

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени академика С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

А.А. БУХАНЬКО, О.П. ЧОСТКОВСКАЯ

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ,
УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебно-методического пособия*

САМАРА
Издательство СГАУ
2011

УДК СГАУ: 519.24 (075)

ББК 22.1я7

Б 94

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, доц. СамГУ Л.В. Степанова;

д-р физ.-мат. наук, проф. СГАУ А.И. Хромов.

Буханько А.А., Чостковская О.П.

Б 94 **Приближенные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными и интегральных уравнений:** учеб.-метод. пособие / *А.А. Буханько, О.П. Чостковская.* – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2011. - 68 с.: ил.

ISBN 978-5-7883-0816-6

Пособие посвящено методам нахождения приближенных решений краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными (гиперболического, параболического и эллиптического типов) и интегральных уравнений (Фредгольма, Вольтерра). Пособие содержит материалы, необходимые для выполнения курсовой работы по курсу «Уравнения математической физики».

Предназначено для студентов специальностей «Механика и математическое моделирование», «Динамика и прочность машин» и других инженерно-технических специальностей, а также для аспирантов и инженерно-технических работников. Предложенный материал полезен при изучении приближенных методов решения задач некоторых разделов математики и механики.

ISBN 978-5-7883-0816-6

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1 ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	5
1.1 Метод конечных разностей	5
1.2 Метод прогонки	8
1.3 Базисные функции	15
1.4 Метод Галеркина	16
1.5 Метод коллокаций	20
1.6 Метод Рунге для простейшей краевой задачи	21
2 МЕТОД СЕТОК ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ	25
2.1 Метод сеток для уравнений параболического типа	27
2.2 Метод сеток для уравнений гиперболического типа	32
2.3 Метод сеток для задачи Дирихле	37
2.4 Итерационный метод решения системы конечно-разностных уравнений	39
3 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	43
3.1 Метод последовательных приближений	44
3.2 Метод конечных сумм	47
3.3 Метод вырожденного ядра	51
4 ЗАДАНИЕ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ	55
I Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений	55
II Уравнения в частных производных	55
III Интегральные уравнения	58
ПРИЛОЖЕНИЕ I. Аналитические решения уравнений в частных производных (метод Фурье)	61
I.1 Смешанная задача о колебаниях однородной струны	61
I.2 Смешанная задача о теплопроводности в однородном стержне	62
ПРИЛОЖЕНИЕ II. Связь между дифференциальным уравнением и уравнением Вольтерра	64
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	66

ВВЕДЕНИЕ

В самых разнообразных областях современной науки и техники часто приходится встречаться с математическими задачами, для которых невозможно получить точное решение классическими методами или же решение может быть получено в таком сложном виде, которое неприемлемо для практического использования.

Цель пособия – помочь студенту при изучении приближенных методов решения различных дифференциальных и интегральных уравнений. В данной работе рассмотрены основные вычислительные методы, позволяющие найти приближенные решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными и интегральных уравнений. В каждом разделе для лучшего понимания алгоритмов решений приведены примеры расчетов.

В первой главе пособия рассматриваются численные и аналитические методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Вторая глава посвящена одному из самых распространенных методов численного решения уравнений с частными производными – методу сеток. Рассматривается применение этого метода для уравнений параболического, гиперболического и эллиптического типов.

В третьей главе рассматриваются некоторые численные методы решения интегральных уравнений: методы последовательных приближений, конечных сумм и вырожденного ядра.

Четвертая глава содержит задание на курсовую работу по курсу «Уравнения математической физики». Выполнение курсовой работы требует самостоятельного составления краевых задач и интегральных уравнений, их решения приближенными методами и сравнения с точным (аналитическим) решением. Цель курсовой работы состоит в том, чтобы освоить приближенные методы решения некоторых дифференциальных и интегральных уравнений. Структура курсовой работы соответствует структуре первых трех глав данного учебно-методического пособия.

1 ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматриваются методы решения линейной краевой задачи:

$$L[y] \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} \Gamma_a[y] \equiv \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \\ \Gamma_b[y] \equiv \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \end{cases} \quad (1.2)$$

где $p(x), q(x), f(x)$ - известные непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции, $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, A, B$ - заданные постоянные, причем $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$ и $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$. Если $A = B = 0$, то краевые условия (1.2) называются *однородными*.

Методы приближенного решения краевой задачи (1.1), (1.2) разделяются на две группы:

- *разностные методы* (позволяют найти приближенное решение в виде таблицы);
- *аналитические методы* (позволяют найти приближенное решение в виде аналитического выражения).

1.1 Метод конечных разностей

Одним из наиболее простых методов решения краевой задачи (1.1) – (1.2) является сведение ее к *системе конечно-разностных уравнений*.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равноотстоящих узлов с некоторым шагом $h = \frac{b-a}{n}$. Точки разбиения имеют абсциссы

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad x_i = x_0 + ih \\ (i = \overline{1, n-1}).$$

Получаемые в результате расчета приближенные значения искомой функции $y(x)$ (рис. 1.1) и ее производных $y'(x)$, $y''(x)$ в узлах x_i обозначим через y_i, y'_i, y''_i соответственно.

Также введем обозначения

$$p_i = p(x_i), \quad q_i = q(x_i), \quad f_i = f(x_i).$$

Заменим приближенно в каждом внутреннем узле производные *конечно-разностными отношениями*

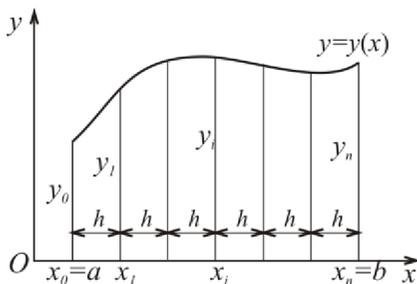


Рис. 1.1

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad y''_i = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2}, \quad (1.3)$$

а на концах отрезка положим

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad y''_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}. \quad (1.4)$$

Подставив (1.3), (1.4) в уравнение (1.1) и условия (1.2):

$$\begin{cases} \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + q_i y_i = f_i & (i = \overline{0, n-2}), \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A, \quad \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B, \end{cases} \quad (1.5)$$

получим линейную систему $n+1$ алгебраических уравнений с $n+1$ неизвестными. Решив ее, получим таблицу приближенных значений искомой функции.

Пример 1.1. *Методом конечных разностей найти приближенное решение уравнения*

$$y'' + \frac{1}{x} y' + 0,5y = 0,5x^2 - \ln x + 4, \quad (1^1)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{cases} y(1) + y'(1) = 1, \\ y(2) - 0,5y'(2) = 1,1137, \end{cases} \quad (1^2)$$

используя конечно-разностные отношения.

Выберем шаг $h = 0,2$, получим шесть узлов сетки: $x_0 = 1$, $x_1 = 1,2$, $x_2 = 1,4$, $x_3 = 1,6$, $x_4 = 1,8$, $x_5 = 2$. Используя формулы (1.3), заменяем уравнение (1¹) системой конечно-разностных уравнений:

$$\frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} + \frac{1}{x_i} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + 0,5y_i = 0,5x_i^2 - \ln x_i + 4, \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

В результате приведения подобных членов получаем

$$y_i \left(1 - \frac{h}{x_i} + 0,5h^2 \right) + y_{i+1} \left(-2 + \frac{h}{x_i} \right) + y_{i+2} = h^2 (0,5x_i^2 - \ln x_i + 4). \quad (1^3)$$

В граничных узлах краевые условия (1²) согласно (1.4) принимают вид

$$y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h} = 1, \quad y_5 - 0,5 \frac{y_5 - y_4}{h} = 1,1137.$$

Записав предпоследнее уравнение для каждого узла $i = 0, 1, 2, 3$ и добавив последние уравнения, получим систему

$$\begin{cases} 0,82y_0 - 1,8y_1 + y_2 = 0,18, \\ 0,853y_1 - 1,833y_2 + y_3 = 0,182, \\ 0,877y_2 - 1,857y_3 + y_4 = 0,186, \\ 0,895y_3 - 1,875y_4 + y_5 = 0,192, \\ -0,8y_0 + y_1 = 0,2, \\ -0,3y_3 + 0,5y_4 = 0,223, \end{cases}$$

решая которую, получаем

$$y_0 = 1,066, \quad y_1 = 1,053, \quad y_2 = 1,201, \quad y_3 = 1,485, \quad y_4 = 1,891, \quad y_5 = 2,408.$$

Для сравнения приведем значения точного решения задачи (1¹), (1²) $y(x) = x^2 - 2 \ln x$ в соответствующих точках:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= 1,000, \quad y(x_1) = 1,075, \quad y(x_2) = 1,287, \\ y(x_3) &= 1,620, \quad y(x_4) = 2,064, \quad y(x_5) = 2,614. \end{aligned}$$

Другое приближенное решение получается, если производные заменить *центрально-разностными отношениями*

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

Тогда получим систему

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i \quad (i = \overline{1, n-1}), \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A, \quad \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \end{cases} \quad (1.6)$$

Замечание: Если функция $y = y(x)$ достаточно гладкая, то более точные значения дают формулы

$$y'_0 = \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h}, \quad y'_n = \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h} \quad (n \geq 2). \quad (1.7)$$

Оценка погрешности метода конечных разностей для задачи (1.1), (1.2) имеет вид

$$|y_i - y(x_i)| \leq \frac{h^2 M_4}{96} (b-a)^2,$$

где $y(x_i)$ — значение точного решения при $x = x_i$, $M_4 = \max_{x \in [a,b]} |y^{(4)}(x)|$.

Пример 1.2. *Методом конечных разностей найти приближенное решение уравнения (1¹), удовлетворяющее краевым условиям (1²), используя центрально-разностные отношения с шагом $h = 0,2$.*

Используя формулы (1.6) и (1.7), заменяем уравнение (1¹) и краевые условия (1²) системой конечно-разностных уравнений:

$$\begin{cases} y_{i+1} \left(1 + \frac{h}{2x_i} \right) + y_i (-2 + 0,5h^2) + y_{i-1} \left(1 - \frac{h}{2x_i} \right) = h^2 (0,5x_i^2 - \ln x_i + 4) \\ y_0 + \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} = 1, \quad y_5 - 0,5 \frac{3y_5 - 4y_4 + y_3}{2h} = 1,1137. \end{cases} \quad (1^4)$$

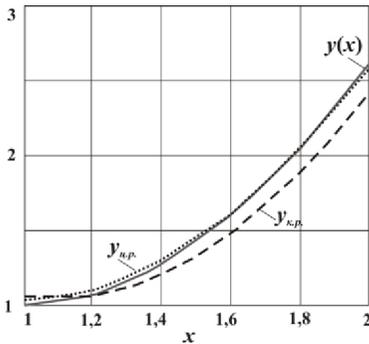


Рис. 1.2

Подставляя значения соответствующих коэффициентов, последняя система примет вид

$$\begin{cases} 1,083y_2 - 1,98y_1 + 0,917y_0 = 0,182, \\ 1,071y_3 - 1,98y_2 + 0,929y_1 = 0,186, \\ 1,063y_4 - 1,98y_3 + 0,938y_2 = 0,192, \\ 1,056y_5 - 1,98y_4 + 0,944y_3 = 0,201, \\ -2,6y_0 + 4y_1 - 2y_2 = 0,4, \\ -1,1y_5 + 2y_4 - 0,5y_3 = 0,446. \end{cases}$$

Решением этой системы будет

$$\begin{aligned} y_0 &= 1,037, \quad y_1 = 1,099, \quad y_2 = 1,299, \\ y_3 &= 1,622, \quad y_4 = 2,055, \quad y_5 = 2,594. \end{aligned}$$

На рис. 1.2 представлено графическое сравнение решений задачи (1¹)-(1²), полученных в примерах 1.1 и 1.2, с точным решением. Из графиков видно, что значения, близкие к точным, дают в данном случае центрально-разностные соотношения.

1.2 Метод прогонки

При применении метода конечных разностей к краевым задачам для дифференциальных уравнений второго порядка получается «трехчленная система» линейных алгебраических уравнений, каждое из которых содержит три соседних неизвестных. Для решения такой системы разработан метод, получивший название *метода прогонки*.

Запишем первые $n-1$ уравнений системы (1.5) в виде

$$\begin{aligned} y_{i+2} + m_i y_{i+1} + k_i y_i &= h^2 f_i, \\ m_i &= -2 + hp_i, \quad k_i = 1 - hp_i + h^2 q_i \quad (i = \overline{0, n-2}). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Разрешая уравнение (1.8) относительно y_{i+1} :

$$y_{i+1} = \frac{f_i}{m_i} h^2 - \frac{1}{m_i} y_{i+2} - \frac{k_i}{m_i} y_i \quad (1.9)$$

и предполагая, что с помощью полной системы (1.5) из уравнения (1.9) исключена неизвестная y_i , получим

$$y_{i+1} = c_i (d_i - y_{i+2}) \quad (i = \overline{0, n-2}), \quad (1.10)$$

где c_i, d_i ($i = \overline{1, n-2}$) – некоторые коэффициенты. Из (1.10) следует, что

$$y_i = c_{i-1} (d_{i-1} - y_{i+1}). \quad (1.11)$$

Подставляя (1.11) в уравнение (1.8), получим

$$y_{i+2} + m_i y_{i+1} + k_i c_{i-1} (d_{i-1} - y_{i+1}) = h^2 f_i,$$

откуда

$$y_{i+1} = \frac{1}{m_i - k_i c_{i-1}} (h^2 f_i - k_i c_{i-1} d_{i-1} - y_{i+2}).$$

Сравнивая последнее выражение с (1.10), получим для определения c_i, d_i рекуррентные формулы:

$$c_i = \frac{1}{m_i - k_i c_{i-1}}, \quad d_i = f_i h^2 - k_i c_{i-1} d_{i-1} \quad (i = \overline{1, n-2}). \quad (1.12)$$

Для определения коэффициентов c_0, d_0 запишем соотношения (1.11), (1.12) при $i = 0$:

$$y_0 = c_{-1} (d_{-1} - y_1),$$

$$c_0 = \frac{1}{m_0 - k_0 c_{-1}}, \quad d_0 = h^2 f_0 - k_0 c_{-1} d_{-1}$$

и выразим из первого краевого условия (1.5)

$$y_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 h - \alpha_1} \left(\frac{Ah}{\alpha_1} - y_1 \right).$$

Сравнивая последние два равенства, получим

$$c_0 = \frac{\alpha_1 - \alpha_0 h}{m_0 (\alpha_1 - \alpha_0 h) + k_0 \alpha_1}, \quad d_0 = \frac{k_0 Ah}{\alpha_1 - \alpha_0 h} + f_0 h^2. \quad (1.13)$$

Вычисления по методу прогонки проводятся следующим образом.

Прямой ход. По формулам (1.8) вычисляем значения m_i, k_i . Находим по формулам (1.13) коэффициенты c_0, d_0 , а затем, применяя последовательно рекуррентные формулы (1.12), получаем значения c_i, d_i при $i = \overline{1, n-2}$.

Обратный ход. Из уравнения (1.10) при $i = n-2$ и последнего уравнения (1.5) получаем

$$\begin{cases} y_{n-1} = c_{n-2}(d_{n-2} - y_n), \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \end{cases}$$

Разрешив полученную систему относительно y_n , определяем

$$y_n = \frac{\beta_1 c_{n-2} d_{n-2} + Bh}{\beta_1(1 + c_{n-2}) + \beta_0 h}, \quad (1.14)$$

используя уже найденные значения c_{n-2} , d_{n-2} . Далее, последовательно применяя рекуррентные формулы (1.11), вычисляем значения y_n ($i = n-1, \dots, 1$):

$$\begin{aligned} y_{n-1} &= c_{n-2}(d_{n-2} - y_n), \\ y_{n-2} &= c_{n-3}(d_{n-3} - y_{n-1}), \\ &\dots\dots\dots \\ y_1 &= c_0(d_0 - y_2). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Значение y_0 находим из предпоследнего уравнения системы (1.5):

$$y_0 = \frac{\alpha_1 y_1 - Ah}{\alpha_1 - \alpha_0 h}. \quad (1.16)$$

Все вычисления метода прогонки рекомендуется располагать так, как показано в табл. 1.1.

Таблица 1.1 – Порядок вычислений по методу прогонки (конечно-разностные отношения)

i	x_i	m_i	k_i	f_i	Прямой ход		Обратный ход
					c_i	d_i	
0	x_0	m_0	k_0	f_0	c_0	d_0	y_0
1	x_1	m_1	k_1	f_1	c_1	d_1	y_1
2	x_2	m_2	k_2	f_2	c_2	d_2	y_2
...
$n-2$	x_{n-2}	m_{n-2}	k_{n-2}	f_{n-2}	c_{n-2}	d_{n-2}	y_{n-2}
$n-1$	x_{n-1}						y_{n-1}
n	x_n						y_n

Пример 1.3. Методом прогонки найти приближенное решение уравнения

$$y'' + \frac{1}{x} y' + 0,5y = 0,5x^2 - \ln x + 4, \quad (1^1)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{cases} y(1) + y'(1) = 1, \\ y(2) - 0,5y'(2) = 1,1137, \end{cases} \quad (1^2)$$

используя конечно-разностные отношения.

Выберем шаг $h = 0,2$. Согласно (1^3) , (1.8) и условий задачи имеем:

$$m_i = -2 + \frac{h}{x_i}, \quad k_i = 1 - \frac{h}{x_i} + 0,5h^2, \quad f_i = 0,5x_i^2 - \ln x_i + 4,$$

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 1, \quad \beta_0 = 1, \quad \beta_1 = -0,5, \quad A = 1, \quad B = 1,1137.$$

Прямой ход. Записываем в табл. 1.2 числа $x_i = 0,2i$ и вычисляем величины m_i, k_i, f_i ($i = \overline{0,3}$). Далее находим по (1.13):

$$c_0 = \frac{1 - 0,2}{-1,8 \cdot 0,8 + 0,82} = -1,290, \quad d_0 = \frac{0,82 \cdot 0,2}{0,8} + 4,5 \cdot 0,04 = 0,385.$$

Записываем полученные числа в табл. 1.2 и вычисляем c_i, d_i при $i = 1, 2, 3$:

$$i = 1: \begin{cases} c_1 = \frac{1}{m_1 - k_1 c_0} = \frac{1}{-1,833 - 0,853 \cdot (-1,29)} = -1,366, \\ d_1 = f_1 h^2 - k_1 c_0 d_0 = 4,538 - 0,853 \cdot (-1,29) \cdot 0,385 = 0,605; \end{cases}$$

$$i = 2: \begin{cases} c_2 = \frac{1}{m_2 - k_2 c_1} = \frac{1}{-1,857 - 0,877 \cdot (-1,366)} = -1,517, \\ d_2 = f_2 h^2 - k_2 c_1 d_1 = 4,644 \cdot 0,04 - 0,877 \cdot (-1,366) \cdot 0,605 = 0,911; \end{cases}$$

$$i = 3: \begin{cases} c_3 = \frac{1}{m_3 - k_3 c_2} = \frac{1}{-1,875 - 0,895 \cdot (-1,517)} = -1,933, \\ d_3 = f_3 h^2 - k_3 c_2 d_2 = 4,81 \cdot 0,04 - 0,895 \cdot (-1,517) \cdot 0,911 = 1,429. \end{cases}$$

Полученные значения c_i, d_i записываем в табл. 1.2.

Обратный ход. По формуле (1.14) находим

$$y_3 = \frac{-0,5(-1,933)1,429 + 1,1137 \cdot 0,2}{-0,5(1 - 1,933) + 0,2} = 2,407.$$

Далее по формулам (1.15) приступаем к последовательному вычислению значений y_i ($i = 4, 3, 2, 1$) и заполняем столбец обратного хода в табл. 1.2.

$$y_4 = c_3(d_3 - y_3) = 1,890, \quad y_3 = c_2(d_2 - y_4) = 1,484,$$

$$y_2 = c_1(d_1 - y_3) = 1,200, \quad y_1 = c_0(d_0 - y_2) = 1,052.$$

Значение y_0 находим по формуле (1.16):

$$y_0 = \frac{1,052 - 0,2}{1 - 0,2} = 1,065$$

и записываем в табл. 1.2, в последнем столбце которой для сравнения приведены значения точного решения $y(x) = x^2 - 2 \ln x$.

Таблица 1.2 – Метод прогонки для задачи (1'), (1''), конечно-разностные отношения

i	x_i	m_i	k_i	f_i	Прямой ход		Обратный ход y_i	$y(x_i)$
					c_i	d_i		
0	1,0	-1,800	0,820	4,500	-1,290	0,385	1,065	1,000
1	1,2	-1,833	0,853	4,538	-1,366	0,605	1,052	1,075
2	1,4	-1,857	0,877	4,644	-1,517	0,911	1,200	1,287
3	1,6	-1,875	0,895	4,810	-1,933	1,429	1,484	1,620
4	1,8						1,890	2,064
5	2,0						2,407	2,614

Рассмотрим метод прогонки для решения системы, которая получается при замене уравнения (1.1) и второго краевого условия (1.2) центральными конечно-разностными отношениями:

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i & (i = \overline{1, n-1}), \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A, & \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = B. \end{cases} \quad (1.17)$$

Запишем первые $n-1$ уравнений системы (1.17) в виде

$$y_{i+1} + m_i y_i + k_i y_{i-1} = \frac{2h^2 f_i}{2 + hp_i} \equiv \varphi_i, \quad (1.18)$$

$$m_i = \frac{2q_i h^2 - 4}{2 + hp_i}, \quad k_i = \frac{2 - hp_i}{2 + hp_i}.$$

Аналогично предыдущему приводим уравнения (1.18) к виду

$$y_i = c_i (d_i - y_{i+1}) \quad (i = \overline{1, n-1}), \quad (1.19)$$

где коэффициенты c_i, d_i вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} i = 1: & \quad c_1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_0 h}{m_1 (\alpha_1 - \alpha_0 h) + k_1 \alpha_1}, \quad d_1 = \varphi_1 + k_1 \frac{Ah}{\alpha_1 - \alpha_0 h}; \\ i = \overline{2, n}: & \quad c_i = \frac{1}{m_i - k_i c_{i-1}}, \quad d_i = \varphi_i - k_i c_{i-1} d_{i-1}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Вычисления проводятся следующим образом.

Прямой ход. По формулам (1.18) вычисляем значения m_i, k_i . По формулам (1.20) определяем коэффициенты c_i, d_i , а затем по рекуррентным формулам находим последовательно значения c_i, d_i при $i = \overline{2, n}$.

Обратный ход. Из уравнения (1.19) при $i = n, i = n-1$ и последнего уравнения системы (1.17) получаем систему

$$\begin{cases} y_n = c_n(d_n - y_{n+1}), \\ y_{n-1} = c_{n-1}(d_{n-1} - y_n), \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = B, \end{cases}$$

разрешая которую относительно y_n , получим

$$y_n = \frac{2Bh - \beta_1(d_n - c_{n-1}d_{n-1})}{2\beta_0 h + \beta_1 \left(c_{n-1} - \frac{1}{c_n} \right)}. \quad (1.21)$$

Используя уже известные значения $c_n, d_n, c_{n-1}, d_{n-1}$, находим y_n . Значения y_i ($i = n-1, \dots, 1$) получаем из рекуррентных формул (1.19). Для вычисления y_0 используем предпоследнее уравнение системы (1.17):

$$y_0 = \frac{\alpha_1 y_1 - Ah}{\alpha_1 - \alpha_0 h}. \quad (1.22)$$

Результаты вычислений рекомендуется представлять в виде таблицы (см. табл. 1.3).

Таблица 1.3 – Порядок вычислений по методу прогонки (центрально-разностные отношения)

i	x_i	m_i	k_i	φ_i	Прямой ход		Обратный ход
					c_i	d_i	y_i
0	x_0						y_0
1	x_1	m_1	k_1	φ_1	c_1	d_1	y_1
2	x_2	m_2	k_2	φ_2	c_2	d_2	y_2
...
$n-1$	x_{n-1}	m_{n-1}	k_{n-1}	φ_{n-1}	c_{n-1}	d_{n-1}	y_{n-1}
n	x_n	m_n	k_n	φ_n	c_n	d_n	y_n

Пример 1.4. Методом прогонки найти приближенное решение задачи (1^1) - (1^2) , используя центрально-разностные отношения.

Согласно (1^4) , (1.18) и условиям задачи имеем:

$$m_i = \frac{(h^2 - 4)x_i}{2x_i + h}, \quad k_i = \frac{2x_i - h}{2x_i + h}, \quad \varphi_i = \frac{2h^2 x_i}{2x_i + h} (0,5x_i^2 - \ln x_i + 4),$$

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 1, \quad \beta_0 = 1, \quad \beta_1 = -0,5, \quad A = 1, \quad B = 1,1137.$$

Прямой ход. Записываем в табл. 1.4 числа $x_i = 0,2i$ и вычисляем величины m_i, k_i, φ_i ($i = \overline{1,5}$). Далее находим по (1.20)

$$c_1 = \frac{1 - 0,2}{-1,828 \cdot 0,8 + 0,846} = -1,299, \quad d_1 = 0,168 + 0,846 \frac{0,2}{0,8} = 0,379.$$

Записываем полученные числа в табл. 1.4 и вычисляем последовательно c_i, d_i при $i = \overline{2,5}$. Результаты приведены в табл. 1.4.

Обратный ход. По формуле (1.21) находим

$$y_5 = \frac{2 \cdot 1,1137 \cdot 0,2 + 0,5(2,947 + 2,072 \cdot 1,464)}{0,4 - 0,5 \left(-2,072 + \frac{1}{92,172} \right)} = 2,401.$$

Далее по формулам (1.19) приступаем к последовательному вычислению значений y_i ($i = 4,3,2,1$) и заполняем столбец обратного хода в табл. 1.4. Значение y_0 находим по формуле (1.22) :

$$y_0 = \frac{1,309 - 0,2}{0,8} = 1,386$$

и записываем в табл. 1.4, в последнем столбце которой приведены значения точного решения $y(x) = x^2 - 2 \ln x$.

Таблица 1.4 – Метод прогонки для задачи (1^1) , (1^2) , центрально-разностные отношения

i	x_i	m_i	k_i	φ_i	Прямой ход		Обратный ход	$y(x_i)$
					c_i	d_i	y_i	
0	1,0						1,386	1,000
1	1,2	-1,828	0,846	0,168	-1,299	0,379	1,309	1,075
2	1,4	-1,848	0,867	0,173	-1,384	0,600	1,387	1,287
3	1,6	-1,864	0,882	0,181	-1,557	0,914	1,602	1,620
4	1,8	-1,876	0,895	0,191	-2,072	1,464	1,943	2,064
5	2,0	-1,886	0,905	0,202	-92,172	2,947	2,401	2,614

1.3 Базисные функции

Рассматриваемые ниже аналитические методы нахождения приближенного решения краевой задачи (1.1) – (1.2) основаны на выборе системы *базисных (координатных) функций*. Системы базисных функций обладают тем свойством, что все остальные функции (с учётом некоторых ограничений) могут быть разложены на их сумму (или интеграл). Например, любая аналитическая функция одного аргумента может быть разложена в сумму степенных функций с различными коэффициентами, то есть разложена в ряд Тейлора. Если в качестве базисных выбраны синусоидальные функции, то разложение по ним есть преобразование Фурье и т.д.

Система базисных функций

$$u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x), \dots, \quad (1.23)$$

заданная на отрезке $[a, b]$, удовлетворяет следующим условиям:

1) Система (1.23) является ортогональной, т.е.

$$\int_a^b u_i(x)u_j(x)dx = 0 \quad \text{при } i \neq j,$$
$$\int_a^b u_i^2(x)dx \neq 0.$$

2) Система (1.23) является полной, т.е. не существует никакой другой отличной от нуля функции, ортогональной ко всем функциям $u_i(x)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$).

3) Конечная система базисных функций $u_i(x)$ ($i = \overline{0, n}$) выбирается так, что функция $u_0(x)$ удовлетворяет неоднородным (заданным) краевым условиям:

$$\Gamma_a[u_0] = A, \quad \Gamma_b[u_0] = B, \quad (1.24)$$

а остальные функции $u_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$) удовлетворяют однородным (нулевым) краевым условиям:

$$\Gamma_a[u_i] = \Gamma_b[u_i] = 0 \quad (i = \overline{1, n}). \quad (1.25)$$

Отметим, что при выборе базисных функций условие ортогональности не является обязательным. Например, взяв за основу полную систему функций, ортогональных на отрезке $[a, b]$, можно выбрать в качестве базисных функций линейные комбинации функций из этой системы. Достаточно лишь, чтобы выбранные функции (1.23) были линейно независимы на отрезке $[a, b]$.

Решение краевой задачи (1.1) – (1.2) методами Галеркина, коллокаций и Рунге ищется в виде

$$\tilde{y}(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i u_i(x). \quad (1.26)$$

Из условий (1.24), (1.25) следует, что функция (1.26) удовлетворяет крайвым условиям $\Gamma_a[\tilde{y}] = A$, $\Gamma_b[\tilde{y}] = B$.

Точность приближенного решения в большой степени зависит от удачного подбора базисных функций и, вообще говоря, возрастает с увеличением их числа.

1.4 Метод Галеркина

Пусть имеем линейную краевую задачу (1.1) – (1.2). Выбрав систему базисных функций (1.23), удовлетворяющую крайвым условиям (1.2), составим функцию

$$R(x, c_1, c_2, \dots, c_n) = L[u_0] - f(x) + \sum_{i=1}^n c_i L[u_i], \quad (1.27)$$

называемую *невязкой*. Коэффициенты c_i выбираются таким образом, чтобы значение интеграла от квадрата невязки

$$\int_a^b R^2(x, c_1, c_2, \dots, c_n) dx$$

было наименьшим. Доказано [1], что это достигается лишь в том случае, если невязка $R(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ ортогональна к базисным функциям $u_i(x)$:

$$\int_a^b u_k(x) R(x, c_1, c_2, \dots, c_n) dx = 0 \quad (k = \overline{1, n}).$$

Подставляя в это условие невязку (1.27), получим систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов c_i :

$$\sum_{i=1}^n c_i a_{ki} = b_k \quad (k = \overline{1, n}), \quad (1.28)$$

где $a_{ki} = \int_a^b u_k(x) L[u_i] dx$, $b_k = \int_a^b u_k(x) \{f(x) - L[u_0]\} dx$. Подставив коэффициенты c_i , найденные из решения системы (1.28), в выражение (1.26), получим приближенное решение краевой задачи (1.1) – (1.2).

Пример 1.5. Методом Галеркина найти приближенное решение уравнения

$$y'' + \frac{1}{x} y' + 0,5y = 0, 5x^2 - \ln x + 4, \quad (1^1)$$

удовлетворяющее крайвым условиям

$$y'(1) = 0, \quad y(2) = 2,6137. \quad (1^5)$$

В качестве системы базисных функций выберем следующие функции:

$$\begin{aligned}
 u_0(x) &= 2,6137; & u_1(x) &= x^2 - 2x; & u_2(x) &= x^3 - 3x - 2; \\
 u_3(x) &= x^4 - 4x - 8; & u_4(x) &= x^5 - 5x - 22.
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Эти функции линейно независимы на отрезке $[1, 2]$, причем функция $u_0(x)$ удовлетворяет заданному краевому условию, а остальные функции – однородным краевым условиям. Будем искать решение в виде (1.26):

$$\tilde{y}(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^4 c_i u_i(x).$$

Находим $L[u_i]$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4$):

$$L[u_0] = u_0'' + \frac{1}{x}u_0' + 0,5u_0 = 0,5 \cdot 2,6167 = 1,3069;$$

$$L[u_1] = u_1'' + \frac{1}{x}u_1' + 0,5u_1 = 0,5x^2 - x + 4 - \frac{2}{x};$$

$$L[u_2] = u_2'' + \frac{1}{x}u_2' + 0,5u_2 = 0,5x^3 + 0,75x - 1 - \frac{3}{x};$$

$$L[u_3] = 0,5x^4 + 16x^2 - 2x - 4 - \frac{4}{x}; \quad L[u_4] = 0,5x^5 + 25x^3 - 2,5x - 11 - \frac{5}{x};$$

$$f(x) - L[u_0] = 0,5x^2 - \ln x + 2,6931.$$

Коэффициенты a_{ki}, b_k равны

$$a_{11} = \int_1^2 u_1(x)L[u_1]dx = \int_1^2 (x^2 - 2x) \left(0,5x^2 - x + 4 - \frac{2}{x} \right) dx = -1,4;$$

$$a_{12} = \int_1^2 u_1(x)L[u_2]dx = \int_1^2 (x^2 - 2x) \left(0,5x^3 + 0,75x - 1 - \frac{3}{x} \right) dx = -5,6583;$$

$$a_{13} = \int_1^2 u_1(x)L[u_3]dx = -15,7286; \quad a_{14} = \int_1^2 u_1(x)L[u_4]dx = -37,5804;$$

$$a_{21} = \int_1^2 u_2(x)L[u_1]dx = -5,8024; \quad a_{22} = \int_1^2 u_2(x)L[u_2]dx = -23,5697;$$

$$a_{23} = \int_1^2 u_2(x)L[u_3]dx = -65,8673; \quad a_{24} = \int_1^2 u_2(x)L[u_4]dx = -158,2392;$$

$$a_{31} = \int_1^2 u_3(x)L[u_1]dx = -16,5382; \quad a_{32} = \int_1^2 u_3(x)L[u_2]dx = -67,527;$$

$$a_{33} = \int_1^2 u_3(x)L[u_3]dx = -189,7447; \quad a_{34} = \int_1^2 u_3(x)L[u_4]dx = -458,4015;$$

$$\begin{aligned}
a_{41} &= \int_1^2 u_4(x) L[u_1] dx = -40,4819; & a_{42} &= \int_1^2 u_4(x) L[u_2] dx = -166,142; \\
a_{43} &= \int_1^2 u_4(x) L[u_3] dx = -469,3888; & a_{44} &= \int_1^2 u_4(x) L[u_4] dx = -1140,3115; \\
b_1 &= \int_1^2 (x^2 - 2x)(0,5x^2 - \ln x + 2,6931) dx = -2,2435; \\
b_2 &= \int_1^2 (x^3 - 3x - 2)(0,5x^2 - \ln x + 2,6931) dx = -9,2681; \\
b_3 &= \int_1^2 (x^4 - 4x - 8)(0,5x^2 - \ln x + 2,6931) dx = -26,3291; \\
b_4 &= \int_1^2 (x^5 - 5x - 22)(0,5x^2 - \ln x + 2,6931) dx = -64,2376.
\end{aligned}$$

Подставляя найденные коэффициенты в (1.28), получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}
1,4c_1 + 5,6583c_2 + 15,7286c_3 + 37,5804c_4 = 2,2435, \\
5,8024c_1 + 23,5697c_2 + 65,8673c_3 + 158,2392c_4 = 9,2681, \\
16,5382c_1 + 67,527c_2 + 189,7447c_3 + 458,4015c_4 = 26,3291, \\
40,4819c_1 + 166,142c_2 + 469,3888c_3 + 1140,3115c_4 = 64,2376,
\end{cases}$$

решением которой являются коэффициенты

$$c_1 = 1,5614, \quad c_2 = 0,7661, \quad c_3 = -0,4495, \quad c_4 = 0,0743.$$

Таким образом, согласно (1.26) и (1⁶) получили приближенное решение исходной задачи:

$$\tilde{y}(x) \approx -3,9946x + 1,5614x^2 + 0,7661x^3 - 0,4495x^4 + 0,0743x^5 + 3,0429. \quad (1^7)$$

В табл. 1.5 приведены значения точного решения $y(x) = x^2 - 2 \ln x$, полученного приближенного решения и приближенного решения

$$\tilde{\tilde{y}}(x) \approx -2,9585x + 0,924x^2 + 0,5567x^3 - 0,1399x^4 + 2,6195,$$

полученного с помощью базисных функций u_i ($i = \overline{1,3}$) системы (1⁶).

Таблица 1.5 – Точное и приближенные решения задачи (1¹), (1⁵)

x	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$y(x)$	1,0000	1,0754	1,2871	1,62	2,0644	2,6137
$\tilde{y}(x)$	1,0006	1,0744	1,2858	1,6199	2,0647	2,6137
$\tilde{\tilde{y}}(x)$	1,0018	1,0717	1,2788	1,6147	2,066	2,6137

Из таблицы видно, что при выборе большего числа базисных функций приближенное решение дает более точный результат.

Пример 1.6. Методом Галеркина найти приближенное решение уравнения (1¹):

$$y'' + \frac{1}{x}y' + 0,5y = 0,5x^2 - \ln x + 4,$$

удовлетворяющее краевым условиям:

$$y(1) = 1, \quad y(2) = 2,6137. \quad (1^8)$$

В качестве системы базисных функций выберем функции вида

$$\begin{aligned} u_0(x) = 1,6137x - 0,6137; \quad u_1(x) = (x-1)(x-2); \quad u_2(x) = (x-1)^2(x-2); \\ u_3(x) = (x-1)^3(x-2); \quad u_4(x) = (x-1)^4(x-2). \end{aligned} \quad (1^9)$$

Аналогично примеру 1.5 определяем функции $L[u_i]$ ($i = \overline{1,4}$) и коэффициенты a_{ki}, b_k . Получим:

$$L[u_0] = 0,807x + \frac{1,614}{x} - 0,307; \quad L[u_1] = -1,5x + 0,5x^2 - \frac{3}{x} + 5;$$

$$L[u_2] = 0,5x^3 - 2x^2 + 11,5x - 17 + \frac{5}{x};$$

$$L[u_3] = 0,5x^4 - 2,5x^3 + 20,5x^2 - 48,5x + 37 - \frac{7}{x};$$

$$L[u_4] = 0,5x^5 - 3x^4 + 32x^3 - 104x^2 + 130,5x - 65 + \frac{9}{x};$$

$$f(x) - L[u_0] = 0,5x^2 - 0,807x - \ln x - \frac{1,614}{x} + 4,307;$$

$$a_{11} = -0,309; \quad a_{12} = -0,144; \quad a_{13} = -0,083; \quad a_{14} = -0,054;$$

$$a_{21} = -0,166; \quad a_{22} = -0,127; \quad a_{23} = -0,093; \quad a_{24} = -0,07;$$

$$a_{31} = -0,104; \quad a_{32} = -0,099; \quad a_{33} = -0,083; \quad a_{34} = -0,068;$$

$$a_{41} = -0,072; \quad a_{42} = -0,077; \quad a_{43} = -0,071; \quad a_{44} = -0,062;$$

$$b_1 = -0,459; \quad b_2 = -0,236; \quad b_3 = -0,144; \quad b_4 = -0,097.$$

Система алгебраических уравнений (1.28) принимает вид

$$\begin{cases} 0,309c_1 + 0,144c_2 + 0,0836c_3 + 0,054c_4 = 0,459, \\ 0,166c_1 + 0,127c_2 + 0,093c_3 + 0,07c_4 = 0,236, \\ 0,104c_1 + 0,099c_2 + 0,083c_3 + 0,068c_4 = 0,144, \\ 0,072c_1 + 0,077c_2 + 0,071c_3 + 0,062c_4 = 0,097. \end{cases}$$

Откуда коэффициенты c_i равны:

$$c_1 = 1,613, \quad c_2 = -0,371, \quad c_3 = 0,206, \quad c_4 = -0,062.$$

Приближенное решение задачи (1¹), (1⁸) имеет вид

$$\tilde{y}(x) \approx -0,062x^5 + 0,578x^4 - 2,269x^3 + 5,943x^2 - 7,08x + 3,89.$$

В табл. 1.6 приведены значения точного решения $y(x) = x^2 - 2\ln x$, полученного приближенного решения $\tilde{y}(x)$ и приближенного решения $\tilde{\tilde{y}}(x) \approx 0,113x^4 - 0,897x^3 + 3,953x^2 - 5,661x + 3,492$, полученного с помощью базисных функций u_i ($i = \overline{1,3}$) из выбранной для решения системы.

Таблица 1.6 – Точное и приближенные решения задачи (1¹), (1⁸)

x	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$y(x)$	1,0000	1,0754	1,2871	1,62	2,0644	2,6137
$\tilde{y}(x)$	1,0000	1,0753	1,287	1,6199	2,0644	2,6137
$\tilde{\tilde{y}}(x)$	1,0000	1,0754	1,2871	1,6203	2,0646	2,6137

1.5 Метод коллокаций

Решение краевой задачи (1.1) – (1.2) будем искать в виде (1.26), выбрав систему функций (1.23), удовлетворяющих условиям (1.24), (1.25).

Потребуем, чтобы невязка (1.27) обращалась в нуль на некоторой системе точек x_1, x_2, \dots, x_n отрезка $[a, b]$, называемых *точками коллокации*, причем число таких точек должно равняться числу коэффициентов c_i в выражении (1.26). Тогда для определения c_i получаем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} R(x_1, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0, \\ R(x_2, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ R(x_n, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0. \end{cases} \quad (1.29)$$

Разрешая систему (1.29) относительно коэффициентов c_i ($i = \overline{1, n}$) и подставляя их в (1.26), получим функцию $\tilde{y}(x)$, дающую приближенное решение исходной краевой задачи.

Пример 1.7. Методом коллокаций найти приближенное решение уравнения (1¹):

$$y'' + \frac{1}{x}y' + 0,5y = 0,5x^2 - \ln x + 4,$$

удовлетворяющее краевым условиям (1⁵):

$$y'(1) = 0, \quad y(2) = 2,6137.$$

В качестве базисных функций возьмем функции системы (1⁶):

$$u_0(x) = 2,6137; \quad u_1(x) = x^2 - 2x; \quad u_2(x) = x^3 - 3x - 2;$$

$$u_3(x) = x^4 - 4x - 8; \quad u_4(x) = x^5 - 5x - 22.$$

Выберем точки коллокации: $x_1 = 1,2$, $x_2 = 1,4$, $x_3 = 1,6$, $x_4 = 1,8$. Вычисляя невязку $R(x)$ по (1.27) в точках коллокации и приравнивая нулю, получим систему алгебраических уравнений относительно c_i ($i = \overline{1, 4}$):

$$\begin{cases} 1,42c_1 - 1,0493c_2 - 0,7965c_3 - 0,3406c_4 = 2,5316, \\ 1,7371c_1 + 0,1234c_2 - 0,6592c_3 - 0,7391c_4 = 2,6681, \\ 2,005c_1 + 1,453c_2 + 0,5418c_3 - 0,1609c_4 = 2,8173, \\ 2,2533c_1 + 2,9138c_2 + 2,8999c_3 + 2,5190c_4 = 2,9902. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим коэффициенты

$$c_1 = 1,6102, \quad c_2 = -0,3607, \quad c_3 = 0,1918, \quad c_4 = -0,0568,$$

и приближенное решение задачи (1¹), (1⁵) методом коллокаций согласно (1.26) принимает вид

$$\tilde{y}(x) \approx -6,8742x + 5,688x^2 - 2,1149x^3 + 0,5326x^4 - 0,0568x^5 + 3,8253. \quad (1^{10})$$

1.6 Метод Рунге для простейшей краевой задачи

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d}{dx}[\bar{p}(x)y'] + \bar{q}(x)y = \bar{f}(x) \quad (1.30)$$

с краевыми условиями

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \quad (1.31)$$

где $\bar{p}(x), \bar{q}(x), \bar{f}(x) \in C[a, b]$, причем $\bar{p}(x) > 0$ при $a \leq x \leq b$.

Краевая задача (1.30) – (1.31) при известных условиях эквивалентна вариационной задаче для функционала вида

$$F[y] = \int_a^b [\bar{p}(x)y'^2 - \bar{q}(x)y^2 + 2\bar{f}(x)y] dx \quad (1.32)$$

на множестве функций $y(x) \in C^{(2)}[a, b]$, удовлетворяющих краевым условиям (1.31).

Для решения вариационной задачи (1.32), (1.31) применяем метод Рунга. Выбираем систему линейно независимых функций (координатные функции) $u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x)$ таких, что

$$\begin{aligned} u_0(a) &= A, \quad u_0(b) = B, \\ u_i(a) &= u_i(b) = 0 \quad (i = \overline{1, n}). \end{aligned}$$

Решение вариационной задачи определяется в виде линейной комбинации базисных функций (1.26):

$$\tilde{y}(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i u_i(x),$$

где $c_i (i = \overline{1, n})$ - некоторые постоянные. Очевидно, что функция (1.26) удовлетворяет заданным краевым условиям (1.31).

Коэффициенты c_1, c_2, \dots, c_n подбираются так, чтобы функция $y(x)$ давала экстремум функционалу (1.32). Подставим решение вида (1.26) в выражение (1.32), получим квадратичную функцию переменных c_1, c_2, \dots, c_n :

$$\begin{aligned} F[y] = \int_a^b \left\{ \bar{p}(x) \left[u_0'(x) + \sum_{i=1}^n c_i u_i'(x) \right]^2 - \bar{q}(x) \left[u_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i u_i(x) \right]^2 + \right. \\ \left. + 2\bar{f}(x) \left[u_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i u_i(x) \right] \right\} dx \equiv \Psi(c_1, c_2, \dots, c_n). \end{aligned}$$

Для того, чтобы дифференцируемая функция $\Psi(c_1, c_2, \dots, c_n)$ при некоторых значениях c_1, c_2, \dots, c_n имела экстремум, необходимо выполнение следующих условий:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial c_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial \Psi}{\partial c_n} = 0. \quad (1.33)$$

Система (1.33) является линейной относительно искомых коэффициентов c_1, c_2, \dots, c_n , причем число уравнений равно числу неизвестных. Составив систему (1.33) и решив ее относительно c_1, c_2, \dots, c_n , найдем решение вариацион-

ной задачи, а следовательно и решение исходной краевой задачи по формуле (1.26).

Замечание: Определим связь функций $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ и $\bar{p}(x)$, $\bar{q}(x)$, $\bar{f}(x)$, входящих в уравнения (1.1) и (1.30) соответственно. Запишем уравнение (1.30) в виде

$$\begin{aligned} \bar{p}(x)y'' + \bar{p}'(x)y' + \bar{q}(x)y &= \bar{f}(x), \\ y'' + \frac{\bar{p}'(x)}{\bar{p}(x)}y' + \frac{\bar{q}(x)}{\bar{p}(x)}y &= \frac{\bar{f}(x)}{\bar{p}(x)}. \end{aligned}$$

Сравнивая последнее уравнение с (1.1), получим

$$p(x) = \frac{\bar{p}'(x)}{\bar{p}(x)}, \quad q(x) = \frac{\bar{q}(x)}{\bar{p}(x)}, \quad f(x) = \frac{\bar{f}(x)}{\bar{p}(x)},$$

откуда

$$\bar{p}(x) = e^{\int p(x)dx}, \quad \bar{q}(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}, \quad \bar{f}(x) = f(x)e^{\int p(x)dx}. \quad (1.34)$$

Пример 1.8. Методом Рунца найти приближенное решение уравнения (1¹):

$$y'' + \frac{1}{x}y' + 0,5y = 0,5x^2 - \ln x + 4,$$

удовлетворяющее краевым условиям (1⁵):

$$y'(1) = 0, \quad y(2) = 2,6137.$$

Для того чтобы воспользоваться методом Рунца, найдем сначала функции (1.34):

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = x,$$

$$\bar{p}(x) = x, \quad \bar{q}(x) = \frac{x}{2}, \quad \bar{f}(x) = \frac{x}{2}(x^2 - 2 \ln x + 8).$$

В качестве базисных функций также возьмем функции системы (1⁶):

$$u_0(x) = 2,6137; \quad u_1(x) = x^2 - 2x; \quad u_2(x) = x^3 - 3x - 2;$$

$$u_3(x) = x^4 - 4x - 8; \quad u_4(x) = x^5 - 5x - 22.$$

Подставляя решение в виде (1.26) в функционал (1.32), получим:

$$\begin{aligned} \Psi(c_1, c_2, c_3, c_4) &= \int_1^2 \left\{ x \left[c_1(2x - 2) + c_2(3x^2 - 3) + c_3(4x^3 - 4) + c_4(5x^4 - 5) \right]^2 - \right. \\ &\left. - \frac{x}{2} \left[2,6137 + c_1(x^2 - 2x) + c_2(x^3 - 3x - 2) + c_3(x^4 - 4x - 8) + c_4(x^5 - 5x - 22) \right]^2 + \right. \end{aligned}$$

$$+x(x^2 - 2\ln x + 8) \left[2,6137 + c_1(x^2 - 2x) + c_2(x^3 - 3x - 2) + c_3(x^4 - 4x - 8) + c_4(x^5 - 5x - 22) \right] dx.$$

Согласно (1.33) получим систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов c_i ($i = \overline{1,4}$):

$$\begin{cases} 3,967c_1 + 16,524c_2 + 47,344c_3 + 116,496c_4 = 6,225, \\ 16,524c_1 + 69,175c_2 + 199,213c_3 + 492,677c_4 = 25,849, \\ 47,344c_1 + 199,213c_2 + 576,71c_3 + 1433,711c_4 = 73,818, \\ 116,496c_1 + 492,677c_2 + 1433,711c_3 + 3582,702c_4 = 181,05, \end{cases}$$

решением которой являются

$$\begin{aligned} c_1 &= 4,0378, & c_2 &= -1,101, \\ c_3 &= 0,2360, & c_4 &= -0,0238. \end{aligned}$$

Тогда приближенное решение задачи (I^1) , (I^5) методом Рунца согласно (1.26) принимает вид

$$\tilde{y}(x) \approx -5,5976x + 4,0378x^2 - 1,101x^3 + 0,236x^4 - 0,0238x^5 + 3,4513. \quad (I^{11})$$

В табл. 1.7 приведены значения точного решения $y(x) = x^2 - 2\ln x$ и приближенных решений задачи (I^1) , (I^5) , полученных методами Галеркина (I^7) , коллокаций (I^{10}) и Рунца (I^{11}) .

Таблица 1.7 – Точное и приближенные решения задачи (I^1) , (I^5)

x	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$y(x)$	1,0000	1,0754	1,2871	1,62	2,0644	2,6137
$\tilde{y}(x), (I^7)$	1,0006	1,0744	1,2858	1,6199	2,0647	2,6137
$\tilde{y}(x), (I^{10})$	1,0107	1,0854	1,2958	1,6268	2,0685	2,6137
$\tilde{y}(x), (I^{11})$	1,0027	1,0762	1,2862	1,6193	2,0648	2,6137

2 МЕТОД СЕТОК ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Метод сеток (*метод конечных разностей*) является одним из самых распространенных методов численного решения уравнений с частными производными. В его основе лежит идея замены производных конечно-разностными отношениями. Для приближенного решения краевых задач для двумерных дифференциальных уравнений идея метода заключается в следующем:

1) в плоской области G , в которой разыскивается решение, строится *сеточная область*, состоящая из одинаковых ячеек и приближающая данную область G ;

2) заданное дифференциальное уравнение заменяется в узлах построенной сетки соответствующим конечно-разностным уравнением;

3) на основании граничных условий устанавливаются значения искомого решения в граничных узлах сеточной области.

Решая полученную систему конечно-разностных уравнений (алгебраическая система уравнений с определенным числом неизвестных), находим значения искомой функции в узлах сетки – численное решение исходной задачи.

Пусть в плоскости xOy имеется некоторая область G , ограниченная кривой Γ (рис. 2.1). Строим на плоскости два семейства параллельных прямых:

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad y_j = y_0 + jl \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Точки пересечения этих прямых называются *узлами*. Два узла называются соседними, если они удалены друг от друга в направлении оси Ox или Oy на расстояние, равное шагу сетки h или l соответственно. Те узлы, у которых все четыре соседних узла принадлежат выделенному множеству узлов, называются *внутренними* (узел A , рис. 2.1). Множество внутренних узлов образуют *сеточную область*. Те узлы, у которых хотя бы один соседний узел не принадлежит к рассматриваемому множеству, называются *граничными* (узлы B, C , рис. 2.1), а их совокупность образует границу сеточной области.

Обозначим значение искомой функции $u(x, y)$ в узлах сетки через $u_{ij} = u(x_i, y_j)$. В каждом внутреннем узле (x_i, y_j) заменим частные производные разностными отношениями:

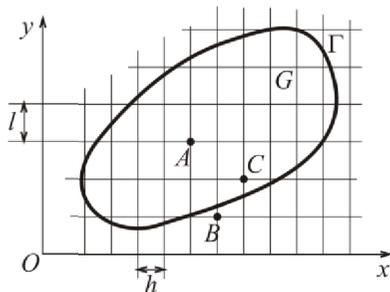


Рис. 2.1

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2l}, \quad (2.1)$$

в граничных узлах используем менее точные формулы:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{h}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{l}. \quad (2.2)$$

Частные производные второго порядка заменяются соотношениями:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{l^2}. \quad (2.3)$$

Все разностные схемы можно разбить на два типа: *явные* и *неявные*. Явными называются такие схемы, что при любом j в каждое из уравнений, связывающих значения искомого решения на горизонтальных рядах $j, j-1, \dots, j-n$, входит лишь одна точка ряда j , так что значения решения в каждом узле j -го горизонтального ряда можно вычислить независимо от его значений в других узлах этого ряда (исключая граничные узлы), рис. 2.2,а. Неявными называют такие схемы, когда для определения значений решения в узлах j -го ряда при известных значениях решения во всех предыдущих рядах нужно решать систему уравнений, связывающих значения решения в узлах j -го ряда, рис. 2.2,б.

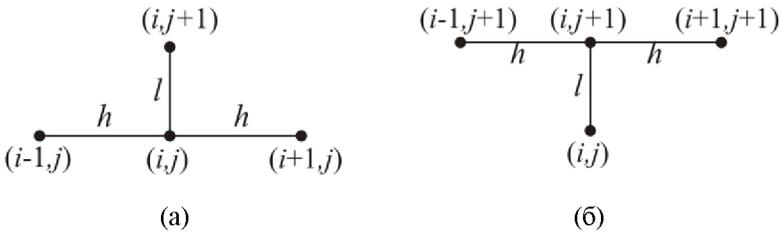


Рис. 2.2

Таким образом, явные схемы позволяют очень просто вычислить значения искомого решения в узлах j -го горизонтального ряда, если известны значения решения на предыдущих рядах. Но они имеют существенный недостаток: для того, чтобы они были устойчивы, необходимо налагать сильные ограничения на сетку. Кроме того, если в ходе решения необходимо уменьшить шаг по x , то нельзя этого сделать, не уменьшая шага по y . Неявные схемы свободны от этого недостатка, но использование их связано с другой трудностью: для отыскания значений решения в узлах j -го горизонтального ряда

при известных значениях в узлах предыдущих рядов приходится решать систему алгебраических уравнений с большим числом неизвестных.

При использовании конечно-разностной схемы для решения краевой задачи возникает важный вопрос об *устойчивости* такой схемы. Конечно-разностная схема называется *устойчивой*, если малые погрешности, допущенные в процессе решения, затухают или, во всяком случае, остаются малыми при неограниченном увеличении номера текущего слоя, [1,2]. В противном случае схема называется *неустойчивой*. Очевидно, что неустойчивая конечно-разностная схема противопоказана для вычислений, так как неизбежные незначительные ошибки, например погрешности округлений, могут создать большие отклонения от точного решения краевой задачи и привести к результатам, не имеющим ничего общего с действительностью.

Отметим, что погрешность приближенного решения, полученного разностным методом, складывается из трех погрешностей:

- погрешности замены дифференциального уравнения разностным;
- погрешности аппроксимации краевых условий;
- погрешности, получаемой в результате того, что система разностных уравнений решается приближенным методом.

2.1 Метод сеток для уравнений параболического типа

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения теплопроводности¹: *найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.4)$$

начальному условию

$$u(x, 0) = f(x) \quad (0 < x < s) \quad (2.5)$$

и краевым условиям

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(s, t) = \psi(t) \quad (t > 0). \quad (2.6)$$

Для отыскания приближенного решения задачи (2.4)-(2.6) методом сеток рассмотрим прямоугольную сетку узлов в полосе $t \geq 0$, $0 \leq x \leq s$, образуемую точками пересечения двух семейств параллельных прямых:

$$x = ih \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \quad t = jl \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

Введем обозначения $x_i = ih$, $t_j = jl$, $u_{ij} = u(x_i, t_j)$ и приближенно заменим в

каждом внутреннем узле (x_i, t_j) производную $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ разностным отношением

¹ Задача о распространении тепла в однородном стержне длины s , [5].

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad (2.7)$$

а производную $\frac{\partial u}{\partial t}$ одним из двух разностных отношений:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{l}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij} \approx \frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{l}.$$

В соответствии с предлагаемыми способами аппроксимации производных получим для уравнения (2.4) два типа конечно-разностных уравнений²:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{l} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2},$$

$$\frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{l} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}.$$

Первая разностная схема является явной схемой, вторая – неявная. Полученные разностные уравнения содержат значения решения в четырех узлах и аппроксимируют уравнение (2.4) с точностью до $O(l + h^2)$ [1].

Обозначив $\sigma = \frac{a^2 l}{h^2}$, приведем эти уравнения к виду

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\sigma)u_{ij} + \sigma(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}), \quad (2.8)$$

$$(1 + 2\sigma)u_{ij} - \sigma(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} = 0, \quad (2.9)$$

При выборе числа σ в уравнениях (2.8), (2.9) следует учитывать, что:

- погрешность замены дифференциального уравнения разностным должна быть наименьшей;
- разностное уравнение должно быть устойчивым.

В [1,2] доказано, что уравнение (2.8) будет устойчиво при $0 < \sigma \leq \frac{1}{2}$, а уравнение (2.9) – при любом σ . Наиболее простой вид уравнение (2.8) принимает при $\sigma = \frac{1}{2}$:

$$u_{i,j+1} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{2}, \quad (2.10)$$

² Использование разностного отношения $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2l}$ приводит к неустойчивой разностной схеме [1].

а при $\sigma = \frac{1}{6}$:

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6} (u_{i-1,j} + 4u_{ij} + u_{i+1,j}). \quad (2.11)$$

Оценки погрешностей приближенных решений, получаемых из уравнений (2.10), (2.11) и (2.9) в полосе $0 \leq x \leq s$, $0 \leq t \leq T$ соответственно имеют вид³ [4]:

$$|u - \tilde{u}| \leq \frac{T}{3} M_1 h^2, \quad |u - \tilde{u}| \leq \frac{T}{135} M_2 h^4, \quad |u - \tilde{u}| \leq T \left(\frac{l}{2} + \frac{h^2}{12} \right) M_1,$$

где \tilde{u} - точное решение задачи (2.4) – (2.6);

$$M_1 = \max_{\substack{0 \leq x \leq s \\ 0 \leq t \leq T}} \left\{ |f^{IV}(x)|, |\varphi''(t)|, |\psi''(t)| \right\}, \quad M_2 = \max_{\substack{0 \leq x \leq s \\ 0 \leq t \leq T}} \left\{ |f^{VI}(x)|, |\varphi^{IV}(t)|, |\psi^{IV}(t)| \right\}.$$

Из приведенных оценок погрешностей следует, что уравнение (2.11) дает более высокую точность решения по сравнению с решением (2.10). Но уравнение (2.10) имеет более простой вид, а, кроме того, шаг l по аргументу t для уравнения (2.11) должен быть значительно меньше, что приводит к большему объему вычислений. Уравнение (2.9) дает меньшую точность, но при этом шаги l и h выбираются независимо друг от друга. Уравнения (2.10), (2.11) позволяют вычислить значения функции $u(x,t)$ на каждом слое по явным формулам через значения на предыдущем слое; уравнение (2.9) – неявная схема – этим свойством не обладает.

Данным методом можно решать смешанную краевую задачу для неоднородного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t).$$

Тогда соответствующее разностное уравнение, использующее явную схему узлов, имеет вид

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\sigma)u_{ij} + \sigma(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + lF_{ij}.$$

Откуда при $\sigma = \frac{1}{2}$ имеем

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{2} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + lF_{ij}; \quad (2.12)$$

³ Оценки погрешности даны для случая $a = 1$. Читателю предлагается самостоятельно получить выражение оценки при $a \neq 1$. Аналогично для оценок в рассматриваемых далее методах.

при $\sigma = \frac{1}{6}$:

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6}(u_{i-1,j} + 4u_{ij} + u_{i+1,j}) + IF_{ij}. \quad (2.13)$$

В этом случае имеют место следующие оценки погрешности [4]:

$$|u - \tilde{u}| \leq \frac{T}{4} \left(M_2 + \frac{1}{3} M_4 \right) h^2, \quad |u - \tilde{u}| \leq \frac{T}{72} \left(\frac{1}{3} M_3 + \frac{1}{5} M_6 \right) h^4,$$

где $M_2 = \max \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|$, $M_3 = \max \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|$, $M_4 = \max \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|$, $M_6 = \max \left| \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \right|$.

Пример 2.1. Используя разностное уравнение (2.12), найти приближенное решение уравнения

$$u_t = 8u_{xx},$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = 13 \sin \frac{\pi}{2} x \quad (0 \leq x \leq 2),$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0 \quad (t \geq 0),$$

и сравнить его с аналитическим решением.

Выберем по аргументу x шаг $h = 0,25$ и воспользуемся конечно-разностным уравнением (2.10), т.е. $\sigma = 1/2$, откуда шаг по аргументу t будет

$l = \frac{\sigma h^2}{a^2} \approx 0,0039$. Записываем в табл. 2.1 начальные и краевые значения, т.е.

заполняем строку при $j = 0$ и крайние столбцы (при $i = 0$ и $i = 8$) соответственно. Значения функции $u(x, t)$ на первом слое находим, используя значения на нулевом (начальном) слое и краевые условия согласно (2.10) при $j = 0$:

$$u_{i,1} = \frac{u_{i+1,0} + u_{i-1,0}}{2}.$$

Откуда получаем

$$u_{11} = \frac{1}{2}(u_{20} + u_{00}) = \frac{1}{2}(9,1924 + 0) = 4,5962,$$

$$u_{21} = \frac{1}{2}(u_{30} + u_{10}) = \frac{1}{2}(12,0104 + 4,9749) = 8,4927$$

и т.д.

Записываем полученные значения u_{i1} ($i=1,2,3,4,5,6,7$) во вторую строку табл. 2.1. Переходим к вычислению значений на втором слое по формуле (2.10) при $j=1$:

$$u_{i,2} = \frac{u_{i+1,1} + u_{i-1,1}}{2}.$$

Подобным образом определяем последовательно значения u_{ij} при $t=0,0039$; $0,0078$; $0,0117$ и т.д.

Таблица 2.1 – Результаты вычислений для примера 2.1

		<i>i</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>j</i>	<i>t_j</i> \ <i>x_i</i>	0,0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	
0	0,0	0	4,9749	9,1924	12,0104	13,0	12,0104	9,1924	4,9749	0	
1	0,0039	0	4,5962	8,4927	11,0962	12,0104	11,0962	8,4927	4,5962	0	
2	0,0078	0	4,2464	7,8462	10,2516	11,0962	10,2516	7,8462	4,2464	0	
3	0,0117	0	3,9231	7,2490	9,4712	10,2516	9,4712	7,2490	3,9231	0	
4	0,0156	0	3,6245	6,6972	8,7503	9,4712	8,7503	6,6972	3,6245	0	
5	0,0195	0	3,3486	6,1874	8,0842	8,7503	8,0842	6,1874	3,3486	0	
6	0,0234	0	3,0937	5,7164	7,4689	8,0842	7,4689	5,7164	3,0937	0	
7	0,0273	0	2,8582	5,2813	6,9003	7,4689	6,9003	5,2813	2,8582	0	
8	0,0312	0	2,6407	4,8793	6,3751	6,9003	6,3751	4,8793	2,6407	0	
$\tilde{u}(x; 0, 0312)$		0	2,6873	4,9655	6,4877	7,0223	6,4877	4,9655	2,6873	0	
$ \tilde{u} - u $		0	0,0466	0,0862	0,1126	0,1220	0,1126	0,0862	0,0466	0	

Аналитическое решение данной задачи определяется согласно приложению I формулой

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi^2 n^2 t} B_n \sin \frac{\pi n}{2} x,$$

где $B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 13 \sin \frac{\pi}{2} x \sin \frac{\pi n}{2} x dx \neq 0$ при $n=1$:

$$B_1 = 13 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{\pi}{2} x dx = \frac{13}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \pi x) dx = \frac{13}{2} \left[x - \frac{1}{\pi} \sin \pi x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 13.$$

Получаем $\tilde{u}(x, t) = 13 e^{-2\pi^2 t} \sin \frac{\pi}{2} x$ - точное решение данной задачи.

В последних двух строках табл. 2.1 приведены значения точного решения задачи и модуля разности $|\tilde{u} - u|$ при $t=0,0312$. Для данной задачи

$\varphi(t) = \psi(t) = 0$, $f^{IV}(x) = \frac{13}{16} \pi^4 \sin \frac{\pi}{2} x$, следовательно $M_1 = \frac{13}{16} \pi^4$ и оценка погрешности приближенного решения будет

$$|\tilde{u} - u| \leq \frac{0,0312}{3} \frac{13}{16} \pi^4 a^2 h^2 \approx 0,4116.$$

2.2 Метод сеток для уравнений гиперболического типа

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения свободных колебаний однородной струны [5]: найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.14)$$

начальным условиям

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \Phi(x) \quad (0 < x < s) \quad (2.15)$$

и краевым условиям

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(s, t) = \psi(t) \quad (t > 0). \quad (2.16)$$

Как и для уравнения параболического типа, построив в полосе $t \geq 0$, $0 \leq x \leq s$ прямоугольную сетку

$$x_i = ih \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad t_j = jl \quad (j = 0, 1, 2, \dots),$$

заменяем производные в уравнении (2.14) разностными отношениями (2.3):

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{l^2} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}.$$

Обозначив $\alpha = \frac{al}{h}$, получим разностное уравнение

$$u_{i,j+1} = 2u_{ij} - u_{i,j-1} + \alpha^2 (u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}), \quad (2.17)$$

которое является устойчивым при $\alpha \leq 1$ [1]. В частности, при $\alpha = 1$ уравнение (2.17) принимает наиболее простой вид:

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1}. \quad (2.18)$$

Оценка погрешности приближенного решения, полученного из уравнения (2.17) в полосе $0 \leq x \leq s$, $0 \leq t \leq T$, имеет вид

$$|u - \tilde{u}| \leq \frac{h^2}{12} [(M_4 h + 2M_3)T + T^2 M_4],$$

где \tilde{u} - точное решение; $M_k = \max \left\{ \left| \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right|, \left| \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right| \right\} (k = 3, 4)$.

Из уравнения (2.17) видно, что для чения значений $u(x,t)$ на $(j+1)$ слое используются значения $u(x,t)$ на слоях j и $(j-1)$, (рис. 2.3). Для начала вычисления необходимо знать значения $u(x,t)$ на первых двух слоях: $j=0$, $j=1$, которые можно определить одним из следующих способов, используя начальные условия (2.15).

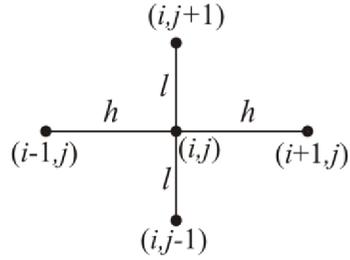


Рис. 2.3

Первый способ. Заменяя в начальном условии (2.15) производную $u_t(x,0)$ разностным отношением

$$\frac{u_{i1} - u_{i0}}{l} = \Phi(x_i) = \Phi_i,$$

для определения $u(x,t)$ на слоях $j=0$, $j=1$ получим

$$u_{i0} = f_i, \quad u_{i1} = f_i + l\Phi_i.$$

Оценка погрешности значений u_{i1} имеет вид [1]:

$$|u_{i1} - \tilde{u}_{i1}| \leq \frac{\alpha h}{2} M_2, \quad M_2 = \max \left\{ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| \right\}.$$

Второй способ. Заменяем производную $u_t(x,0)$ разностным отношением $\frac{u_{i1} - u_{i,-1}}{2l}$, где $u_{i,-1}$ - значение функции $u(x,t)$ на слое $j=-1$. Тогда из начальных условий (2.15) получаем

$$u_{i0} = f_i, \quad \frac{u_{i1} - u_{i,-1}}{2l} = \Phi_i.$$

Записав разностное уравнение (2.18) для слоя $j=0$:

$$u_{i1} = u_{i+1,0} + u_{i-1,0} - u_{i,-1}$$

и исключив из последних двух уравнений значения $u_{i,-1}$, получим

$$u_{i0} = f_i, \quad u_{i1} = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_{i-1}) + l\Phi_i.$$

Оценка погрешности значений u_{i1} имеет вид [1]:

$$|u_{i1} - \tilde{u}_{i1}| \leq \frac{h^4}{12} M_4 + \frac{h^3}{6} M_3, \quad M_k = \max \left\{ \left| \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right|, \left| \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right| \right\} \quad (k=3,4).$$

Третий способ. Если функция $f(x)$ задана аналитически и имеет конечную вторую производную, то значения u_{i1} можно определить с помощью формулы Тейлора:

$$u_{i1} \approx u_{i0} + l \frac{\partial u_{i0}}{\partial t} + \frac{l^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial t^2}.$$

Из уравнения (2.14) и начальных условий (2.15) имеем

$$u_{i0} = f_i, \quad \frac{\partial u_{i0}}{\partial t} = \Phi_i, \quad \frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial x^2} = a^2 f_i''.$$

Тогда

$$u_{i1} \approx u_{i0} + l\Phi_i + \frac{a^2 l^2}{2} f_i''.$$

Погрешность значений u_{i1} , полученных по этой формуле, имеет порядок $O(l^3)$.

Аналогичным образом применяется метод сеток при решении смешанной краевой задачи для неоднородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t).$$

В этом случае разностное уравнение имеет вид

$$u_{i,j+1} = 2u_{ij} - u_{i,j-1} + \alpha^2 (u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) + \frac{\alpha^2 h^2}{a^2} F_{ij}.$$

Пример 2.2. Методом сеток найти приближенное решение задачи

$$u_{tt} = 16u_{xx},$$

$$u(x, 0) = 2 \sin \frac{\pi}{4} x, \quad u_t(x, 0) = \pi \sin \frac{\pi}{4} x \quad (0 \leq x \leq 4),$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(4, t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

с шагом $h = 0,5$, используя первый и второй способы для вычисления значений u_{i1} . Результат сравнить с аналитическим решением задачи.

Для решения воспользуемся соотношением (2.18) при $\alpha = 1$. Тогда, учитывая, что шаг по аргументу x равен $0,5$, получим шаг по аргументу t равным $l = h/a = 1/8 = 0,125$. Результаты вычислений будем заносить в таблицу следующим образом: сначала заполняем столбцы, соответствующие значениям $x_0 = 0$ и $x_8 = 4$ (согласно краевым условиям), затем вычисляем значения $u(x, t)$ на первых двух слоях (согласно начальным условиям), и далее по формуле (2.18) вычисляем значения u_{ij} на последующих слоях:

$$\begin{aligned}
 j=1: \quad u_{i,2} &= u_{i+1,1} + u_{i-1,1} - u_{i,0}; \\
 j=2: \quad u_{i,3} &= u_{i+1,2} + u_{i-1,2} - u_{i,1}; \\
 j=3: \quad u_{i,4} &= u_{i+1,3} + u_{i-1,3} - u_{i,2}
 \end{aligned}$$

и т.д.

Первый способ. Значения $u(x, t)$ на первых двух слоях находим по формулам

$$u_{i,0} = f_i = 2 \sin \frac{\pi}{4} x_i, \quad u_{i,1} = f_i + l\Phi_i = (2 + l\pi) \sin \frac{\pi}{4} x_i;$$

заносим в табл. 2.2.

Второй способ. Значения $u(x, t)$ на первых двух слоях находим по формулам

$$u_{i,0} = f_i = 2 \sin \frac{\pi}{4} x_i, \quad u_{i,1} = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_{i-1}) + l\Phi_i = \left(\sin \frac{\pi}{4} x_{i+1} + \sin \frac{\pi}{4} x_{i-1} \right) + l\pi \sin \frac{\pi}{4} x_i,$$

заносим в табл. 2.3.

В табл. 2.2 и 2.3 представлены результаты вычислений. В последних строках таблиц приведены значения точного решения задачи и модулей разности $|\tilde{u} - u|$ при $t = 0,875$. Аналитическое решение задачи определяется по формуле (см. приложение I):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{4} at + B_n \sin \frac{\pi n}{4} at \right) \sin \frac{\pi n}{4} x,$$

$$\text{где } A_n = \frac{2}{4} \int_0^4 2 \sin \frac{\pi x}{4} \cdot \sin \frac{\pi n x}{4} dx \neq 0 \text{ и } B_n = \frac{2}{a\pi n} \int_0^l \pi \sin \frac{\pi x}{4} \cdot \sin \frac{\pi n x}{4} dx \neq 0,$$

при $n = 1$:

$$A_1 = \int_0^4 \sin^2 \frac{\pi x}{4} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} \right]_0^4 = 2,$$

$$B_1 = \frac{1}{2} \int_0^4 \sin^2 \frac{\pi x}{4} dx = \frac{1}{4} \int_0^4 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2} \right) dx = \frac{1}{4} \left[x - \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} \right]_0^4 = 1.$$

Следовательно, функция $\tilde{u}(x, t) = (2 \cos \pi t + \sin \pi t) \sin \frac{\pi}{4} x$ является точным решением рассматриваемой задачи.

Таблица 2.2 – Результаты вычислений для примера 2.2 (первый способ)

	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
j	$t_j \backslash x_i$	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
0	0,0	0	0,7654	1,4142	1,8478	2	1,8478	1,4142	0,7654	0
1	0,125	0	0,9157	1,6919	2,2106	2,3927	2,2106	1,6919	0,9157	0
2	0,250	0	0,9265	1,7121	2,2368	2,4212	2,2368	1,7121	0,9265	0
3	0,375	0	0,7964	1,4714	1,9227	2,0809	1,9227	1,4714	0,7964	0
4	0,500	0	0,5449	1,0070	1,3155	1,4242	1,3155	1,0070	0,5449	0
5	0,625	0	0,2106	0,3890	0,5085	0,5501	0,5085	0,3890	0,2106	0
6	0,750	0	-0,1559	-0,2879	-0,3764	-0,4072	-0,3764	-0,2879	-0,1559	0
7	0,875	0	-0,4985	-0,9213	-1,2036	-1,3029	-1,2036	-0,9213	-0,4985	0
8	1,000	0	-0,7654	-1,4142	-1,8478	-2	-1,8478	-1,4142	-0,7654	0
$\tilde{u}(x; 0, 875)$		0	-0,5607	-1,0360	-1,3536	-1,4651	-1,3536	-1,0360	-0,5607	0
$ \tilde{u} - u $		0	0,0622	0,1147	0,1500	0,1622	0,1500	0,1147	0,0622	0

Таблица 2.3 – Результаты вычислений для примера 2.2 (второй способ)

	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
j	$t_j \backslash x_i$	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
0	0,0	0	0,7654	1,4142	1,8478	2	1,8478	1,4142	0,7654	0
1	0,125	0	0,8574	1,5843	2,0699	2,2405	2,0699	1,5843	0,8574	0
2	0,250	0	0,8189	1,5131	1,9770	2,1398	1,9770	1,5131	0,8189	0
3	0,375	0	0,6557	1,2116	1,5829	1,7135	1,5829	1,2116	0,6557	0
4	0,500	0	0,3927	0,7255	0,9481	1,0260	0,9481	0,7255	0,3927	0
5	0,625	0	0,0698	0,1292	0,1686	0,1827	0,1686	0,1292	0,0698	0
6	0,750	0	-0,2635	-0,4871	-0,6362	-0,6888	-0,6362	-0,4871	-0,2635	0
7	0,875	0	-0,5569	-1,0289	-1,3445	-1,4551	-1,3445	-1,0289	-0,5569	0
8	1,000	0	-0,7654	-1,4143	-1,8478	-2,0020	-1,8478	-1,4143	-0,7654	0
$\tilde{u}(x; 1, 0)$		0	-0,5607	-1,0360	-1,3536	-1,4651	-1,3536	-1,0360	-0,5607	0
$ \tilde{u} - u $		0	0,0038	0,0071	0,0091	0,0100	0,0091	0,0071	0,0038	0

Сравнивая результаты вычислений, видим, что лучший результат вычислений получается при втором способе заполнения первых двух слоев таблицы.

2.3 Метод сеток для задачи Дирихле

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения Пуассона (задачу Дирихле): найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую внутри некоторой области G уравнению

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (2.19)$$

а на границе Γ - условию

$$u|_{\Gamma} = \varphi(x, y),$$

где $\varphi(x, y)$ - заданная непрерывная функция.

Выбрав шаги h и l по x и y соответственно, строим сетку

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad y_j = y_0 + jl \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

и заменяем в каждом внутреннем узле (x_i, y_j) производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ конечно разностными отношениями (2.3), а уравнение (2.19) - конечно-разностными уравнениями:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{l^2} = f_{ij}. \quad (2.20)$$

Уравнения (2.20) вместе со значениями u_{ij} в граничных узлах образуют систему линейных алгебраических уравнений. Наиболее простой вид эта система имеет для прямоугольной области и при $l = h$. В этом случае уравнения (2.20) записываются в виде

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} = h^2 f_{ij}, \quad (2.21)$$

а значения в граничных узлах в точности равны значениям граничной функции. При $f(x, y) \equiv 0$ уравнение (2.19) называется уравнением Лапласа и соответствующие конечно-разностные уравнения имеют вид

$$u_{ij} = \frac{1}{4} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}). \quad (2.22)$$

При этом погрешность аппроксимации имеет оценку

$$|R_{ij}| \leq \frac{h^2}{6} M_4, \quad M_4 = \max_G \left\{ \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|, \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right| \right\}.$$

При составлении уравнений (2.21) и (2.22) была использована схема узлов, представленная на рис. 2.4. На рис. 2.5 показана другая схема узлов, при которой конечно-разностные уравнения, соответствующие уравнению Лапласа, принимают вид

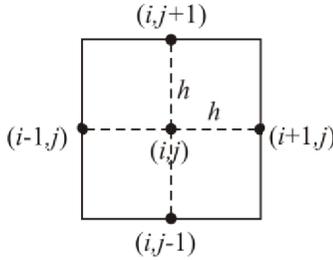


Рис. 2.4.

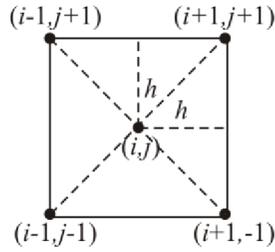


Рис. 2.5.

$$u_{ij} = \frac{1}{4} (u_{i-1, j-1} + u_{i+1, j-1} + u_{i-1, j+1} + u_{i+1, j+1}),$$

а для уравнения Пуассона

$$u_{ij} = \frac{1}{4} (u_{i-1, j-1} + u_{i+1, j-1} + u_{i-1, j+1} + u_{i+1, j+1}) - \frac{h^2}{2} f_{ij}, \quad (2.23)$$

причем погрешность аппроксимации не превосходит $\frac{4h^2}{3} M_4$.

Другие схемы узлов, расположенных определенным образом около узла (i, j) , рассмотрены в [1].

Пример 2.3. Найти решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике $A(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C(2, 1)$, $D(2, 0)$:

$$u_{xx} + u_{yy} = xy,$$

$$u|_{AB} = 2 + y^2, \quad u|_{BC} = 3 - x, \quad (2^1)$$

$$u|_{CD} = 2 - y, \quad u|_{AD} = 2.$$

Построим сетку с шагом $h = 0,5$, получим три внутренних узла (рис. 2.6). Запишем в этих узлах конечно-разностные уравнения согласно (2.21) и под-

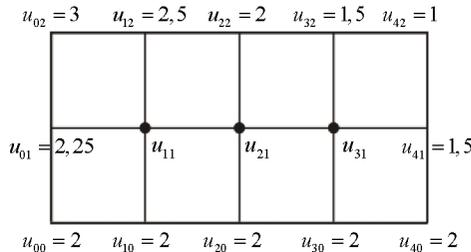


Рис. 2.6.

ставим известные из краевых условий значения u_{ij} в граничных узлах:

$$u_{11} = \frac{1}{4}(u_{21} + u_{01} + u_{12} + u_{10}) - \frac{1}{16}x_1y_1 = \frac{1}{4}(u_{21} + 2, 25 + 2, 5 + 2) - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},$$

$$u_{21} = \frac{1}{4}(u_{31} + u_{11} + u_{22} + u_{20}) - \frac{1}{16}x_2y_1 = \frac{1}{4}(u_{31} + u_{11} + 2 + 2) - \frac{1}{16} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2},$$

$$u_{31} = \frac{1}{4}(u_{41} + u_{21} + u_{32} + u_{20}) - \frac{1}{16}x_3y_1 = \frac{1}{4}(1, 5 + u_{21} + 1, 5 + 2) - \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

После преобразования получим алгебраическую систему уравнений относительно неизвестных значений u_{ij} во внутренних узлах:

$$\begin{cases} 64u_{11} - 16u_{21} = 107, \\ 8u_{11} - 32u_{21} + 8u_{31} = -31, \\ -16u_{21} + 64u_{31} = 77. \end{cases}$$

Решив эту систему методом Гаусса, получим

$$u_{11} = \frac{965}{448} \approx 2,1540, \quad u_{21} = \frac{27}{14} \approx 1,9286, \quad u_{31} = \frac{755}{448} \approx 1,6853.$$

Запишем теперь во внутренних узлах конечно-разностные уравнения согласно (2.23) и подставим значения u_{ij} в граничных узлах:

$$u_{11} = \frac{1}{4}(u_{00} + u_{20} + u_{02} + u_{22}) - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(2 + 2 + 3 + 2) - \frac{1}{32} = \frac{71}{32},$$

$$u_{21} = \frac{1}{4}(u_{10} + u_{30} + u_{12} + u_{32}) - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(2 + 2 + 2, 5 + 1, 5) - \frac{1}{16} = \frac{31}{16},$$

$$u_{31} = \frac{1}{4}(u_{20} + u_{40} + u_{22} + u_{42}) - \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(2 + 2 + 2 + 1) - \frac{3}{32} = \frac{53}{32}.$$

Выполнив несложные действия, получим

$$u_{11} \approx 2,2188, \quad u_{21} \approx 1,9375, \quad u_{31} \approx 1,6563.$$

2.4 Итерационный метод решения системы конечно-разностных уравнений

Непосредственное решение системы конечно-разностных уравнений методами последовательного исключения при большом числе узлов оказывается

слишком громоздким. Тогда более удобны итерационные методы решения, которые учитывают специальный вид таких систем [1-3]. Рассмотрим наиболее простой метод – процесс усреднения Либмана для систем вида (2.22), согласно которому вычисления ведутся следующим образом: выбрав начальные приближения $u_{ij}^{(0)}$, последовательные приближения $u_{ij}^{(k+1)}$ для внутренних узлов сеточной области определяются по формуле

$$u_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4} [u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)}] \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.24)$$

Доказано [5], что для любого шага сетки h процесс Либмана сходится к точному решению независимо от выбора начальных значений, т.е. существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_{ij}^{(k)} = u_{ij},$$

причем погрешность приближенного решения имеет порядок $O(h^2)$.

Обычно итерации продолжают до тех пор, пока в двух последовательных приближениях не совпадет требуемое количество десятичных знаков. Для оценки погрешности приближенного решения уравнения Лапласа можно использовать принцип Рунге [1], согласно которому погрешность ε_h приближенного решения u_h , полученного с шагом h , дается приближенной формулой

$$\varepsilon_h \approx \frac{u_h - u_{2h}}{3},$$

где u_{2h} - приближенное решение, полученное с шагом $2h$.

Пример 2.4. Применяя метод усреднения Либмана, найти приближенное решение задачи (2¹) с шагом $h = \frac{1}{2}$. Итерации проводить с точностью до 0,01.

Запишем итерационную формулу для соотношения (2.22):

$$u_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4} [u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)}] - \frac{h^2}{4} f_{ij} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.25)$$

В предлагаемой сеточной области (рис. 2.6) три внутренних узла u_{11}, u_{21}, u_{31} , соотношение (2.25) для каждого их этих узлов примет вид

$$\begin{cases} u_{11}^{(k+1)} = \frac{1}{4} [u_{21}^{(k)} + u_{01}^{(k)} + u_{12}^{(k)} + u_{10}^{(k)}] - \frac{h^2}{4} f_{11}, \\ u_{21}^{(k+1)} = \frac{1}{4} [u_{31}^{(k)} + u_{11}^{(k)} + u_{22}^{(k)} + u_{20}^{(k)}] - \frac{h^2}{4} f_{21}, \\ u_{31}^{(k+1)} = \frac{1}{4} [u_{41}^{(k)} + u_{21}^{(k)} + u_{32}^{(k)} + u_{30}^{(k)}] - \frac{h^2}{4} f_{31}. \end{cases}$$

Подставляя соответствующим образом значения в граничных узлах (см. рис. 2.6) и значения функции $f(x, y) = xy$ в каждом внутреннем узле, получим

$$\begin{cases} u_{11}^{(k+1)} = \frac{1}{4} u_{21}^{(k)} + \frac{107}{64}, \\ u_{21}^{(k+1)} = \frac{1}{4} (u_{31}^{(k)} + u_{11}^{(k)}) + \frac{31}{32}, \\ u_{31}^{(k+1)} = \frac{1}{4} u_{21}^{(k)} + \frac{77}{64}. \end{cases}$$

В качестве начального приближения выберем $u_{11}^{(0)} = u_{21}^{(0)} = u_{31}^{(0)} = 0$. Результаты вычислений по полученной системе итерационных соотношений представлены в табл. 3.1.

Таблица 3.1 – Результаты итерационного процесса для примера 2.4

k	0	1	2	3	4	5	6	7	$u_{i1}^{(7)} - u_{i1}^{(6)}$
u_{11}	0	1,6719	1,9141	2,0938	2,1240	2,1465	2,1503	2,1531	0,0028
u_{21}	0	0,9688	1,6875	1,8086	1,8984	1,9136	1,9248	1,9267	0,0019
u_{31}	0	1,2031	1,4453	1,6250	1,6553	1,6777	1,6815	1,6843	0,0028

По результатам вычислений видно, что заданная точность вычислений 0,01 была достигнута на 7-й итерации – на этом процесс останавливается.

Формулы (2.20) – (2.25) используются для задачи Дирихле в случае, когда граница Γ области G прямоугольной формы. Если граница Γ криволинейна, то значения u_{ij} для граничных узлов получаются путем переноса значений из точек границы Γ [1-3]. Погрешность, получаемую в результате такого переноса, можно значительно уменьшить, если для каждого граничного узла составлять уравнения следующего вида:

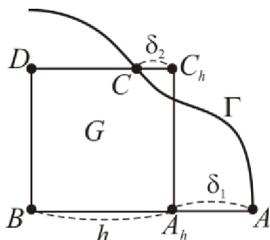


Рис. 2.7.

- для узла вида A_h (рис. 2.7)

$$u_{A_h} = \frac{\delta_1 u_B + h u_A}{\delta_1 + h};$$

- для узла вида C_h (рис. 2.7)

$$u_{C_h} = \frac{\delta_2 u_D - h u_C}{\delta_2 - h}.$$

Получив одно из таких уравнений для каждого граничного узла и присоединив его к любой из систем конечно-разностных уравнений (2.21) – (2.25), получим систему алгебраических уравнений относительно значений u_{ij} в узлах сетки. Если эту систему решать методом Либмана, то последовательные приближения граничных значений будут вычисляться по формулам

$$u_{A_h}^{(k+1)} = u_A + \delta_1 \frac{u_B^{(k)} - u_A}{\delta_1 + h}, \quad u_{C_h}^{(k+1)} = u_C + \delta_2 \frac{u_D^{(k)} - u_C}{\delta_2 - h}.$$

3 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Интегральное уравнение – уравнение, содержащее неизвестную функцию $y(x)$ под знаком определенного интеграла. Наиболее часто встречающиеся линейные интегральные уравнения, в которых неизвестная функция входит линейно (в первой степени) – *интегральные уравнения Фредгольма первого и второго рода* соответственно:

$$\int_a^b K(x, s)y(s)ds = f(x), \quad (3.1)$$

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)y(s)ds = f(x), \quad (3.2)$$

где $K(x, s)$ (*ядро*) и $f(x)$ – известные функции, λ – числовой параметр⁴.

Интегральные уравнения вида

$$\int_a^x K(x, s)y(s)ds = f(x), \quad (3.3)$$

$$y(x) - \lambda \int_a^x K(x, s)y(s)ds = f(x) \quad (3.4)$$

называются *интегральными уравнениями Вольтерра первого и второго рода* соответственно. Вводя функцию

$$K^*(x, s) = \begin{cases} K(x, s) & \text{при } a \leq s \leq x, \\ 0 & \text{при } s > x, \end{cases}$$

уравнения Вольтерра (3.3) и (3.4) можно свести к уравнениям Фредгольма с ядром $K^*(x, s)$.

Замечание: если ядро $K(x, s)$ и функция $f(x)$ – непрерывно дифференцируемые, причем $K(x, x) \neq 0$ при $a \leq x \leq b$, то уравнение Вольтерра первого рода (3.3) сводится к уравнению Вольтерра второго рода (3.4).

⁴ Интегральное уравнение (3.2) не всегда имеет решения при данном значении параметра λ . Варьируя параметр λ , можно добиться того, чтобы решение уравнения (3.2) существовало.

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, s) y(s) ds,$$

где $a \leq x \leq b$. Полагая

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \psi_n(x), \quad (3.9)$$

аналогично предыдущим выкладкам получим

$$\psi_0(x) = f(x), \quad \psi_n(x) = \int_a^x K(x, s) \psi_{n-1}(s) ds \quad (n = 1, 2, \dots),$$

откуда

$$|\psi_n(x)| \leq \frac{M^n N (b-a)^n}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.10)$$

$$|K(x, s)| \leq M, \quad |f(x)| \leq N \quad \text{при } a \leq x \leq b, \quad a \leq s \leq b.$$

Следовательно, ряд (3.9) сходится при любом λ и дает единственное решение уравнения (3.4). Погрешность приближенного решения

$$Y_n(x) = \sum_{k=0}^n \lambda^k \psi_k(x)$$

на основании оценок (3.10) определяется формулой

$$\varepsilon_n = |y(x) - Y_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{N [M(b-a)|\lambda|]^k}{k!} = N \left\{ e^{M(b-a)|\lambda|} - \sum_{k=0}^n \frac{[M(b-a)|\lambda|]^k}{k!} \right\}.$$

Замечание: Неудобством метода последовательных приближений является необходимость вычисления квадратур. Если интегралы не вычисляются точно, то приходится прибегать к численным квадратурным формулам.

Пример 3.1. Методом последовательных приближений найти приближенное решение уравнения Фредгольма

$$y(x) = x + \lambda \int_0^1 \frac{y(s)}{10+x+s} ds \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Полагая $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi_n(x)$, имеем

$$\varphi_0(x) = f(x) = x,$$

$$\varphi_1(x) = \int_a^b K(x, s) \varphi_0(s) ds = \int_0^1 \frac{s}{10+x+s} ds = 1 - (10+x) \ln \frac{11+x}{10+x}.$$

Тогда в качестве первого приближения можно взять

$$y(x) = \varphi_0(x) + \lambda \varphi_1(x) = x + \lambda \left[1 - (10+x) \ln \left(1 + \frac{1}{10+x} \right) \right].$$

Здесь

$$M = \max_{\substack{a \leq x \leq b \\ a \leq s \leq b}} K(x, s) = \max_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq s \leq 1}} \frac{1}{10+x+s} = 0,1 \quad N = \max_{\substack{a \leq x \leq b \\ 0 \leq x \leq 1}} f(x) = \max x = 1.$$

Следовательно, полученный ряд сходится при $|\lambda| < \frac{1}{0,1(1-0)} = 10$. В частности, при $\lambda = 1$ на основании (3.7) точность решения будет

$$|y(x) - y_1(x)| \leq \frac{1 \cdot [0,1 \cdot 1 \cdot 1]^2}{1 - 0,1 \cdot 1 \cdot 1} \approx 0,01.$$

3.2 Метод конечных сумм

Идея метода конечных сумм заключается в замене определенного интеграла конечной суммой с помощью некоторой квадратурной формулы

$$\int_a^b F(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i F(x_i) + R[F], \quad (3.11)$$

где $x_i (i = \overline{1, n})$ - абсциссы точек отрезка $[a, b]$; $A_i (i = \overline{1, n})$ - числовые коэффициенты, не зависящие от выбора функции $F(x)$; $R[F]$ - остаточный член

(ошибка) формулы (3.11). Обычно $A_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^n A_i = b - a$. В случае равноот-

стоящих точек $x_i = a + ih (i = \overline{0, n-1})$, где $h = \frac{b-a}{n}$, имеем:

1) для формулы прямоугольников $A_i = h (i = \overline{1, n-1}), A_n = 0;$

2) для формулы трапеций $A_0 = A_n = \frac{h}{2}, A_i = h (i = \overline{1, n-1});$

3) для формулы Симпсона при $n = 2m, h = \frac{b-a}{2m},$

$$A_0 = A_{2m} = \frac{h}{3}, A_1 = A_3 = \dots = A_{2m-1} = \frac{4h}{3}, A_2 = A_4 = \dots = A_{2m-2} = \frac{2h}{3}.$$

Погрешность приближенного решения зависит от погрешности выбранной квадратурной формулы.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода (3.2):

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x) \quad (a \leq x \leq b).$$

Выбирая точки $x_i \in [a, b]$ и обозначая $y(x_i) = y_i$, $K(x_i, x_j) = K_{ij}$, $f(x_i) = f_i$ $i, j = \overline{1, n}$ на основании формулы (3.11) будем иметь

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^n A_j K_{ij} y_j = f_i + R_i \quad i = \overline{1, n},$$

где R_i - соответствующие ошибки. Отбрасывая в этой системе величины R_i , для приближенных значений y_i решения $y(x)$ в узлах $x_i, i = \overline{1, n}$ получим линейную систему алгебраических уравнений:

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^n A_j K_{ij} y_j = f_i \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.12)$$

Вводя символы Кронекера $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ и учитывая, что $y_i = \delta_{ij} y_j$ (немой индекс j - индекс суммирования), систему (3.12) можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{ij} - \lambda A_j K_{ij}) y_j = f_i \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.13)$$

Если

$$\Delta(\lambda) = \det(\delta_{ij} - \lambda A_j K_{ij}) \neq 0, \quad (3.14)$$

то система (3.13) имеет единственное решение y_i , которое можно найти методами решения систем алгебраических уравнений.

Найдя y_i ($i = \overline{1, n}$) для решения $y(x)$, получаем из уравнения (3.2) приближенное аналитическое выражение

$$\tilde{y}(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^n A_j K(x, x_j) y_j.$$

Замечание: метод конечных сумм дает хорошие результаты, если ядро $K(x, s)$ и правая часть $f(x)$ достаточно гладкие функции.

Метод конечных сумм может быть применен также к интегральному уравнению Фредгольма первого рода (3.1):

$$\lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x).$$

В этом случае приближенные значения y_i решения $y(x)$ в узлах $x_i, i = \overline{1, n}$ определяются из системы

$$\lambda \sum_{j=1}^n A_j K_{ij} y_j = f_i \quad i = \overline{1, n}.$$

Особенно просто применение метода конечных сумм для решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода (3.4):

$$y(x) - \lambda \int_a^x K(x, s) y(s) ds = f(x) \quad a \leq x \leq b,$$

которое можно рассматривать как уравнение Фредгольма второго рода. Здесь $K_{ij} = 0$ при $j > i$ и, следовательно, соответствующая система (3.12) имеет вид

$$y_i - \lambda \sum_{j=0}^i A_j^{(i)} K_{ij} y_j = f_i \quad i = \overline{0, n}. \quad (3.15)$$

Причем коэффициенты $A_j^{(i)}$ вычисляются для соответствующей квадратурной формулы на каждом i -том шаге, поскольку интеграл, входящий в уравнение Вольтерра, имеет переменный верхний предел.

Пример 3.2. Применяя формулу трапеций с шагом $h = 0,2$ на отрезке $[1, 2]$, найти приближенное решение уравнения

$$y(x) + \int_1^x \left(\frac{1}{x} + 0,5(x-s) \right) y(s) ds = 0,5x^2 - \ln x + 3,5. \quad (3^1)$$

Для формулы трапеций для каждого i -го шага ($i = \overline{0, 5}$) будем иметь

$$A_0^{(i)} = A_i^{(i)} = \frac{h}{2}, \quad A_j^{(i)} = h \quad \forall j < i \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Полагая в уравнении (3¹) $x = x_i$ ($i = \overline{0, 5}$), получим

$$y_0 = f_0,$$

$$y_i + \int_1^{x_i} \left(\frac{1}{x_i} + 0,5(x_i - s) \right) y(s) ds = 0,5x_i^2 - \ln x_i + 4 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Применяя к определенным интегралам формулу трапеций с шагом $h = 0,2$, согласно (3.15) получим систему уравнений

$$\begin{cases} y_0 = f_0, \\ y_1 + A_0^{(1)}K_{10}y_0 + A_1^{(1)}K_{11}y_1 = f_1, \\ y_2 + A_0^{(2)}K_{20}y_0 + A_1^{(2)}K_{21}y_1 + A_2^{(2)}K_{22}y_2 = f_2, \\ y_3 + A_0^{(3)}K_{30}y_0 + A_1^{(3)}K_{31}y_1 + A_2^{(3)}K_{32}y_2 + A_3^{(3)}K_{33}y_3 = f_3, \\ y_4 + A_0^{(4)}K_{40}y_0 + A_1^{(4)}K_{41}y_1 + A_2^{(4)}K_{42}y_2 + A_3^{(4)}K_{43}y_3 + A_4^{(4)}K_{44}y_4 = f_4, \\ y_5 + A_0^{(5)}K_{50}y_0 + A_1^{(5)}K_{51}y_1 + A_2^{(5)}K_{52}y_2 + A_3^{(5)}K_{53}y_3 + A_4^{(5)}K_{54}y_4 + A_5^{(5)}K_{55}y_5 = f_5, \end{cases}$$

где $A_0^{(1)} = A_1^{(1)} = A_0^{(2)} = A_2^{(2)} = A_0^{(3)} = A_3^{(3)} = A_0^{(4)} = A_4^{(4)} = A_0^{(5)} = A_5^{(5)} = \frac{h}{2} = 0,1$; а остальные $A_j^{(i)} = h = 0,2$ для всех $j < i$. Составляем таблицу значений

$K_{ij} = \frac{1}{x_i} + 0,5(x_i - x_j)$, $f_i = 0,5x_i^2 - \ln x_i + 4$ ($i = \overline{0,5}$) (табл. 3.1) и из получен-

ной системы последовательно находим

$$\begin{cases} y_0 = f_0 = 4,0000, \\ y_1 = [f_1 - 0,1K_{10}y_0](1 + 0,1K_{11})^{-1} = 3,3825, \\ y_2 = [f_2 - 0,1K_{20}y_0 - 0,2K_{21}y_1](1 + 0,1K_{22})^{-1} = 3,0118, \\ y_3 = [f_3 - 0,1K_{30}y_0 - 0,2(K_{31}y_1 + K_{32}y_2)](1 + 0,1K_{33})^{-1} = 2,7719, \\ y_4 = [f_4 - 0,1K_{40}y_0 - 0,2(K_{41}y_1 + K_{42}y_2 + K_{43}y_3)](1 + 0,1K_{44})^{-1} = 2,6077, \\ y_5 = [f_5 - 0,1K_{50}y_0 - 0,2(K_{51}y_1 + K_{52}y_2 + K_{53}y_3 + K_{54}y_4)](1 + 0,1K_{55})^{-1} = 2,4906. \end{cases}$$

Таблица 3.1 – Значения коэффициентов

i	K_{1i}	K_{2i}	K_{3i}	K_{4i}	K_{5i}	f_i
0	0,9333	0,9143	0,9250	0,9556	1,0000	4,0000
1	0,8333	0,8143	0,8250	0,8556	0,9000	4,0377
2		0,7143	0,7250	0,7556	0,8000	4,1435
3			0,6250	0,6556	0,7000	4,3100
4				0,5556	0,6000	4,5322
5					0,5000	4,8069

Уравнение (3¹) соответствует краевой задаче

$$\begin{aligned} u'' + \frac{1}{x}u' + 0,5u = 0,5x^2 - \ln x + 4, \\ u(1) = 1, \quad u'(1) = 0. \end{aligned} \quad (3^2)$$

Связь между решением $y(x)$ интегрального уравнения (3¹) и решением $u(x) = x^2 - 2 \ln x$ краевой задачи (3²) определена выражениями (II.3), (II.5), см. приложение II. Следовательно, точным решением уравнения (3¹) будет

$$y(x) = \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = 2 + \frac{2}{x^2}$$

и, наоборот, приближенное решение задачи (3²) будет иметь вид:

$$u_i = \int_1^{x_i} (x_i - s) y_i ds + 1 \quad i = \overline{0, 5}.$$

На рис. 3.1 представлено графическое сравнение точных и приближенных решений уравнений (3¹), (3²); в табл. 3.2 – их значения.

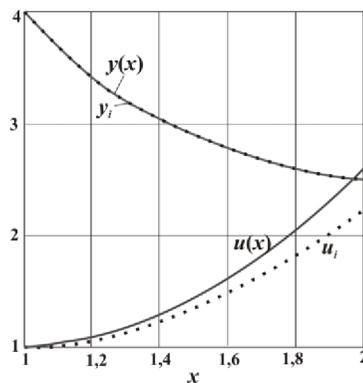


Рис. 3.1

Таблица 3.2 – Сравнение приближенных и точных решений

x_i	$y(x)$	y_i	$u(x)$	u_i
1,0	4,0000	4,0000	1,0000	1,0000
1,2	3,3889	3,3825	1,0754	1,0676
1,4	3,0204	3,0118	1,2871	1,2409
1,6	2,7813	2,7719	1,6200	1,4989
1,8	2,6173	2,6077	2,0644	1,8345
2,0	2,5000	2,4906	2,6137	2,2453

3.3 Метод вырожденного ядра

Ядро $K(x, s)$ называется *вырожденным*, если оно может быть представлено в виде конечной суммы парных произведений:

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \beta_i(s), \quad (3.16)$$

где функции $\alpha_i(x)$, $\beta_i(s)$ можно считать линейно независимыми. Для таких ядер интегральное уравнение Фредгольма второго рода (3.2):

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds$$

решается весьма просто. Подставляя выражение (3.16) в уравнение (3.2), будем иметь

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i(x), \quad (3.17)$$

где

$$c_i = \int_a^b \beta_i(s) y(s) ds \quad i = \overline{1, n} \quad (3.18)$$

некоторые постоянные коэффициенты. Если в выражения (3.18) подставить функцию (3.17), то для определения коэффициентов c_i получим алгебраическую систему линейных уравнений

$$c_i = \int_a^b \beta_i(s) f(s) ds + \lambda \int_a^b \beta_i(s) \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i(s) ds \quad (i = \overline{1, n})$$

или

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^n c_j \gamma_{ji} = f_i, \quad (3.19)$$

где

$$f_i = \int_a^b \beta_i(s) f(s) ds, \quad \gamma_{ij} = \int_a^b \alpha_i(s) \beta_j(s) ds. \quad (3.20)$$

Запишем систему (3.19) в виде

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{ij} - \lambda \gamma_{ji}) c_j = f_i \quad i = \overline{1, n}.$$

Обозначим определитель этой системы

$$\Delta(\lambda) = \det(\delta_{ij} - \lambda \gamma_{ji}) \equiv \begin{vmatrix} 1 - \lambda \gamma_{11} & -\lambda \gamma_{21} & \dots & -\lambda \gamma_{n1} \\ -\lambda \gamma_{12} & 1 - \lambda \gamma_{22} & \dots & -\lambda \gamma_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda \gamma_{1n} & -\lambda \gamma_{2n} & \dots & 1 - \lambda \gamma_{nn} \end{vmatrix}$$

и через $\Delta_{ij}(\lambda)$ - алгебраические дополнения соответствующих элементов $(\delta_{ij} - \lambda \gamma_{ji})$ этого определителя. Если $\Delta(\lambda) \neq 0$, то по правилу Крамера находим

$$c_i = \frac{\sum_{j=1}^n \Delta_{ji}(\lambda) f_j}{\Delta(\lambda)} \quad (i = \overline{1, n}).$$

Следовательно, в силу (3.17) интегральное уравнение (3.2) имеет единственное решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{ji}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} f_j \alpha_i(x).$$

Отсюда, подставляя вместо f_i соответствующее выражение (3.20) и заменяя сумму интегралов интегралом суммы, получим

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \frac{\Delta(x, s, \lambda)}{\Delta(\lambda)} f(s) ds, \quad (3.21)$$

где $\Delta(x, s, \lambda) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i(x) \beta_j(s) \Delta_{ji}(\lambda)$. Из формулы (3.21) вытекает, что функция

$$R(x, s, \lambda) = \frac{\Delta(x, s, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i(x) \beta_j(s) \frac{\Delta_{ji}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

есть *резольвента* интегрального уравнения (3.2).

Собственные значения ядра $K(x, s)$ определяются из уравнения

$$\Delta(\lambda) = 0. \quad (3.22)$$

Если λ_k ($k = \overline{1, m}$, $m \leq n$) есть корень уравнения (3.22) (очевидно, $\lambda_k \neq 0$), то соответствующие собственные функции $\varphi_k(x)$ ядра $K(x, s)$, т.е. нетривиальные решения однородного уравнения

$$\tilde{y}(x) = \lambda_k \int_a^b K(x, s) \tilde{y}(s) ds,$$

будут иметь вид

$$\varphi_k(x) = \lambda_k \sum_{i=1}^n \tilde{c}_i^{(k)} \alpha_i(x),$$

где $\tilde{c}_i^{(k)}$ - ненулевые решения линейной однородной системы

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{ij} - \lambda \gamma_{ji}) \tilde{c}_j^{(k)} = 0 \quad i = \overline{1, n}.$$

Если $\lambda = \lambda_k$ есть собственное значение ядра $K(x, s)$, то неоднородное уравнение (3.2) или не имеет решений, или имеет бесконечное множество решений.

Пример 3.3. Найти приближенное решение уравнения

$$y(x) - \int_0^1 sh(xs) y(s) ds = 1 - x^2. \quad (3^3)$$

Заменяем ядро $K(x, s) = sh(xs)$ суммой первых трех членов ряда Тейлора:

$$sh(xs) \approx xs + \frac{(xs)^3}{3!} + \frac{(xs)^5}{5!}.$$

Тогда решение уравнения (3³) будем искать в виде

$$y(x) = 1 - x^2 + c_1 x + c_2 x^3 + c_3 x^5.$$

Обозначим $f(x) = 1 - x^2$, $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = x^3$, $\alpha_3 = x^5$, $\beta_1(s) = s$, $\beta_2(s) = \frac{s^3}{3!}$,

$\beta_3 = \frac{s^5}{5!}$ и найдем по формулам (3.20) коэффициенты системы (3.19):

$$f_1 = \int_0^1 \beta_1(s) f(s) ds = \int_0^1 (s - s^3) ds = \frac{1}{4},$$

$$f_2 = \int_0^1 \beta_2(s) f(s) ds = \int_0^1 \frac{1}{3!} (s^3 - s^5) ds = \frac{1}{72},$$

$$f_3 = \int_0^1 \beta_3(s) f(s) ds = \int_0^1 \frac{1}{5!} (s^5 - s^7) ds = \frac{1}{2880},$$

$$\gamma_{11} = \int_0^1 \alpha_1(s) \beta_1(s) ds = \int_0^1 s^2 ds = \frac{1}{3}, \quad \gamma_{12} = \int_0^1 \frac{1}{3!} s^4 ds = \frac{1}{30}, \quad \gamma_{13} = \int_0^1 \frac{1}{5!} s^6 ds = \frac{1}{840},$$

$$\gamma_{21} = \int_0^1 s^4 ds = \frac{1}{5}, \quad \gamma_{22} = \int_0^1 \frac{1}{3!} s^6 ds = \frac{1}{42}, \quad \gamma_{23} = \int_0^1 \frac{1}{5!} s^8 ds = \frac{1}{1080},$$

$$\gamma_{31} = \int_0^1 s^6 ds = \frac{1}{7}, \quad \gamma_{32} = \int_0^1 \frac{1}{3!} s^8 ds = \frac{1}{54}, \quad \gamma_{33} = \int_0^1 \frac{1}{5!} s^{10} ds = \frac{1}{1320}.$$

Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{5}c_2 + \frac{1}{7}c_3 + \frac{1}{4}, \\ c_2 = \frac{1}{30}c_1 + \frac{1}{42}c_2 + \frac{1}{54}c_3 + \frac{1}{72}, \\ c_3 = \frac{1}{840}c_1 + \frac{1}{1080}c_2 + \frac{1}{1320}c_3 + \frac{1}{2880}. \end{cases}$$

Решив ее методом итерации, получаем $c_1 = 0,3833$, $c_2 = 0,0273$, $c_3 = 0,0008$.

Таким образом, приближенное решение уравнения (3³) можно записать в виде

$$y(x) = 1 - x^2 + 0,3833x + 0,0273x^3 + 0,0008x^5.$$

4 ЗАДАНИЕ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ

I Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

I.1. Найти решение краевой задачи

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad x \in [a, b]$$
$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A_1, \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B_1 \end{cases}$$

с шагом $h = 0,1$:

а) методом конечных разностей, используя конечно-разностные и центрально-разностные отношения; сравнить результаты вычислений с точным решением; сделать вывод;

б) методом прогонки, используя разностную схему, давшую в п. а) лучший результат;

в) сравнить результаты вычислений методом конечных разностей, методом прогонки с точным решением; сделать вывод.

I.2. Найти решение краевой задачи:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad x \in [a, b]$$
$$\begin{cases} y(a) = A_2, \\ y(b) = B_2 \end{cases}$$

с шагом $h = 0,1$ методом Галеркина, методом коллокаций и методом Рунге. Привести сравнение результатов вычислений с точным решением. Сделать вывод.

Примечание: Для составления краевых задач использовать функции $y(x)$, $p(x)$, $q(x)$ и коэффициенты α_0 , α_1 , β_0 , β_1 , приведенные в табл. 4.1.

II Уравнения в частных производных

II.1. Методом сеток найти приближенное решение первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности на отрезке:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in [0, l], \quad t \geq 0;$$
$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{2x^2}{l}, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ l - x, & \frac{l}{2} < x \leq l; \end{cases}$$
$$u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Сравнить результаты решений с аналитическим решением.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	4	5	3	5	5	3	2	3	2	5
l	3	5	2	8	6	10	5	3	4	3
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	2	3	4	3	4	5	4	4	6	4
l	7	4	8	5	2	4	6	4	3	1

П.2. Методом сеток найти приближенное решение первой смешанной задачи для волнового уравнения на отрезке $[0, l]$:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in [0, l], \quad t \geq 0;$$

$$u(x, 0) = x(x-l), \quad u_t(x, 0) = 0;$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Сравнить результаты вычислений с аналитическим решением.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	3	3/2	2	2/3	4	2	1/2	1/3	1/3	2/3
l	3	3	1	2/3	2	2	1	1/2	1	1
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	4	1/3	3	3/2	3	2	1/2	1/2	3/2	2
l	3	2	3/2	3/2	2	1/2	3/2	1/2	1	3

П.3. Найти приближенное решение задачи Дирихле в квадрате с вершинами $A(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 1)$, $D(1, 0)$:

$$\Delta u = 0,$$

$$\begin{cases} u|_{AB} = \varphi_1(y), & u|_{BC} = \psi_1(x), \\ u|_{CD} = \varphi_2(y), & u|_{AD} = \psi_2(x) \end{cases}$$

с шагом $h = 1/3$, применяя:

- метод сеток;
- метод усреднения Либмана с точностью 0,1.

№	$\varphi_1(y)$	$\psi_1(x)$	$\varphi_2(y)$	$\psi_2(x)$
1	$30y$	$30(1-x^2)$	0	0
2	$30y$	$30\cos\frac{\pi x}{2}$	$30\cos\frac{\pi y}{2}$	$30x$
3	$50y(1-y^2)$	0	0	$50\sin\pi x$
4	$20y$	20	$20y^2$	$50x(1-x)$
5	0	$50x(1-x)$	$50y(1-y^2)$	$50x(1-x)$
6	$30\sin\pi y$	$20x$	$20y$	$30x(1-x)$
7	$30(1-y)$	$20\sqrt{x}$	$20y$	$30(1-x)$
8	$50\sin\pi y$	$30\sqrt{x}$	$30y^2$	$50\sin\pi x$
9	$40y^2$	40	40	$40\sin\frac{\pi x}{2}$
10	$50y$	$50(1-x)$	0	0
11	$40(1-y)$	$30x$	$30y$	$40(1-x^2)$
12	$10y^2(1-y^2)$	0	0	$10\sin\pi x$
13	$50\sin\pi y$	$20x$	$20y^2$	$50\sin\pi x$
14	$30y^2$	$30(1-x)$	0	0
15	$20y$	$20\cos\frac{\pi x}{2}$	$20\cos\frac{\pi y}{2}$	$20x$
16	$40\sin\pi y$	$50\sqrt{x}$	$50y^2$	$40\sin\pi x$
17	$10y$	10	$10y^2$	$30x(1-x)$
18	$15y$	$15\cos\frac{\pi x}{2}$	$15\cos\frac{\pi y}{2}$	$15x$
19	$10y(1-y^2)$	0	0	$20\sin\pi x$
20	0	$30x(1-x)$	$30y(1-y^2)$	$30x(1-x)$

III Интегральные уравнения

III.1. Для краевой задачи

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad x \in [a, b]$$
$$\begin{cases} y(a) = A_3, \\ y'(a) = B_3 \end{cases}$$

получить соответствующее уравнение Вольтерра второго рода:

$$y(x) + \int_a^x K(x, s)y(s) ds = f(x)$$

и найти его приближенное решение. Результат сравнить с точным решением.

III.2. Составить интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$y(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)y(s) ds = f(x)$$

и найти его приближенное решение. Результат сравнить с точным решением.

Примечания: 1) Для составления уравнений использовать функции $y(x)$, $K(x, s)$, приведенные в табл. 4.1.

2) При составлении уравнения Фредгольма необходимо уточнить сходимость будущего решения, т.е. определить диапазон значений величины

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}.$$

Требования к оформлению курсовой работы

Оформление курсовой работы (структура, оформление текста, нумерация страниц и разделов, графический материал, таблицы, формулы и уравнения, список использованной литературы, приложения) производится согласно [7].

При выполнении работы предлагается использовать программные продукты MathCAD, Maple и др.

N_0	1	2	3	4
$y(x)$	$\frac{x^3}{N+1} + 0,1N$	$e^{\frac{x}{N}} + 0,1N$	$\ln Nx + 0,1N$	$\frac{0,1N}{N-x}$
$[a, b]$	$[N+1, N+2]$	$[N+2, N+3]$	$[1, 2]$	$[N+1, N+2]$
$p(x)$	$(N+1)x^{-1}$	$(N-1)x^{-1}$	$(N+2)x^{-1}$	$(N-2)x^{-1}$
$q(x)$	$0,1N$	$0,1Nx$	$0,1N-1$	$-0,1N$
$\alpha_{0,1}, \beta_{0,1}$	1 0 3 -2	3 -2 1 0	3 2 1 0	1 0 3 -2
$K(x, s)$	$\frac{1}{1+x^2+s^2}$	$(1+s)(e^{0,3xs} - 1)$	$\frac{1+x+s}{2+xs}$	$\frac{x+s}{1+xs}$
N_0	5	6	7	8
$y(x)$	$\frac{0,1Nx^4}{N-1}$	$\frac{x^2 + 0,1N}{N+1}$	$(N+1)e^{-0,1Nx}$	$0,1N \ln Nx$
$[a, b]$	$[N-2, N-1]$	$[N-3, N-2]$	$[N-4, N-3]$	$[1, 2]$
$p(x)$	$(2N+1)x^{-1}$	$(1-2N)x^{-1}$	$(1-N)x^{-1}$	$(2-N)x^{-1}$
$q(x)$	$0,3N$	$0,3Nx$	$0,3Nx^2$	$-0,3N$
$\alpha_{0,1}, \beta_{0,1}$	1 3 0 1	2 -1 1 0	1 0 1 2	3 -1 1 0
$K(x, s)$	$\frac{1+s}{2+xs}$	$\frac{x+s}{x-s}$	$\frac{x+s}{s}$	$\frac{1}{1+x^2+s^2}$
N_0	9	10	11	12
$y(x)$	$\frac{N+2}{x-0,2N}$	$\cos(Nx) + 0,1N$	$-\sin(Nx) + 0,1N$	$-(N+1)x^2 + 0,1N$
$[a, b]$	$[N-5, N-4]$	$[\frac{\pi}{2}, \frac{(2+N)}{2N}\pi]$	$[\frac{\pi}{2}, \frac{(2+N)}{2N}\pi]$	$[N-6, N-5]$
$p(x)$	$(N+3)x^{-1}$	$(N-3)x^{-1}$	$(3-N)x^{-1}$	$(3N+1)x^{-1}$
$q(x)$	$0,3N-1$	$\frac{N-1}{10}x$	$\frac{N-1}{10}x^2$	$\frac{N-1}{10x}$
$\alpha_{0,1}, \beta_{0,1}$	2 -1 1 0	1 0 3 2	0 1 2 -1	2 -1 0 1
$K(x, s)$	$(1+s)(e^{0,2xs} - 1)$	$\frac{2+s}{1+xs}$	$\frac{2+x+s}{1-xs}$	$\frac{x-s}{x+s}$

N_0	13	14	15	16
$y(x)$	$\frac{x^3}{N-1} + 0,2N$	$\frac{1}{0,1N} e^{\frac{x}{N}}$	$\frac{1}{0,1N} \ln Nx$	$\frac{0,2N}{N+x}$
$[a, b]$	$[N, N+1]$	$[N-1, N]$	$[1, 2]$	$[N-2, N-1]$
$p(x)$	$(1-3N)x^{-1}$	$(0,1N+1)x^{-1}$	$(1-0,1N)x^{-1}$	$(0,2N-1)x^{-1}$
$q(x)$	$\frac{-N+2}{10}x$	$0,1Nx^2$	$\frac{0,1N}{x}$	$\frac{0,3N}{x}$
$\alpha_{0,1}, \beta_{0,1}$	0 1 -2 3	1 0 1 2	0 1 -2 1	-2 3 0 1
$K(x, s)$	$(1+s)(e^{-0,1xs} - 1)$	$\frac{1}{2+x^2+s^2}$	$\frac{1+s}{2-xs}$	$\frac{1-x-s}{2+xs}$
N_0	17	18	19	20
$y(x)$	$\frac{(N-1)x^4}{N-3}$	$-\frac{1}{N} \cos(0,2Nx)$	$\sin(0,1Nx) + N$	$(0,1N+1)x^2 - \frac{3N}{10}$
$[a, b]$	$[N+1, N+2]$	$[\frac{\pi}{2}, \frac{(2+N)}{2N}\pi]$	$[\frac{\pi}{2}, \frac{(2+N)}{2N}\pi]$	$[N-2, N-1]$
$p(x)$	$(0,1N-1)x^{-1}$	$(1-0,2N)x^{-1}$	$(0,2N+1)x^{-1}$	$(N-5)x^{-1}$
$q(x)$	$\frac{1-N}{10}x$	$\frac{2-N}{10}x$	$\frac{2-N}{10}x^2$	$0,3Nx-1$
$\alpha_{0,1}, \beta_{0,1}$	0 1 2 3	-3 2 0 1	0 1 2 -3	1 0 -3 2
$K(x, s)$	$\frac{1-x}{1-xs}$	$(1-s)(e^{0,3xs} + 1)$	$\frac{1+x}{2-xs}$	$\frac{1+x+s}{1-xs}$

ПРИЛОЖЕНИЕ I. Аналитические решения уравнений в частных производных (метод Фурье)

Метод Фурье (или метод разделения переменных) принадлежит к числу важнейших методов решения уравнений математической физики. Схема решения для смешанных задач в случае двух независимых переменных состоит в следующем:

– на *первом этапе* находится решение, удовлетворяющее уравнению и краевым условиям: частные решения уравнения ищутся в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной; с учетом граничных условий определяются собственные значения и соответствующие им собственные функции;

– на *втором этапе* согласно начальным условиям определяются коэффициенты разложения в ряд Фурье по соответствующим собственным функциям для полученного на первом этапе решения.

Ниже предлагаются решения смешанных задач для уравнений параболического и гиперболического типов, полученные методом Фурье [5].

I.1 Смешанная задача о колебаниях однородной струны

Найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (I.1)$$

начальным условиям

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = \Phi(x) \quad (0 < x < l) \quad (I.2)$$

и однородным краевым условиям:

1) оба конца струны закреплены:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0; \quad (I.3)$$

2) левый конец струны ($x = 0$) закреплен, правый ($x = l$) – свободен:

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0; \quad (I.4)$$

3) левый конец струны ($x = 0$) свободен, правый ($x = l$) – закреплен:

$$u_x(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0; \quad (I.5)$$

4) оба конца струны свободны:

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0. \quad (I.6)$$

Общее решение задачи имеет вид

$$u(x, t) = \sum_n^{\infty} (A_n \cos \lambda_n at + B_n \sin \lambda_n at) X_n(x),$$
$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) X_n(x) dx, \quad B_n = \frac{2}{al\lambda_n} \int_0^l \Phi(x) X_n(x) dx,$$

где λ_n – собственные значения, $X_n(x)$ – собственные функции, соответствующие краевой задаче (см. табл. I.1.).

Таблица I.1. – Собственные значения и функции для волнового уравнения

Задача	λ_n	$X_n(x)$
(I.1), (I.2), (I.3)	$\frac{n\pi}{l}, n = \overline{1, \infty}$	$\sin \lambda_n x$
(I.1), (I.2), (I.4)	$\frac{(2n+1)\pi}{2l}, n = \overline{1, \infty}$	$\sin \lambda_n x$
(I.1), (I.2), (I.5)	$\frac{(2n+1)\pi}{2l}, n = \overline{0, \infty}$	$\cos \lambda_n x$
(I.1), (I.2), (I.6)	$\frac{n\pi}{l}, n = \overline{0, \infty}$	$\cos \lambda_n x$

I.2 Смешанная задача о теплопроводности в однородном стержне

Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad (I.7)$$

начальному условию

$$u(x,0) = f(x) \quad (0 < x < l) \quad (I.8)$$

и однородным краевым условиям:

- 1) оба конца стержня теплоизолированы:

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0; \quad (I.9)$$

- 2) на обоих концах стержня поддерживается постоянная температура:

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0; \quad (I.10)$$

- 3) левый конец стержня ($x = 0$) теплоизолирован, на правом конце ($x = l$) поддерживается постоянная температура:

$$u_x(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0; \quad (I.11)$$

- 4) на левом конце стержня ($x = 0$) поддерживается постоянная температура, правый конец ($x = l$) теплоизолирован:

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0. \quad (I.12)$$

Общее решение задачи имеет вид

$$u(x,t) = \sum_n (A_n \cos \lambda_n x + B_n \sin \lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 a^2 t}.$$

В табл. I.2 представлены собственные значения λ_n и значения коэффициентов A_n, B_n , соответствующие краевой задаче.

Таблица I.2. – Собственные значения и коэффициенты разложения

Задача	λ_n	$X_n(x)$
(I.7), (I.8), (I.9)	$\frac{n\pi}{l}, n = \overline{0, \infty}$	$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \lambda_n x dx, B_n = 0$
(I.7), (I.8), (I.10)	$\frac{n\pi}{l}, n = \overline{1, \infty}$	$A_n = 0, B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \lambda_n x dx$
(I.7), (I.8), (I.11)	$\frac{(2n+1)\pi}{2l}, n = \overline{0, \infty}$	$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \lambda_n x dx, B_n = 0$
(I.7), (I.8), (I.12)	$\frac{(2n+1)\pi}{2l}, n = \overline{1, \infty}$	$A_n = 0, B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \lambda_n x dx$

ПРИЛОЖЕНИЕ I I. Связь между дифференциальным уравнением и уравнением Вольтерра

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2} + p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = f(x) \quad a \leq x \leq b \quad (\text{II.1})$$

при начальных условиях

$$u(a) = A, \quad u'(a) = B. \quad (\text{II.2})$$

Положим

$$\frac{d^2u}{dx^2} = y(x) \quad (\text{II.3})$$

и дважды проинтегрируем

$$\frac{du}{dx} = \int_a^x y(s) ds + C_1, \quad u = \int_a^x ds \int_a^s y(t) dt + C_1(x-a) + C_2.$$

Изменяя порядок интегрирования в двойном интеграле, получим

$$\int_a^x ds \int_a^s y(t) dt = \int_a^x dt \int_t^x y(t) ds = \int_a^x (x-t)y(t) dt \equiv \int_a^x (x-s)y(s) ds.$$

Кроме того, из начальных условий (I.2) при $x=a$ найдем $C_1 = B, C_2 = A$.

Поэтому

$$\frac{du}{dx} = \int_a^x y(s) ds + B, \quad (\text{II.4})$$

$$u(x) = \int_a^x (x-s)y(s) ds + B(x-a) + A. \quad (\text{II.5})$$

Подставляя выражения (II.3), (II.4) и (II.5) в дифференциальное уравнение (II.1), получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$y(x) + \int_a^x K(x, s)y(s) ds = F(x), \quad (\text{II.6})$$

где

$$K(x, s) = p(x) + q(x)(x-s),$$

$$F(x) = f(x) - Bp(x) - [B(x-a) + A]q(x).$$

Зная функцию $y(x)$, можно по формуле (II.5) найти решение $u(x)$ и производную $u'(x)$; таким образом, интегральное уравнение (II.6) включает в

себя всю информацию, связанную с начальной задачей (задачей Коши) для дифференциального уравнения (II.1).

Аналогичный результат получается для линейного дифференциального уравнения n -го порядка.

Обратно, если ядро $K(x, s)$ является целым полиномом относительно s степени n , т.е.

$$K(x, s) = \sum_{m=0}^n a_m(x) s^m,$$

то путем последовательного дифференцирования интегрального уравнения (II.6) придем к задаче Коши для некоторого линейного дифференциального уравнения.

Пример II.1. Решить интегральное уравнение

$$y(x) + \int_0^x (2 + x - s) y(s) ds = x^2. \quad (\text{II}^1)$$

Последовательно продифференцировав уравнение (II¹) два раза, получим

$$y'(x) + 2y(x) + \int_0^x y(s) ds = 2x, \quad (\text{II}^2)$$

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 2. \quad (\text{II}^3)$$

Из уравнение (II¹) и (II²) при $x = 0$ получаем начальные условия:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Решая известным способом дифференциальное уравнение (II³), находим

$$y(x) = 2 - 2e^{-x}(1+x).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Березин, И.С. Методы вычислений: т. 2 // И.С. Березин, Н.П. Жидков. - 2-е изд. – М.: Физматгиз, 1962. – 620 с.
- 2 Демидович, Б.П. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
- 3 Копченова, Н.В. Вычислительная математика в примерах и задачах / Н.В. Копченова, И.А. Марон. – М.: Наука, 1972. – 368 с.
- 4 Михлин, С.Г. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений / С.Г. Михлин, Х.Л. Смолицкий. – М.: Наука, 1965. – 384 с.
- 5 Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики: учеб. пособие для вузов / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 725 с.
- 6 Чудесенко, В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. Типовые расчеты: учеб. пособие / В.Ф. Чудесенко – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 128 с.
- 7 Стандарт организации СГАУ 02068410-004-2007: Общие требования к учебным текстовым документам. (<http://www.ssau.ru/resources/standards>)

Учебное издание

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ,
УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ**

Учебно-методическое пособие

***Буханько Анастасия Андреевна,
Чостковская Ольга Петровна***

Редактор Н.С. Куприянова
Верстка А.А. Буханько

Подписано в печать 08.08.2011. Формат 60x84 1/16

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Печ. л. 4,25.

Тираж 50 экз. Заказ . Арт. С – (Д1-6)/2011

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЁВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»**

А.А. БУХАНЬКО, О.П. ЧОСТКОВСКАЯ

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ,
УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

САМАРА 2011