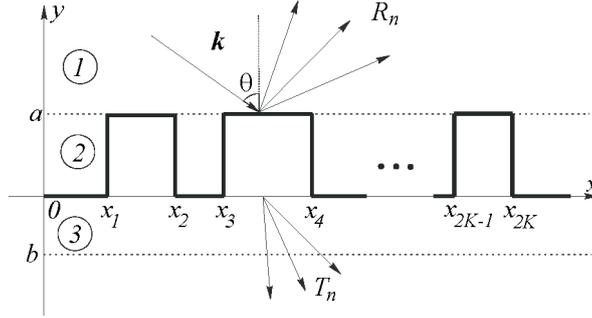


Рис. 6. Геометрия задачи дифракции на бинарной диэлектрической решетке

Решение системы (95) с постоянными коэффициентами для вектора граничных условий \mathbf{X}_0 может быть представлено в компактном матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}(y) \\ \tilde{\mathbf{E}}(y) \end{pmatrix} = \exp(\mathbf{A}^{TM} \cdot y) \mathbf{X}_0. \quad (100)$$

Матричное представление (100) позволяет компактно выразить матрицы \mathbf{H}_{01} и \mathbf{H}_{11} в (91), (92) через матрицу системы и граничные условия в виде:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_{01} \\ \mathbf{H}_{11} \end{pmatrix} = \exp(\mathbf{A}^{TM} \cdot a) \cdot \mathbf{B}\mathbf{C}, \quad (101)$$

где матрица $\mathbf{B}\mathbf{C}$ составлена из второй половины векторов граничных условий (75), (76):

$$\mathbf{B}\mathbf{C} = \left(\begin{pmatrix} \mathbf{H}_{-N}^-(0) \\ \tilde{\mathbf{E}}_{-N}^-(0) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \mathbf{H}_N^-(0) \\ \tilde{\mathbf{E}}_N^-(0) \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad (102)$$

где \mathbf{E} — единичная матрица размера $(2N+1) \times (2N+1)$, а \mathbf{D} — диагональная матрица с элементами $-i\tilde{\beta}_j / k_0 \varepsilon$, $j = \overline{-N, N}$.

Рассмотренный метод решения задачи дифракции на бинарной решетке обладает медленной сходимостью, особенно для случая комплексной диэлектрической проницаемости. Напомним, что система дифференциальных уравнений (95), (96) была получена при учете $2N+1$ членов в разложении функций $H_z(x, y)$, $\tilde{E}_x(x, y)$, $k^2(x, y)$, $1/k^2(x, y)$ в (67) — (69). Медленная сходимость в данном случае означает, что для стабилизации результатов расчета требуется учет большого числа членов в разложении функций $H_z(x, y)$, $\tilde{E}_x(x, y)$, $k^2(x, y)$, $1/k^2(x, y)$, превышающего в десятки раз число распространяющихся порядков

в зонах 1 и 3. При этом для случая ТЕ-поляризации такого эффекта не наблюдалось. В 1996 году в работах [10-12] была предложена другая форма системы дифференциальных уравнений, устраняющая медленную сходимость. В работах [10-12] было предложено вместо системы уравнений (85), (86) использовать систему вида

$$\frac{d}{dy} \begin{pmatrix} \mathbf{H}(y) \\ \tilde{\mathbf{E}}(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_0^2 \mathbf{T}_2^{-1} \\ \mathbf{D}_\alpha \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{D}_\alpha - \mathbf{E} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}(y) \\ \tilde{\mathbf{E}}(y) \end{pmatrix}. \quad (103)$$

Система (103) получается из исходной системы (95), (96) формальной заменой матриц \mathbf{T}_1 , \mathbf{T}_2 на матрицы \mathbf{T}_2^{-1} , \mathbf{T}_1^{-1} , соответственно. Теоретическое обоснование использования системы в виде (103) приведено в работе [12]. В этой работе показано, что система (103) обеспечивает равномерное выполнение граничных условий на вертикальных участках профиля решетки в зоне модуляции. Отметим, что на вертикальных участках нормальная составляющая вектора электрического смещения D_x непрерывна, а компонента E_x терпит разрыв. Система в виде (103) обеспечивает равномерную сходимость по N ряда (68) к функции $\tilde{E}_x(x, y)$ на вертикальных участках профиля, а исходная система (95) – неравномерную. Равномерное выполнение граничных условий на вертикальных участках профиля и приводит к улучшению сходимости метода. Система (103) может быть также представлена в системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d^2}{dy^2} \mathbf{H}(y) = k_0^2 \mathbf{T}_2^{-1} (\mathbf{D}_\alpha \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{D}_\alpha - \mathbf{E}) \mathbf{H}(y). \quad (104)$$

В заключение отметим, что матричное представление (100) для бинарной решетки может быть использовано для решения задачи дифракции на решетке с непрерывным профилем. Действительно, введем разбиение y_i , $i = \overline{0, N}$, $y_0 = 0$, $y_N = a$ зоны модуляции на N слоев. В каждом слое $y_{i-1} \leq y \leq y_i$ непрерывный профиль аппроксимируем бинарным профилем. Полагая при $y_{i-1} \leq y \leq y_i$ в (71) $c_n^{(1)}(y) \approx c_n^{(1)}(\tilde{y}_i)$, $c_n^{(2)}(y) \approx c_n^{(2)}(\tilde{y}_i)$, где $\tilde{y}_i = (y_{i-1} + y_i)/2$, аппроксимируем при $y_{i-1} \leq y \leq y_i$ систему дифференциальных уравнений (71) с переменными коэффициентами системой уравнений с постоянными коэффициентами. Используя матричное представление (100) для решения системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, получим матрицы \mathbf{H}_{01} и \mathbf{H}_{11} в виде

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_{01} \\ \mathbf{H}_{11} \end{pmatrix} = \left(\exp(\mathbf{A}^{TM}(\tilde{y}_N) \cdot (a - y_{N-1})) \times \dots \times \exp(\mathbf{A}^{TM}(\tilde{y}_2) \cdot (y_2 - y_1)) \right) \times \\ \times \exp(\mathbf{A}^{TM}(\tilde{y}_1) \cdot y_1) \cdot \mathbf{BC} = \left(\prod_{i=N}^1 \exp(\mathbf{A}^{TM}(\tilde{y}_i) \cdot (y_i - y_{i-1})) \right) \cdot \mathbf{BC}, \quad (105)$$

где \mathbf{BC} — матрица граничных условий (102), а $\mathbf{A}^{TM}(\tilde{y}_i)$ — матрица системы (71) при $c_n^{(1)}(y) = c_n^{(1)}(\tilde{y}_i)$ и $c_n^{(2)}(y) = c_n^{(2)}(\tilde{y}_i)$. При этом коэффициенты R_n, T_n также определяются по формулам (91), (92). Отметим, что произведение матриц

$$\Omega_N(\mathbf{A}^{TM}) = \prod_{i=N}^1 \exp(\mathbf{A}^{TM}(\tilde{y}_i) \cdot (y_i - y_{i-1})), \quad (106)$$

в пределе, при $\Delta y_i = (y_i - y_{i-1}) \rightarrow 0$ и $N \rightarrow \infty$ соответствует мультипликативно-му интегралу [13], представляющему решение системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Произведение (106) соответствует стандартной аппроксимации мультипликативного интеграла при сведении решения системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами к решению N систем с постоянными коэффициентами [13].

3.3. Дифракция на диэлектрических решетках с непрерывным профилем (ТЕ-поляризация)

Для ТЕ-поляризации ($\mathbf{E}(x, y) = (0, 0, E_z(x, y))$) базовые уравнения (1) примут вид:

$$\begin{aligned} \partial_y E_z(x, y) &= ik_0 H_x(x, y), \\ \partial_x E_z(x, y) &= -ik_0 H_y(x, y), \\ H_z(x, y) &= 0, \\ \partial_z H_y(x, y) &= 0, \\ \partial_z H_x(x, y) &= 0, \\ \partial_x H_y(x, y) - \partial_y H_x(x, y) &= -ik_0 \varepsilon(x, y) E_z(x, y). \end{aligned} \quad (107)$$

Выразим из первых двух уравнений в (107) компоненты $H_x(x, y), H_y(x, y)$:

$$H_x(x, y) = \frac{1}{ik_0} \partial_y E_z(x, y), \quad H_y(x, y) = -\frac{1}{ik_0} \partial_x E_z(x, y). \quad (108)$$

Подставляя $H_x(x, y), H_y(x, y)$ в последнее уравнение в (107), получим для компоненты $E_z(x, y)$ уравнение Гельмгольца:

$$\Delta E_z(x, y) + k^2(x, y) E_z(x, y) = 0. \quad (109)$$

Функция $E_z(x, y)$ является квазипериодической [1,5-9]:

$$E_z(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_m(y) \exp(ik_0 \alpha_m x). \quad (110)$$

Подставляя (110) и (69) в (109), получим систему $2N+1$ дифференциальных уравнений 2-го порядка:

$$\frac{d^2 E_n(y)}{dy^2} - k_0^2 \alpha_n^2 E_n(y) + \sum_{m=-N}^N c_{n-m}^{(1)}(y) E_m(y) = 0, \quad n = \overline{-N, N}. \quad (111)$$

Для поиска общего решения системы (111) необходимо найти $2(2N+1)$ линейно-независимых частных решений. При отсутствии модуляции ($\varepsilon(x, y) = \varepsilon$) базисные решения системы (111) имеют вид

$$E_p^\pm(y) = \exp(\pm ik_0 \tilde{\beta}_p y), \quad p = \overline{-N, N}. \quad (112)$$

Для согласования решения в зоне модуляции с решением (112) в зоне 3, определим $2(2N+1)$ векторов граничных условий для системы (111) в виде

$$\begin{cases} E_{mj}^\mp(0) = \delta_{m-j}, \\ \frac{\partial E_{mj}^\mp(0)}{\partial y} = \mp ik_0 \tilde{\beta}_m \delta_{m-j}, \quad m, j = \overline{-N, N}. \end{cases} \quad (113)$$

При этом общее решение системы (111) принимает вид

$$E_m(y) = \sum_{j=-N}^N C_j^- E_{mj}^-(y) + \sum_{j=-N}^N C_j^+ E_{mj}^+(y), \quad m = \overline{-N, N}, \quad (114)$$

где $E_{mj}^\pm(y)$ решения системы (111) с граничными условиями (113). Подставляя (114) в (110) получим, что в зоне модуляции $E_z(x, y)$ имеет вид:

$$E_z(x, y) = \sum_{m=-N}^N \left(\sum_{j=-N}^N C_j^- E_{mj}^-(y) + \sum_{j=-N}^N C_j^+ E_{mj}^+(y) \right) \exp(ik_0 \alpha_m x). \quad (115)$$

Для определения коэффициентов пропускания T_n и отражения R_n в (46), (48) запишем условия непрерывности тангенциальных компонент поля $E_z(x, y)$ $H_x(x, y) \sim \partial_y E_z(x, y)$ на границах зоны модуляции при $y=0$ и $y=a$. Из условия непрерывности тангенциальных компонент на нижней границе зоны модуляции несложно получить, что, как и в случае ТМ-поляризации, $T_p = C_p^-$, а $C_p^+ = 0$. При этом решение в зоне модуляции принимает вид

$$E(x, y) = \sum_{m=-N}^N \sum_{j=-N}^N T_j E_{mj}^-(y) \exp(ik_0 \alpha_m x). \quad (116)$$

На верхней границе зоны модуляции условия непрерывности тангенциальных компонент поля имеют вид:

$$\begin{aligned} \sum_{m=-N}^N \left(\sum_{j=-N}^N T_j E_{mj}^-(a) \right) \exp(ik_0 \alpha_m x) = \\ = \sum_{m=-N}^N R_m \exp(ik_0 (\alpha_m x + \beta_m a)) + \exp(ik_0 (\alpha_0 x - \beta_0 a)), \end{aligned} \quad (117)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-N}^N \left(\sum_{j=-N}^N T_j \frac{\partial E_{mj}^- (a)}{\partial y} \right) \exp(ik_0 \alpha_m x) = \\ & = ik_0 \sum_{m=-N}^N \beta_m R_m \exp(ik_0 (\alpha_m x + \beta_m a)) - ik_0 \beta_0 \exp(ik_0 (\alpha_0 x - \beta_0 a)). \end{aligned} \quad (118)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях $\exp\left(i\frac{2\pi}{d}mx\right)$, $m = -\overline{N, N}$, получим две системы линейных уравнений вида:

$$\sum_{j=-N}^N T_j E_{pj}^- (a) = R_p \exp(ik_0 \beta_p a) + \delta_p \exp(-ik_0 \beta_0 a), \quad p = -N, N, \quad (119)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=-N}^N T_j \frac{\partial E_{pj}^- (a)}{\partial y} &= ik_0 \beta_p R_p \exp(ik_0 \beta_p a) - \delta_p ik_0 \beta_0 \exp(-ik_0 \beta_0 a), \\ p &= -N, N. \end{aligned} \quad (120)$$

Системы (119), (120) представим в матричном виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{T} &= \mathbf{E}_{02} \mathbf{R} + \exp(-ik_0 \beta_0 a) \boldsymbol{\delta}, \\ E_{01pj} &= E_{pj}^- (a), \quad E_{02pj} = \delta_{p-j} \exp(ik_0 \beta_p a), \quad p, j = -\overline{N, N}, \end{aligned} \quad (121)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{11} \cdot \mathbf{T} &= \mathbf{E}_{12} \mathbf{R} - ik_0 \beta_0 \exp(-ik_0 \beta_0 a) \boldsymbol{\delta}, \\ E_{11pj} &= \frac{\partial E_{pj}^- (a)}{\partial y}, \quad E_{12pj} = \delta_{p-j} ik_0 \beta_p \exp(ik_0 \beta_p a), \quad p, j = -\overline{N, N}. \end{aligned} \quad (122)$$

Из уравнений (121), (122) получим вектора коэффициентов Рэлея в виде:

$$\mathbf{T} = -2ik_0 \beta_0 \exp(-ik_0 \beta_0 a) (\mathbf{E}_{11} - \mathbf{D}_\beta \cdot \mathbf{E}_{01})^{-1} \boldsymbol{\delta}, \quad (123)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{E}_{02}^{-1} \mathbf{E}_{01} \mathbf{T} + \exp(-2ik_0 \beta_0 a) \boldsymbol{\delta}, \quad (124)$$

где \mathbf{D}_β — диагональная матрица с элементами $ik_0 \beta_p$, $p = -\overline{N, N}$, а $\boldsymbol{\delta}$ — вектор столбец, у которого все нули кроме единицы в центре.

3.4. Дифракция на бинарных диэлектрических решетках (ТЕ-поляризация)

Для бинарной решетки коэффициенты Фурье $c_n^{(1)}$ не зависят от переменной y . В этом случае поле в зоне модуляции описывается системой дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

$$\frac{d^2}{dy^2} \mathbf{E}(y) + \mathbf{A}^{TE} \cdot \mathbf{E}(y) = 0, \quad (125)$$

где $\mathbf{E}(y)$ – вектор из функций $E_p(y)$, $p = -\overline{N}, \overline{N}$, \mathbf{A}^{TE} – матрица системы:

$$\mathbf{A}_{i,j}^{TE} = -k_0^2 \alpha_i^2 \delta_{i-j} + c_{i-j}^{(1)}, \quad i, j = -\overline{N}, \overline{N}. \quad (126)$$

Запишем решение системы дифференциальных уравнений (125) для граничного условия с номером m в (113) в матричном виде [13]

$$\mathbf{E}_m^-(y) = \cos(\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \cdot y) \mathbf{E}_m^-(0) + \frac{\sin(\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \cdot y)}{\sqrt{\mathbf{A}^{TE}}} \frac{\partial \mathbf{E}_m^-(0)}{\partial y}. \quad (127)$$

Матричное представление (127) позволяет выразить матрицы \mathbf{E}_{01} и \mathbf{E}_{11} в (123), (124) через матрицу системы (126) и граничные условия (113) в виде

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{01} = \cos(\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \cdot a) \cdot \mathbf{E} + \frac{\sin(\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \cdot a)}{\sqrt{\mathbf{A}^{TE}}} \cdot \mathbf{D}_\beta, \\ \mathbf{E}_{11} = -\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \sin(\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \cdot a) \cdot \mathbf{E} + \cos(\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \cdot a) \cdot \mathbf{D}_\beta, \end{cases} \quad (128)$$

где \mathbf{E} , \mathbf{D}_β — единичная и диагональная матрица с элементами $-ik_0 \beta_j$, $j = -\overline{N}, \overline{N}$.

Матрицы \mathbf{E}_{01} и \mathbf{E}_{11} также можно выразить через матричную экспоненту в виде, аналогичном представлению (101) для случая ТМ-поляризации. Действительно, заменим систему $2N+1$ дифференциальных уравнений 2-го порядка (125) эквивалентной системой $4N+2$ дифференциальных уравнений 1-го порядка и получим

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{01} \\ \mathbf{E}_{11} \end{pmatrix} = \exp(\mathbf{A}_1^{TE} \cdot a) \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{D}\mathbf{E} \end{pmatrix}, \quad (129)$$

где $\mathbf{A}_1^{TE} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{A}^{TE} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, \mathbf{E} — единичная матрица.

Как и для случая ТМ-поляризации, матричные представления (128), (129) для бинарной решетки могут быть использованы для решения задачи дифракции на решетке с непрерывным профилем [5,6]. Действительно, аппроксимируя непрерывный профиль набором N бинарных слоев и используя для расчета дифракции на слое соотношение (129), получим коэффициенты R_n , T_n в виде (123), (124). При

этом матрицы $\mathbf{E}_{01} = \mathbf{E}_{01}(a)$ и $\mathbf{E}_{11} = \mathbf{E}_{11}(a)$ в (123), (124) вычисляются, как и для случая ТМ-поляризации, через мультипликативный интеграл.

3.5. Примеры расчета решеток

В данном пункте мы рассмотрим работу простейших решеток. Под интенсивностями отраженных и прошедших порядков будем понимать следующие нормированные значения квадратов модулей коэффициентов Рэлея [1,5,6]

$$I_n^R = |R_n|^2 \frac{\beta_n}{\beta_0}, \quad I_n^T = \sqrt{\varepsilon} |T_n|^2 \frac{\tilde{\beta}_n}{\beta_0}, \quad \left(\sum_{n \in U_1} I_n^R + \sum_{n \in U_2} I_n^T = 1 \right), \quad (130)$$

$$I_n^R = |R_n|^2 \frac{\beta_n}{\beta_0}, \quad I_n^T = |T_n|^2 \frac{\tilde{\beta}_n}{\sqrt{\varepsilon} \beta_0}, \quad \left(\sum_{n \in U_1} I_n^R + \sum_{n \in U_2} I_n^T = 1 \right) \quad (131)$$

для ТЕ- и ТМ-поляризаций, соответственно. U_1, U_2 в (130), (131) - являются множествами индексов, соответствующих распространяющимся отраженным и прошедшим порядкам;

$$U_1 = \{n \mid \alpha_n^2 < 1\}, \quad U_2 = \{n \mid (\alpha_n / \sqrt{\varepsilon})^2 < 1\}. \quad (132)$$

Эти формулы аналогичны уравнению (39) для случая дифракции на идеально отражающей решетке.

Пример 3. Рассмотрим работу простейшей бинарной решетки с одним штрихом шириной $d/2$ на периоде d . На рис. 7 приведены графики интенсивностей 0-го отраженного и 0-го и -1-го прошедших порядков в зависимости от высоты штриха a для случая ТЕ-поляризации. Расчет интенсивностей порядков проводился по формулам (123), (124), (129) при следующих параметрах: $d=\lambda_0$, угол падения $\theta=30^\circ$, $\varepsilon=2,25$. Рис. 7 показывает ряд интересных моментов в работе бинарной решетки. Во-первых, при высоте штриха $a \sim 0,8\lambda_0$ энергия равномерно распределена между 0-ым и +1-ым прошедшими порядками, то есть при данной высоте решетку можно использовать в качестве делителя пучка. Во-вторых, при высоте штриха $a \approx 1,6\lambda_0$ около 95% энергии падающей волны перетекает из 0-го в -1-ый прошедший порядок, то есть при данной высоте решетку можно использовать как дефлектор (отклонитель) пучка. По общему виду графиков на рис. 7 можно также предположить, что интенсивности прошедших 0-го и -1-го порядков меняются периодически.

На рис. 8 приведена зависимость интенсивностей порядков бинарной решетки от высоты штриха для случая ТМ-поляризации. Для ТМ-поляризации бинарная решетка работает как делитель пучка при высоте штриха $a \sim \lambda_0$. При $a \sim 2\lambda_0$ более 95% энергии падающей волны содержится в -1-ом прошедшем порядке, то есть решетка работает как дефлектор пучка.

Пример 4. Рассмотрим работу решетки с треугольным профилем

$$f(x) = \begin{cases} ax/d_1, & x \in [0, d_1], \\ -a(x-d)/(d-d_1)+a, & x \in [d, d_1], \end{cases} \quad (133)$$

где d_1 — абсцисса вершины решетки.

На рис. 9 — 11 для ТМ-поляризации приведены интенсивности порядков для симметричной треугольной решетки ($d_1 = d/2$), для правой пилообразной решетки ($d_1 = d$) и для левой пилообразной решетки ($d_1 = 0$). Расчет интенсивностей порядков проводился по формулам (91), (92), (105) при периоде $d = \lambda_0$, угле падения $\theta = 30^\circ$ и $\varepsilon = 2,25$. При расчетах треугольный профиль был аппроксимирован шестнадцатью бинарными слоями, что соответствует квантованию треугольного профиля решетки по 17 уровням. Из рис. 9 можно видеть,

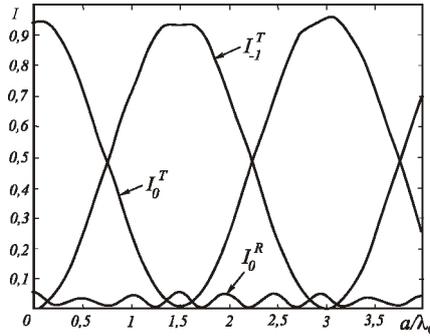


Рис. 7. Зависимость интенсивностей -1 -го и 0 -го прошедших (I_{-1}^T, I_0^T) и 0 -го отраженного (I_0^R) порядков бинарной решетки от высоты штриха для ТЕ-поляризации при $d = \lambda_0, \theta = 30^\circ, \varepsilon = 2,25$

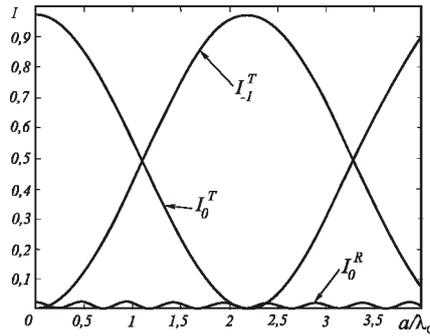


Рис. 8. Зависимость интенсивностей -1 -го и 0 -го прошедших (I_{-1}^T, I_0^T) и 0 -го отраженного (I_0^R) порядков бинарной решетки от высоты штриха для ТМ-поляризации при $d = \lambda_0, \theta = 30^\circ, \varepsilon = 2,25$

что при высоте профиля $a \approx 1,7\lambda$ энергия равномерно распределена между 0 -ым и -1 -ым прошедшими порядками и решетка работает как делитель пучка. При $a \sim 3,4\lambda$ более 95% энергии содержится в -1 -ом прошедшем порядке, то есть при данной высоте решетка работает как deflectор пучка. Таким образом, симметричная треугольная и бинарные решетки на рис. 7, 8 обладают свойствами делить пучок и собирать энергию в -1 порядке. Для симметричной треугольной решетки данные эффекты происходят при примерно в полтора раза большей высоте профиля.

Графики интенсивностей порядков для правой и левой пилообразных решеток на рис. 10, 11 показывают, что, варьируя высотой профиля, нельзя сконцентрировать энергию в -1 -ом прошедшем порядке. Таким

образом, несимметричные пилообразные решетки не могут быть использованы как deflectors пучка. При этом левая пилообразная решетка (рис. 11) в отличие от правой пилообразной решетки (рис. 10) не позволяет равномерно распределить энергию между 0-ым и -1-ым прошедшими порядками.

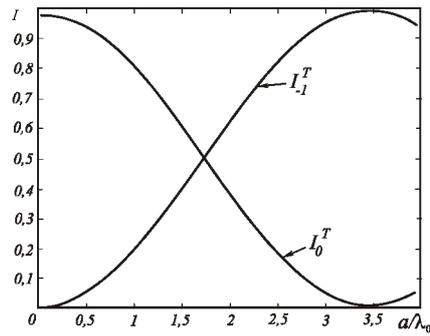


Рис. 9. Зависимость интенсивностей -1-го и 0-го прошедших порядков (I_{-1}^T, I_0^T) симметричной треугольной решетки от высоты профиля для ТМ-поляризации при $d = \lambda_0, \theta = 30^\circ, \varepsilon = 2,25$

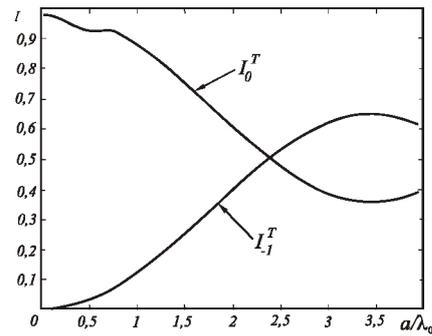


Рис. 10. Зависимость интенсивностей -1-го и 0-го прошедших порядков (I_{-1}^T, I_0^T) правой пилообразной решетки от высоты птриха для ТМ-поляризации при $d = \lambda_0, \theta = 30^\circ, \varepsilon = 2,25$

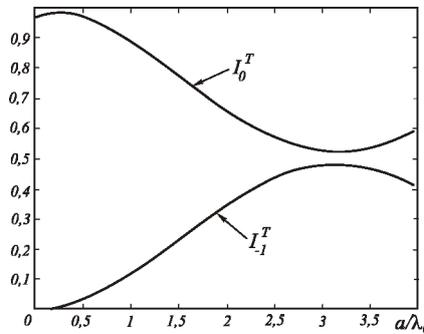


Рис. 11. Зависимость интенсивностей -1-го и 0-го прошедших порядков (I_{-1}^T, I_0^T) левой пилообразной решетки от высоты птриха для ТМ-поляризации при $d = \lambda_0, \theta = 30^\circ, \varepsilon = 2,25$

4. ГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАСЧЕТА ДИФРАКЦИОННЫХ РЕШЕТОК

4.1. Расчет отражающих решеток со ступенчатым профилем

Решение прямой задачи дифракции на решетке со ступенчатым профилем, изготовленной из идеально проводящего материала, приведено в разделе 1. В данном пункте рассматривается градиентный метод решения обратной задачи, состоящей в расчете параметров $(x_1, \dots, x_K, c_1, \dots, c_K, h_1, \dots, h_K)$ профиля решетки (см. рис. 1) из условия формирования заданных значений интенсивностей дифракционных порядков [5,6,14]. Интенсивности порядков определены в уравнении (40) и пропорциональны квадратам модулей коэффициентов Рэлея.

Для построения градиентной процедуры расчета профиля дифракционной решетки введем некоторую функцию ошибки $\varepsilon(\mathbf{p})$, характеризующую отличие рассчитанных значений интенсивности I_n в дифракционных порядках от требуемых значений \tilde{I}_n :

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{I}(\mathbf{p}), \tilde{\mathbf{I}}), \quad (134)$$

где $\mathbf{p} = (x_1, \dots, x_K, c_1, \dots, c_K, h_1, \dots, h_K)$ — вектор параметров, K — число штрихов на периоде решетки, $\mathbf{I} = (I_n)_{-M}^M$, $\tilde{\mathbf{I}} = (\tilde{I}_n)_{-M}^M$ — вектора рассчитанных и требуемых значений интенсивности порядков. Градиентная процедура минимизации функции ошибки $\varepsilon(\mathbf{p})$ состоит в итерационной коррекции параметров профиля по правилу

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{p}_n - t \cdot \nabla \varepsilon(\mathbf{p}), \quad (135)$$

где n — номер итерации, t — шаг градиентного алгоритма,

$$\nabla \varepsilon(\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial x_K}, \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial c_1}, \dots, \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial c_K}, \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial h_1}, \dots, \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial h_K} \right) — \text{градиент функции}$$

ошибки. Рассмотрим вычисление градиента функции ошибки $\nabla \varepsilon(\mathbf{p})$. Согласно (134), (40), элементы вектора градиента $\partial \varepsilon(\mathbf{p}) / \partial p_i$, где p_i — компонента x_i , c_i или h_i вектора \mathbf{p} , имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial p_i} &= \sum_{j=-M}^M \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{L}, \tilde{\mathbf{I}})}{\partial I_j} \frac{\partial I_j(\mathbf{p})}{\partial p_i} = \sum_{j=-M}^M \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{L}, \tilde{\mathbf{I}})}{\partial I_j} \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{\beta_j}{\beta_0} R_j \cdot R_j^* \right) = \\
&= 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{j=-M}^M \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{L}, \tilde{\mathbf{I}})}{\partial I_j} \frac{\beta_j}{\beta_0} R_j^* \frac{\partial R_j(\mathbf{p})}{\partial p_i} \right). \tag{136}
\end{aligned}$$

Уравнение (136) удобно представить в виде реальной части скалярного произведения

$$\frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial p_i} = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{p})}{\partial p_i}, \mathbf{L} \right), \tag{137}$$

векторов

$$\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{p})}{\partial p_j} = \left(\frac{\partial R_j(\mathbf{p})}{\partial p_i} \right)_{-M}^M, \quad \mathbf{L} = (L_j)_{-M}^M, \quad L_j = \sum_{j=-M}^M \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{L}, \tilde{\mathbf{I}})}{\partial I_j} \frac{\beta_j}{\beta_0} R_j. \tag{138}$$

Коэффициенты Рэлея R_j в (138) определяются из решения системы линейных уравнений (25). Для расчета вектора производных коэффициентов Рэлея в (137) продифференцируем систему (25) по переменной p_i :

$$\frac{\partial (\mathbf{A}\mathbf{A} \cdot \mathbf{R})}{\partial p_i} = \frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{A}}{\partial p_i} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{A}\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial p_i} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial p_i}. \tag{139}$$

Согласно (139), вектор производных имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial p_i} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{A}}{\partial p_i} \cdot \mathbf{R} \right). \tag{140}$$

Таким образом, компоненты градиента функции ошибки вычисляются по формулам (137), (138), (140). Матрицы $\mathbf{A}\mathbf{A}$, $\frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{A}}{\partial p_i}$ и вектора \mathbf{R} , \mathbf{D} , $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial p_i}$ в (140) рассчитываются из уравнений (22) — (25) для случая ТЕ-поляризации и из уравнений (25), (36) — (38) для случая ТМ-поляризации. В частности, для случая ТЕ-поляризации производные $\frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{A}}{\partial p_i}$ и $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial p_i}$ могут быть получены из (23) — (25) в виде

$$\frac{\partial D_p}{\partial p_i} = \frac{\partial A A_{p0}}{\partial p_i}, \tag{141}$$

$$\frac{\partial A A_{ps}}{\partial x_i} = -\beta_s \frac{2k^2}{d} (\alpha_s - \alpha_p) c_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}(\mu_n h_i)}{\mu_n} D D'_{ns} (D D'_{np})^*, \tag{142}$$

$$\frac{\partial A A_{ps}}{\partial h_i} = \beta_s \frac{2ik}{d} c_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cos^2(\mu_n h_i)} D D'_{ns} (D D'_{np})^*, \tag{143}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A A_{ps}}{\partial c_l} = & \\ = \beta_s \frac{2ik}{d} \sum_{n=1}^{\infty} & \left(\frac{\operatorname{tg}(\mu_n h_l)}{\mu_n} + \frac{\pi n (-\sin(2\mu_n h_l) + 2\mu_n h_l)}{2c_l^2 \mu_n^3 \cos^2(\mu_n h_l)} \right) DD_{ns}' (DD_{np}')^* + \\ + ic_l \frac{\operatorname{tg}(\mu_n h_l)}{\mu_n} & (\alpha_s - \alpha_p) \cdot MD_{ns}' \cdot (DD_{np}')^* \end{aligned} \quad (144)$$

$$\text{где } MD_{mn}' = \frac{1}{k} \exp(ik\alpha_n x_l) \int_0^k \sin\left(\frac{\pi m}{k} \xi\right) \exp(i\alpha_n c_l \xi) d\xi. \quad (145)$$

Для ТМ-поляризации расчет производных $\partial \mathbf{AA}/\partial p_i$, $\partial \mathbf{D}/\partial p_i$ аналогичен и состоит в дифференцировании уравнений (36) — (38).

Для исследования целесообразности расчета решеток в рамках электромагнитной теории оценим работоспособность решеток, рассчитанных в приближении Кирхгофа для формирования $M = 2N + 1$ равных порядков. Для характеристики работы решеток будем использовать значения энергетической эффективности

$$E(M) = \sum_{j=-N}^N I_j \quad (146)$$

и среднеквадратичной ошибки формирования заданной равной интенсивности порядков

$$\delta(M) = \frac{1}{\bar{I}} \left[\frac{1}{M} \sum_{j=-N}^N (I_j - \bar{I})^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (147)$$

где $\bar{I} = E(M)/M$ — среднее значение интенсивности.

Пример 5. Для исследования была выбрана 11-порядковая бинарная дифракционная решетка с глубиной штрихов $h = \lambda/4$ и с координатами штрихов $(x_1, c_1) = (0, 0,06857)$, $(x_2, c_2) = (0,20885, 0,23582)$, $(x_3, c_3) = (0,5293, 0,19171)$, $(x_4, c_4) = (0,72854, 0,13583)$. Приведенные координаты штрихов нормированы на период решетки. Данная решетка в скалярном приближении имеет энергетическую эффективность $E = 76,6\%$ при среднеквадратичной ошибке δ менее 1% [15]. Для оценки применимости скалярного приближения Кирхгофа был проведен расчет интенсивностей порядков при следующих размерах периода d : $7,2\lambda$, $15,2\lambda$, $25,2\lambda$, $35,2\lambda$. Расчет проводился для случая ТЕ-поляризации по формулам (22) — (25) при нормальном падении плоской волны. Значения среднеквадратичной ошибки δ и энергетической эффективности E составили 30,2% и 83,8% при $d = 7,2\lambda$, 17% и 78,9% при $d = 15,2\lambda$, 12,1% и 78,5% при $d = 25,2\lambda$, 10,6% и 83,8% при $d = 35,2\lambda$. Результаты расчетов показывают, что

для 11-порядковой решетки при периоде $d > 25\lambda$ ошибка $\delta \sim 10\%$ и скалярное приближение дает приемлемую точность. В то же время при $d = 7,2\lambda$ расчет в скалярном приближении приводит к значительной ошибке $\delta > 30\%$. Приведенный пример демонстрирует актуальность точных процедур синтеза решеток в рамках электромагнитной теории при малых (относительно длины волны) периодах.

Пример 6. Градиентный метод (135), (137), (140) был использован для расчета бинарных решеток с равными порядками. В качестве функции ошибки использовалась квадратичная функция

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \sum_{j=-N}^N (I_j(\mathbf{p}) - \tilde{I}_j)^2. \quad (148)$$

В таблице 1 приведены результаты расчета решеток при нормальном падении плоской волны для случая ТЕ-поляризации. Данные таблицы 1 показывают работоспособность градиентного метода. В частности, рассчитанная для $d = 7,2\lambda$ 11-порядковая решетка, в отличие от решетки рассчитанной в скалярном приближении, имеет в 4 раза меньшую среднеквадратичную ошибку δ . Градиентный метод позволяет рассчитывать не только бинарные решетки, но и решетки с различной глубиной штрихов. В качестве примера была рассчитана 5-порядковая решетка. Решетка имеет на периоде $d = 3,2\lambda$ два штриха с глубиной $0,1\lambda$ и $0,2584\lambda$ и с координатами $(x_1, c_1) = (0,034224, 0,173889)$, $(x_2, c_2) = (0,465776, 0,308846)$. Значения энергетической эффективности E и среднеквадратичной ошибки δ для этой решетки составили $89,6\%$ и $2,9\%$. Оптимизация с учетом глубины штрихов h_i позволяет достичь высокой энергетической эффективности и малой ошибки δ при существенно большей ширине минимального штриха $\Delta = \min_i (c_i, x_{i+1} - (x_i + c_i))$. В частности, 5-порядковая решетка со штрихами разной глубины имеет почти такие же значения E и δ , как бинарная решетка в таблице 1, но при почти в 2 раза большей величине минимального штриха.

4.2. Расчет диэлектрических бинарных решеток

В разделе 3 приведено решение прямой задачи дифракции на диэлектрической решетке. В данном пункте рассмотрен градиентный метод решения обратной задачи расчета бинарной диэлектрической решетки [5,6,16,17]. Метод состоит в расчете координат штрихов профиля (рис. 6) из условия формирования заданных интенсивностей дифракционных порядков. Отметим, что метод решения прямой задачи в разделе 3 позволяет моделировать решетки, изготовленные из материала с комплексной диэлектрической проницаемостью. Поэтому обратную задачу можно формулировать как для прошедших, так и для отраженных порядков. Рассмотрим для определенности расчет координат

штрихов профиля из условия формирования заданных интенсивностей порядков \tilde{I}_n , $n = -M, M$, соответствующих прошедшим волнам в (58). Интенсивности порядков пропорциональны квадратам модулей коэффициентов пропускания T_n

$$I_n = t_n \cdot |T_n|^2, \quad (149)$$

где коэффициенты t_n определены в уравнениях (130), (131).

Таблица 1. Результаты расчета бинарных отражающих решеток в рамках электромагнитной теории

Число порядков	Число штрихов	Период (d/λ)	Глубина штрихов (h/λ)	Нормированные координаты штрихов $(x_i, c_i) / d$	Энергетическая эффективность E (%)	Среднеквадратичная ошибка δ (%)
3	1	3,2		(0, 0,5)	92	0
5	2	3,2	0,25	(0, 0,089204), (0,397067, 0,29625)	87,2	3,5
7	2	3,2	0,2241	(0,098974, 0,453849), (0,751026, 0,146244)	99,4	1,9
9	3	5,2	0,2450	(0,117498, 0,095706), (0,401101, 0,066281), (0,643485, 0,289262)	91,2	4,1
11	5	7,2	0,2363	(0,043523, 0,030163), (0,196521, 0,094899), (0,331266, 0,013970), (0,381802, 0,161684), (0,651364, 0,282746)	86,5	7,5

Расчет профиля решетки состоит в градиентной минимизации функции ошибки (134), представляющей отличие рассчитанных значений интенсивности (вектор \mathbf{I}) в порядках от требуемых значений (вектор $\tilde{\mathbf{I}}$). Градиентная минимизация функции ошибки состоит в итерационной коррекции координат штрихов (вектора $\mathbf{p} = (x_1, \dots, x_{2K})$) по правилу (135). Рассмотрим вычисление градиента функции ошибки $\nabla \varepsilon(\mathbf{p})$ для случая ТМ-поляризации. Согласно (134), частные производные $\partial \varepsilon(\mathbf{p}) / \partial x_m$ имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial x_m} &= \sum_{j=-M}^M \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}})}{\partial I_j} \frac{\partial I_j(\mathbf{p})}{\partial x_m} = \\ &= 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{j=-M}^M \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}})}{\partial I_j} t_j T_j^* \frac{\partial T_j(\mathbf{p})}{\partial x_m} \right) = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{p})}{\partial x_m}, \mathbf{L} \right), \end{aligned} \quad (150)$$

где

$$\frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{p})}{\partial x_m} = \left(\frac{\partial T_j(\mathbf{p})}{\partial x_m} \right)_{-M}^M, \quad \mathbf{L} = (L_j)_{-M}^M, \quad L_j = \sum_{j=-M}^M \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}})}{\partial I_j} t_j T_j. \quad (151)$$

Согласно (131), коэффициенты t_j в (150), (151) имеют вид

$$t_j = \frac{\tilde{\beta}_n}{\sqrt{\varepsilon} \beta_0}. \quad (152)$$

Для расчета вектора производных $\partial \mathbf{T}(\mathbf{p}) / \partial x_m$ в (150) продифференцируем уравнение (91):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_m} &= \frac{\partial}{\partial x_m} \left(2 \exp(-ik_0 \beta_0 a) \cdot (\mathbf{H}_{01} - \mathbf{D}_\beta \mathbf{H}_{11})^{-1} \delta \right) = \\ &= -(\mathbf{H}_{01} - \mathbf{D}_\beta \mathbf{H}_{11})^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{H}_{01}}{\partial x_m} - \mathbf{D}_\beta \frac{\partial \mathbf{H}_{11}}{\partial x_m} \right) \mathbf{T}. \end{aligned} \quad (153)$$

Для расчета производных $\partial \mathbf{H}_{01} / \partial x_m$, $\partial \mathbf{H}_{11} / \partial x_m$ воспользуемся аналитическим представлением матриц \mathbf{H}_{01} , \mathbf{H}_{11} в (101). Дифференцируя (101), получим

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \frac{\partial \mathbf{H}_{01}}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \mathbf{H}_{11}}{\partial x_m} \end{array} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\exp(\mathbf{A}^{TM} \cdot a) \cdot \mathbf{B}\mathbf{C} \right) = \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} (\mathbf{A}^{TM})^n \right) \cdot \mathbf{B}\mathbf{C} = \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \frac{\partial}{\partial x_m} (\mathbf{A}^{TM})^n \right) \cdot \mathbf{B}\mathbf{C}, \end{aligned} \quad (154)$$

где

$$\frac{\partial (\mathbf{A}^{TM})^n}{\partial x_m} = \sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{A}^{TM})^{n-j-1} \frac{\partial \mathbf{A}^{TM}}{\partial x_m} (\mathbf{A}^{TM})^j. \quad (155)$$

При численном расчете производные $\frac{\partial (\mathbf{A}^{TM})^n}{\partial x_m}$ в (154) следует вычислять с использованием рекуррентной формулы

$$\frac{\partial}{\partial x_m} (\mathbf{A})^n = \mathbf{A} \cdot \frac{\partial}{\partial x_m} (\mathbf{A})^{n-1} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_m} \cdot (\mathbf{A})^{n-1}. \quad (156)$$

При этом расчет производных матриц \mathbf{H}_{01} и \mathbf{H}_{11} по порядку сложности эквивалентен вычислению экспоненты в степени матрицы через ряд. Для расчета производной $\partial \mathbf{A}^{TM} / \partial x_m$ воспользуемся представлением матрицы \mathbf{A}^{TM} в уравнении (96). Дифференцируя (96), получим

$$\frac{\partial \mathbf{A}^{TM}}{\partial x_m} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x_m} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (157)$$

где матрицы $\partial \mathbf{F}_1 / \partial x_m$, $\partial \mathbf{F}_2 / \partial x_m$ имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x_m} = \frac{\partial c_{l-j}^{(1)}}{\partial x_m} = (-1)^m \frac{k_0^2 (\varepsilon - 1)}{d} \exp\left(-i \frac{2\pi}{d} (l-j)x_m\right), \quad l, j = -\overline{N, N}, \quad (158)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x_m} &= k_0^2 \alpha_{-(N+1)+l} \alpha_{-(N+1)+j} \frac{\partial c_{l-j}^{(2)}}{\partial x_m} = \alpha_{-(N+1)+l} \alpha_{-(N+1)+j} \times \\ &\times (-1)^m \frac{(1/\varepsilon - 1)}{d} \exp\left(-i \frac{2\pi}{d} (l-j)x_m\right), \quad l, j = -\overline{N, N}. \end{aligned} \quad (159)$$

Таким образом, компоненты градиента функции ошибки имеют вид реальной части скалярного произведения:

$$\frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial x_m} = 2 \operatorname{Re} \left(\left(\mathbf{H}_{01} - \mathbf{D}_\beta \cdot \mathbf{H}_{11} \right)^{-1} \left(\mathbf{D}_\beta \frac{\partial \mathbf{H}_{11}}{\partial x_m} - \frac{\partial \mathbf{H}_{01}}{\partial x_m} \right) \mathbf{T}, \mathbf{L} \right), \quad (160)$$

где вектор \mathbf{T} определен в (91), вектор \mathbf{L} определен в (151), матрицы \mathbf{H}_{01} и \mathbf{H}_{11} аналитически выражаются через матрицу системы (96) и граничные условия (75) в виде (101), а матрицы производных $\partial \mathbf{H}_{01} / \partial x_m$, $\partial \mathbf{H}_{11} / \partial x_m$ определены в уравнениях (154) — (159).

Отметим, что высота бинарного профиля a также может рассматриваться как параметр оптимизации. Производная функции ошибки по параметру a также имеет вид (160), где матрицы $\partial \mathbf{H}_{01} / \partial a$, $\partial \mathbf{H}_{11} / \partial a$ могут быть получены из (101) в виде

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{H}_{01}}{\partial a} \\ \frac{\partial \mathbf{H}_{11}}{\partial a} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial a} \left(\exp(\mathbf{A}^{TM} \cdot a) \cdot \mathbf{BC} \right) = \mathbf{A}^{TM} \cdot \exp(\mathbf{A}^{TM} \cdot a) \cdot \mathbf{BC}. \quad (161)$$

Рассмотрим вычисление градиента функционала невязки $\nabla \varepsilon(\mathbf{p})$ для случая ТЕ-поляризации. Для ТЕ-поляризации компоненты вектора градиента для функции ошибки также имеют вид (150), (151), где вектор \mathbf{T} определен в (123), а коэффициенты t_j имеют вид

$$t_j = \sqrt{\varepsilon} \frac{\beta_n}{\beta_0}. \quad (162)$$

Для вычисления производных $\partial \mathbf{T}(\mathbf{p}) / \partial x_m$ в (150) продифференцируем уравнение (123):

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_m} = -(\mathbf{E}_{11} - \mathbf{D}_\beta \cdot \mathbf{E}_{01})^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{E}_{11}}{\partial x_m} - \mathbf{D}_\beta \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_{01}}{\partial x_m} \right) \mathbf{T}. \quad (163)$$

Для расчета производных $\partial \mathbf{E}_{01} / \partial x_m$, $\partial \mathbf{E}_{11} / \partial x_m$ от матриц \mathbf{E}_{01} и \mathbf{E}_{11} воспользуемся аналитическими представлениями (128). Согласно (128), матрицы $\partial \mathbf{E}_{01} / \partial x_m$, $\partial \mathbf{E}_{11} / \partial x_m$ имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}_{01}}{\partial x_m} &= \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\cos(\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \cdot a) \mathbf{E} + \frac{\sin(\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \cdot a)}{\sqrt{\mathbf{A}^{TE}}} \mathbf{D}_\beta \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n}}{(2n)!} (\mathbf{A}^{TE})^n \right) \mathbf{E} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} (\mathbf{A}^{TE})^n \right) \mathbf{D}_\beta \right) = \end{aligned} \quad (164)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial (\mathbf{A}^{TE})^n}{\partial x_m} \right) \mathbf{E} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\partial (\mathbf{A}^{TE})^n}{\partial x_m} \right) \mathbf{D}_\beta,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}_{11}}{\partial x_m} &= \frac{\partial}{\partial x_m} \left(-\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \sin(\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \cdot a) \mathbf{E} + \cos(\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \cdot a) \mathbf{D}_\beta \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n-1}}{(2n-1)!} (\mathbf{A}^{TE})^n \right) \mathbf{E} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n}}{(2n)!} (\mathbf{A}^{TE})^n \right) \mathbf{D}_\beta \right) = \end{aligned} \quad (165)$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n-1}}{(2n-1)!} \frac{\partial (\mathbf{A}^{TE})^n}{\partial x_m} \right) \mathbf{E} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial (\mathbf{A}^{TE})^n}{\partial x_m} \right) \mathbf{D}_\beta,$$

$$\text{где } \frac{\partial (\mathbf{A}^{TE})^n}{\partial x_m} = \sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{A}^{TE})^{n-j-1} \frac{\partial \mathbf{A}^{TE}}{\partial x_m} (\mathbf{A}^{TE})^j. \quad (166)$$

При численном расчете производные $\partial (\mathbf{A}^{TE})^n / \partial x_m$ в (164), (165) также следует вычислять по рекуррентной формуле (166). В этом случае расчет производных матриц \mathbf{E}_{01} и \mathbf{E}_{11} по порядку сложности эквивалентен вычислению через ряд косинуса и синуса от матрицы. Матрица $\partial \mathbf{A}^{TE} / \partial x_m$ в (164), (165) может быть получена из (126) в виде

$$\frac{\partial \mathbf{A}^{TE}}{\partial x_m} = \frac{\partial c_{l-j}^{(1)}}{\partial x_m} = (-1)^m \frac{k_0^2 (\varepsilon - 1)}{d} \exp\left(-i \frac{2\pi}{d} (l-j) x_m\right), \quad l, j = \overline{-N, N}. \quad (167)$$

Таким образом, для случая ТЕ-поляризации компоненты вектора градиента $\varepsilon(\mathbf{p})$ имеют вид

$$\frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial x_m} = 2 \operatorname{Re} \left((\mathbf{E}_{11} - \mathbf{D}_\beta \cdot \mathbf{E}_{01})^{-1} \left(\mathbf{D}_\beta \frac{\partial \mathbf{E}_{01}}{\partial x_m} - \frac{\partial \mathbf{E}_{11}}{\partial x_m} \right) \mathbf{T}, \mathbf{L} \right), \quad (168)$$

где вектор \mathbf{T} определен уравнением (123), вектор \mathbf{L} определен уравнениями (151), (162), матрицы \mathbf{E}_{01} и \mathbf{E}_{11} аналитически выражаются через матрицу системы (126) и граничные условия (113) в виде (128), а матрицы производных $\partial\mathbf{E}_{01}/\partial x_m$, $\partial\mathbf{E}_{11}/\partial x_m$ определены уравнениями (164), (165).

При минимизации функции невязки с учетом высоты профиля производная $\partial\varepsilon(\mathbf{p})/\partial a$ также имеет вид (168), где матрицы $\partial\mathbf{E}_{01}/\partial a$, $\partial\mathbf{E}_{11}/\partial a$ могут быть получены из (128) в виде

$$\frac{\partial\mathbf{E}_{01}}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \left(\cos(\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \cdot a) \mathbf{E} + \frac{\sin(\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \cdot a)}{\sqrt{\mathbf{A}^{TE}}} \mathbf{D}_\beta \right) =$$

$$= -\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \sin(\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \cdot a) \mathbf{E} + \cos(\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \cdot a) \mathbf{D}_\beta, \quad (169)$$

$$\frac{\partial\mathbf{E}_{11}}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \left(-\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \sin(\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \cdot a) \mathbf{E} + \cos(\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \cdot a) \mathbf{D}_\beta \right) =$$

$$= -\mathbf{A}^{TE} \cdot \cos(\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \cdot a) \mathbf{E} - \sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \sin(\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \cdot a) \mathbf{D}_\beta. \quad (170)$$

Для исследования целесообразности расчета диэлектрических решеток в электромагнитном приближении был проведен анализ работы решеток, рассчитанных в приближении Кирхгофа для формирования $M=2N+1$ равных порядков. Для характеристики работы решеток были использованы значения энергетической эффективности E (146) и среднеквадратичной ошибки δ формирования заданной равной интенсивности порядков (147).

Пример 7. Для исследования были выбраны 11 и 7-порядковые дифракционные решетки с глубиной штриха, соответствующей фазе π , и с координатами штрихов $(x_1, x_2) = (0, 0,06857)$; $(x_3, x_4) = (0,20885, 0,44467)$; $(x_5, x_6) = (0,5293, 0,72101)$; $(x_7, x_8) = (0,72854, 0,86437)$ и $(x_1, x_2) = (0, 0,23191)$; $(x_3, x_4) = (0,42520, 0,52571)$, соответственно. Приведенные координаты штрихов нормированы на период решетки. Согласно [15], в скалярном приближении данные решетки формируют 11 и 7 порядков с энергетическими эффективностями $E(11)=76,6\%$ и $E(7) = 78,6\%$ при неравномерности интенсивности порядков менее 1%. В таблице 2 для указанных решеток приведены значения E и δ , рассчитанные в рамках электромагнитной теории при различных длинах периода. Значения E и δ в таблице 2 приведены парами и соответствуют случаям ТМ- и ТЕ-поляризации. Расчет интенсивности прошедших порядков проводился по формулам (91), (101) и (123), (128) при $\varepsilon = 2,25$ и $\theta = 0$. Согласно данным таблицы 2, 11-порядковая решетка фактически неработоспособна при периоде $d < 20\lambda_0$. При этом δ становится менее 10% только при $d > 50\lambda_0$. Для 7-порядковой решетки ошибка становится менее 10% уже при $d > 20\lambda_0$. Лучшая работа 7-порядковой решетки при малых значениях d/λ_0 объясняется большим

размером штрихов. В частности, для 11-порядковой решетки минимальная ширина штриха $\Delta = 0,008d$, а для 7-порядковой решетки $\Delta = 0,1d$. Проведенный расчет демонстрирует актуальность точных процедур синтеза решеток.

Таблица 2. Характеристики работы решеток, рассчитанных в скалярном приближении ($\epsilon = 2,25$; $\theta = 0$)

Период решетки (d/λ_0)	11-порядковая решетка		7-порядковая решетка	
	E(%)(TM/TE)	δ (%)(TM/TE)	E(%)(TM/TE)	δ (%)(TM/TE)
5.5	90,3 / 82,9	95,9 / 144,0	81,3 / 79,0	35,8 / 38,2
10	78,9 / 77,6	42,7 / 52,3	76,2 / 75,9	19,6 / 22,2
15	75,9 / 75,9	28,6 / 34,2	75,9 / 75,5	13,4 / 14,1
20	75,4 / 75,4	22,4 / 25,1	75,6 / 75,5	11,4 / 11,7
25	74,9 / 74,8	18,0 / 20,4	75,5 / 75,4	9,1 / 8,4
30	74,6 / 74,6	16,3 / 16,9	75,5 / 75,4	7,8 / 7,1
50	74,0 / 74,0	9,9 / 8,6	75,4 / 75,4	4,8 / 4,1

Пример 8. Разработанный градиентный метод был использован для расчета бинарных диэлектрических решеток ($\epsilon = 2,25$) с равными порядками. В качестве функции невязки была использована квадратичная функция ошибки (148). В таблице 3 приведены результаты расчетов решеток с периодом $d=5,5\lambda_0$ при нормальном падении для случаев ТЕ- и ТМ-поляризации. Данные таблицы 3 показывают, что точный электромагнитный расчет дает решетки, существенно отличающиеся от ранее рассмотренных 11-порядковой и 7-порядковой решеток, рассчитанных в скалярном приближении. Использование градиентной процедуры в рамках электромагнитной теории позволяет, как и в скалярном случае, снизить среднеквадратичную ошибку δ до 1 — 5%, но при большей на 5 — 10% энергетической эффективности [5,6, 16—20]. В частности, рассчитанные 11-порядковые решетки с 3 штрихами, имеют энергетическую эффективность более 90%.

Пример 9. В скалярном приближении распределение интенсивности в порядках дифракции бинарной решетки может быть только симметричным. Примеры электромагнитного расчета поля от простейших решеток в пункте 3 показывают, что при $d=\lambda_0$, $\theta = 30^\circ$, симметричные решетки позволяют сконцентрировать излучение в -1 -ом порядке [21]. Такая асимметрия возможна не только при малых периодах. В таблице 4 приведены результаты градиентного расчета бинарных дефлекторов с максимумом в -1 -ом порядке при нормальном падении для случая ТЕ-поляризации. В качестве функции ошибки была использована квадратичная функция ошибки

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = (1 - I_{-1}(\mathbf{p}))^2 \rightarrow \min. \quad (171)$$

Таблица 3. Результаты градиентного расчета бинарных диэлектрических решеток в рамках электромагнитной теории ($d = 5,5\lambda_0$; $\varepsilon = 2,25$; $\theta = 0$)

Число порядков M	Число штрихов K	Высота штрихов (a/λ_0)	Координаты профиля	E (%)	δ (%)
ТМ-поляризация					
5	2	0,9	(0,1820, 0,4822), (0,5544, 0,8546)	80,1	3,1
7	2	0,9	(0,2454, 0,4367), (0,5999, 0,7912)	85,1	1,0
9	3	1,56	(0,0925, 0,1963), (0,3728, 0,4786), (0,6155, 0,7185)	96,1	0,6
11	3	1,6	(0,1515, 0,3435), (0,4845, 0,5753), (0,7162, 0,9046)	94,0	5,1
ТЕ-поляризация					
5	2	0,8	(0,1798, 0,4816), (0,5550, 0,8567)	80,7	2,5
7	2	0,875	(0,2579, 0,4297), (0,6070, 0,7787)	83,8	1,1
9	3	1,0	(0,0091, 0,1924), (0,3145, 0,4811), (0,7769, 0,9547)	89,7	3,6
11	3	1,57	(0,0444, 0,3390), (0,5033, 0,5567), (0,8259, 0,8792)	91,5	4,3

Таблица 4. Результаты градиентного расчета бинарных дефлекторов, концентрирующих излучение в -1 -ом порядке ($\varepsilon = 2,25$; $\theta = 0$, ТЕ-поляризация)

Период (d/λ_0)	Число штрихов K	Высота штрихов (a/λ_0)	Координаты профиля	E (%)
3,5	2	1,68	(0,2596, 0,4378, 0,6082, 0,6754, 0,8469, 0,8780)	83,5
4,5	4	1,69	(0,2617, 0,4009, 0,5426, 0,6043, 0,7001, 0,7361, 0,8521, 0,8734)	87,7
5,5	5	1,78	(0,2714, 0,3982, 0,4997, 0,5565, 0,6100, 0,6473, 0,7243, 0,7560, 0,8793, 0,8984)	87,6
6,5	5	1,5	(0,1809, 0,4334, 0,4717, 0,5302, 0,6113, 0,6530, 0,7566, 0,7845, 0,8997, 0,9142)	80,0

Таблица 4 показывает, что в -1 -ом порядке можно собрать более 80% энергии и при «больших» периодах. При этом для достижения высокой энергетической эффективности ($>80\%$) на периоде $d = p\lambda_0$ необходимо порядка p штрихов.

Решетки, позволяющие сконцентрировать излучение в -1 -ом порядке, имеют большое практическое значение. Рассмотрим возможность использования таких решеток для расчета различных фокусирующих ДОЭ, например линз. В скалярном приближении для расчета ДОЭ используется приближение тонкого оптического элемента. В приближении тонкого оптического элемента микрорельеф ДОЭ однозначно определяется фазовой функцией. Пусть $\varphi(x)$, $x \in [0, d]$ — фазовая функция ДОЭ, рассчитанная в приближении геометрической оптики из условия фокусировки в заданную область. Расчет в приближении геометрической оптики основывается на использовании уравнения наклонов, определяющего направление преломленного луча через фазовую функцию ДОЭ в виде

$$\sin(\theta_r) = \frac{\lambda}{2\pi} \left(\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d\varphi_0(x)}{dx} \right),$$

где $\lambda = \lambda_0 / \sqrt{\varepsilon}$ — длина волны в среде, $\varphi_0(x) = k_0 \sin(\theta) \cdot x$ — фазовая функция освещающего пучка при $y=0$. Уравнение (172) совпадает с уравнением дифракционной решетки

$$\sqrt{\varepsilon} \cdot \sin(\theta_m) = \sin(\theta) + m\lambda_0 / d$$

при периоде $d = 2\pi / |d\varphi(x)/dx|$ и $m = \pm 1$. Знак m определяется знаком производной фазы;

$$m = \text{sign}(d\varphi(x)/dx).$$

Данное значение периода совпадает с размером зоны ДОЭ Δx , определяемой

$$\Delta\varphi(x) = 2\pi \approx \left| \frac{d\varphi(x)}{dx} \right| \Delta x, \quad \Delta x = 2\pi / \left| \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|. \quad (174)$$

Таким образом, приближение геометрической оптики предполагает, что каждая зона ДОЭ работает как «однопорядковая» решетка, концентрирующая излучение в -1 -ом или $+1$ -ом порядках. В скалярном приближении Кирхгофа однопорядковой решетке соответствуют левая или правая пилообразная решетка. При малых зонах геометрооптическое и скалярное приближения неработоспособны, поскольку неработоспособной оказывается пилообразная решетка. В частности, для правой пилообразной решетки с высотой $a = \lambda_0 / (\sqrt{\varepsilon} - 1)$

интенсивность 1-го порядка стремится к нулю при $d \rightarrow \lambda_0$ (рис. 12).

Можно предположить, что при замене непрерывных зон ДОЭ бинарными решетками, рассчитанными в электромагнитном приближении из условия максимума -1 -го или $+1$ -го порядка, получится высокоэффективный бинарный

ДОЭ. Хотя формулы (172)-(174) являются лишь эвристическим обоснованием метода «замены зон ДОЭ однопорядковой решеткой», на практике метод оказывается работоспособным.

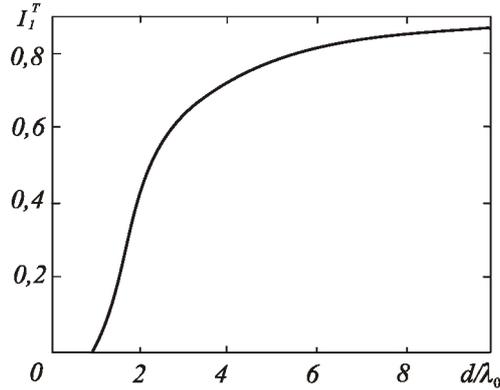


Рис. 12. Интенсивность 1-го порядка правой пилообразной решетки в зависимости от длины периода для ТЕ-поляризации при $\varepsilon = 2,25$, $\theta = 0$ и высоте профиля $a = \lambda_0 / (\sqrt{\varepsilon} - 1)$

В частности, в работе [22] рассмотрен расчет внеосевого сегмента бинарной отражающей линзы, имеющей для случая ТМ-поляризации эффективность $\sim 90\%$. Расчет линзы в [22] основывался на замене зон непрерывной дифракционной линзы простейшей отражающей бинарной решеткой с одним штрихом. Для ТМ-поляризации при $d \sim \lambda_0$, $\theta \sim 30^\circ$ и высоте штриха $a \sim 0,25\lambda_0$ такая решетка концентрирует излучение в -1 порядке (см. рис. 2).

Пример 10. Проиллюстрируем работоспособность метода на примере расчета преломляющей линзы. Фазовая функция дифракционной линзы имеет вид

$$\varphi(x) = \text{mod}_{2\pi} \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(-x \cdot \sin(\theta) - \sqrt{\varepsilon} \sqrt{(x-x_0)^2 + f^2 + c} \right) \right), \quad (175)$$

$$x \in [0, d],$$

где (x_0, f) — координаты фокуса, c - константа. При $d = 20\lambda_0$, $\theta = 30^\circ$ и $(x_0, f) = (-20\lambda_0, -85\lambda_0)$ фазовая функция линзы имеет 20 зон с размером $0,89\lambda_0 \leq \Delta x \leq 1,17\lambda_0$. Для расчета бинарной линзы требуется заменить зоны линзы (165) бинарной решеткой, имеющей максимум в -1-ом порядке. При $\theta = 30^\circ$ и размерах зон $\Delta x \sim \lambda_0$ достаточно простейшей решетки с одним штрихом

$$h_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \Delta x/2), \\ a \cdot \lambda_0, & x \in [\Delta x/2, \Delta x). \end{cases} \quad (176)$$

В частности, для ТМ-поляризации и $\varepsilon = 2,25$ решетка (166) концентрирует излучение в -1-ом порядке при $a \sim 2\lambda_0$ (см. рис. 8). На рис. 13 и 14а приведены полученный бинарный рельеф линзы и распределение интенсивности

$$I(x, f) = \left| \text{Re} \left(E_x(x, f) \cdot H_z^*(x, f) \right) \right|$$

в фокальной плоскости $y = -85\lambda_0$. Указанное выражение для интенсивности $I(x, f)$ пропорционально модулю y -компоненты вектора Умова—Пойнтинга. Для сравнения на рис. 14б приведено распределение интенсивности для линзы с непрерывным рельефом

$$h(x) = \frac{\sqrt{\varepsilon - \sin(\theta)}}{\varepsilon - \cos(\theta)\sqrt{\varepsilon - \sin(\theta)}} \times \text{mod}_{\lambda_0} \left(-x \cdot \sin(\theta) - \sqrt{\varepsilon} \sqrt{(x - x_0)^2 + f^2 + c} \right), \quad x \in [0, d], \quad (177)$$

рассчитанным в приближении тонкого оптического элемента.

Распределение интенсивности на рис. 14б оказывается размазанным в отличие от острого пика на рис. 14а с шириной $5\lambda_0$, сформированного бинарной линзой. Приведенный пример расчета линзы демонстрирует возможности и практическую важность задачи расчета решеток с максимумом энергии в -1 -ом или $+1$ -ом порядках. Большие, по сравнению с длиной волны зоны, требуют более сложных решеток с несколькими штрихами. При этом актуален расчет однопорядковых решеток для некоторого интервала периодов $[d_{\min}, d_{\max}]$, определяюще-

го изменение размера зон ДОЭ. Расчет бинарной решетки с максимальной интенсивностью $I_{-1}(\mathbf{p}, d)$ в -1 -ом порядке при $d \in [d_{\min}, d_{\max}]$ может быть проведен рассмотренным градиентным методом с функцией ошибки определенной, например, в виде

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \int_{d_{\min}}^{d_{\max}} (1 - I_{-1}(\mathbf{p}, \xi))^2 d\xi \rightarrow \min, \quad (178)$$

где \mathbf{p} — вектор координат штрихов решетки.

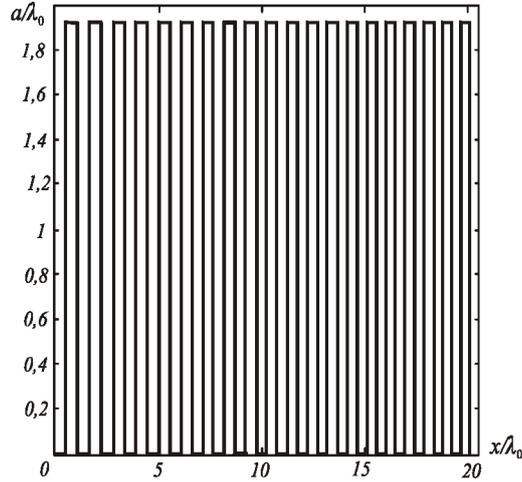


Рис. 13. Бинарная линза с апертурой $d = 20\lambda_0$ для фокусировки в точку $(x_0, f) = (-20\lambda_0, -85\lambda_0)$ при $\theta = 30^\circ$, $\varepsilon = 2,25$

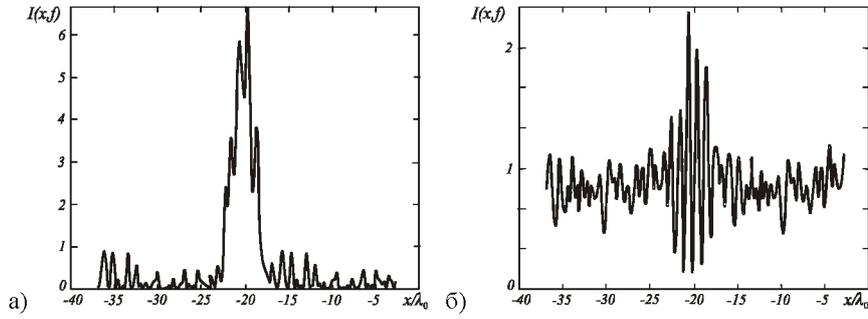


Рис. 14. Распределения интенсивности в фокальной плоскости (при $y = -85\lambda_0$) для бинарной линзы на рис. 13 (а) и для линзы с непрерывным рельефом (177) (б) для ТМ-поляризации

Пример 11. Простейшая бинарная решетка (166) с одной ступенькой может быть использована только при размерах зон близких к длине волны. Приведем пример расчета более сложной бинарной линзы с большим интервалом изменения размеров зон. При параметрах размер апертуры $d = 30\lambda_0$, координаты точки фокусировки $(x_0, f) = (0, -130\lambda_0)$, $\theta = 10^\circ$, $\varepsilon = 2,25$ линза с непрерывным рельефом (177) имеет 10 полных зон с размером от $5\lambda_0$ в начале апертуры до $2\lambda_0$ на краю апертуры. Для расчета бинарной линзы требуется рассчитать решетку из условия максимума -1 -го порядка для интервала периодов $[2\lambda_0, 5\lambda_0]$. Такая решетка с тремя штрихами была рассчитана градиентным методом для ТМ-поляризации при функции ошибки (178). Нормированные координаты штрихов решетки равны $\mathbf{p} = (0,0429, 0,2981, 0,4556, 0,5771, 0,7745, 0,8276)$ при высоте штрихов $a = 2,07\lambda_0$. Данная решетка при периоде $d \in [2\lambda_0, 5\lambda_0]$ концентрирует в -1 -ом порядке не менее 80% энергии. На рис. 15а приведен профиль бинарной линзы, полученный заменой зон линзы (177) рассчитанной бинарной решеткой, а на рис.15б — распределение интенсивности, сформированное бинарной линзой при $y = -130\lambda_0$. Для сравнения на рис. 15 также показаны профиль непрерывной дифракционной линзы (177) и распределение интенсивности

$$I(x, f) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\lambda_0 f} \left| \int_0^d \exp \left(-2\pi i \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\lambda_0 f} x u \right) du \right|^2 = \frac{d^2 \sqrt{\varepsilon}}{\lambda_0 f} \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi \sqrt{\varepsilon} \cdot d}{\lambda_0 f} x \right), \quad (179)$$

где $\operatorname{sinc}(x) = \sin(x)/x$, формируемое в скалярном приближении Кирхгофа в фокальной плоскости идеального сферического фронта. Рис. 15 показывает хорошую

работоспособность рассчитанной бинарной линзы и демонстрирует возможность замены задачи расчета ДОЭ существенно более простой задачей расчета однопорядковой решетки при значительном диапазоне изменения размеров зон.

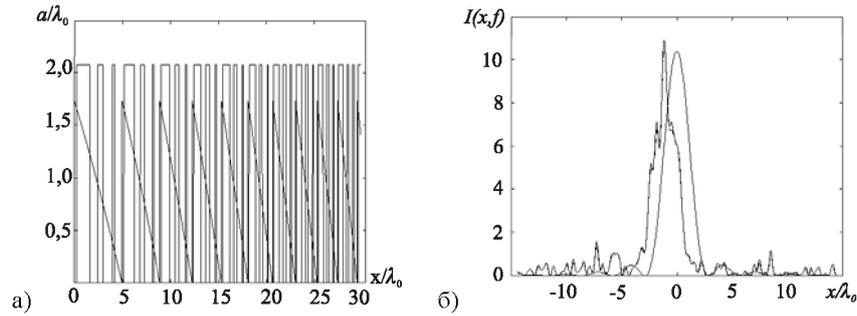


Рис. 15. Бинарная линза ($d = 30\lambda_0$) для фокусировки в точку $(x_0, f) = (0, -130\lambda_0)$ при $\theta = 10^\circ$, $\varepsilon = 2,25$ и непрерывная линза (177) (а), распределение интенсивности, сформированное бинарной линзой для ТМ-поляризации и распределение интенсивности при идеальном сферическом фронте (б)

4.3. Расчет идеально проводящих решеток с непрерывным профилем в приближении Рэлея

Решение задачи дифракции на решетке с непрерывным профилем в приближении Рэлея, изготовленной из идеально проводящего материала, приведено в пункте 2. Рассмотрим градиентный метод расчета профиля решетки $f(x)$ из условия формирования заданной интенсивности дифракционных порядков [5,6,23]. Интенсивности порядков (40) пропорциональны квадратам модулей коэффициентов Рэлея; $I_n = |R_n|^2 \beta_n / \beta_0$. Для удобства будем работать с нормированной функцией высоты профиля решетки $H(x) = k \cdot f\left(\frac{x \cdot d}{2\pi}\right)$. Для построения градиентной процедуры расчета профиля $H(x)$ введем функционал ошибки $\varepsilon(H)$, характеризующий отличие расчетных значений интенсивностей порядков I_n от требуемых значений \tilde{I}_n :

$$\varepsilon(H) = \varepsilon(\mathbf{I}(H), \tilde{\mathbf{I}}),$$

где \mathbf{I} и $\tilde{\mathbf{I}}$ - вектора расчетных и заданных интенсивностей дифракционных порядков. Отметим, что компоненты вектора \mathbf{I} также являются функционалами от профиля решетки $H(x)$. Градиентная минимизация функционала (180) состоит в итерационной коррекции функции $H(x)$ согласно правилу:

$$H_{n+1}(x) = H_n(x) - t \cdot \varepsilon'(x),$$

где n — номер итерации, t — шаг градиентного метода, $\varepsilon'(x)$ — градиент функционала. Для вычисления градиента $\varepsilon'(x)$ рассмотрим приращение функционала $\varepsilon(H)$, вызванное малым приращением высоты профиля $\Delta H(x)$:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon(H) &= \varepsilon(H + \Delta H) - \varepsilon(H) = \sum_{j=-M}^M \frac{\partial\varepsilon(\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}})}{\partial I_j} \Delta I_j(H) = \\ &= \sum_{j=-M}^M \frac{\partial\varepsilon(\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}})}{\partial I_j} \Delta \left(\frac{\beta_j}{\beta_0} R_j(H) \cdot R_j^*(H) \right) = 2 \operatorname{Re}(\Delta \mathbf{R}(H), \mathbf{L}(H)), \end{aligned} \quad (182)$$

где $\Delta \mathbf{R}(H) = (\Delta R_j(H))_{-M}^M$, $\mathbf{L}(H) = (L_j(H))_{-M}^M$,

$$L_j = \sum_{j=-M}^M \frac{\partial\varepsilon(\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}})}{\partial I_j} \frac{\beta_j}{\beta_0} R_j(H). \quad (183)$$

Согласно (50), вектор приращений $\Delta \mathbf{R}(H)$ имеет вид:

$$\Delta \mathbf{R}(H) = \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} (\Delta \mathbf{B} - \Delta \mathbf{A} \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}), \quad (184)$$

где матрица $\mathbf{A} \mathbf{A}$ и вектор \mathbf{B} определены в уравнениях (45), (46) для случая ТЕ-поляризации и в уравнениях (48), (49) для случая ТМ-поляризации. Для случая ТЕ-поляризации из (45), (46) получим вектор приращений в виде

$$\Delta \mathbf{R}(H) = \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} i \Delta H(\xi) (\tilde{\mathbf{B}}(\xi) - \tilde{\mathbf{A}}(\xi) \cdot \mathbf{R}) d\xi, \quad (185)$$

где

$$\tilde{\mathbf{A}}(\xi) = (\tilde{A}_{pn}(\xi))_{-N}^N, \quad (186)$$

$$\tilde{A}_{pn}(\xi) = (\beta_n - \beta_0) \cdot \exp(i\xi(n-p) + i(\beta_n - \beta_0)H(\xi)),$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\xi) = (\tilde{B}_p(\xi))_{-N}^N, \quad \tilde{B}_p(\xi) = -2\beta_0 \exp(-2i\beta_0 H(\xi) - ip\xi). \quad (187)$$

Подставляя (185) в (182), получим приращение функционала ошибки $\varepsilon(H)$ в виде

$$\Delta\varepsilon(H) = -2 \int_0^{2\pi} \Delta H \cdot \operatorname{Im}(\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} (\tilde{\mathbf{B}}(\xi) - \tilde{\mathbf{A}}(\xi) \cdot \mathbf{R}), \mathbf{L}) d\xi. \quad (188)$$

Согласно (188) градиент функционала имеет вид мнимой части скалярного произведения:

$$\varepsilon'(x) = -2 \cdot \operatorname{Im}(\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} (\tilde{\mathbf{B}}(x) - \tilde{\mathbf{A}}(x) \cdot \mathbf{R}), \mathbf{L}). \quad (189)$$

Проводя аналогичные выкладки для случая ТМ-поляризации, несложно получить градиент функционала ошибки также в виде (189), где вектор \mathbf{R} ищется из уравнений (48) — (50), а матрица $\tilde{\mathbf{A}}(\xi)$ и вектор $\tilde{\mathbf{B}}(\xi)$ имеют вид:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}(\xi) &= \left(\tilde{A}_m(\xi) \right)_{-N}^N, \\ \tilde{A}_m(\xi) &= \left(\beta_n (\beta_n - \beta_0) + \frac{\alpha_n \lambda}{d} (n-p) \right) \exp(i\xi(n-p) + i(\beta_n - \beta_0)H(\xi)),\end{aligned}\quad (190)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{B}}(\xi) &= \left(\tilde{B}_p(\xi) \right)_{-N}^N, \\ \tilde{B}_p(\xi) &= \left(-2\beta_0^2 + \frac{\alpha_0 \lambda}{d} p \right) \exp(-2i\beta_0 H(\xi) - ip\xi).\end{aligned}\quad (191)$$

Рассмотрим расчет шага t для градиентной процедуры (181). Для расчета t рассмотрим функционал $\varepsilon(H)$ вдоль направления антиградиента как функцию от t :

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon(H - t \cdot \varepsilon'(H)). \quad (192)$$

Разложим функцию $\varepsilon_1(t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $t=0$

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon_1(0) + \varepsilon_1'(0) \cdot t. \quad (193)$$

Предполагая, что минимальное значение функционала $\varepsilon(H)$ равно нулю, приравняем правую часть уравнения (193) к нулю и получим величину шага t в виде

$$t = -\varepsilon_1(0) / \varepsilon_1'(0). \quad (194)$$

Для расчета $\varepsilon_1'(0)$ рассмотрим приращение $\Delta\varepsilon_1(t) = \varepsilon_1(t) - \varepsilon_1(0)$ функции $\varepsilon_1(t)$ при $t=0$. Для расчета $\Delta\varepsilon_1(t)$ воспользуемся формулой (188) при $\Delta H = -\varepsilon'(H) t$. В результате получим $\Delta\varepsilon_1(t)$ в виде

$$\Delta\varepsilon_1(t) = t \int_0^{2\pi} \varepsilon'(H) \cdot 2 \operatorname{Im} \left(\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \cdot \left(\tilde{\mathbf{B}}(\xi) - \tilde{\mathbf{A}}(\xi) \cdot \mathbf{R} \right), \mathbf{L} \right) d\xi. \quad (195)$$

Согласно (195) производная $\varepsilon_1'(0)$ имеет вид

$$\varepsilon_1'(0) = -4 \int_0^{2\pi} \left(\operatorname{Im} \left(\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \cdot \left(\tilde{\mathbf{B}}(\xi) - \tilde{\mathbf{A}}(\xi) \cdot \mathbf{R} \right), \mathbf{L} \right) \right)^2 d\xi, \quad (196)$$

а значение шага определяется по формуле

$$t = \varepsilon_1(0) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \left(2 \cdot \operatorname{Im} \left(\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \left(\tilde{\mathbf{B}}(\xi) - \tilde{\mathbf{A}}(\xi) \cdot \mathbf{R} \right), \mathbf{L} \right) \right)^2 d\xi \right)^{-1}. \quad (197)$$

Матрица $\tilde{\mathbf{A}}(x)$ и вектор $\tilde{\mathbf{B}}(x)$ в (197) определены в уравнениях (186), (187) для ТЕ-поляризации и в уравнениях (190), (191) для ТМ-поляризации. В пункте 2 показано, что при $d \gg \lambda$ приближение Рэля переходит в приближении Фраунгофера, для которого коэффициенты Рэля соответствуют коэффициентам Фурье в разложении функции $\exp(i\varphi(x))$, где $\varphi(x)$ - фазовая функция (51). Это позволяет рассматривать широко используемые градиентные алгоритмы синтеза решеток в приближении Фраунгофера как частный случай общего градиентного алгоритма (181), (189), основанного на приближении Рэля.

Пример 12. Рассмотренный градиентный метод был применен к расчету решеток с $2M+1$ равными порядками. В качестве функционала ошибки был использован квадратичный функционал:

$$\varepsilon(H) = \sum_{j=-M}^M (I_j(H) - \tilde{I}_j)^2. \quad (198)$$

Шаг t градиентного метода определялся из условия минимума функции, являющейся линейной аппроксимацией функционала $\varepsilon(H)$ вдоль направления антиградиента. Расчет проводился для нормального падения плоской волны для ТЕ-поляризации. На рис. 16 — 19 приведены расчетные профили $H(x)$ и интенсивности дифракционных порядков для 5, 7, 9 и 11-порядковой решеток с периодами $3,6\lambda$, $5,2\lambda$, $6,2\lambda$ и $7,2\lambda$, соответственно. В качестве начальных точек для градиентной процедуры в приближении Рэля использовались профили, рассчитанные градиентным методом в скалярном приближении. Начальные профили показаны на рис. 16а — 19а пунктирными линиями. Значения энергетической эффективности E (146) и среднеквадратичной ошибки δ (147), рассчитанные для начальных профилей в скалярном приближении, составили 95,2% и 1,1% для 5-порядковой решетки, 98,1% и 1,4% для 7-порядковой решетки, 99,6% и 1,9% для 9-порядковой решетки и 98,6% и 0,8% для 11-порядковой решетки.

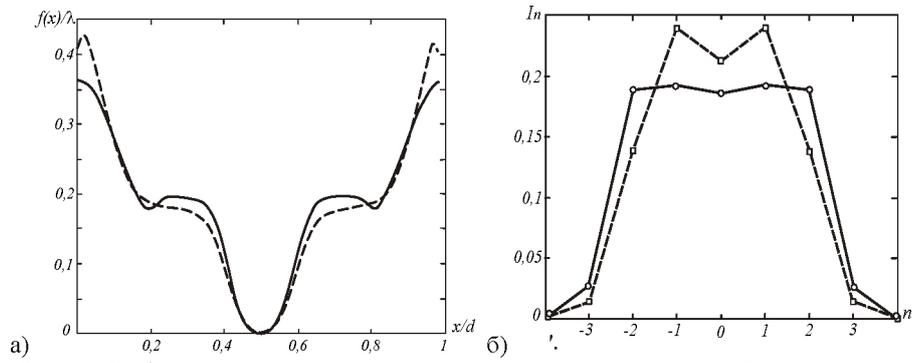


Рис. 16. Профили 5-порядковых решеток (а) и интенсивности порядков (б), рассчитанные в скалярном приближении (птриховая линия) и приближении Рэлея (непрерывная линия)

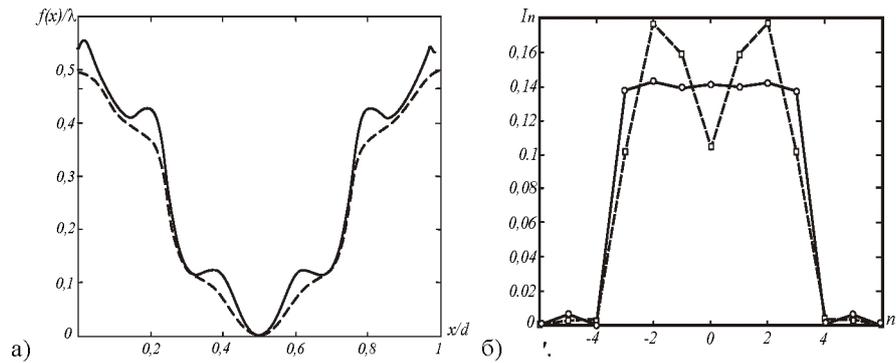


Рис. 17. Профили 7-порядковых решеток (а) и интенсивности порядков (б), рассчитанные в скалярном приближении (птриховая линия) и приближении Рэлея (непрерывная линия)

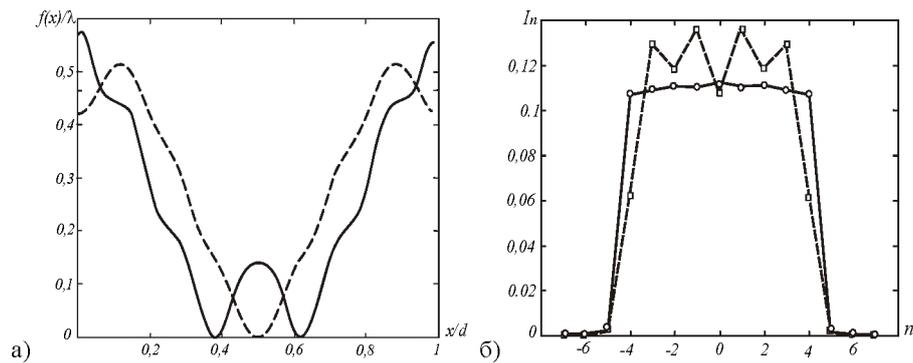


Рис. 18. Профили 9-порядковых решеток (а) и интенсивности порядков (б), рассчитанные в скалярном приближении (птриховая линия) и приближении Рэлея (непрерывная линия)

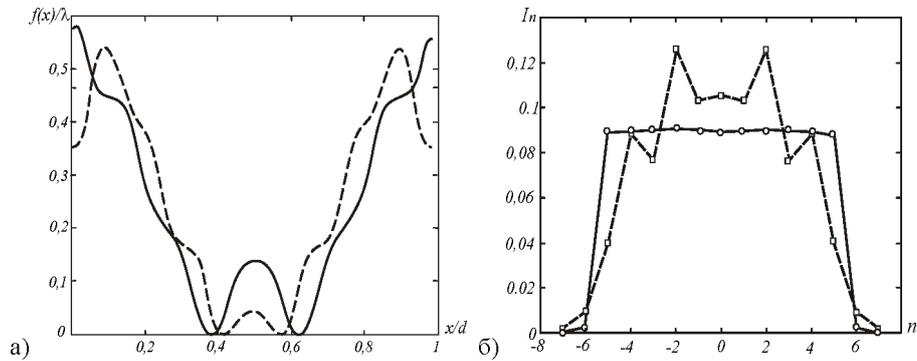


Рис. 19. Профили 11-порядковых решеток (а) и интенсивности порядков (б), рассчитанные в скалярном приближении (штриховая линия) и приближении Рэлея (непрерывная линия).

Интенсивности порядков для начальных профилей, рассчитанные в приближении Рэлея, показаны пунктирными линиями на рис. 166 — 196. Использование приближения Рэлея для начальных профилей дает увеличение ошибки δ до 25-30% при снижении энергетической эффективности E на 1,5-2,5%. Градиентный метод в приближении Рэлея (181), (189) позволяет скорректировать скалярные решения. Профили решеток и интенсивности порядков, рассчитанные градиентным методом в приближении Рэлея, показаны сплошными линиями на рис. 16 — 19. Значения E и δ для рассчитанных в приближении Рэлея решеток составили 92,5% и 1,7% для 5-порядковой решетки, 94,2% и 0,8% для 7-порядковой решетки, 99,3% и 0,5% для 9-порядковой решетки и 96,3% и 0,7% для 11-порядковой решетки. Для оценки точности полученных решений был проведен расчет интенсивности порядков с использованием точного интегрального метода [1]. Результаты расчетов показали, что для рассчитанных в приближении Рэлея профилей, увеличение ошибки δ при точном расчете интенсивностей порядков составляет всего 2 — 3%. Приведенные примеры показывают как хорошую сходимость и точность градиентной процедуры в приближении Рэлея, так и необходимость корректировки решений, полученных в рамках скалярной теории.

5. ДИФРАКЦИЯ НА ДВУМЕРНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РЕШЕТКАХ

При описании дифракции на двумерной решетке ось z направим перпендикулярно плоскости расположения дифракционной решетки. Как и в одномерном случае будем выделять три зоны. Зона 1 соответствуют области над решеткой при $z > a$, где a – максимальная высота профиля. Зона 2 соответствует зоне модуляции $0 < z < a$. И наконец зона 3 соответствует области подложки $z < 0$. Над решеткой и под решеткой диэлектрическая проницаемость постоянна. В зоне модуляции диэлектрическая проницаемость является функцией $\varepsilon = \varepsilon(x, y, z)$. Магнитную проницаемость будем считать равной единице во всех трех зонах.

Рассмотрим первоначально общее представление поля в среде с постоянной диэлектрической проницаемостью ε . Это позволит записать поля в зонах 1 ($z > a$) и 3 ($z < 0$). Поскольку свойства среды не зависят от z , то электрическое и магнитное поля имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z) &= \mathbf{E}(x, y) \exp(ik_0 \gamma z), \\ \mathbf{H}(x, y, z) &= \mathbf{H}(x, y) \exp(ik_0 \gamma z), \end{aligned} \quad (199)$$

где $\gamma = \sqrt{\varepsilon} \cos(\gamma_0)$, γ_0 - угол с осью z . Подставляя (199) в базовые уравнения (1.9), (1.10), получим

$$\begin{aligned} \partial_y H_z - ik_0 \gamma H_y &= -ik_0 \varepsilon E_x, & \partial_y E_z - ik_0 \gamma E_y &= ik_0 H_x, \\ -\partial_x H_z + ik_0 \gamma H_x &= -ik_0 \varepsilon E_y, & -\partial_x E_z + ik_0 \gamma E_x &= ik_0 H_y, \\ \partial_x H_y - \partial_y H_x &= -ik_0 \varepsilon E_z, & \partial_x E_y - \partial_y E_x &= ik_0 H_z. \end{aligned} \quad (200)$$

Используя (200), представим тангенциальные компоненты поля через z -компоненты в виде

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{-1}{ik_0(\varepsilon - \gamma^2)} (\partial_y H_z + \gamma \cdot \partial_x E_z), & H_x &= \frac{1}{ik_0(\varepsilon - \gamma^2)} (\varepsilon \cdot \partial_y E_z - \gamma \cdot \partial_x H_z), \\ E_y &= \frac{1}{ik_0(\varepsilon - \gamma^2)} (\partial_x H_z - \gamma \cdot \partial_y E_z), & H_y &= \frac{-1}{ik_0(\varepsilon - \gamma^2)} (\varepsilon \cdot \partial_x E_z + \gamma \cdot \partial_y H_z), \end{aligned} \quad (201)$$

где E_z, H_z удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_0^2 (\varepsilon - \gamma^2) E_z &= 0, \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_0^2 (\varepsilon - \gamma^2) H_z &= 0. \end{aligned} \quad (202)$$

Решая (202) методом разделения переменных, получим

$$\begin{aligned}
E_z(x, y, z) &= \exp\left(ik_0\sqrt{\varepsilon}(\alpha_0x + \beta_0y) \pm ik_0\gamma z\right), \\
H_z(x, y, z) &= \exp\left(ik_0\sqrt{\varepsilon}(\alpha_0x + \beta_0y) \pm ik_0\gamma z\right),
\end{aligned} \tag{203}$$

$$\text{где } \gamma = \sqrt{\varepsilon}\sqrt{1 - \alpha_0^2 - \beta_0^2}. \tag{204}$$

Далее рассмотрим так называемые волны E и H типов. Для E -волны $E_z \neq 0$, $H_z = 0$, а для H -волны $H_z \neq 0$, $E_z = 0$ [24]. Из уравнений (201) для E -волны получим

$$E_x = \frac{-1}{ik_0(\varepsilon - \gamma^2)} \gamma \cdot \partial_x E_z = \frac{\mp \gamma \sqrt{\varepsilon} \alpha_0}{(\varepsilon - \gamma^2)} \cdot \exp\left(ik_0\sqrt{\varepsilon}(\alpha_0x + \beta_0y) \pm ik_0\gamma z\right), \tag{205}$$

$$E_y = \frac{-1}{ik_0(\varepsilon - \gamma^2)} \gamma \cdot \partial_y E_z = \frac{\mp \gamma \sqrt{\varepsilon} \beta_0}{(\varepsilon - \gamma^2)} \cdot \exp\left(ik_0\sqrt{\varepsilon}(\alpha_0x + \beta_0y) \pm ik_0\gamma z\right), \tag{206}$$

$$H_x = \frac{1}{ik_0(\varepsilon - \gamma^2)} \varepsilon \cdot \partial_y E_z = \frac{\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \beta_0}{(\varepsilon - \gamma^2)} \cdot \exp\left(ik_0\sqrt{\varepsilon}(\alpha_0x + \beta_0y) \pm ik_0\gamma z\right), \tag{207}$$

$$H_y = \frac{-1}{ik_0(\varepsilon - \gamma^2)} \varepsilon \cdot \partial_x E_z = \frac{-\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \alpha_0}{(\varepsilon - \gamma^2)} \cdot \exp\left(ik_0\sqrt{\varepsilon}(\alpha_0x + \beta_0y) \pm ik_0\gamma z\right). \tag{208}$$

Поскольку решение задачи дифракции требует наложения условий равенства тангенциальных компонент полей на границах зоны модуляции, то оказывается удобным введение следующего четырехкомпонентного вектора тангенциальных компонент:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ H_y \\ E_y \\ H_x \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\gamma\varepsilon(\alpha_0^2 + \beta_0^2)}} \begin{pmatrix} \mp \gamma \alpha_0 \\ -\varepsilon \alpha_0 \\ \mp \gamma \beta_0 \\ \varepsilon \beta_0 \end{pmatrix} \exp\left(ik_0\sqrt{\varepsilon}(\alpha_0x + \beta_0y) \pm ik_0\gamma z\right). \tag{209}$$

Вектор (209) дополнительно пронормирован на величину

$$c = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{(\varepsilon - \gamma^2)} \sqrt{\gamma\varepsilon(\alpha_0^2 + \beta_0^2)}.$$

При указанной нормировке z -компонента вектора Умова-Пойнтинга

$$S_z = |E_x H_y - E_y H_x| \tag{210}$$

равна единице. Для H -волны из уравнений (201) получим

$$E_x = \frac{-1}{ik_0(\varepsilon - \gamma^2)} \partial_y H_z = \frac{-\sqrt{\varepsilon} \beta_0}{(\varepsilon - \gamma^2)} \cdot \exp\left(ik_0\sqrt{\varepsilon}(\alpha_0x + \beta_0y) \pm ik_0\gamma z\right), \tag{211}$$

$$E_y = \frac{1}{ik_0(\varepsilon - \gamma^2)} \partial_x H_z = \frac{\sqrt{\varepsilon}\alpha_0}{(\varepsilon - \gamma^2)} \cdot \exp\left(ik_0\sqrt{\varepsilon}(\alpha_0 x + \beta_0 y) \pm ik_0\gamma z\right), \quad (212)$$

$$H_x = \frac{\bar{\Gamma}\gamma}{ik_0(\varepsilon - \gamma^2)} \partial_x H_z = \frac{\bar{\Gamma}\gamma\sqrt{\varepsilon}\alpha_0}{(\varepsilon - \gamma^2)} \cdot \exp\left(ik_0\sqrt{\varepsilon}(\alpha_0 x + \beta_0 y) \pm ik_0\gamma z\right), \quad (213)$$

$$H_y = \frac{-\gamma}{ik_0(\varepsilon - \gamma^2)} \partial_y H_z = \frac{\bar{\Gamma}\gamma\sqrt{\varepsilon}\beta_0}{(\varepsilon - \gamma^2)} \cdot \exp\left(ik_0\sqrt{\varepsilon}(\alpha_0 x + \beta_0 y) \pm ik_0\gamma z\right). \quad (214)$$

Как и для E -волны, введем четырехкомпонентный вектор из тангенциальных компонент с нормировкой на величину $c = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{(\varepsilon - \gamma^2)} \sqrt{\gamma(\alpha_0^2 + \beta_0^2)}$:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ H_y \\ E_y \\ H_x \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\gamma(\alpha_0^2 + \beta_0^2)}} \begin{pmatrix} -\beta_0 \\ \bar{\Gamma}\gamma\beta_0 \\ \alpha_0 \\ \bar{\Gamma}\gamma\alpha_0 \end{pmatrix} \exp\left(ik_0\sqrt{\varepsilon}(\alpha_0 x + \beta_0 y) \pm ik_0\gamma z\right). \quad (215)$$

Плоская волна произвольной поляризации может быть представлена в виде суперпозиции E - и H -волн. Поэтому полученные выражения (203), (209), (215) позволяют представить электромагнитное поле (при $\varepsilon = \text{const}$) в виде непрерывной суперпозиции по α и β волн E и H типов.

При дифракции на двумерной решетке направления дифракционных порядков (E - и H -волн) в области над решеткой ($z > a$) описываются дискретным набором углов

$$\alpha_n = \alpha_0 + \frac{\lambda_0 n}{d_x \sqrt{\varepsilon_0}}, \quad \beta_m = \beta_0 + \frac{\lambda_0 m}{d_y \sqrt{\varepsilon_0}}, \quad (216)$$

$$\gamma_{nm} = \sqrt{\varepsilon_0} \sqrt{1 - \alpha_n^2 - \beta_m^2}, \quad (217)$$

где ε_0 – показатель преломления среды в зоне 1, d_x , d_y – периоды решетки по осям Ox , Oy . Будем предполагать, что для описания поля в зонах 1 и 3 достаточно $(2N+1)^2$ порядков с номерами от $(-N, -N)$ до $(+N, +N)$. В этом случае четырехкомпонентный вектор отраженного от решетки поля запишем в виде конечной суперпозиции дифракционных порядков

$$\mathbf{E}_R(x, y, z) = \sum_{n=-N, m=-N}^{N, N} R_{E, nm} \mathbf{V}_{E, nm}^+ + \sum_{n=-N, m=-N}^{N, N} R_{H, nm} \mathbf{V}_{H, nm}^+, \quad (218)$$

где (n, m) – индексы порядков дифракции, $R_{E, nm}$, $R_{H, nm}$ – коэффициенты отражения, $\mathbf{V}_{E, nm}^\pm$, $\mathbf{V}_{H, nm}^\pm$ – четырехкомпонентные вектора, описывающие E - и H -волны.

$$\mathbf{V}_{E, nm}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_{nm} \varepsilon_0 (\alpha_n^2 + \beta_m^2)}} \begin{pmatrix} \mp \gamma_{nm} \alpha_n \\ -\varepsilon_0 \alpha_n \\ \mp \gamma_{nm} \beta_m \\ \varepsilon_0 \beta_m \end{pmatrix} \exp\left(ik_0 \sqrt{\varepsilon_0} (\alpha_n x + \beta_m y) \pm ik_0 \gamma_{nm} z\right), \quad (219)$$

$$\mathbf{V}_{H, nm}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_{nm} (\alpha_n^2 + \beta_m^2)}} \begin{pmatrix} -\beta_m \\ \mp \gamma_{nm} \beta_m \\ \alpha_n \\ \mp \gamma_{nm} \alpha_n \end{pmatrix} \times \exp\left(ik_0 \sqrt{\varepsilon_0} (\alpha_n x + \beta_m y) \pm ik_0 \gamma_{nm} z\right). \quad (220)$$

Знак «+» в верхнем индексе четырехкомпонентных векторов $\mathbf{V}_{E, nm}^{\pm}, \mathbf{V}_{H, nm}^{\pm}$ описывает волны, распространяющиеся вдоль оси z , а знак «-» - волны, распространяющиеся против оси z . Пусть электрический вектор падающей волны имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0(x, y, z) &= \mathbf{p} \cdot \exp\left(ik_0 \sqrt{\varepsilon_0} (\alpha_0 x + \beta_0 y) - ik_0 \gamma_0 z\right) = \\ &= \mathbf{p} \cdot \exp\left(ik_0 \sqrt{\varepsilon_0} (\alpha_0 x + \beta_0 y)\right) \exp(ik_0 \gamma_0 z) = \mathbf{E}_0(x, y) \cdot \exp(ik_0 \gamma_0 z), \end{aligned} \quad (221)$$

где $(\alpha_0, \beta_0, -\gamma_0)$ – единичный вектор направления распространения волны, а \mathbf{p} – единичный вектор поляризации, перпендикулярный вектору распространения волны. Падающая волна может быть представлена в виде суперпозиции E - и H -волн. Действительно, обозначим $I_{E, 00}, I_{H, 00}$ – коэффициенты разложения падающей волны (221) по базовым E - и H -волнам. Для отыскания коэффициентов $I_{E, 00}, I_{H, 00}$ приравняем компоненты E_x, E_y исходной волны и суперпозиции E - и H -волн. В результате получим следующую систему уравнений

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} = \frac{I_{E, 00}}{\sqrt{\gamma \varepsilon (\alpha_0^2 + \beta_0^2)}} \begin{pmatrix} -\gamma \alpha_0 \\ -\gamma \beta_0 \end{pmatrix} + \frac{I_{H, 00}}{\sqrt{\gamma (\alpha_0^2 + \beta_0^2)}} \begin{pmatrix} -\beta_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}. \quad (222)$$

Таким образом, поле над решеткой, представленное в виде четырехкомпонентного вектора, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \sum_{n=-N, m=-N}^{N, N} R_{E, nm} \mathbf{V}_{E, nm}^+ + \sum_{n=-N, m=-N}^{N, N} R_{H, nm} \mathbf{V}_{H, nm}^+ + \\ &+ I_{E, 00} \mathbf{V}_{E, 00}^- + I_{H, 00} \mathbf{V}_{H, 00}^-. \end{aligned} \quad (223)$$

Аналогично, четырехкомпонентный вектор поля в области под решеткой ($z < 0$) поле имеет вид

$$\mathbf{E}_T(x, y, z) = \sum_{n=-N, m=-N}^{N, N} T_{E, nm} \mathbf{V}_{E, nm}^- + \sum_{n=-N, m=-N}^{N, N} T_{H, nm} \mathbf{V}_{H, nm}^-, \quad (224)$$

где $T_{E,mm}$, $T_{H,mm}$ - коэффициенты пропускания, $\mathbf{V}_{E,mm}^\pm$, $\mathbf{V}_{H,mm}^\pm$ - четырехкомпонентные вектора, описывающие E - и H -волны в зоне 3:

$$\mathbf{V}_{E,mm}^\pm = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\gamma}_{mm}\varepsilon_s(\tilde{\alpha}_n^2 + \tilde{\beta}_m^2)}} \begin{pmatrix} \mp \tilde{\gamma}_{mm} \tilde{\alpha}_n \\ -\varepsilon_s \tilde{\alpha}_n \\ \mp \tilde{\gamma}_{mm} \tilde{\beta}_m \\ \varepsilon_s \tilde{\beta}_m \end{pmatrix} \times \quad (225)$$

$$\times \exp\left(ik_0\sqrt{\varepsilon_s}(\tilde{\alpha}_n x + \tilde{\beta}_m y) \pm ik_0\tilde{\gamma}_{mm}z\right),$$

$$\mathbf{V}_{H,mm}^\pm = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\gamma}_{mm}(\tilde{\alpha}_n^2 + \tilde{\beta}_m^2)}} \begin{pmatrix} -\tilde{\beta}_m \\ \mp \tilde{\gamma}_{mm} \tilde{\beta}_m \\ \tilde{\alpha}_n \\ \mp \tilde{\gamma}_{mm} \tilde{\alpha}_n \end{pmatrix} \times \quad (226)$$

$$\times \exp\left(ik_0\sqrt{\varepsilon_s}(\tilde{\alpha}_n x + \tilde{\beta}_m y) \pm ik_0\tilde{\gamma}_{mm}z\right),$$

где

$$\tilde{\alpha}_n = \alpha_n \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_s} = \alpha_0 \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_s} + \frac{n\lambda_0}{d_x \sqrt{\varepsilon_s}}, \quad (227)$$

$$\tilde{\beta}_m = \beta_m \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_s} = \beta_0 \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_s} + \frac{m\lambda_0}{d_y \sqrt{\varepsilon_s}},$$

$$\tilde{\gamma}_{mm} = \sqrt{\varepsilon_s} \sqrt{1 - \tilde{\alpha}_n^2 - \tilde{\beta}_m^2}, \quad (228)$$

где ε_s -диэлектрическая проницаемость материала подложки.

Рассмотрим описание поля в зоне модуляции. Представим базовые уравнения (1.9), (1.10) в покомпонентном виде

$$\begin{aligned} \partial_y H_z - \partial_z H_y &= -ik_0 \varepsilon E_x, & \partial_y E_z - \partial_z E_y &= ik_0 H_x, \\ -\partial_x H_z + \partial_z H_x &= -ik_0 \varepsilon E_y, & -\partial_x E_z + \partial_z E_x &= ik_0 H_y, \\ \partial_x H_y - \partial_y H_x &= -ik_0 \varepsilon E_z, & \partial_x E_y - \partial_y E_x &= ik_0 H_z. \end{aligned} \quad (229)$$

Из последних уравнений в столбцах выразим E_z , H_z :

$$E_z = \frac{1}{ik_0 \varepsilon} (\partial_y H_x - \partial_x H_y), \quad (230.1)$$

$$H_z = \frac{1}{ik_0} (\partial_x E_y - \partial_y E_x). \quad (230.2)$$

Подставляя (230) в оставшиеся 4 уравнения в (229), получим

$$\partial_z E_x = ik_0 H_y + \frac{1}{ik_0} \partial_x \left(\frac{1}{\varepsilon} [\partial_y H_x - \partial_x H_y] \right), \quad (231.1)$$

$$\partial_z E_y = -ik_0 H_x + \frac{1}{ik_0} \partial_y \left(\frac{1}{\varepsilon} [\partial_y H_x - \partial_x H_y] \right),$$

$$\partial_z H_x = -ik_0 \varepsilon E_y + \frac{1}{ik_0} \partial_x (\partial_x E_y - \partial_y E_x), \quad (231.2)$$

$$\partial_z H_y = ik_0 \varepsilon E_x + \frac{1}{ik_0} \partial_y (\partial_x E_y - \partial_y E_x).$$

Компоненты электрического и магнитного полей являются квазипериодическими функциями, то есть представимы в виде

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{S}(x, y, z) \cdot \exp\left(ik_0 \sqrt{\varepsilon_0} (\alpha_0 x + \beta_0 y)\right), \quad (232)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{U}(x, y, z) \cdot \exp\left(ik_0 \sqrt{\varepsilon_0} (\alpha_0 x + \beta_0 y)\right),$$

где $\mathbf{S}(x, y, z) = (S_x(x, y, z), S_y(x, y, z), S_z(x, y, z))$, $\mathbf{U}(x, y, z) = (U_x(x, y, z), U_y(x, y, z), U_z(x, y, z))$ – периодические по переменным x, y функции. Разлагая функции $\mathbf{S}(x, y, z)$, $\mathbf{U}(x, y, z)$ в ряды Фурье по переменным x, y , получим

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \mathbf{S}_{nm}(z) \cdot \exp\left(ik_0 \sqrt{\varepsilon_0} (\alpha_n x + \beta_m y)\right), \quad (233)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \mathbf{U}_{nm}(z) \cdot \exp\left(ik_0 \sqrt{\varepsilon_0} (\alpha_n x + \beta_m y)\right),$$

где $\mathbf{S}_{nm}(z) = (S_{x, nm}(z), S_{y, nm}(z), S_{z, nm}(z))$, $\mathbf{U}_{nm}(z) = (U_{x, nm}(z), U_{y, nm}(z), U_{z, nm}(z))$, а α_n, β_m имеют вид (18). В зоне модуляции функции $\varepsilon(x, y, z)$, $1/\varepsilon(x, y, z)$ являются периодическими

$$\varepsilon(x, y, z) = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} c_{nm}^{(1)}(z) \cdot \exp\left(i \frac{2\pi}{d_x} nx + i \frac{2\pi}{d_y} my\right), \quad (234)$$

$$1/\varepsilon(x, y, z) = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} c_{nm}^{(2)}(z) \cdot \exp\left(i \frac{2\pi}{d_x} nx + i \frac{2\pi}{d_y} my\right).$$

Подставим разложения (233), (234) в уравнения (231) и приравняем коэффициенты при одинаковых гармониках. В результате получим бесконечную систему линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Ограничиваясь рассмотрением конечного числа гармоник, запишем систему дифференциальных уравнений в виде

$$\frac{dS_{x, qt}}{dz} = ik_0 U_{y, qt} + ik_0 \varepsilon_0 \sum_{n, m=-N}^N c_{q-n, t-m}^{(2)} \alpha_q (\beta_m U_{x, nm} - \alpha_n U_{y, nm}), \quad (235.1)$$

$$q, t = -N, \dots, N,$$

$$\frac{dU_{y,qt}}{dz} = ik_0 \varepsilon_0 \beta_t (\alpha_q S_{y,qt} - \beta_t S_{x,qt}) + ik_0 \sum_{n,m=-N}^N c_{q-n,t-m}^{(1)} S_{x,nm}, \quad (235.2)$$

$$q, t = -N, \dots, N,$$

$$\frac{dS_{y,qt}}{dz} = -ik_0 U_{x,qt} + ik_0 \varepsilon_0 \sum_{n,m=-N}^N c_{q-n,t-m}^{(2)} \beta_t (\beta_m U_{x,nm} - \alpha_n U_{y,nm}), \quad (235.3)$$

$$q, t = -N, \dots, N,$$

$$\frac{dU_{x,qt}}{dz} = ik_0 \varepsilon_0 \alpha_q (\alpha_q S_{y,qt} - \beta_t S_{x,qt}) - ik_0 \sum_{n,m=-N}^N c_{q-n,t-m}^{(1)} S_{y,nm}, \quad (235.4)$$

$$q, t = -N, \dots, N.$$

Система (235) может быть записана в матричном виде

$$\frac{d\mathbf{V}(z)}{dz} = \mathbf{A}(z) \cdot \mathbf{V}(z), \quad (236)$$

где $\mathbf{V}(z)$ – вектор столбец, составленный из $4(2N+1)^2$ функций $S_{x,qt}(z)$, $U_{y,qt}(z)$, $S_{y,qt}(z)$, $U_{x,qt}(z)$, $q, t = -N, \dots, N$, $\mathbf{A}(z)$ – матрица системы. Матрица системы имеет вид:

$$\mathbf{A}(z) = ik_0 \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mathbf{D}_\alpha \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{D}_\alpha & 0 & \varepsilon_0 \mathbf{D}_\alpha \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{D}_\beta \\ \mathbf{C}^{(1)} - \varepsilon_0 \mathbf{D}_\beta^2 & 0 & \varepsilon_0 \mathbf{D}_\alpha \mathbf{D}_\beta & 0 \\ 0 & -\varepsilon_0 \mathbf{D}_\beta \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{D}_\alpha & 0 & \varepsilon_0 \mathbf{D}_\beta \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{D}_\beta - \mathbf{E} \\ -\varepsilon_0 \mathbf{D}_\alpha \mathbf{D}_\beta & 0 & \varepsilon_0 \mathbf{D}_\alpha^2 - \mathbf{C}^{(1)} & 0 \end{pmatrix}, \quad (237)$$

где нули обозначают матрицы из нулевых элементов, \mathbf{E} – единичная матрица, $\mathbf{C}^{(1)}$, $\mathbf{C}^{(2)}$ – матрицы, составленные из коэффициентов Фурье $c_{nm}^{(1)}(z)$, $c_{nm}^{(2)}(z)$, \mathbf{D}_α , \mathbf{D}_β – диагональные матрицы. Диагональные элементы матриц \mathbf{D}_α , \mathbf{D}_β соответствуют наборам элементов α_n и β_n , $n = -N, \dots, N$, повторенным $(2N+1)$ раз.

При записи системы дифференциальных уравнений (237), Фурье коэффициенты произведений εE_x , εE_y , $E_z \square \frac{1}{\varepsilon} (\partial_y H_x - \partial_x H_y)$ были вычислены с использованием так называемого прямого правила Лорана, основанного на прямом перемножении рядов Фурье сомножителей [25, 27]. При учете конечного числа Фурье гармоник использование прямого правила Лорана не является оптимальным [25, 26]. В работах [25, 26] рассмотрены специальные правила вычисления отрезков рядов Фурье для произведений функций, обладающих лучшей точностью представления. Соответствующий вид системы диффе-

ренциальных уравнений аналогичен (237), только матрицы $\mathbf{C}^{(1)}$, $\mathbf{C}^{(2)}$ имеют модифицированный вид. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением системы (237). Использование представлений из работ [25, 26] необходимо только при работе с решетками из материалов с высокой проводимостью, таких как серебро или золото.

Таким образом, поле над решеткой и под решеткой имеет вид (223) и (224), а в зоне модуляции описывается системой дифференциальных уравнений (236), (237). Для поиска общего решения системы (236) необходимо найти $4(2N+1)^2$ линейно-независимых частных решений. При отсутствии модуляции ($\varepsilon(x, y, z) = \varepsilon_s$), решения системы (236) имеют вид

$$\tilde{\mathbf{S}}_{E, nm}^{\pm}(z) = \begin{pmatrix} S_{x, nm}(z) \\ U_{y, nm}(z) \\ S_{y, nm}(z) \\ U_{x, nm}(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\gamma}_{nm} \varepsilon_s (\tilde{\alpha}_n^2 + \tilde{\beta}_m^2)}} \begin{pmatrix} \mp \tilde{\gamma}_{nm} \tilde{\alpha}_n \\ -\varepsilon_s \tilde{\alpha}_n \\ \mp \tilde{\gamma}_{nm} \tilde{\beta}_m \\ \varepsilon_s \tilde{\beta}_m \end{pmatrix} \exp(\pm i k_0 \tilde{\gamma}_{nm} z), \quad (238.1)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_{H, nm}^{\pm}(z) = \begin{pmatrix} S_{x, nm}(z) \\ U_{y, nm}(z) \\ S_{y, nm}(z) \\ U_{x, nm}(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\gamma}_{nm} (\tilde{\alpha}_n^2 + \tilde{\beta}_m^2)}} \begin{pmatrix} -\tilde{\beta}_m \\ \mp \tilde{\gamma}_{nm} \tilde{\beta}_m \\ \tilde{\alpha}_n \\ \mp \tilde{\gamma}_{nm} \tilde{\alpha}_n \end{pmatrix} \exp(\pm i k_0 \tilde{\gamma}_{nm} z), \quad (238.2)$$

где $n, m = -N, \dots, N$. Граничные условия для системы (238) определим в виде вектор столбцов с $4(2N+1)^2$ компонентами. Каждый вектор граничных условий будем представлять как совокупность 4 векторов ($\mathbf{S}_x(0)$, $\mathbf{U}_y(0)$, $\mathbf{S}_y(0)$, $\mathbf{U}_x(0)$). Указанные 4 вектора имеют размерности $(2N+1)^2$ и состоят из начальных значений функций $S_{x, nm}(0)$, $U_{y, nm}(0)$, $S_{y, nm}(0)$, $U_{x, nm}(0)$, соответственно. Определим граничные условия как вектора, у которых все элементы равны нулю за исключением четырех компонент, соответствующих базисным решениям (238):

$$\tilde{\mathbf{S}}_{E, nm}^{\pm}(0) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\gamma}_{nm} \varepsilon_s (\tilde{\alpha}_n^2 + \tilde{\beta}_m^2)}} \begin{pmatrix} \mp \tilde{\gamma}_{nm} \tilde{\alpha}_n \\ -\varepsilon_s \tilde{\alpha}_n \\ \mp \tilde{\gamma}_{nm} \tilde{\beta}_m \\ \varepsilon_s \tilde{\beta}_m \end{pmatrix}, \quad m, n = -N, \dots, N, \quad (239.1)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_{H, nm}^{\pm}(0) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\gamma}_{nm} (\tilde{\alpha}_n^2 + \tilde{\beta}_m^2)}} \begin{pmatrix} -\tilde{\beta}_m \\ \mp \tilde{\gamma}_{nm} \tilde{\beta}_m \\ \tilde{\alpha}_n \\ \mp \tilde{\gamma}_{nm} \tilde{\alpha}_n \end{pmatrix}, \quad m, n = -N, \dots, N. \quad (239.2)$$

Такое определение граничных условий удобно для согласования решения в зоне модуляции с решением под решеткой.

Обозначим $\mathbf{D}_{E,ym}^+(z)$, $\mathbf{D}_{H,ym}^+(z)$ решения системы с введенными граничными условиями. При этом общее решение системы (236) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(z) = & \sum_{i,j=-N}^N \left(C_{E,ij}^+ \mathbf{D}_{E,ij}^+(z) + C_{H,ij}^+ \mathbf{D}_{H,ij}^+(z) \right) + \\ & + \sum_{i,j=-N}^N \left(C_{E,ij}^- \mathbf{D}_{E,ij}^-(z) + C_{H,ij}^- \mathbf{D}_{H,ij}^-(z) \right). \end{aligned} \quad (240)$$

Соответственно поле в зоне модуляции имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_M(x, y, z) = & \begin{pmatrix} E_x(x, y, z) \\ H_y(x, y, z) \\ E_y(x, y, z) \\ H_x(x, y, z) \end{pmatrix} = \sum_{n,m} \mathbf{G}(z) \Phi_{nm}(x, y) = \\ = & \sum_{n,m=-N}^N \left(\sum_{i,j=-N}^N \left(C_{E,ij}^+ \mathbf{D}_{E,ij}^+(z) + C_{H,ij}^+ \mathbf{D}_{H,ij}^+(z) \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{i,j=-N}^N \left(C_{E,ij}^- \mathbf{D}_{E,ij}^-(z) + C_{H,ij}^- \mathbf{D}_{H,ij}^-(z) \right) \right) \Phi_{nm}(x, y), \end{aligned} \quad (241)$$

$$\text{где } \Phi_{nm}(x, y) = \exp(ik_0 \sqrt{\varepsilon} (\alpha_n x + \beta_m y)). \quad (242)$$

Для определения коэффициентов пропускания и отражения используем условия непрерывности тангенциальных компонент на границах зоны модуляции при $z=0$ и $z=a$. Вектор тангенциальных компонент поля в зоне модуляции при $z=0$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_M(x, y, 0) = & \sum_{n,m} \mathbf{G}(0) \Phi_{nm}(x, y) = \\ = & \sum_{n,m=-N}^N \left(\sum_{i,j=-N}^N \left(C_{E,ij}^+ \mathbf{D}_{E,ij}^+(0) + C_{H,ij}^+ \mathbf{D}_{H,ij}^+(0) \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{i,j=-N}^N \left(C_{E,ij}^- \mathbf{D}_{E,ij}^-(0) + C_{H,ij}^- \mathbf{D}_{H,ij}^-(0) \right) \right) \Phi_{nm}(x, y) = \\ = & \sum_{n,m=-N}^N \left(C_{E,ym}^+ \mathbf{D}_{E,ym}^+(0) + C_{H,ym}^+ \mathbf{D}_{H,ym}^+(0) + \right. \\ & \left. + C_{E,ym}^- \mathbf{D}_{E,ym}^-(0) + C_{H,ym}^- \mathbf{D}_{H,ym}^-(0) \right) \Phi_{nm}(x, y). \end{aligned} \quad (243)$$

Аналогично, вектор тангенциальных компонент поля под решеткой при $z=0$ описывается выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_T(x, y, 0) &= \sum_{n,m=-N}^N T_{E, nm} \mathbf{V}_{E, nm}^-(x, y, 0) + \sum_{n,m=-N}^N T_{H, nm} \mathbf{V}_{H, nm}^-(x, y, 0) = \\ &= \sum_{n,m=-N}^N \left(T_{E, nm} \mathbf{D}_{E, nm}^-(0) + T_{H, nm} \mathbf{D}_{H, nm}^-(0) \right) \Phi_{nm}(x, y). \end{aligned} \quad (244)$$

Запишем условие непрерывности тангенциальных компонент полей (243), (244) при $z=0$:

$$\begin{aligned} &\sum_{n,m=-N}^N \left(C_{E, nm}^+ \mathbf{D}_{E, nm}^+(0) + C_{H, nm}^+ \mathbf{D}_{H, nm}^+(0) + \right. \\ &\left. + C_{E, nm}^- \mathbf{D}_{E, nm}^-(0) + C_{H, nm}^- \mathbf{D}_{H, nm}^-(0) \right) \Phi_{nm}(x, y) = \\ &= \sum_{n,m=-N}^N \left(T_{E, nm} \mathbf{D}_{E, nm}^-(0) + T_{H, nm} \mathbf{D}_{H, nm}^-(0) \right) \Phi_{nm}(x, y). \end{aligned} \quad (245)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях $\Phi_{nm}(x, y)$ в (245), получим

$$\begin{aligned} C_{E, nm}^- &= T_{E, nm}, \quad C_{H, nm}^- = T_{H, nm}, \quad n, m = \overline{-N, N}, \\ C_{E, nm}^+ &= 0, \quad C_{H, nm}^+ = 0, \quad n, m = \overline{-N, N}. \end{aligned} \quad (246)$$

Согласно (246), поле в зоне модуляции принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_M(x, y, z) &= \begin{pmatrix} E_x(x, y, z) \\ H_y(x, y, z) \\ E_y(x, y, z) \\ H_x(x, y, z) \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{n,m=-N}^N \left(\sum_{i,j=-N}^N \left(T_{E, ij} \mathbf{D}_{E, ij}^-(z) + T_{H, ij} \mathbf{D}_{H, ij}^-(z) \right) \right) \Phi_{nm}(x, y). \end{aligned} \quad (247)$$

Далее используем условие непрерывности тангенциальных компонент на верхней границе зоны модуляции при $z=a$

$$\begin{aligned} &\sum_{n=-N, m=-N}^{N, N} R_{E, nm} \mathbf{V}_{E, nm}^+(x, y, a) + \sum_{n=-N, m=-N}^{N, N} R_{H, nm} \mathbf{V}_{H, nm}^+(x, y, a) + \\ &+ I_{E, 00} \mathbf{V}_{E, 00}^-(x, y, a) + I_{H, 00} \mathbf{V}_{H, 00}^-(x, y, a) = \\ &= \sum_{n,m=-N}^N \left(\sum_{i,j=-N}^N \left(T_{E, ij} \mathbf{D}_{E, ij}^-(a) + T_{H, ij} \mathbf{D}_{H, ij}^-(a) \right) \right) \Phi_{nm}(x, y), \end{aligned} \quad (248)$$

где четырехкомпонентные вектора $\mathbf{V}_{E,mm}^{\pm}(\mathbf{x})$, $\mathbf{V}_{H,mm}^{\pm}(\mathbf{x})$ определены в уравнениях (219), (220) и могут быть представлены в виде:

$$\mathbf{V}_{E,mm}^{\pm}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}_{E,mm}^{\pm}(z) \cdot \varphi_{mm}(x, y), \quad \mathbf{V}_{H,mm}^{\pm}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}_{H,mm}^{\pm}(z) \cdot \varphi_{mm}(x, y), \quad (249)$$

где

$$\mathbf{S}_{E,mm}^{\pm}(z) = \frac{1}{\sqrt{\gamma_{mm} \varepsilon_0 (\alpha_n^2 + \beta_m^2)}} \begin{pmatrix} \mp \gamma_{mm} \alpha_n \\ -\varepsilon_0 \alpha_n \\ \mp \gamma_{mm} \beta_m \\ \varepsilon_0 \beta_m \end{pmatrix} \exp(\pm i k_0 \gamma_{mm} z), \quad (250.1)$$

$$\mathbf{S}_{H,mm}^{\pm}(z) = \frac{1}{\sqrt{\gamma_{mm} (\alpha_n^2 + \beta_m^2)}} \begin{pmatrix} -\beta_m \\ \mp \gamma_{mm} \beta_m \\ \alpha_n \\ \mp \gamma_{mm} \alpha_n \end{pmatrix} \exp(\pm i k_0 \gamma_{mm} z). \quad (250.2)$$

Приравнивая в (248) коэффициенты при одинаковых функциях $\varphi_{mm}(x, y)$, получим систему $4(2N+1)^2$ линейных уравнений относительно $4(2N+1)^2$ неизвестных коэффициентов $R_{E,mm}$, $R_{H,mm}$, $T_{E,mm}$, $T_{H,mm}$:

$$\begin{aligned} R_{E,mm} \mathbf{S}_{E,mm}^+ (a) + R_{H,mm} \mathbf{S}_{H,mm}^+ (a) - \sum_{i,j=-N}^N (T_{E,ij} \mathbf{D}_{E,ij}^- (a) + T_{H,ij} \mathbf{D}_{H,ij}^- (a)) = \\ = - (I_{E,mm} \mathbf{S}_{E,00}^- (a) + I_{H,mm} \mathbf{S}_{H,mm}^- (a)) \delta_{mm}, \quad n, m = -N, \dots, N, \end{aligned} \quad (251)$$

$$\text{где } \delta_{mm} = \begin{cases} 1, & n = 0, \quad m = 0, \\ 0 & n \neq 0, \quad m \neq 0. \end{cases}$$

5.1. Дифракция на бинарных дифракционных решетках

Рассмотрим бинарные дифракционные решетки. Для бинарных решеток функции $\varepsilon(x, y, z)$, $1/\varepsilon(x, y, z)$ не зависят от переменной z . Соответственно, коэффициенты Фурье $c_{mm}^{(1)}$, $c_{mm}^{(2)}$ в (234)-(237) также не зависят от переменной z . При этом поле в зоне модуляции описывается системой линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d\mathbf{V}(z)}{dz} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}(z), \quad (252)$$

где \mathbf{A} – матрица системы (237), а $\mathbf{V}(z)$ вектор столбец, составленный из функций $S_{x,qt}(z)$, $U_{y,qt}(z)$, $S_{y,qt}(z)$, $U_{x,qt}(z)$. Решение системы дифференци-

альных уравнений с постоянными коэффициентами удобно представить через экспоненту в степени матрицы:

$$\mathbf{V}(z) = \exp(\mathbf{A} \cdot z) \cdot \mathbf{X}_0, \quad (253)$$

где \mathbf{X}_0 – вектор граничных условий. Как и в одномерном случае, матричное представление (253) позволяет выразить значения $\mathbf{D}_{E,mm}^-(a)$, $\mathbf{D}_{H,mm}^-(a)$ решений системы дифференциальных уравнений при $z=a$, входящие в конечную систему линейных уравнений (251), в виде

$$\mathbf{D} = \exp(\mathbf{A} \cdot a) \cdot \mathbf{C}, \quad (254)$$

где \mathbf{D} – матрица значений $\mathbf{D}_{E,mm}^-(a)$, $\mathbf{D}_{H,mm}^-(a)$, $m, n = -N, \dots, N$, а \mathbf{C} – матрица, составленная из векторов граничных условий, ненулевые компоненты которых определены в (239). Представление (254) удобно при решении задач оптимизации, поскольку позволяет легко записать приращения коэффициентов отражения и пропускания в (251) при малом изменении параметров профиля решетки. В двумерном случае мы не будем рассматривать градиентные процедуры решения обратных задач расчета решеток, поскольку, согласно (251), (254), их единственное отличие от одномерного случая состоит в громоздкости формул из-за наличия двойных индексов.

Рассмотрим некоторые аспекты численного решения задачи дифракции на бинарной решетке. Наибольшей вычислительной сложностью обладают процедура решения системы дифференциальных уравнений (235) и процедура решения системы линейных уравнений (251). Решение системы дифференциальных уравнений сводится к вычислению экспоненты в степени матрицы в (254). Специальный вид матрицы системы (237) позволяет существенно упростить решение этой задачи. Действительно, перегруппируем дифференциальные уравнения системы (235) и представим вектор столбец $\tilde{\mathbf{V}}(z)$ искомых функций в виде

$$S_{x,qt}(z), S_{y,qt}(z), U_{x,qt}(z), U_{y,qt}(z), \quad q, t = -N, \dots, N. \quad (255)$$

В этом случае система (37) примет вид

$$\frac{d\tilde{\mathbf{V}}(z)}{dz} = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{V}}(z), \quad (256)$$

где $\tilde{\mathbf{A}} = ik_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_0 \mathbf{D}_\alpha \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{D}_\beta & \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mathbf{D}_\alpha \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{D}_\alpha \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \mathbf{D}_\beta \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{D}_\beta - \mathbf{E} & -\varepsilon_0 \mathbf{D}_\beta \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{D}_\alpha \\ -\varepsilon_0 \mathbf{D}_\alpha \mathbf{D}_\beta & \varepsilon_0 \mathbf{D}_\alpha^2 - \mathbf{C}^{(1)} & 0 & 0 \\ \mathbf{C}^{(1)} - \varepsilon_0 \mathbf{D}_\beta^2 & \varepsilon_0 \mathbf{D}_\alpha \mathbf{D}_\beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (257)$

- матрица системы. Решение задачи дифракции требует вычисления вектора искомых функций $\tilde{\mathbf{V}}(z)$ при $z=a$. Расчет $\tilde{\mathbf{V}}(a)$ сводится к вычислению к вычислению экспоненты в степени матрицы $\exp(\tilde{\mathbf{A}} \cdot a)$. Обозначим \mathbf{W} , $\mathbf{\Lambda}$ матрицу собственных векторов и диагональную матрицу собственных значений матрицы

$$\tilde{\mathbf{A}}_1 = \tilde{\mathbf{A}} \cdot a. \quad (258)$$

В дальнейшем будем предполагать, что матрица $\tilde{\mathbf{A}}_1$ не имеет кратных собственных значений [7-9]. Экспонента в степени матрицы может быть представлена в виде [13]:

$$\exp(\tilde{\mathbf{A}}_1) = \exp(\mathbf{W} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{W}^{-1}) = \mathbf{W} \cdot \exp(\mathbf{\Lambda}) \cdot \mathbf{W}^{-1}, \quad (259)$$

где $\exp(\mathbf{\Lambda})$ - диагональная матрица с элементами $\exp(\lambda_i)$, а $\lambda_i, i=1, \dots, 4(2N+1)^2$ - собственные значения матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_1$. Таким образом, вычисление $\exp(\tilde{\mathbf{A}}_1)$ сводится к расчету собственных значений и собственных векторов матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_1$. Покажем, что представление матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_1$ в виде (257), (258) позволяет в два раза уменьшить размерность задачи на собственные значения [9]. Представим матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_1$, \mathbf{W} , $\mathbf{\Lambda}$ в виде блочных матриц с размером блока $2(2N+1)^2 \times 2(2N+1)^2$ [9]:

$$\tilde{\mathbf{A}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} \\ \mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{\Lambda}_{22} \end{pmatrix}. \quad (260)$$

Поскольку $\tilde{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{W} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{W}^{-1}$, то

$$\begin{pmatrix} 0 & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} \\ \mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} \\ \mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{\Lambda}_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{12} \mathbf{W}_{21} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \mathbf{W}_{22} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21} \mathbf{W}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{21} \mathbf{W}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{11} \mathbf{\Lambda}_{11} & \mathbf{W}_{12} \mathbf{\Lambda}_{22} \\ \mathbf{W}_{21} \mathbf{\Lambda}_{11} & \mathbf{W}_{22} \mathbf{\Lambda}_{22} \end{pmatrix}$$

и будем иметь

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{12} \tilde{\mathbf{A}}_{21} \mathbf{W}_{11} &= \tilde{\mathbf{A}}_{12} \mathbf{W}_{21} \mathbf{\Lambda}_{11} = \mathbf{W}_{11} \mathbf{\Lambda}_{11} \mathbf{\Lambda}_{11}, \\ \tilde{\mathbf{A}}_{12} \tilde{\mathbf{A}}_{21} \mathbf{W}_{12} &= \tilde{\mathbf{A}}_{12} \mathbf{W}_{22} \mathbf{\Lambda}_{22} = \mathbf{W}_{12} \mathbf{\Lambda}_{22} \mathbf{\Lambda}_{22}. \end{aligned} \quad (261)$$

Введем матрицу

$$\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{A}}_{12} \tilde{\mathbf{A}}_{21} \quad (262)$$

и представим (261) в виде

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{W}_{11} = \mathbf{W}_{11} \Lambda_{11}^2, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{W}_{12} = \mathbf{W}_{12} \Lambda_{22}^2. \quad (263)$$

Согласно (263), \mathbf{W}_{11} , Λ_{11}^2 , \mathbf{W}_{12} , Λ_{22}^2 - матрицы собственных векторов и диагональные матрицы собственных значений одной и той же матрицы \mathbf{B} . Поэтому

$$\mathbf{W}_{11} = \mathbf{W}_{12}, \quad \Lambda_{22} = -\Lambda_{11} \text{ и } \mathbf{W}_{21} = \tilde{\mathbf{A}}_{21} \mathbf{W}_{11} \Lambda_{11}^{-1}, \quad \mathbf{W}_{22} = -\mathbf{W}_{21}. \quad (264)$$

Соотношения (264) определяют собственные значения и собственные вектора матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_1$ через собственные значения и собственные вектора матрицы \mathbf{B} в два раза меньшего размера виде:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{11} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21} \mathbf{W}_{11} \Lambda_{11}^{-1} & -\tilde{\mathbf{A}}_{21} \mathbf{W}_{11} \Lambda_{11}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{\Lambda_{11}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\Lambda_{11}} \end{pmatrix}. \quad (265)$$

В работе [9] отмечено, что уменьшение в 2 раза размерности задачи на собственные значения эквивалентно сведению системы (256), (257) $4(2N+1)^2$ дифференциальных уравнений первого порядка к системе $2(2N+1)^2$ уравнений второго порядка.

В заключение отметим, что граничные условия (239) позволили представить решение задачи дифракции в простом виде. Действительно, общее представление поля в зоне модуляции (241) содержит $4(2N+1)^2$ произвольных коэффициентов $C_{E,ij}^{\pm}$, $C_{H,ij}^{\pm}$. В общем случае решение задачи дифракции требует совместного определения коэффициентов $C_{E,ij}^{\pm}$, $C_{H,ij}^{\pm}$, $R_{E,ij}$, $T_{E,ij}$ из условий равенства тангенциальных компонент поля на границах зоны модуляции. Вид граничных условий (239) позволил аналитически выразить коэффициенты $C_{E,ij}^{\pm}$, $C_{H,ij}^{\pm}$ через коэффициенты $T_{E,ij}$ в виде (246). Таким образом, мы исключили из рассмотрения коэффициенты $C_{E,ij}^{\pm}$, $C_{H,ij}^{\pm}$ и свели решение задачи к совместному определению только коэффициентов $R_{E,ij}$, $T_{E,ij}$ из условия равенства тангенциальных компонент поля на верхней границе зоны модуляции.

Тем не менее простой алгоритмический подход (239), (246), (251) обладает недостатками с точки зрения численной реализации. Основным недостатком состоит в необходимости вычисления диагональной матрицы $\exp(\Lambda)$ в (259). Матрица $\exp(\Lambda)$ содержит элементы $\exp(\lambda_i)$, где λ_i - собственные значения матрицы системы дифференциальных уравнений (256). При увеличении глубины профиля a собственные значения λ_i растут, что приводит к переполнению при вычислении экспонент $\exp(\lambda_i)$ [8,9]. Для численной реализации, исключающей переполнение, общее решение системы дифференциальных уравнений (256), (257) представляется в виде:

$$\tilde{\mathbf{V}}(z) = \sum_{l=1}^{2(2N+1)^2} C_l^+ \mathbf{S}_l^+ \exp(\lambda_l^+(z-a)) + \sum_{l=1}^{2(2N+1)^2} C_l^- \mathbf{S}_l^- \exp(\lambda_l^- z), \quad (266)$$

где $\lambda_l^\pm, \mathbf{S}_l^\pm$ – собственные числа и собственные вектора матрицы (257) [8,9]. Согласно (258), (265), первая половина собственных значений матрицы (257) имеет положительную действительную часть, а вторая половина – отрицательную. Знаки ‘ \pm ’ в индексах собственных чисел и векторов обозначают знаки действительной части собственных значений. Представление решения системы (256), (257) в виде (266) позволяет избежать переполнения за счет введения множителей $\exp(\lambda_l^+ a)$, компенсирующих значения экспонент $\exp(\lambda_l^+ z)$ на верхней границе зоны модуляции при $z=a$. Отметим, что представление решения системы в виде (266) соответствует использованию в качестве граничных условий собственных векторов матрицы (257). Коэффициенты $C_l^\pm, R_{E,ij}, T_{E,ij}$ определяются из условий равенства тангенциальных компонент поля на границах зоны модуляции:

$$\begin{aligned} T_{E,mm} \tilde{\mathbf{S}}_{E,mm}^-(0) + T_{H,mm} \tilde{\mathbf{S}}_{H,mm}^-(0) = \\ = \sum_{l=1}^{2(2N+1)^2} C_l^+ \mathbf{S}_{l,mm}^+ \exp(-\lambda_l^+ a) + \sum_{l=1}^{2(2N+1)^2} C_l^- \mathbf{S}_{l,mm}^-, \end{aligned} \quad (267)$$

$$\begin{aligned} R_{E,mm} \mathbf{S}_{E,mm}^+(a) + T_{H,mm} \mathbf{S}_{H,mm}^+(a) + I_{E,00} \mathbf{S}_{E,00}^-(a) + I_{H,00} \mathbf{S}_{H,00}^-(a) = \\ = \sum_{l=1}^{2(2N+1)^2} C_l^+ \mathbf{S}_{l,mm}^+ + \sum_{l=1}^{2(2N+1)^2} C_l^- \mathbf{S}_{l,mm}^- \exp(\lambda_l^- a), \end{aligned} \quad (268)$$

где вектора $\tilde{\mathbf{S}}_{E,mm}^\pm, \tilde{\mathbf{S}}_{H,mm}^\pm, \mathbf{S}_{E,mm}^\pm, \mathbf{S}_{H,mm}^\pm$ определены в (238), (239). Уравнения (267), (268) определяют систему $8(2N+1)^2$ линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов. Несмотря на то, что система линейных уравнений (267), (268) имеет в два раза большую размерность, чем система уравнений (251), ее решение не является более сложным. Можно показать, что уравнения (267), (268) позволяют выразить коэффициенты отражения и пропускания $R_{E,ij}, T_{E,ij}$ через коэффициенты C_l^\pm , а расчет C_l^\pm свести к решению системы $4(2N+1)^2$ линейных уравнений. Мы не приводим конечных расчетных формул только из-за их громоздкости.

Таким образом, мы получили два представления решения задачи дифракции. Представление (239), (246), (251) является простым и наглядным, а представление (266)-(268) устраняет возможные переполнения и обладает лучшей вычислительной устойчивостью.

5.2. Синтез субволновых антиотражающих покрытий

Приведенный метод решения задачи дифракции был использован для расчета субволновых антиотражающих бинарных дифракционных решеток. Термин «субволновые решетки» означает, что решетка имеет только нулевые отраженный и прошедший распространяющиеся порядки. Остальные порядки соответствуют затухающим волнам. Для существования только нулевых порядков при нормальном падении, периоды d_x , d_y решетки должны удовлетворять условиям

$$d_x < \frac{\lambda}{\max(\sqrt{\varepsilon_s}, \sqrt{\varepsilon_0})}, \quad d_y < \frac{\lambda}{\max(\sqrt{\varepsilon_s}, \sqrt{\varepsilon_0})}. \quad (269)$$

Пример 13. В качестве антиотражающего покрытия была использована простейшая бинарная решетка с равными периодами $d_x=d_y=d$ по осям Ox , Oy и имеющая на периоде одну квадратную выемку с размером стороны $r \in (0, d)$ и с глубиной h . Интенсивности отраженных и прошедших порядков для двумерной решетки рассчитываются по формулам

$$I_{nm}^R = |R_{E, nm}|^2 + |R_{H, nm}|^2, \quad I_{nm}^T = |T_{E, nm}|^2 + |T_{H, nm}|^2. \quad (270)$$

Расчет антиотражающего покрытия состоял в вычислении интенсивности нулевого отраженного порядка I_{00}^R при различных значениях глубины выемки h и размера ступеньки r при фиксированном периоде d . Значения h , r , обеспечивающие минимум отражения I_{00}^R , и будут оптимальными параметрами решетки.

Для расчета были выбраны следующие параметры: $\lambda=10,6$ мкм, $\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_s=5,76$, $d=0,25\lambda=2,65$ мкм. Указанные значения диэлектрической проницаемости ε_s и длины волны соответствуют случаю синтеза антиотражающего покрытия из ZnSe (цинк селенид) для CO_2 лазера. Задача синтеза такого покрытия является особенно актуальной при большой мощности CO_2 лазера. На рис. 20 приведен график функции $I_{00}^R(h, r/d)$ при $h \in (0, 3.5)$ мкм и $r/d \in (0.1, 0.8)$. Расчет проводился по формулам (266)-(268) при $N=5$ для случая нормального падения плоской волны. Падающая волна представлялась в виде суперпозиции E - и H - волн с равными коэффициентами $I_{E,00}$, $I_{H,00}$ в (222). Такое представление моделирует случай неполяризованного света. Рис. 20 показывает, что при $r/d \sim 0,8$ и $h \sim 1,8$ мкм имеется ясно выраженный минимум коэффициента отражения $I_{00}^R(h, r/d)$. На рис. 21 приведен график коэффициента отражения $I_{00}^R(h, r/d)$ при оптимальном размере выемки $r=0,8d$ и различных значениях

высоты. Из графика на рис. 21 видно, что для решетки с квадратной выемкой коэффициент отражения падает фактически до нуля при глубинах $0,18\lambda$, $0,49\lambda$, и $0,82\lambda$. При этом на плоской границе раздела “цинк селенид – воздух” коэффициент отражения составляет около 17%.

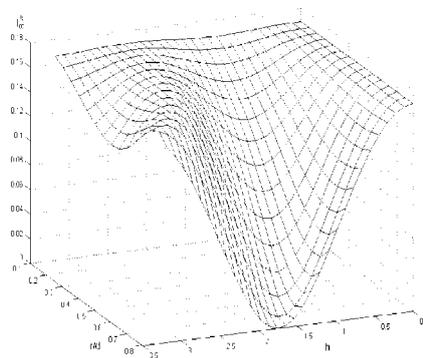


Рис. 20. Зависимость коэффициента отражения I_{00}^R от глубины $h \in (0, 3,5)$ мкм и размера стороны квадратной выемки $r/d \in (0,1, 0,8)$

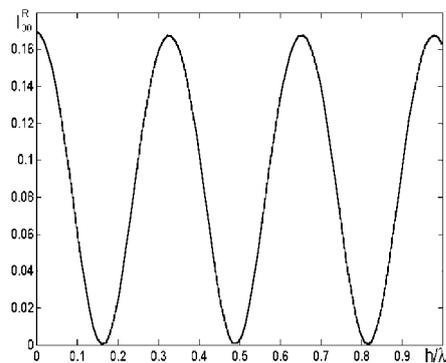


Рис. 21. Зависимость коэффициента отражения I_{00}^R от глубины (h/λ) при оптимальном размере стороны выемки $r/d=0,8$

Пример 14. Были исследованы антиотражающие свойства бинарной решетки, имеющей на периоде круглую выемку. На рис. 22 приведен график функции $I_{00}^R(h, r/d)$ при $h \in (0, 3,5)$ мкм, $r/d \in (0,1, 0,45)$. Рис. 22 показывает, что минимум коэффициента отражения достигается при $r/d=0,45$ и $h \sim 1,9$ мкм. График коэффициента отражения $I_{00}^R(h, r/d)$ при оптимальном радиусе выемки $r = 0,45d$ и различных значениях высоты приведен на рис. 23. Рис. 23 показывает, что для решетки с круглой выемкой коэффициент отражения падает фактически до нуля при глубинах $0,17\lambda$, $0,5\lambda$, и $0,83\lambda$.

Пример 15. Была исследована возможность использования простейших бинарных решеток с квадратной и круглой выемками в качестве отражающего покрытия для вольфрама в видимой части спектра при $\lambda=0,55$ мкм. В этом случае диэлектрическая проницаемость комплексная и для $\lambda=0,55$ мкм

$\varepsilon_s=4,8+19,11i$. Графики коэффициента отражения $I_{00}^R(h, r/d)$ для бинарных решеток на вольфраме при периоде $d=0,85\lambda$ приведены на рис. 24. Рис. 24 показывает, что минимум коэффициента отражения достигается при размере квадратной выемки $r=0,75d$ и при радиусе круглой выемки $r=0,4d$ при примерно равной глубине $h \sim 0,35\lambda$.

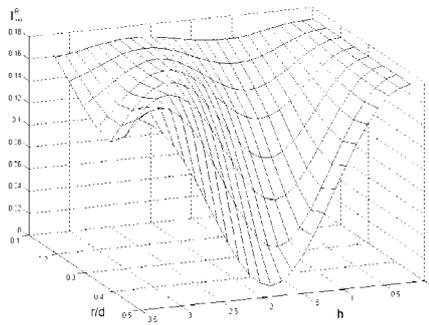


Рис. 22. Зависимость коэффициента отражения I_{00}^R от глубины $h \in (0, 3,5)$ мкм и радиуса выемки $r/d \in (0,1, 0,45)$ для бинарного покрытия

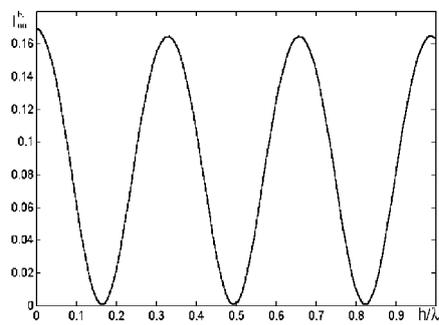


Рис. 23. Зависимость коэффициента отражения I_{00}^R от глубины h/λ при оптимальном радиусе выемки $r=0,45d$

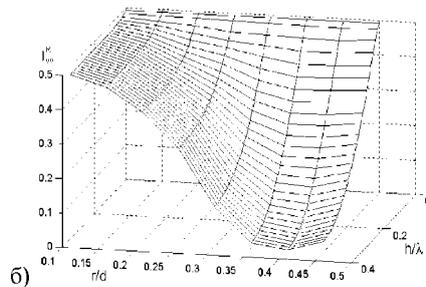
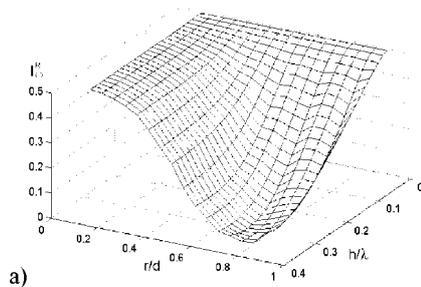


Рис. 24. Зависимость коэффициента отражения от глубины $(h/\lambda) \in (0, 0,4)$ мкм и размеров выемки r/d для решеток с квадратной выемкой (а) и с круглой выемкой (б)

Графики коэффициентов отражения при оптимальных размерах выемок приведены на рис. 25. Из графиков на рис. 25 видно, что коэффициент отражения для плоской границы вольфрам-воздух близок к 50%. С ростом глубины коэффициент отражения уменьшается, достигая нуля при глубине $h \approx 0,33\lambda$

для решетки с квадратной выемкой и при глубине $h \approx 0,38\lambda$ для решетки с круглой выемкой. В отличие от диэлектрических решеток на рис. 21, 23, вторичные минимумы выражены слабо.

На рис. 26 приведены графики для коэффициентов отражения при оптимальных размерах выемок в зависимости от длины волны в диапазоне от 0,35 мкм до 3,5 мкм. Верхние графики на рис. 26 показывают коэффициент отражения для плоской границы раздела вольфрам-воздух. Рис. 26 показывает наличие резких минимумов коэффициента отражения вблизи расчетной длины волны $\lambda=0,55$ мкм. При этом в пределах всего видимого диапазона коэффициент отражения для бинарных решеток более чем в 2 раза меньше, чем для плоской границы раздела.

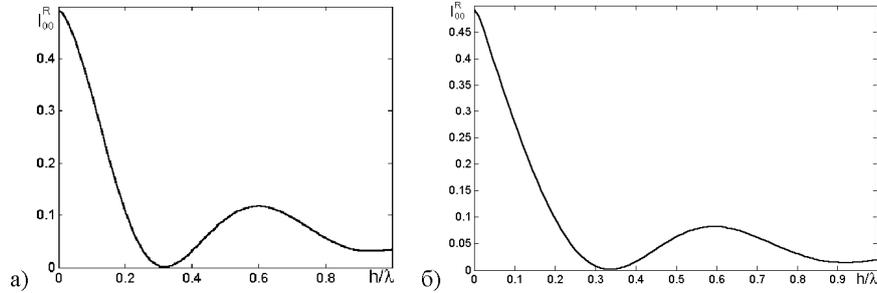


Рис. 25. Зависимость коэффициента отражения от глубины h/λ для решеток с квадратной выемкой размера $r=0,75d$ (а) и с круглой выемкой с радиуса $r=0,4d$ (б)

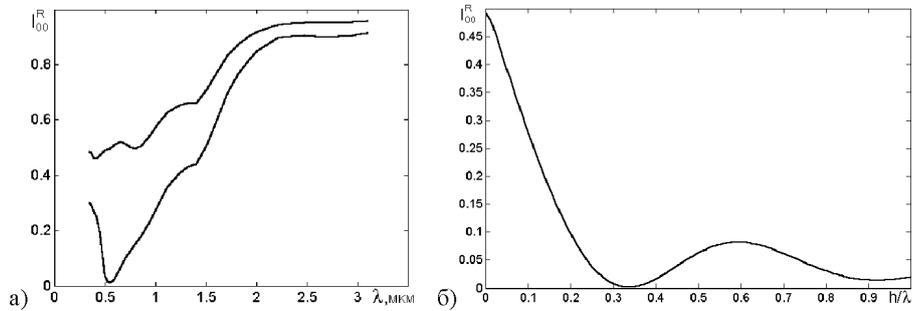


Рис. 26. Зависимость коэффициента отражения от длины волны для решеток с квадратной выемкой при $r = 0,75d$ и $h = 0,33\lambda$ (а) и с круглой выемкой при $r = 0,4d$ и $h = 0,38\lambda$ (б)

На рис. 27 приведены графики интенсивности отраженных порядков для рассчитанных решеток в зависимости от угла падения θ в диапазоне от 0 до 45° . В этом случае единичный вектор $\mathbf{n}=(-\cos(\theta),0,\sin(\theta))$ направления падающей волны в (221) расположен в плоскости XOZ, а угол θ отсчитывается от оси Oz. Как и ранее падающая волна соответствует суперпозиции E и H волн с равными коэффициентами $I_{E,00}$, $I_{H,00}$. Рис. 27 показывает, что в пределах 45°

интенсивность нулевого отраженного порядка составляет менее 8%. При $\theta > 8,63^\circ$ появляется дополнительный порядок дифракции $(-1,0)$. Интересно отметить, что интенсивность -1 -го порядка оказывается значительно выше интенсивности 0 -го порядка. Несмотря на сильный -1 -ый, решетки отражают значительно меньше, чем плоская граница раздела вольфрам-воздух. При $\theta < 45^\circ$ суммарные коэффициенты отражения для решеток не превышают 20%, в то время как для плоской границы коэффициент отражения близок к 50%.

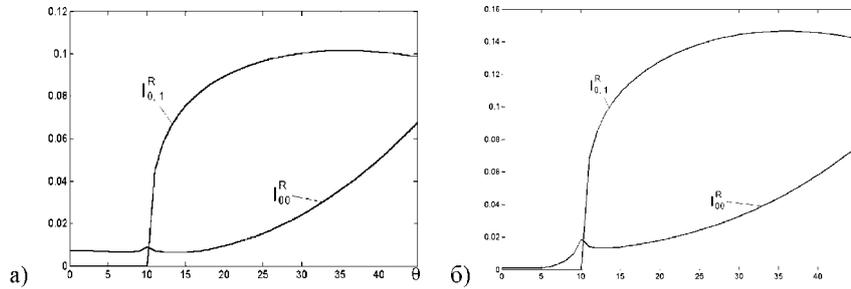


Рис. 27. Зависимость интенсивности 0 -го и -1 -го отраженных порядков от угла падения для решеток с квадратной выемкой при $r = 0,75d$, $h = 0,33\lambda$ (а) и с круглой выемкой при $r = 0,4d$, $h = 0,38\lambda$ (б)

5.3. Расчет поля от линзовых растров

Метод решения задачи дифракции был использован для исследования структуры поля, формируемого растром бинарных линз. Растр бинарных линз является частным случаем бинарной дифракционной решетки. Пусть растр линз предназначен для фокусировки в области подложки (зона 3), выполненной из непоглощающего диэлектрика. Для удобства фокус линз определим в длинах волн в зоне 3 в виде

$$f = -N\lambda_3 = -N\lambda_0 / \sqrt{\epsilon_s}. \quad (271)$$

В этом случае высота ступенек и радиусы зон бинарной линзы определяются по формулам

$$h = \frac{\lambda_3}{2(\sqrt{\epsilon_s} - 1)}, \quad r_m = \lambda_3 \sqrt{m^2 / 4 + mN}, \quad m = 1, 2, \dots, 2M, \quad (272)$$

где M – полное число зон. Формулы (272) получены в рамках геометрической оптики. Интересно исследовать фокусирующие свойства растра бинарных линз (272) при «экстремальных параметрах», когда радиус апертуры линзы R составляет всего несколько длин волн, а фокус сравним по величине с радиусом.

Пример 16. На рис. 28 приведено расчетное распределение интенсивности поля, формируемого растром бинарных линз в диэлектрике ($\epsilon_s = 2,25$) при нор-

мальном падении плоской волны, соответствующей суперпозиции E и H волн с равными коэффициентами $I_{E,00}$, $I_{H,00}$ в (222). Единицы длины вдоль осей на рис. 28 приведены в длинах волн λ_3 . Под распределением интенсивности понимается модуль z -компоненты вектора Умова-Пойнтинга:

$$I(\mathbf{x}) = \left| \operatorname{Re} \left(E_{T,x}(\mathbf{x}) H_{T,y}^*(\mathbf{x}) - E_{T,y}(\mathbf{x}) H_{T,x}^*(\mathbf{x}) \right) \right|, \quad (273)$$

где $E_{T,x}(\mathbf{x})$, $H_{T,y}(\mathbf{x})$, $E_{T,y}(\mathbf{x})$, $H_{T,x}(\mathbf{x})$ – компоненты вектора тангенциальных компонент прошедшего поля (224).

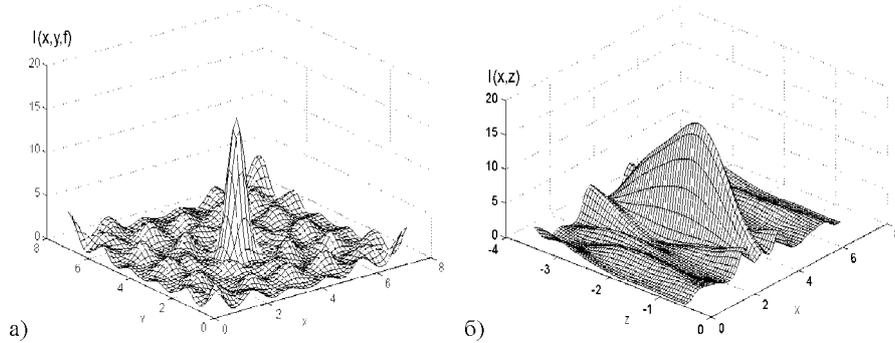


Рис. 28. Распределение интенсивности для раstra бинарных линз с параметрами $R = 3,54\lambda_3$, фокусом $f = 2\lambda_3$ в фокальной плоскости $z = -f$ (а) и в плоскости XOZ (б)

Расчет поля (273) проводился при следующих параметрах $\lambda_0 = 0,55$ мкм, $\lambda_3 = \lambda_0 / \sqrt{\epsilon_s} \approx 0,37$ мкм, радиус апертуры $R = 3,54\lambda_3$, фокус линзы $f = 2\lambda_3$. При указанных значениях параметров линза раstra имеет две зоны. Период решетки является квадратным со стороной $d = 2R$. При этом в зоне периода, расположенной вне апертуры линзы, диэлектрическая проницаемость совпадает с диэлектрической проницаемостью подложки $\epsilon_s = 2,25$. На рис. 28а показано распределение интенсивности, рассчитанное в фокальной плоскости $z = -f$ в пределах периода. Расчет проводился по формулам (266)-(268) при $N=15$, что соответствует учету 225 порядков в прошедшем поле (224). На рис. 28а виден резкий пик интенсивности с диаметром порядка $1,5\lambda_3$. Таким образом, несмотря на то, что радиус линзы раstra всего в 3,5 раза больше длины волны, а фокус линзы меньше радиуса в 1,7 раза, бинарная линза сохранила свои фокусирующие свойства. В углах периода видны вторичные всплески, обусловленные наличием на краях периода зон с постоянной диэлектрической проницаемостью, незанятых линзой. Расчетное распределение интенсивности в плоскости XOZ на рис. 28б показывает формирование пика вдоль оптической оси с размером порядка $2\lambda_3$.

На рис. 29, 30 приведены расчетные распределения интенсивности поля для раstra бинарных линз с большими радиусами $4,9\lambda_3$, $5,6\lambda_3$ и большими, относительно величины радиусов, фокусами $5\lambda_3$ и $7\lambda_3$. При указанных пара-

метрах линзы раstra также имеют две полных зоны. Рис. 28-30 показывают, что с увеличением радиуса и уменьшением числовой апертуры фокальный пик становится более резким, а вторичные колебания интенсивности слабеют. В рамках скалярной теории величина пика интенсивности в фокусе бинарной линзы определяется по формуле

$$\tilde{I} = 0.405 \cdot \left(\frac{\pi f}{\lambda} \ln \left(1 + \frac{R^2}{f^2} \right) \right)^2, \quad (274)$$

где коэффициент 0,405 представляет потери, обусловленным бинарным типом рельефа линзы. Из трех представленных растров линз, параметры линзы на рис. 30 наиболее близки к скалярной теории. Для линзы на рис. 30 относительное отличие величины пика от значения, рассчитанного в рамках скалярной теории по формуле (274),

$$\Delta = \left| \frac{\tilde{I} - I(0, 0, -f)}{\tilde{I}} \right|, \quad (77)$$

составляет 10,4%. Для линзы с наиболее экстремальными параметрами на рис. 28 отличие составляет более 46%. Таким образом, скалярное приближение дало ошибку 10% уже при радиусе в 5,6 длин волн и фокусе всего лишь на 20% больше радиуса.

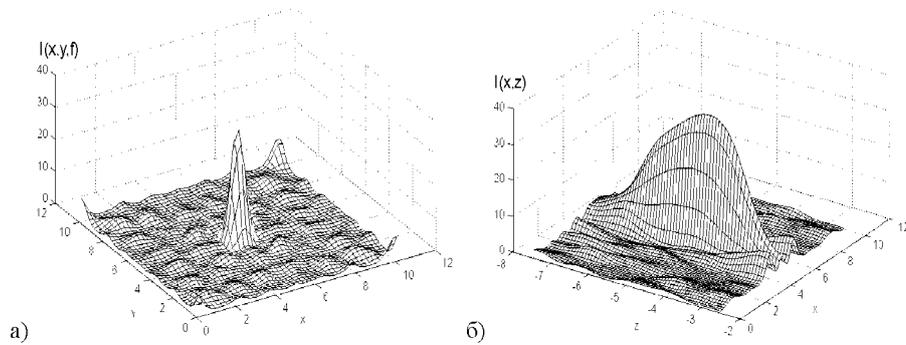


Рис. 29. Распределение интенсивности для раstra бинарных линз с параметрами $R = 4,9\lambda_3$, фокусом $f = 5\lambda_3$ в фокальной плоскости $z = -f$ (а) и в плоскости XOZ (б)

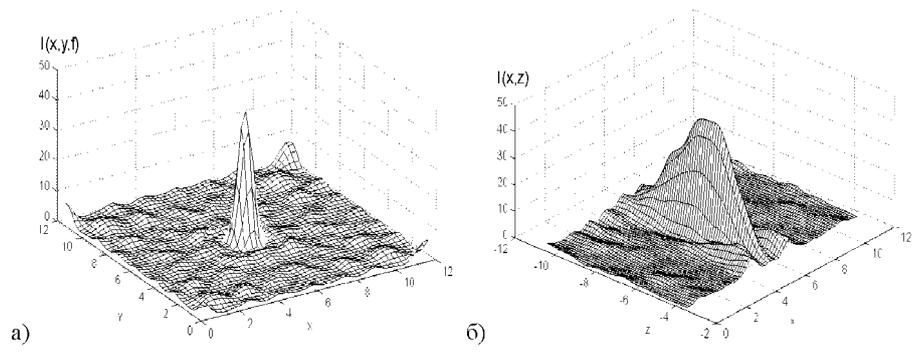


Рис. 30. Распределение интенсивности для раstra бинарных линз с параметрами $R = 5,6\lambda_3$, фокусом $f = 7\lambda_3$ в фокальной плоскости $z = -f$ (а) и в плоскости XOZ (б)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены решения задачи дифракции плоской волны на одномерных дифракционных решетках различных типов. В рамках электромагнитной теории проведен анализ работы дифракционных решеток различных типов. Проведенный анализ показывает актуальность и необходимость использования точных процедур расчета при исследовании дифракционных решеток с размером периода, сравнимым с длиной волны.

На основе приведенных решений прямых задач, в рамках электромагнитной теории разработаны градиентные методы решения обратных задач расчета дифракционных решеток. Решения обратных задач, состоящих в расчете профиля решетки из условия формирования заданных интенсивностей порядков, основаны на градиентной минимизации функционалов-критериев. Приведенные результаты расчетов показывают актуальность точных процедур синтеза решеток и подтверждают эффективность разработанных градиентных процедур. Показана работоспособность градиентной процедуры в задаче расчета однопорядковых бинарных решеток, концентрирующих излучение в -1-м или +1-м порядке. Однопорядковые решетки имеют ряд интересных применений. В частности, преобразование рельефа дифракционной линзы по закону бинарной однопорядковой решетки позволяет достичь энергетической эффективности более 90% при бинарном профиле.

Детально рассмотрены решения задачи дифракции на диэлектрической решетке в общем трехмерном случае. Рассмотрены аспекты численного решения задачи для трехмерной бинарной решетки. Проведен расчет субволновых бинарных антиотражающих покрытий. Показано, что простые бинарные решетки, имеющие на периоде одну прямоугольную или круглую выемку, позволяют свести потери на отражение фактически до нуля как в видимой, так в инфракрасной части спектра. Проведено исследование структуры поля, формируемого растром бинарных линз. Показано, что растр бинарных линз сохраняет свои фокусирующие свойства даже при экстремальных параметрах, когда радиус линзы растра составляет всего 3,5 длины волны, а фокус линзы меньше радиуса в 1,7 раза.

СПИСОК КОНТРОЛЬНЫХ ВОПРОСОВ

1. Какие уравнения Максвелла используются при решении задачи дифракции на решетке?
2. Какие граничные условия используются при решении задачи дифракции на идеально проводящих и диэлектрических решетках?
3. В каком виде представляется отраженное (прошедшее) поле вне дифракционной решетки?
4. В чем состоит приближение Рэлея?
5. Что такое квазипериодическая функция и как они используются при описании полей в дифракционных решетках?
6. Какие уравнения представляют поля внутри диэлектрической решетки для ТЕ- и ТМ-поляризации?
7. Какие матричные функции используются для представления поля внутри бинарных диэлектрических решеток? В чем удобство матричного формализма?
8. В чем суть градиентных методов расчета дифракционных решеток?
9. Какое представление используется для отраженного и прошедшего полей в случае двумерной диэлектрической решетки?
10. Какие субволновые антиотражающие структуры рассмотрены в пособии?

СПИСОК СПЕЦИАЛЬНЫХ ТЕРМИНОВ

Дифракционные решетки
Дифракционные порядки
Интенсивности прошедших и отраженных дифракционных порядков
Приближение Рэлея
Разложение Рэлея
Квазипериодическая функция
ТЕ-поляризация и ТМ-поляризация
Градиентные методы расчета дифракционных решеток
Е-волна и Н-волна
Субволновая решетка

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Electromagnetic Theory of Gratings: Topics in current physics / Ed. by R.Petit, - 22, N.Y.: Springer-Verlag., 1980.- 286 pp.
2. **Kok, Y.L.** Relative phases of electromagnetic waves diffracted by rectangular-grooved grating / Y.L. Kok, N.C. Gallagher // JOSA A. - 1988. - Vol. 5 (1). - p. 65-73.
3. **Kok, Y.L.** Design of a binary chirped grating for near-field operation / Y.L. Kok // Opt. Eng. - 1994. - Vol. 33 (11). - p. 3604-3609.
4. **Moharam, M.G.** Rigorous coupled-wave analysis of metallic surface-relief gratings / M.G. Moharam, T.K. Gaylord // JOSA A. - 1986. - Vol. 3 (11). - p. 1780-1787.
5. Методы компьютерной оптики (Издание второе, исправленное) / под ред. Сойфера В.А.- М.: Физматлит, 2003. - 688 с.
6. Methods For Computer Design of Diffractive Optical Elements / Edited by Victor A. Soifer - A Wiley-Interscience Publication John Wiley & Sons, Inc., 2002. - 765 pp.
7. **Moharam, M.G.** , Formulation for stable and efficient implementation of the rigorous coupled-wave analysis of binary grating / M.G. Moharam, E.B. Grann, D.A. Pommet // JOSA A. - 1995. - Vol. 12 (5). - p. 1068-1076.
8. **Moharam, M.G.** Stable implementation of the rigorous coupled-wave analysis for surface-relief gratings: enhanced transmittance matrix approach / M.G. Moharam, D.A. Pommet, E.B. Grann // JOSA A. - 1995. - Vol.12 (5). - p. 1077-1086.
9. **Peng, S.** An efficient implementation of rigorous coupled-wave analysis for surface-relief gratings / S. Peng, G.M. Morris // JOSA A. - 1995. - Vol.12 (5). - p. 1087-1096.
10. **Lalanne, P.** Highly improved convergence of the coupled-wave method for TM polarization / P. Lalanne, G.M. Morris // JOSA A. - 1996. - Vol.13 (4). - p. 779-784.
11. **Popov, E.** Grating theory: new equations in Fourier space leading to fast converging results for TM polarization / E. Popov, M. Nevier // JOSA A. - 2000. - Vol. 17 (10). - p. 1773-1784.
12. **Li, L.** Use of Fourier series in the analysis of discontinuous periodic structures / L. Li // JOSA A. - 1996. - Vol. 13 (9). - p. 1870-1876.
13. **Гантмахер, Ф.Р.** Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер - М.: Наука, 1988. - 548 с.
14. **Doskolovich, L.L.** A gradient method for design of multiorder varied-depth binary diffraction gratings - a comparison / L.L. Doskolovich [and other] // Opt. And Lasers in Eng. 1998. - Vol. 29(4). - p. 249-259.
15. **Zhou, C.** Numerical study of Dammann array illuminator / C. Zhou, L. Liu // Appl.Opt. - 1995. - Vol. 34(26). - p. 5961-5969.
16. **Doskolovich L.L.** Designing binary dielectric gratings and 1-D Does using the electromagnetic theory /L.L. Doskolovich // Opt. Memory and Neural Networks. - 2000. - Vol. 9 (1). - p. 1-12.
17. **Досколович, Л.Л.** Расчет бинарных диэлектрических решеток и одномерных ДОЭ в рамках электромагнитной теории / Л.Л. Досколович // Компьютерная оптика. - 1999. - №19. - С. 21-28.

18. **Doskolovich, L.L.** Analytical initial approximation for multiorder binary grating design / L.L. Doskolovich [and other] // *J.Opt.A: Pure Appl.Opt.* - 1994 - Vol. 3. – p. 921-930.
19. **Doskolovich, L.L.** Direct two-dimensional calculation of binary DOEs using a non-binary series approach / L.L. Doskolovich [and other] // *Int. Jour. of Optoelectronics.* - 1995. – Vol. 10. – p. 243-249.
20. **Soifer, V.** *Iterative Methods for Diffractive Optical Elements Computation* / V. Soifer, V. Kotlyar, L. Doskolovich - London, Taylor&Francis Ltd., 1997. - 244 pp.
21. **Moharam, M.G.** Diffraction analysis of dielectric surface-relief gratings / M.G. Moharam, T.K. Gaylord // *JOSA A.* - 1982. – Vol. 72 (10). – p. 1385-1392.
22. **Veldkamp, W.B.** High efficiency binary lenses / W.B. Veldkamp, G.C. Swanson, D.C. Shaver // *Opt. Com.* - 1984. – Vol. 5 (6). – p. 353-358.
23. **Doskolovich, L.L.** Gradient method for the design of multiorder diffraction gratings using the Rayleigh method / L.L. Doskolovich [and other] // *Proc. SPIE.* – 1997. – Vol. 3310. – p. 725-733.
24. **Никольский, В.В.** *Электродинамика и распространение радиоволн* / В.В. Никольский, Т.И. Никольская. - М.: Наука, 1989. - 543 с.
25. **Li, L.** New formulation of the Fourier modal method for crossed surface-relief gratings / L Li // *JOSA A.* – 1997. – Vol. 14 (10). – p. 2758-2766.
26. **Li, L.** Fourier modal method for crossed anisotropic gratings with arbitrary permittivity and permeability tensors / L Li // *J.Opt.A: Pure Appl.Opt.* – 2003. – Vol. 5. – p. 345–355.

Учебное издание

Досколович Леонид Леонидович

**РАСЧЕТ ДИФРАКЦИОННЫХ РЕШЕТОК
В РАМКАХ СТРОГОЙ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ТЕОРИИ**

Учебное пособие

Компьютерная верстка С. В. Смагин,
Я.Е. Тахтаров, М.А. Вахе
Редакторская обработка
Доверстка

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 5.
Тираж экз. Заказ . ИП- /2007

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.