ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

Ю.Л. ФАЙНИЦКИЙ

ПРЕДЕЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

С А М А Р А
Издательство СГАУ
2006

УДК 517.1 (075)
ББК
Ф

Инновационная образовательная программа "Развитие центра компетенции и подготовка специалистов мирового уровня в области аэрокосмических и геоинформационных технологий"

Рецензенты: проф., доктор техн. наук Б. А. Г о р л а ч
доц., канд. физ.-мат. наук Е. Я. Г о р е л о в а

Ф ***Файницкий Ю.Л.***
Пределы и производные : учеб. пособие по самостоятельной работе / *Ю.Л. Файницкий.* – Самара : Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2006. – 67 с.

ISBN 5-7883-0428-8

Предназначено для студентов всех специальностей СГАУ. Содержит материалы по математике, предлагаемые для самостоятельного изучения в первом семестре. Рассматриваются вопросы, которые традиционно относят к введению в математический анализ, и задачи дифференциального исчисления функции одной и многих переменных.

Определения, утверждения и приемы решения задач, рассматриваемые на лекционных и практических занятиях, здесь не дублируются. Предполагается, что студент уже ознакомился с указанным материалом. Учебное пособие представляет собой руководство, помогающее студенту продолжить изучение методов решения задач по данному разделу математики.

Учебное пособие выполнено на кафедре высшей математики в рамках инновационной образовательной программы «Развитие центра компетенции и подготовка специалистов мирового уровня в области аэрокосмических и геоинформационных технологий».

УДК 517.1 (075)
ББК

ISBN 5-7883-0428-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие содержит материалы по математике, предлагаемые студентам всех специальностей СГАУ для самостоятельного изучения в первом семестре. Здесь рассматриваются вопросы, которые традиционно относят к введению в математический анализ, и задачи дифференциального исчисления функций одной и многих переменных.

Пособие состоит из глав, разбитых на параграфы (пункты), каждый из которых имеет следующую структуру. Параграф, как правило, начинается с кратких теоретических сведений, необходимых для решения очередной задачи. Теоремы приводятся без доказательств, однако, в каждом конкретном случае указывается учебное пособие, с помощью которого можно ознакомиться с обоснованием соответствующего утверждения.

Далее приводится формулировка и решение очередной задачи. Затем формулируется аналогичная задача, предназначенная для самостоятельного решения, и ответ к ней, если только ответ не следует из условия. В отдельных случаях в завершение параграфа может приводиться еще одна или несколько пар задач.

Рекомендуется следующий порядок самостоятельной работы. Прежде всего, необходимо по конспекту и учебнику проработать материал, рассмотренный на лекционных занятиях, ознакомиться с введенными там понятиями, изучить формулировки и доказательства теорем. Затем, опираясь на решения задач, предложенных на практических занятиях, выполнить текущее домашнее задание. И только после этого целесообразно осваивать материал, приведенный в настоящем учебном пособии.

Такая последовательность изучения материала связана, в частности, с тем, что здесь не дублируются рассматриваемые на лекционных и практических занятиях определения, утверждения и приемы. Предполагается, что студент с ними уже ознакомился. Пособие представляют собой руководство, помогающее студенту продолжить изучение методов решения задач по данному разделу математики.

1 ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1.1 Равенство множеств

Определение. Если A и B – множества, то, по определению, $A = B$ в том и только в том случае, если одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$.

Таким образом, $A = B$, если всякий элемент множества A принадлежит также множеству B, а всякий элемент множества B является элементом множества A.

Определение. Множество, состоящее из всех элементов множества A, не принадлежащих множеству B, называется разностью множеств A и B и обозначается $A \setminus B$. Если все рассматриваемые множества содержатся в некотором множестве U, то $U \setminus A$ называется дополнением множества A и обозначается A'.

1. Доказать соотношение

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \tag{1}$$

Решение.

Если $x \in A \cap (B \cup C)$, то $x \in A$ и при этом $x \in B \cup C$. Последнее означает, что $x \in B$ или $x \in C$. Если $x \in B$ то, поскольку в то же время $x \in A$, $x \in A \cap B$ и, следовательно, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Если $x \in C$, то $x \in A \cap C$ и $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Таким образом,

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C). \tag{2}$$

Пусть теперь $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Тогда $x \in A \cap B$ или $x \in A \cap C$. Если $x \in A \cap B$, то $x \in A$ и $x \in B$. Поэтому $x \in B \cup C$ и $x \in A \cap (B \cup C)$. Если $x \in A \cap C$, то $x \in A$ и $x \in C$, $x \in B \cup C$ и $x \in A \cap (B \cup C)$.

Следовательно

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C). \tag{3}$$

Согласно (2) и (3), левая часть соотношения (1) содержится в правой, а правая – в левой. Это означает, что равенство (1) верно.

2. Доказать, что

$$(A \cup B)' = A' \cap B'.$$

Указание. Учтите, что, согласно определению дополнения множества, соотношения $x \in A'$ и $x \notin A$ равносильны.

1.2 Таблицы истинности

Если некоторое высказывание истинно, то будем обозначать это цифрой «1», если ложно – то цифрой «0». Логические операции формально определяются таблицами истинности.

Например, таблица истинности отрицания $\overline{p}$ высказывания p ($\overline{p}$ читается «не p»):

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

Таблица истинности конъюнкции высказываний p и q:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Таблица истинности дизъюнкции высказываний p и q:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Таблицы истинности равносильных высказываний совпадают.

3. Даны высказывания p и q. Доказать равенство

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r). \qquad (4)$$

Решение.

Составим таблицу истинности левой части равенства (4):

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
0	0	0	0	0

Аналогично, строим таблицу истинности правой части:

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (q \wedge r)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0

При одинаковых первых трех столбцах этих таблиц последние столбцы совпадают. Это означает, что равенство (4) верно.

4. Даны высказывания p и q. Доказать равенство

$$\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}.$$

1.3 Метод математической индукции

Этот метод основан на следующем принципе математической индукции [4, гл. I, § 2].

Некоторое утверждение, формулировка которого содержит параметр n, считается справедливым для всякого натурального значения этого параметра, если

а) данное утверждение верно при $n=1$;

б) из того, что это утверждение верно при $n=k$, следует, что оно справедливо и при $n=k+1$.

5. Методом математической индукции доказать формулу суммы членов арифметической прогрессии

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n.$$

Решение.

Запишем эту формулу в виде

$$S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}n. \tag{5}$$

Здесь использованы стандартные обозначения параметров арифметической прогрессии.

Проверим первое из условий принципа математической индукции. При $n=1$

$$S_1=a_1=\frac{2a_1+d(1-1)}{2}1,$$

то есть в этом случае формула (5) справедлива. Для надежности рассуждения полезно выполнить проверку еще одного-двух первых значений S_n. Так, при $n=2$ имеем:

$$S_2=a_1+a_2=a_1+(a_1+d)=\frac{2a_1+d(2-1)}{2}2,$$

формула (5) верна.

Проверим теперь второе условие. Пусть формула (5) справедлива при $n=k$:

$$S_k=\frac{2a_1+d(k-1)}{2}k.$$

Тогда

$$S_{k+1}=S_k+a_{k+1}=\frac{2a_1+d(k-1)}{2}k+a_1+dk=$$

$$=\frac{2a_1k+dk^2-dk+2a_1+2dk}{2}=\frac{2a_1(k+1)+dk^2+dk}{2}=$$

$$=\frac{2a_1(k+1)+dk(k+1)}{2}=\frac{2a_1+d((k+1)-1)}{2}(k+1).$$

Таким образом, формула (5) верна при $n=k+1$ и, значит, при всех натуральных значениях параметра n.

6. Методом математической индукции доказать, что

$$1^2+2^2+3^2+\ \ldots\ +n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1.4 Бином Ньютона

Пусть $n\in\mathbb{N}$. Тогда величина $n!$ (читается «n (эн) факториал») определяется равенством

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\ \cdots\ n.$$

Например,

$$1!=1,\ 2!=1\cdot 2=2,\ 3!=1\cdot 2\cdot 3=6,\ 4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=3!\cdot 4=24,$$
$$5!=4!\cdot 5=120,\ 6!=5!\cdot 6=720.$$

По определению,

$$0!=1.$$

Если $n\in\mathbb{N}$, то величина C_n^m (читается «C (цэ) из n по m) называется числом сочетаний из n элементов по m и определяется соотношениями

$$C_n^0=1,\ C_n^m=\frac{n(n-1)(n-2)\ \cdots\ (n-(m-1))}{m!}$$

$(m=1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n)$. Число сомножителей в числителе равно m.

Например,

$$C_n^1=\frac{n}{1!},\ C_n^2=\frac{n(n-1)}{2!},\ C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}.$$

Справедливо равенство

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Так, при $n = 10$ и $m = 8$ имеем

$$C_{10}^8 = C_{10}^2.$$

Соотношение

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m$$

называется формулой бинома Ньютона. Здесь $a,\ b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Символ $\sum\limits_{m=0}^{n}$ читается «сумма от m, равного нулю, до n».

Придавая индексу суммирования m значения $0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, получим развернутую запись формулы бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ \ldots\ + C_n^m a^{n-m} b^m + \ \ldots\ + C_n^n b^n, \quad (6)$$

или

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3} b^3 + \\ + \ \ldots\ + \frac{n(n-1)(n-2)\ \cdots\ (n-m+1)}{m!} a^{n-m} b^m + \ \ldots\ + b^n.$$

Последнее слагаемое записано с учетом того, что

$$C_n^n = C_n^{n-n} = C_n^0 = 1.$$

Формула бинома Ньютона может быть доказана методом математической индукции [11, гл. XI, § 2].

7. С помощью формулы бинома Ньютона выполнить возведение разности в степень:

$$(x^2 - y)^6.$$

Решение.

Согласно формуле (6),

$$(x^2-y)^6 = C_6^0(x^2)^6 + C_6^1(x^2)^5(-y) + C_6^2(x^2)^4(-y)^2 +$$
$$+C_6^3(x^2)^3(-y)^3 + C_6^4(x^2)^2(-y)^4 + C_6^5(x^2)^1(-y)^5 + C_6^6(x^2)^0(-y)^6 =$$
$$= C_6^0x^{12} - C_6^1x^{10}y + C_6^2x^8y^2 - C_6^3x^6y^3 + C_6^2x^4y^4 - C_6^1x^2y^5 + C_6^0y^6 =$$
$$= x^{12} - \frac{6}{1!}x^{10}y + \frac{6\cdot 5}{2!}x^8y^2 - \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3!}x^6y^3 + \frac{6\cdot 5}{2!}x^4y^4 - \frac{6}{1!}x^2y^5 + y^6 =$$
$$= x^{12} - 6x^{10}y + 15x^8y^2 - 20x^6y^3 + 15x^4y^4 - 6x^2y^5 + y^6.$$

8. Вычислить с помощью формулы бинома Ньютона :

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^5.$$

Ответ:

$$89\sqrt{3} - 109\sqrt{2}.$$

1.5 Сумма степеней натуральных чисел

Согласно формуле суммы членов арифметической прогрессии,

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ \cdots\ +n = \frac{1+n}{2}n.$$

9. Вывести формулу для суммы

$$\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Решение.

Рассмотрим тождество

$$(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1.$$

Запишем его при $a = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n$:

$$2^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1,$$

$$3^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1,$$

$$4^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1,$$

$$5^3 = 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(n+1)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1.$$

Сложим левые и правые части этих n равенств:

$$\begin{gathered} 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \\ = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \cdots + n^3 + \\ +3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \cdots + n^2) + \\ +3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n) + n \cdot 1. \end{gathered}$$

Выражения

$$2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \cdots + n^3$$

в правой и левой частях взаимно уничтожаются и остается соотношение

$$(n+1)^3 = 1 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n. \qquad (7)$$

Отсюда легко найти $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.

Обычно равенство (7) преобразуют так:

$$(n+1)^3 = (n+1) + \frac{3}{2} n(n+1) + 3\sum_{k=1}^{n} k^2,$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)\left((n+1)^2 - 1 - \frac{3}{2} n \right),$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)(n^2 + 2n - \frac{3}{2} n),$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)(n^2 + \frac{1}{2}n)$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)n}{6}. \qquad (8)$$

10. Считая известным соотношение (8), вывести формулу для суммы

$$\sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Ответ:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

1.6 Формула Эйлера

Формулой Эйлера называют равенство

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

где

$$\varphi \in \mathbb{R}, \; i^2 = -1.$$

11. Найти сумму функций

$$\sin x + 2\sin 2x + \; \dots \; + n\sin nx.$$

Решение.

Рассмотрим сумму

$$S = 1 + e^{ix} + e^{2ix} + \; \dots \; + e^{nix}.$$

Согласно формуле Эйлера,

$$S = 1 + \cos x + i\sin x + \cos 2x + i\sin 2x + \ \ldots \ + \cos nx + i\sin nx\,. \qquad (9)$$

В то же время S − сумма геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$, знаменателем $q = e^{ix}$ и числом членов, равным $n+1$. Для суммы m членов такой прогрессии справедлива формула

$$S_m = \frac{b_1(1 - q^m)}{1 - q}.$$

Поэтому

$$S = \frac{1 - e^{(n+1)ix}}{1 - e^{ix}}.$$

Найдем действительную часть данной функции. С этой целью используем формулу Эйлера:

$$S = \frac{1 - \cos(n+1)x - i\sin(n+1)x}{1 - \cos x - i\sin x}.$$

Числитель и знаменатель дроби умножим на величину, сопряженную знаменателю

$$S = \frac{(1 - \cos(n+1)x - i\sin(n+1)x)(1 - \cos x + i\sin x)}{(1 - \cos x)^2 + \sin^2 x}.$$

Отделим действительную часть от мнимой:

$$S = \frac{(1 - \cos(n+1)x)(1 - \cos x) + \sin(n+1)x\sin x}{2(1 - \cos x)} +$$
$$+ i\,\frac{(1 - \cos(n+1)x)\sin x - \sin(n+1)x(1 - \cos x)}{2(1 - \cos x)}.$$

Запишем действительную часть суммы S:

$$\operatorname{Re} S = \frac{(1 - \cos(n+1)x)(1 - \cos x) + \sin(n+1)x\sin x}{2(1 - \cos x)}.$$

Сравнивая $\operatorname{Re} S$ с действительной частью суммы S в форме (9), получим формулу для суммы косинусов:

$$\operatorname{Re} S = 1 + \cos x + \cos 2x + \ \dots \ + \cos nx =$$
$$= \frac{(1-\cos(n+1)x)(1-\cos x) + \sin(n+1)x \sin x}{2(1-\cos x)}.$$

Преобразуем последнюю дробь к более удобному виду. Раскроем скобки в числителе:

$$\operatorname{Re} S = \frac{1-\cos(n+1)x - \cos x + \cos x \cos(n+1)x + \sin(n+1)x \sin x}{2(1-\cos x)}.$$

Сгруппируем слагаемые:

$$\operatorname{Re} S = \frac{1-\cos x - \cos(n+1)x + \left(\cos(n+1)x \cos x + \sin(n+1)x \sin x\right)}{2(1-\cos x)}.$$

Преобразуем:

$$\operatorname{Re} S = \frac{2\sin^2 \dfrac{x}{2} - \cos(n+1)x + \cos\left((n+1)x - x\right)}{2(1-\cos x)} =$$

$$= \frac{2\sin^2 \dfrac{x}{2} - \cos(n+1)x + \cos nx}{2(1-\cos x)} =$$
$$= \frac{2\sin^2 \dfrac{x}{2} + \left(\cos nx - \cos(n+1)x\right)}{4\sin^2 \dfrac{x}{2}} =$$
$$= \frac{2\sin^2 \dfrac{x}{2} + 2\sin\left(\dfrac{nx+(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{(n+1)x-nx}{2}\right)}{4\sin^2 \dfrac{x}{2}} =$$

$$=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\sin\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{x}{2}+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Получим соотношение

$$1+\cos x+\cos 2x+\ \dots\ +\cos nx=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Умножая обе части этого равенства на -1 и дифференцируя их, найдем:

$$\sin x+2\sin 2x+\ \dots\ +n\sin nx=$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\cdot\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Задача решена, однако правой части можно придать более удобную форму. Раскроем первые скобки в числителе:

$$\sum_{k=1}^{n}k\sin kx=-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\left(n\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\cdot\sin\frac{x}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\cdot\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\cdot\cos\frac{x}{2}\right).$$

Запишем первое слагаемое по формуле для произведения синуса на косинус, а последние два как разность синусов (с коэффициентом $\frac{1}{2}$):

$$\sum_{k=1}^{n} k\sin kx = \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\frac{x}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}n\left(\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}-\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\sin nx-\frac{1}{2}n\left(\sin(n+1)x-\sin nx\right)}{2\sin^2\frac{x}{2}},$$

или

$$\sin x+2\sin 2x+\ \ldots\ +n\sin nx=\frac{(1+n)\sin nx-n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

12. С помощью формулы Эйлера доказать тождество

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}},\ \text{где}\ \ x\neq 2\pi n,\ n\in\mathbb{N}.$$

1.7 Критерий Коши

Определение. Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если для всякого положительного числа ε существует такое натуральное число N, что для любых положительных чисел m и n таких, что $m > N$ и $n > N$, справедливо неравенство

$$\left|x_m - x_n\right| < \varepsilon.$$

Теорема (критерий Коши). Для того чтобы числовая последовательность имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной ([4], гл. III, § 1, п. 3).

13. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится, если

$$x_n = 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ \cdots\ +\frac{1}{n!}.$$

Решение.

Будем считать, что n и m − натуральные числа и $m > n$. Тогда

$$x_m = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ \cdots \ + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \ \cdots \ + \frac{1}{m!}$$

и

$$|x_m - x_n| = \frac{1}{(n+1)!} + \ \cdots \ + \frac{1}{m!}.$$

Запишем равенства

$$\begin{gathered}(n+2)! = 1 \cdot 2 \ \cdots \ (n+1)(n+2) = (n+1)!(n+2), \\ (n+3)! = (n+1)!(n+2)(n+3), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m! = (n+1)!(n+2)(n+3) \ \cdots \ m.\end{gathered}$$

Поэтому

$$|x_m - x_n| = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!(n+2)} + \frac{1}{(n+1)!(n+2)(n+3)} + \ \cdots \ +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!(n+2)(n+3) \ \dots \ m} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ \cdots \ + \frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots m}\right).$$

Здесь

$$\begin{gathered}\frac{1}{(n+2)(n+3)} < \frac{1}{(n+2)(n+2)} = \frac{1}{(n+2)^2}, \\ \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} < \frac{1}{(n+2)(n+2)(n+2)} < \frac{1}{(n+2)^3}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{1}{(n+2)(n+3) \ \cdots \ m} < \frac{1}{(n+2)^{m-n-1}}.\end{gathered}$$

Последнее неравенство записано с учетом того, что число сомножителей в произведении

$$(n+2)(n+3)\ \cdots\ m$$

равно

$$m-(n+1)=m-n-1.$$

Получим соотношение

$$\left|x_m-x_n\right|<\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ \cdots\ +\frac{1}{(n+2)^{m-n-1}}\right).$$

Выражение в скобках представляет собой геометрическую прогрессию. Число ее членов равно $m-n$. Используя формулу для суммы геометрической прогрессии, найдем:

$$\left|x_m-x_n\right|<\frac{1}{(n+1)!}\frac{1-\left(\dfrac{1}{n+2}\right)^{m-n}}{1-\dfrac{1}{n+2}},$$

или

$$\left|x_m-x_n\right|<\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\dfrac{1}{n+2}}=\frac{n+2}{(n+1)!(n+1)}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\ \frac{n+2}{(n+1)!(n+1)}=0,$$

то для всякого $\varepsilon>0$ существует $N\in\mathbb{N}$ такое, что при $n>N$

$$\frac{n+2}{(n+1)!(n+1)}<\varepsilon.$$

Следовательно, когда $n>N$ и $m>n$, справедливо неравенство

$$\left|x_m-x_n\right|<\varepsilon.$$

Согласно критерию Коши, последовательность $\{x_n\}$ сходится.

14. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится, если

$$x_n = \frac{\sin 1^2}{2} + \frac{\sin 2^2}{2^2} + \frac{\sin 3^2}{2^3} + \cdots + \frac{\sin n^2}{2^n}.$$

1.8 Верхний и нижний пределы последовательности

Определение. Если из подмножества множества элементов последовательности $\{x_n\}$ составлена новая последовательность**,** причем порядок следования элементов в этой последовательности такой же, как в исходной, то полученная таким образом последовательность называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$.

Например, последовательность

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

содержит подпоследовательности

$$x_1,\ x_3,\ x_5,\ \ldots,\ x_{2n-1},\ \ldots,$$
$$x_2,\ x_4,\ x_6,\ \ldots,\ x_{2n},\ \ldots,$$
$$x_3,\ x_8,\ x_9,\ x_{14},\ x_{15},\ \ldots,\ x_{(-1)^n+3n+1},\ \ldots$$

и т. д.

Определение. Если подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ сходится, то предел указанной подпоследовательности называется частичным пределом последовательности $\{x_n\}$**.** Наибольший (наименьший) частичный предел последовательности $\{x_n\}$ называется ее верхним (нижним) пределом и обозначается

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \quad (\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n).$$

Теорема. Последовательность $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда она имеет верхний и нижний пределы и эти пределы совпадают, то есть когда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

[4, гл. III, § 1].

15. Найти верхний и нижний пределы последовательности $\{x_n\}$, где

$$x_n = (-1)^n. \tag{10}$$

Решение.

Задана последовательность

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \dots,\ (-1)^n,\ \dots$$

Рассмотрим ее подпоследовательности

$$1,\ 1,\ 1,\ \dots \tag{11}$$

и

$$-1,\ -1,\ -1,\ \dots \tag{12}$$

Обозначим эти последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$, где $u_n = 1$, $v_n = -1$ ($n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$).

Они имеют пределы:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 1,\ \lim_{n\to\infty} v_n = -1.$$

Данные пределы являются частичными пределами последовательности (10). При этом каждый элемент последовательности (10) принадлежит одной из последовательностей (11) или (12). Поэтому последовательность (10) не имеет других частичных пределов и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1,\ \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -1.$$

16. Найти верхний и нижний пределы последовательности $\{x_n\}$, где

$$x_n = \sin^2 \frac{\pi n}{2}.$$

Ответ: 1; 0.

17. Найти верхний и нижний пределы последовательности $\{x_n\}$, где

$$x_n = 1 + \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}+1}\cos\frac{\pi n}{2}. \qquad (13)$$

Решение.

Рассмотрим последовательность $\{y_n\}$, где $y_n = \cos\frac{\pi n}{2}$, то есть последовательность

$$0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ \cos\frac{\pi n}{2},\ \ldots$$

Таким образом, величина $y_n = \cos\frac{\pi n}{2}$ принимает три значения: $-1, 0, 1$.

В частности, $y_n = 0$ при

$$n = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots$$

Эти числа образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = 2$:

$$1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ 2m-1,\ \ldots$$

Значение $y_n = -1$ получается, когда

$$n = 2,\ 6,\ 10,\ \ldots,\ 4m-2,\ \ldots,$$

а $y_n = 1$ при

$$n = 4,\ 8,\ 12,\ \ldots,\ 4m,\ \ldots$$

Составим подпоследовательность $\{u_m\}$ последовательности (13), включив в эту подпоследовательность те элементы, в которых косинус равен нулю:

$$u_m = x_{2m-1} = 1 + \frac{2m-1}{2m}\cos\frac{\pi(2m-1)}{2} = 1.$$

Рассмотрим также подпоследовательности $\{v_m\}$, $\{w_m\}$ с косинусами, равными соответственно минус единице и единице:

$$v_m = x_{4m-2} = 1 + \frac{4m-2}{4m-1}\cos\frac{\pi(4m-2)}{2} = 1 - \frac{4m-2}{4m-1},$$

$$w_m = x_{4m} = 1 + \frac{4m}{4m+1}\cos\frac{4m\pi}{2} = 1 + \frac{4m}{4m+1}.$$

Здесь везде $m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

Последовательности $\{u_m\},\{v_m\},\{w_m\}$ содержат, соответственно, элементы

$$x_1,\ x_3,\ x_5,\ \ldots,\ x_{2m-1},\ \ldots \tag{14}$$

$$x_2,\ x_6,\ x_{10},\ \ldots,\ x_{4m-2},\ \ldots \tag{15}$$

$$x_4,\ x_8,\ x_{12},\ \ldots,\ x_{4m},\ \ldots \tag{16}$$

Пределы этих последовательностей

$$\lim_{m\to\infty} u_m = 1,\ \lim_{m\to\infty} v_m = 0,\ \lim_{m\to\infty} w_m = 2$$

являются частичными пределами последовательности (13). Других частичных пределов эта последовательность не имеет, так как каждый элемент данной последовательности содержится в одной из последовательностей (14), (15) или (16). Поэтому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 2,\ \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 0.$$

18. Найти верхний и нижний пределы последовательности $\{x_n\}$, где

$$x_n = \frac{n^2}{n^2+1}\sin\frac{\pi n}{4}.$$

Ответ: $1;\ -1$.

1.9 Признак существования предела

Теорема (Вейерштрасса**).** Ограниченная сверху возрастающая (неубывающая) последовательность сходится. Аналогично, сходится убывающая (невозрастающая) последовательность, ограниченная снизу. [7, гл. I, § 4, п. 4.5].

19. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится, если

$$x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6} + \ \cdots \ + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\ \cdots\ 2n}. \tag{17}$$

Решение.

Запишем x_n в виде

$$x_n = \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{2^2\cdot 1\cdot 2} + \frac{1}{2^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2^4\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ \cdots \ + \frac{1}{2^n\cdot n!}.$$

Учтем, что

$$\frac{1}{2^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3} < \frac{1}{2^3\cdot 1\cdot 2\cdot 2} = \frac{1}{2^3\cdot 2^2} = \frac{1}{2^5},$$
$$\frac{1}{2^4\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} < \frac{1}{2^4\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = \frac{1}{2^4\cdot 2^3} = \frac{1}{2^7},$$
$$\frac{1}{2^n n!} = \frac{1}{2^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ \cdots\ n} < \frac{1}{2^n\cdot 2^{n-1}} = \frac{1}{2^{2n-1}}.$$

Поэтому

$$x_n \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \ \cdots \ + \frac{1}{2^{2n-1}}.$$

Правая часть этого неравенства представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом $b_1 = \frac{1}{2}$ и знаменателем $q = \frac{1}{4}$; число членов равно n. Поэтому

$$x_n \le \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)}{1 - \frac{1}{4}} < \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3},$$

то есть последовательность (17) ограничена сверху.

Так как

$$x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6} + \ \cdots \ + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6 \ \cdots \ 2(n-1)} + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6 \ \cdots \ 2n}$$

и

$$x_{n-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6} + \ \cdots \ + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6 \ \cdots \ 2(n-1)},$$

то

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6 \ \cdots \ 2n} > 0.$$

Следовательно, ограниченная сверху последовательность (17) возрастает. Значит, она сходится.

20. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится, если

$$x_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+2} + \frac{1}{3^3+3} + \ \cdots \ + \frac{1}{3^n+n}.$$

1.10 Сходимость итерационного процесса

Если множество значений функции φ содержится в ее области определения $D \subset \mathbb{R}$ и $a_1 \in D$, то соотношения

$$x_1 = a_1,\ x_n = \varphi(x_{n-1}),\ n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots \tag{18}$$

задают числовую последовательность

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Вычисление ее элементов по формулам (18) называется итерационным процессом. Если полученная при этом последовательность имеет предел, то говорят, что итерационный процесс (18) сходится.

21. Последовательность $\{x_n\}$ задана соотношениями

$$x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}},\ x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

$$x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}\,,$$

где выражение, определяющее x_n, содержит n символов квадратного корня. Доказать, что данная последовательность сходится, и найти ее предел.

Решение.

Задан итерационный процесс

$$x_1 = \sqrt{2},\ x_n = \sqrt{2+x_{n-1}},\ n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

Так как

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ \cdots \ < x_n < \ \cdots\,,$$

то последовательность $\{x_n\}$ возрастает.

В то же время

$$x_1 = \sqrt{2} \le 2,\ x_2 = \sqrt{2+x_1} \le \sqrt{2+2} \le 2\,.$$

Если $x_{n-1} \le 2$, то

$$x_n = \sqrt{2+x_{n-1}} \le \sqrt{2+2} \le 2\,.$$

Согласно принципу математической индукции,

$$x_n \le 2 \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

то есть возрастающая последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху. По теореме Вейерштрасса, эта последовательность сходится.

Обозначим

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Так как

$$x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}\,,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+x_{n-1}}\,.$$

Поскольку функция $\sqrt{x}$ непрерывна,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2+\lim_{n\to\infty} x_{n-1}}\,,$$

или

$$a = \sqrt{2+a},$$
$$a^2 = 2 + a,$$
$$a = -1,\ a = 2.$$

Так как

$$x_n > 0 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

то

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geq 0,\ \ a = 2,\ \ \lim_{n\to\infty} x_n = 2.$$

22. Исследовать сходимость итерационного процесса

$$x_1 = \sqrt{6},\ x_n = \sqrt{6 + x_{n-1}} \quad (n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots)$$

и найти предел последовательности $\{x_n\}$.

Ответ: 3.

1.11 Вычисление предела последовательности

Классическая теорема о пределе суммы сформулирована в предположении, что число слагаемых постоянно и конечно. В противном случае необходимо предварительно преобразовать выражение под знаком предела так, чтобы были выполнены условия указанной теоремы.

23. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \ \cdots\ + (2n-1)^2}{n^3}.$$

Решение.

Представим каждое слагаемое числителя в виде, аналогичном последнему слагаемому, вычислим квадраты разности и сгруппируем отдельно первые и вторые степени:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ \cdots\ + (2n-1)^2 =$$
$$= 1^2 + (2\cdot 2 - 1)^2 + (2\cdot 3 - 1)^2 + (2\cdot 4 - 1)^2 \ \cdots\ + (2n-1)^2 =$$
$$= 1 + 2^2\cdot 2^2 - 2\cdot 2\cdot 2 + 1 + 2^2\cdot 3^2 - 2\cdot 2\cdot 3 + 1 +$$

$$+2^2\cdot 4^2-2\cdot 2\cdot 4+1+\ \cdots\ +2^2\cdot n^2-2\cdot 2\cdot n+1=$$
$$=n+2^2(2^2+3^2+4^2+\ \cdots\ +n^2)-4(2+3+4+\ \cdots\ +n).$$

Справедливы формулы

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{(n+1)(2n+1)n}{6},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1+n}{2}n.$$

Поэтому

$$1^2+3^2+5^2+\ \cdots\ +(2n-1)^2=$$
$$=n+2^2\cdot\left(\frac{(n+1)(2n+1)n}{6}-1\right)-4\cdot\left(\frac{1+n}{2}n-1\right)$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+5^2+\ \cdots\ +(2n-1)^2}{n^3}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^3}+2^2\cdot\left(\frac{(n+1)(2n+1)n}{6n^3}-\frac{1}{n^3}\right)-4\cdot\left(\frac{(1+n)n}{2n^3}-\frac{1}{n^3}\right)\right),$$

или

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+5^2+\ \cdots\ +(2n-1)^2}{n^3}=\frac{4}{3}.$$

24. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\ \cdots\ +n(n+1)}{n^3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

1.12 Равномерная непрерывность функции

Определение. Функция $f: X\to\mathbb{R}$ называется равномерно непрерывной на множестве X, если для всякого положительного числа ε можно указать такое положительное число δ, что для любых точек $x_1,\ x_2 \in X$ таких, что

$$\left|x_1 - x_2\right| < \delta,$$

справедливо неравенство

$$\left|f(x_1) - f(x_2)\right| < \varepsilon.$$

Сущность равномерной непрерывности заключается в следующем. Пусть функция f непрерывна на некотором промежутке X. Тогда для всякого x_0 из этого промежутка и для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такую δ-окрестность точки x_0, что для любой точки $x \in X$ из указанной окрестности

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon. \tag{19}$$

При этом для различных точек x_0 в общем случае получаются различные значения δ. Если же для функции f и данного промежутка существует единое число $\delta > 0$ такое, что для любого $x_0 \in X$ из неравенства

$$\left|x - x_0\right| < \delta$$

следует (19), то функция f считается равномерно непрерывной на рассматриваемом промежутке.

Согласно определению равномерной непрерывности, функция f не является равномерно непрерывной на множестве $X \subset \mathbb{R}$, если можно указать $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ можно найти $x_1,\ x_2 \in X$, для которых выполняются неравенства

$$\left|x_1 - x_2\right| < \delta$$

и

$$\left|f(x_1) - f(x_2)\right| \ge \varepsilon.$$

Теорема (Кантора)**.** Если функция f непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то она равномерно непрерывна на этом отрезке [4, т. I, гл. IV, § 2].

Доказать, что функция f равномерно непрерывна на указанном множестве (задачи **25** – **28**):

25. $f(x) = x^2,\ x \in [0,\ 1]$**.**

Решение.

Функция f непрерывна на отрезке $[0,\ 1]$. Согласно теореме Кантора, f равномерно непрерывна на этом отрезке.

26. $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x},\ x \in \left[\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

27. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x},\ x \in (0,\ 1)$.

Решение.

Рассмотрим функцию

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \text{ если } x \in (0,\ 1], \\ 1, \text{ если } x = 0. \end{cases}$$

На промежутке $(0\ ,1]$ она совпадает с функцией, заданной выражением

$$\frac{\sin x}{x}.$$

Последняя непрерывна на указанном промежутке. Поэтому F также непрерывна на множестве $(0\ ,1]$.

Вычислим

$$\lim_{x \to 0} F(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \to 0} F(x) = F(0),$$

то есть функция F непрерывна в точке $x = 0$.

Так как F непрерывна на промежутке $(0\ ,1]$ и в точке $x = 0$, то эта функция непрерывна на отрезке $[0,\ 1]$. Следовательно, она равномерно непрерывна на этом отрезке.

При этом функция F равномерно непрерывна на всяком подмножестве данного отрезка, в частности на интервале $(0,\ 1)$. На этом интервале F совпадает с функцией f. Значит, f равномерно непрерывна на указанном интервале.

28. $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x},\ x\in(0,\ 1)$.

Доказать, что функция f не является равномерно непрерывной на указанном множестве (задачи **29** – **30**).

29. $f(x)=\ln x,\ x\in(0,\ 1)$.

Решение.

Зададим $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$ и рассмотрим точки

$$x_n=e^{-n},\ y_n=e^{-(n+1)},\ n\in\mathbb{N}.$$

Тогда

$$x_n-y_n=\frac{1}{e^n}-\frac{1}{e^{n+1}}=\frac{e-1}{e^{n+1}}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0.$$

Таким образом, для всякого $\delta>0$ можно найти такое n, что

$$|x_n-y_n|<\delta.$$

При этом

$$|f(x_n)-f(y_n)|=\left|\ln e^{-n}-\ln e^{-(n+1)}\right|=1>\varepsilon.$$

Следовательно, $f(x)$ не является равномерно непрерывной на интервале $(0,\ 1)$.

30. $f(x)=\dfrac{1}{x},\ x\in(0,\ 1)$.

Указание. Рассмотрите точки

$$x_n=\frac{1}{n},\ y_n=\frac{1}{n+1}.$$

2 ПРОИЗВОДНЫЕ

2.1 Односторонние производные

Функция $\operatorname{sgn} x$ определяется следующей формулой:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0, \\ 0, \text{ если } x = 0, \\ -1, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Используется также обозначение $\operatorname{sign} x$. В обоих случаях читается «сигнум x» (от латинского signum – знак).

Символы $[x]$ или $E(x)$ читаются «целая часть числа x». Это наибольшее целое число, не превосходящее x.

Найти односторонние производные функции f в указанной точке (задачи 31 – **34):**

31. $f(x) = \operatorname{sgn} x \cdot (e^x - 1)$, $x = 0$.

Решение.

Согласно определению функции $\operatorname{sgn} x$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^x, \text{ если } x < 0, \\ 0, \text{ если } x = 0, \\ e^x - 1, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

При вычислении левой производной $f'_-(0)$ приращение аргумента $\Delta x < 0$ и $f(\Delta x) = 1 - e^{\Delta x}$. Поэтому

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{1 - e^{\Delta x}}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \to -0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Так как при $\alpha \to 0$

$$e^{\alpha} - 1 \sim \alpha,$$

то $f'_-(0) = -1$.

Аналогично, правая производная

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1.$$

32. $f(x) = \operatorname{sgn} x \cdot ((x-1)^2 - 1)$, $x = 0$.

Ответ: $f'_-(0) = 2$, $f'_+(0) = -2$.

33. $f(x) = [x] \cdot \sin \pi x$, $x = 2$.

Решение.

Рассмотрим окрестность $(1,\ 3)$ точки $x = 2$. По определению целой части числа, на этой окрестности

$$[x] = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in (1,\ 2), \\ 2, \text{ если } x \in [2,\ 3). \end{cases}$$

Поэтому

$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, \text{ если } x \in (1,\ 2), \\ 0, \text{ если } x = 2, \\ 2 \sin \pi x, \text{ если } x \in (2,\ 3) \end{cases}$$

и

$$f'_-(2) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\sin \pi(2 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\sin \pi \Delta x}{\Delta x} = \pi.$$

$$f'_+(2) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{2 \sin \pi(2 + \Delta x)}{\Delta x} = 2\pi.$$

34. $f(x) = [x] \cdot (x^2 - 3x)$, $x = 3$.

Ответ: $f'_-(3) = 6$, $f'_+(3) = 9$.

2.2 Дифференцируемость функции в точке

Теорема. Если функция f дифференцируема в точке a, то указанная функция непрерывна в данной точке [10, гл. III, §4].

Теорема. Функция f дифференцируема в точке a в том и только в том случае, если в этой точке существуют левая $f'_-(a)$ и правая $f'_+(a)$ производные и если при этом

$$f'_-(a)=f'_+(a).$$

[6, гл. 5, § 1].

Поэтому условия дифференцируемости функции f в точке a можно записать в виде:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a), \\ f'_-(a)=f'_+(a), \end{cases}$$

где

$$f'_-(a)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x},$$

$$f'_+(a)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}.$$

35. При каких значениях a и b функция f имеет производную в точке x_0, если

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ при } x\le x_0, \\ ax+b \text{ при } x>x_0. \end{cases} \qquad (20)$$

Решение.

Рассмотрим три величины

$$f(x_0)=x_0^2,$$

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0-0} x^2=x_0^2$$

и

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0}(ax+b)=ax_0+b.$$

Они равны, то есть функция f непрерывна, если

$$ax_0 + b = x_0^2. \tag{21}$$

Выясним условие равенства односторонних производных в точке x_0. Левая производная:

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{x_0{}^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = 2x_0.$$

Правая:

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{a(x_0 + \Delta x) + b - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{(ax_0 + b) + a\Delta x - x_0^2}{\Delta x},$$

или, с учетом (21),

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{x_0^2 + a\Delta x - x_0^2}{\Delta x} = a.$$

Должно выполняться равенство

$$f'_{-}(x_0) = f'_{+}(x_0),$$

то есть

$$2x_0 = a. \tag{22}$$

Из условий (21) и (22) следует, что

$$b = x_0^2 - ax_0 = x_0^2 - 2x_0^2 = -x_0^2.$$

Таким образом, функция (20) дифференцируема в точке x_0, если

$$a = 2x_0, \;\; b = -x_0^2.$$

36. При каких соотношениях между параметрами a, b, c, d функция

$$f(x)=\begin{cases} ax+b, \text{ если } x \ge x_0, \\ cx+d, \text{ если } x < x_0 \end{cases}$$

имеет производную в точке x_0?

Ответ: $a=c,\ b=d$.

37. Непрерывна ли функция

$$f(x)=\begin{cases} \ln(1+x)\cdot\sin\dfrac{1}{x}, \text{ если } x \ne 0, \\ 0, \text{ если } x=0 \end{cases}$$

в точке $x=0$? Является ли она дифференцируемой в этой точке? Найдите значение производной в указанной точке, если оно существует.

Решение.

Функция $\sin\dfrac{1}{x}$ ограничена, а $\ln(1+x)\to 0$ при $x\to 0$.
Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)\cdot\sin\frac{1}{x}=0.$$

Так как на проколотой окрестности точки $x=0$

$$f(x)=\ln(1+x)\cdot\sin\frac{1}{x},$$

то

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0).$$

Следовательно, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=0$.
Производную в этой точке вычислим по определению:

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(1+\Delta x)\cdot\sin\dfrac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x},$$

или

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}\right).$$

Так как

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}=1,$$

а функция $\sin\dfrac{1}{\Delta x}$ на любой окрестности начала координат принимает все значения из отрезка $[-1,\ 1]$, то $f'(0)$ не существует и $f(x)$ не дифференцируема в точке $x=0$.

38. Непрерывна ли функция

$$f(x)=\begin{cases}(e^{x^2}-1)\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0\end{cases}$$

в точке $x=0$? Является ли эта функция дифференцируемой в данной точке? Найдите значение производной $f'(0)$, если оно существует.

Ответ: Да, да, $f'(0)=0$.

2.3 Производная, имеющая точку разрыва.

Теорема. Если функция дифференцируема на некотором промежутке, то производная этой функции не имеет на указанном промежутке точек разрыва первого рода [15, т. I, п. 113].

39. Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0\end{cases}$$

дифференцируема на всей числовой оси и исследовать непрерывность производной этой функции.

Решение.

Производную в начале координат найдем по определению:

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\cdot\sin\dfrac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}.$$

Так как

$$\left|\sin\frac{1}{\Delta x}\right|\le 1,$$

то есть функция $\sin\dfrac{1}{\Delta x}$ ограничена, то $f'(0)=0$.

В остальных точках производная вычисляется по обычным формулам дифференцирования элементарных функций:

$$\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Поэтому

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x},\ \text{если } x\ne 0,\\ 0,\ \text{если } x=0.\end{cases}$$

Таким образом, функция f дифференцируема на всей числовой оси.

При $x\ne 0$ производная $f'(x)$ совпадает с элементарной функцией

$$y=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},$$

определенной и поэтому непрерывной при указанном условии. Следовательно, $f'(x)$ непрерывна при $x\ne 0$.

Чтобы проверить непрерывность производной в начале координат, рассмотрим ее односторонние пределы в этой точке. Вычислим предел справа:

$$\lim_{x\to+0} f'(x)=\lim_{x\to+0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right).$$

Первое слагаемое в скобках стремится к нулю, второе не имеет предела. Поэтому $\lim\limits_{x\to+0} f'(x)$ не существует. Аналогично, в точке $x=0$ не существует предел производной слева. Следовательно, для функции $f'(x)$ точка $x=0$ является точкой разрыва второго рода, что согласуется с теоремой, приведенной в начале данного параграфа.

40. Выяснить, дифференцируема ли функция

$$f(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x}, \text{ если } x\neq 0,\\ 0, \text{ если } x=0\end{cases}$$

на всей числовой оси. Есть ли у производной этой функции точки разрыва?

Ответ: Да, нет.

2.4 Формула Лейбница

Теорема. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в некоторой точке производные порядка n, то в этой точке

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, u^{(n-k)}v^{(k)},$$

где $u^{(0)}=u$, $v^{(0)}=v$.

Это соотношение называется формулой Лейбница. Формально она получится, если разложить выражение $(u+v)^n$ по формуле Ньютона и затем показатели степени величин u и v заключить в скобки, превратив их в символы порядка производных. Кроме того, при этом следует считать, что первый и последний члены указанного разложения записаны в виде $u^n v^0$ и $u^0 v^n$.

Формула Лейбница может быть доказана методом математической индукции [7, гл. I, § 10, п. 10.2].

41. Найти $y^{(15)}$, если

$$y = (x^2 + x + 1)\sin x.$$

Решение.

По формуле Лейбница,

$$\begin{gathered} y^{(15)} = C_{15}^0 (\sin x)^{(15)} \cdot (x^2 + x + 1) + C_{15}^1 (\sin x)^{(14)} \cdot (x^2 + x + 1)' + \\ + C_{15}^2 (\sin x)^{(13)} \cdot (x^2 + x + 1)''. \end{gathered} \tag{23}$$

Остальные слагаемые формулы Лейбница в данном случае равны нулю.

Вычислим производные от функции $\sin x$:

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\sin x)'' = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\sin x)''' = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\sin x)^{(4)} = \cos x = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Пусть

$$(\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Тогда

$$(\sin x)^{(k+1)} = \cos\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right),$$

то есть

$$(\sin x)^{(k+1)} = \sin\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Согласно принципу математической индукции,

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

где $n\in\mathbb{N}$. Поэтому

$$(\sin x)^{(13)}=\sin\left(x+13\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\cos x,$$

$$(\sin x)^{(14)}=\sin\left(x+14\cdot\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x,$$

$$(\sin x)^{(15)}=\sin\left(x+15\cdot\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x.$$

Подставим в формулу (23):

$$y^{(15)}=-\cos x\cdot(x^2+x+1)-15\sin x\cdot(2x+1)+\frac{15\cdot 14}{2!}\cos x\cdot 2=$$
$$=-\cos x\cdot(x^2+x+1)-15\sin x\cdot(2x+1)+210\cos x,$$

или

$$y^{(15)}=-(x^2+x-209)\cos x-15(2x+1)\sin x.$$

42. Найти $y^{(n)}$, если

$$y=x\cos x.$$

Ответ:

$$y^{(n)}=x\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)+n\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right).$$

2.5 Производные высших порядков от рациональных функций

Теорема. Пусть $Q(x)$ – многочлен степени не выше $n-1$, a_1, a_2, $\cdots$, a_n – заданные постоянные и $a_i\neq a_j$, если $i\neq j$ $(i, j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Тогда рациональную функцию

$$f(x)=\frac{Q(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ \cdots\ (x-a_n)}$$

можно представить в виде следующей суммы дробей:

$$f(x)=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ \cdots\ +\frac{A_n}{x-a_n},$$

где $A_1,\ A_2,\ \cdots\ ,\ A_n$ − постоянные, [10, гл. X, § 8].

43. Найти производную $y^{(n)}$, если

$$y=\frac{1}{x^2-3x+2}.$$

Решение.

Представим данную функцию в виде суммы дробей:

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}.$$

Приведем правую часть к общему знаменателю

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}.$$

Так как знаменатели равных дробей совпадают, то числители должны быть равны:

$$1=A(x-2)+B(x-1).$$

Подставляя в последнее равенство $x=1$, получим $A=-1$, при $x=2$ найдем $B=1$. Заданная функция примет вид:

$$y=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}.$$

Вычислим производные

$$y'=-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x-1)^2},$$

$$y''=\frac{2}{(x-2)^3}-\frac{2}{(x-1)^3},$$

$$y''' = -\frac{2\cdot 3}{(x-2)^4} + \frac{2\cdot 3}{(x-1)^4},$$

$$y^{(4)} = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(x-2)^5} - \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(x-1)^5}.$$

Предположим, что

$$y^{(k)} = (-1)^k \frac{k!}{(x-2)^{k+1}} + (-1)^{k+1} \frac{k!}{(x-1)^{k+1}}.$$

Тогда

$$y^{(k+1)} = (-1)^{k+1} \frac{k!(k+1)}{(x-2)^{k+2}} + (-1)^{k+2} \frac{k!(k+1)}{(x-1)^{k+2}},$$

или

$$y^{(k+1)} = (-1)^{k+1} \frac{(k+1)!}{(x-2)^{(k+1)+1}} + (-1)^{(k+1)+1} \frac{(k+1)!}{(x-1)^{(k+1)+1}}.$$

Таким образом, из справедливости формулы

$$y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x-2)^{n+1}} + (-1)^{n+1} \frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$$

при $n = k$ следует, что она верна при $n = k+1$. Так как эта формула верна и при $n = 1$, то, согласно принципу математической индукции, она справедлива при любом $n \in \mathbb{N}$.

44. Найти производную $y^{(n)}$, если

$$y = \frac{1}{x^2-4}.$$

Ответ:

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{4}\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right).$$

3 ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.1 Предел

Определение. Число A называется пределом функции

$$f: D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^2$$

по множеству $X \subset D$ в точке $(x_0,\ y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех точек $(x,\ y) \in X$, удовлетворяющих условию

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$

выполняется неравенство

$$\left| f(x,\ y) - A \right| < \varepsilon.$$

Это записывается

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ (x,\ y) \in X}} f(x,\ y) = A. \tag{24}$$

Если Γ – непрерывная кривая, проходящая через точку $(x_0,\ y_0)$, и $X = \Gamma$, то предел (24) называется пределом функции f по кривой Γ в точке $(x_0,\ y_0)$.

Если множество X содержит проколотую окрестность точки $(x_0,\ y_0)$, то соотношение (24) записывают в виде

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,\ y) = A.$$

Если этот предел существует и равен A, то для всякой непрерывной кривой Γ, проходящей через точку $(x_0,\ y_0)$,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ (x,\ y) \in \Gamma}} f(x,\ y) = A.$$

45. Выяснить существование предела $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,\, y)$,

если

$$f(x,\, y) = \frac{xy}{x^2 + 3y^2}.$$

Решение.

Вычислим предел функции f по прямой Γ, заданной уравнением $y = kx$, где k – постоянная. На этой прямой

$$f(x,\, y) = \frac{kx^2}{x^2 + 3k^2x^2} = \frac{k}{1+3k^2},$$

то есть f постоянна, и ее предел по такой прямой

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,\, y)\in\Gamma}} f(x,\, y) = \frac{k}{1+3k^2}.$$

Например, по прямой Γ_1, заданной уравнением $y = x$, то есть при $k = 1$, функция f имеет предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,\, y)\in\Gamma_1}} f(x,\, y) = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4},$$

а по прямой Γ_2, имеющей уравнение $y = 2x$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,\, y)\in\Gamma_2}} f(x,\, y) = \frac{2}{13}.$$

Таким образом, на различных прямых, проходящих через начало координат, значения предела функции f не совпадают. Это означает, что предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = \frac{xy}{x^2+3y^2}$$

не существует.

46. Выяснить, существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$,

если

$$f(x, y) = \sin\frac{\pi x^2}{x^2+y^2}.$$

Ответ: Нет.

3.2 Дифференцирование неявных функций

Пусть задана система уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Считают, что эта система неявно задает функции

$$\begin{gathered} y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{gathered} \tag{26}$$

если при подстановке данных функций в каждое из уравнений системы (25) все эти уравнения обращаются в тождества.

Справедлива теорема существования функций (26), неявно заданных системой (25) ([8], гл. 4, § 41, п. 41.3). Эта теорема аналогична теореме существования функции, неявно заданной одним уравнением. В дальнейшем будем предполагать, что вычисления выполняются в области, где для системы вида (25) выполнены все условия указанной теоремы.

47. Найти

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y},$$

если

$$\begin{cases} xu - yv = 0, \\ yu + xv = 1. \end{cases}$$

Решение.

Вычислим дифференциалы левых и правых частей данных уравнений:

$$\begin{cases} u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u - v\mathrm{d}y - y\mathrm{d}v = 0, \\ u\mathrm{d}y + y\mathrm{d}u + v\mathrm{d}x + x\mathrm{d}v = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x\mathrm{d}u - y\mathrm{d}v = -u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y, \\ y\mathrm{d}u + x\mathrm{d}v = -v\mathrm{d}x - u\mathrm{d}y. \end{cases}$$

Решим эту систему относительно дифференциалов $\mathrm{d}u$ и $\mathrm{d}v$, например, по правилу Крамера. Вычислим определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 + y^2,$$

$$\Delta_u = \begin{vmatrix} -u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y & -y \\ -v\mathrm{d}x - u\mathrm{d}y & x \end{vmatrix} =$$

$$= -ux\mathrm{d}x + vx\mathrm{d}y - vy\mathrm{d}x - uy\mathrm{d}y =$$
$$= (-ux - vy)\mathrm{d}x + (vx - uy)\mathrm{d}y,$$

$$\Delta_v = \begin{vmatrix} x & -u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y \\ y & -v\mathrm{d}x - u\mathrm{d}y \end{vmatrix} = (-vx + uy)\mathrm{d}x + (-ux - vy)\mathrm{d}y.$$

Получим дифференциалы

$$\mathrm{d}u = \frac{-ux - vy}{x^2 + y^2}\mathrm{d}x + \frac{vx - uy}{x^2 + y^2}\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}v=\frac{-vx+uy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{-ux-vy}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

и производные

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-ux-vy}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{vx-uy}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-vx+uy}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{-ux-vy}{x^2+y^2}.$$

48. Найти

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y},$$

если

$$\begin{cases} u+v=x+y, \\ \dfrac{\sin u}{\sin v}=\dfrac{x}{y}. \end{cases}$$

Ответ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x\cos v+\sin v}{x\cos v+y\cos u},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x\cos v-\sin u}{x\cos v+y\cos u},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y\cos u-\sin v}{x\cos v+y\cos u},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{y\cos u+\sin u}{x\cos v+y\cos u}.$$

3.3 Дифференцирование параметрически заданных функций

Пусть функция $z=f(x,\ y)$ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x=x(u,\ v), \\ y=y(u,\ v), \\ z=z(u,\ v). \end{cases}$$

Чтобы найти производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, продифференцируем левые и правые части уравнений данной системы:

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v, \tag{27}$$

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v, \tag{28}$$

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v. \tag{29}$$

Здесь коэффициенты при $\mathrm{d}u$ и $\mathrm{d}v$ представляют собой функции от параметров u и v.

Решим систему уравнений (27) − (28) относительно $\mathrm{d}u$ и $\mathrm{d}v$, выразив их через $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$. Это возможно, если в области, где выполняются вычисления, определитель

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

В результате решения указанной системы дифференциалы $\mathrm{d}u$ и $\mathrm{d}v$ будут представлены как линейные функции переменных $\mathrm{d}x$ и $\mathrm{d}y$ с коэффициентами, зависящими от u и v:

$$\mathrm{d}u = A_1(u,v)\mathrm{d}x + B_1(u,v)\mathrm{d}y,$$
$$\mathrm{d}v = A_2(u,v)\mathrm{d}x + B_2(u,v)\mathrm{d}y.$$

Подставляя $\mathrm{d}u$ и $\mathrm{d}v$ в (29), получим полный дифференциал в форме

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial u}A_1(u,v)\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial u}B_1(u,v)\mathrm{d}y + \frac{\partial z}{\partial v}A_2(u,v)\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial v}B_2(u,v)\mathrm{d}y =$$
$$= \left(A_1(u,v)\frac{\partial z}{\partial u} + A_2(u,v)\frac{\partial z}{\partial v}\right)\mathrm{d}x + \left(B_1(u,v)\frac{\partial z}{\partial u} + B_2(u,v)\frac{\partial z}{\partial v}\right)\mathrm{d}y$$

или

$$\mathrm{d}z = z'_x(u,\ v)\mathrm{d}x + z'_y(u,\ v)\mathrm{d}y.$$

Тем самым искомые производные будут определены как функции параметров u и v.

49. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ при $u=1,\ v=1$, если

$$\begin{cases} x = u + \ln v, \\ y = v - \ln u, \\ z = 2u + v. \end{cases}$$

Решение.

Продифференцируем левые и правые части уравнений заданной системы:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \mathrm{d}u + \dfrac{\mathrm{d}v}{v}, \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}v - \dfrac{\mathrm{d}u}{u}, \\ \mathrm{d}z = 2\mathrm{d}u + \mathrm{d}v. \end{cases} \tag{30}$$

При $u=1,\ v=1$ система (30) принимает вид:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v, \\ \mathrm{d}y = -\mathrm{d}u + \mathrm{d}v, \\ \mathrm{d}z = 2\mathrm{d}u + \mathrm{d}v. \end{cases} \tag{31}$$

В данном случае определитель

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

вычисленный в указанной точке, – это определитель, составленный из коэффициентов при $\mathrm{d}u,\ \mathrm{d}v$ в первых двух уравнениях системы (31):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Разрешим эти уравнения относительно $\mathrm{d}u$ и $\mathrm{d}v$:

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x - \mathrm{d}y}{2}, \ \mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{2}.$$

Подставим данные значения в последнее уравнение системы (31):

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x - \mathrm{d}y + \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{2}.$$

Получим полный дифференциал

$$\mathrm{d}z = \frac{3}{2}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\mathrm{d}y$$

и производные:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{u=1,\ v=1} = \frac{3}{2}, \ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{u=1,\ v=1} = -\frac{1}{2}.$$

50. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ при $u = 2,\ v = 1$, если

$$\begin{cases} x = u + v^2, \\ y = u^2 - v^3, \\ z = 2uv. \end{cases}$$

Ответ: 2; 0.

3.4 Полные дифференциалы высших порядков

Теорема. Если функция $z = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ имеет непрерывные производные порядка m, то полный дифференциал $\mathrm{d}^m z$ может быть вычислен по формуле

$$\mathrm{d}^m z = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathrm{d}x_2 + \ \ldots \ + \frac{\partial}{\partial x_n} \mathrm{d}x_n \right)^m z\,. \qquad (32)$$

Здесь

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1 \right)^m z = \frac{\partial^m z}{\partial x_1^m} \mathrm{d}x_1^m,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1 \right)^{k_1} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \mathrm{d}x_2 \right)^{k_2} z = \frac{\partial^{k_1+k_2} z}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} \mathrm{d}x_1^{k_1} \mathrm{d}x_2^{k_2}$$

и т. д.

[8, гл. 4, § 38, п. 38.2].

51. Найти $\mathrm{d}^3 z$, если $z = x^2 y$.

Решение.

В данном случае формула (32) принимает вид

$$\mathrm{d}^3 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{d}y \right)^3 z\,,$$

или

$$\mathrm{d}^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \mathrm{d}x^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}y + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \mathrm{d}y^3. \qquad (33)$$

Вычислим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy\,, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y\,, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 0\,, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 2\,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2\,, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0\,, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0\,, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 0$$

и подставим их в (33):

$$\mathrm{d}^3 z = 6 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}y\,.$$

52. Найти $\mathrm{d}^4 z$, если

$$z = \cos(x + y)$$

Ответ: $\cos(x + y)(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)^4$.

3.5 Зависимость функций

Определение. Пусть функции

$$\begin{gathered} y_1 = f_1(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = f_m(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) \end{gathered} \qquad (34)$$

определены в области $D \in \mathbb{R}^n$. Функция

$$y_k = f_k(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) \quad (1 \le k \le m)$$

называется зависимой от остальных функций системы (34), если y_k можно представить в виде

$$y_k = \varphi(y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_{k-1},\ y_{k+1},\ \dots,\ y_m),$$

то есть

$$f_k(x_1,\ \dots,\ x_n) =$$
$$= \varphi(f_1(x_1,\ \dots,\ x_n),\ \dots,\ f_{k-1}(x_1,\ \dots,\ x_n), f_{k+1}(x_1,\ \dots,\ x_n),\ \dots,\ f_m(x_1,\ \dots,\ x_n)),$$

где φ − некоторая функция.

Функции (34) называются зависимыми в области D, если одна из этих функций зависит от остальных. Если ни одна из функций (34) не зависит от остальных, то эти функции называются независимыми в области D.

Пример. Рассмотрим функции

$$\begin{gathered} y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ y_3 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3, \end{gathered} \qquad (35)$$

где $(x_1,\ x_2,\ x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Вычислим

$$y_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

В каждой точке пространства $\mathbb{R}^3$ справедливо равенство

$$y_2 = y_1^2 - 2y_3,$$

то есть функции (35) зависимы в $\mathbb{R}^3$.

Теорема. Если функции (34) имеют непрерывные частные производные

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \quad (i = 1, \ \ldots \ , \ n, \ k = 1, \ \ldots \ , \ m)$$

в некоторой окрестности точки $M_0 \in \mathbb{R}^n$ и в этой точке ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

равен m, то функции (34) независимы в указанной окрестности [8, гл. 4, § 42].

Доказать, что заданные функции независимы в некоторой окрестности указанной точки (задачи **53** $-$ **54**):

53.
$$y_1 = \sin(x_1x_2x_3),$$
$$y_2 = x_1 \cos x_2,$$

точка $(1, \ 0, \ 1)$.

Решение. Функции $y_1, \ y_2$ имеют непрерывные частные производные в $\mathbb{R}^3$. Запишем матрицу

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_2 x_3 \cos(x_1 x_2\ x_3) & x_1 x_3 \cos(x_1 x_2\ x_3) & x_1 x_2 \cos(x_1 x_2\ x_3) \\ \cos x_2 & -x_1 \sin x_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

В точке $(1,\ 0,\ 1)$ она принимает вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг данной матрицы равен двум, то есть числу заданных функций. Следовательно, эти функции независимы в окрестности точки $(1,\ 0,\ 1)$.

54.
$$y_1 = xy,$$
$$y_2 = \frac{x}{y},$$
точка (1, 1).

3.6 Экстремум

Определение. Квадратичная форма

$$K(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \qquad (36)$$

называется положительно (отрицательно) определенной, если для всякого ненулевого вектора $(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ справедливо неравенство

$$K(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) > 0 \quad \left(K(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) < 0\right).$$

Квадратичная форма (36) называется знакопеременной, если существуют такие два вектора $(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ и $(y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n)$, что

$$K(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0,\ K(y_1, y_2, \dots, y_n) < 0.$$

Теорема (критерий Сильвестра**).** Для того чтобы квадратичная форма (36) была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры матрицы этой формы были положительны, то есть

$$a_{11} > 0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0,\ \dots,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Для того чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $a_{11} < 0$ и знаки угловых миноров чередовались [5, гл. 7, § 4, п. 3].

Теорема. Пусть функция $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности точки $M_0(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и M_0 − стационарная точка функции f. Если при этом квадратичная форма

$$K(\mathrm{d}x_1,\ \mathrm{d}x_2,\ \dots,\ \mathrm{d}x_n) = \mathrm{d}^2 f(M_0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_j} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j$$

положительно определенная, то M_0 − точка минимума функции f; если отрицательно определенная, то это − точка максимума. Если указанная квадратичная форма знакопеременная, то в точке M_0 экстремума нет [8, гл. 4, § 40, п. 40.2].

Таким образом, здесь полный дифференциал второго порядка $\mathrm{d}^2 f$, вычисленный в стационарной точке M_0, рассматривается как квадратичная форма относительно переменных $\mathrm{d}x_i$ $(i = 1,\ 2,\ \dots,\ n)$.

55. Исследовать на экстремум функцию

$$u = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2. \tag{37}$$

Решение.

Вычислим частные производные:

$$u_x = 4x - y + 2z,$$
$$u_y = -x - 1 + 3y^2,$$
$$u_z = 2x + 2z.$$

Приравнивая каждую из них нулю, получим систему уравнений, определяющую критические точки:

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 0, \\ -x + 3y^2 = 1, \\ x + z = 0. \end{cases}$$

Решим эту систему. Из третьего уравнения найдем:

$$z = -x.$$

С учетом этого из первого получим:

$$y = 2x.$$

Подставим во второе уравнение:

$$-x + 12x^2 = 1,$$

или

$$12x^2 - x + 1 = 0.$$

Решим это уравнение:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{24}, \; x_1 = \frac{1}{3}, \; x_2 = -\frac{1}{4}.$$

Затем найдем значения остальных неизвестных:

$$y_1 = \frac{2}{3}, \; y_2 = -\frac{1}{2}, \; z_1 = -\frac{1}{3}, \; z_2 = \frac{1}{4}.$$

Получили две критические точки

$$M_1\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right),\ M_2\left(-\frac{1}{4},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right).$$

Вычислим частные производные второго порядка:

$$\begin{aligned} &u_{xx}=4,\ \ u_{xy}=-1,\ u_{xz}=2,\\ &u_{yx}=-1,\ u_{yy}=6y,\ u_{yz}=0,\\ &u_{zx}=2,\ \ u_{zy}=0,\ \ \ u_{zz}=2. \end{aligned}$$

Запишем полный дифференциал второго порядка

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2u=4\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\ &2\mathrm{d}x\mathrm{d}z-\\ -\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\ 6y\mathrm{d}y^2+0\cdot\mathrm{d}y\mathrm{d}z&+\\ +2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+0\cdot\mathrm{d}z\mathrm{d}y\ \ \ &+2\mathrm{d}z^2. \end{aligned}$$

Найдем его в точке M_1:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2u(M_1)=4\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\ &2\mathrm{d}x\mathrm{d}z-\\ -\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\ 4\mathrm{d}y^2+0\cdot\mathrm{d}y\mathrm{d}z&+\\ +2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+0\cdot\mathrm{d}z\mathrm{d}y\ \ \ &+2\mathrm{d}z^2. \end{aligned}$$

Это квадратичная форма относительно переменных $\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y,\ \mathrm{d}z$. Ее матрица:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2\\ -1 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Угловые миноры данной матрицы:

$$4>0,\ \ \begin{vmatrix} 4 & -1\\ -1 & 4 \end{vmatrix}=15>0,\ \ \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2\\ -1 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0\\ -1 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=14>0.$$

Здесь второй из определителей третьего порядка получается вычитанием последней строки предыдущего определителя из первой.

Согласно признаку Сильвестра, дифференциал $\mathrm{d}^2u(M_1)$ представляет собой положительно определенную квадратичную форму относительно $\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y,\ \mathrm{d}z$. Следовательно, M_1 есть точка минимума функции (37):

$$u_{\min} = u\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right) = -\frac{13}{27}.$$

Матрица квадратичной формы $\mathrm{d}^2u(M_2)$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ее угловые миноры:

$$4 > 0,\quad \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -13 < 0,\quad \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -14 < 0.$$

Условия критерия Сильвестра здесь не выполнены. Запишем полный дифференциал второго порядка

$$\mathrm{d}^2u(M_2) = 4\mathrm{d}x^2 - 3\mathrm{d}y^2 + 2\mathrm{d}z^2 - 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 4\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$$

Если $\mathrm{d}x \neq 0,\ \mathrm{d}y = 0,\ \mathrm{d}z = 0$, то

$$\mathrm{d}^2u(M_2) = 4\mathrm{d}x^2 > 0.$$

При условии $\mathrm{d}x = 0,\ \mathrm{d}y \neq 0,\ \mathrm{d}z = 0$ имеем

$$\mathrm{d}^2u(M_2) = -3\mathrm{d}y^2 < 0.$$

Следовательно, квадратичная форма знакопеременная и M_2 не является точкой экстремума.

56. Исследовать на экстремум функцию

$$u = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1.$$

Ответ: $u_{\min} = u(1,\ -1,\ 3) = -11.$

3.7 Условный экстремум

Сделаем следующие предположения. Функция

$$z = f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) \tag{38}$$

определена в некоторой окрестности точки $M_0(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)$. Координаты этой точки удовлетворяют уравнениям связи

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_m(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) = 0. \end{cases} \tag{39}$$

В каждой точке указанной окрестности ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

равен m (числу уравнений системы (39)), то есть функции $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots,\ \varphi_m$ независимы.

Функции $f,\ \varphi_1,\ \dots,\ \varphi_m$ имеют непрерывные частные производные второго порядка в данной окрестности.

Составлена функция Лагранжа

$$L = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ \dots \ + \lambda_m\varphi_m,$$

записаны необходимые условия ее экстремума и найдена критическая точка этой функции $(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n,\ \lambda_1^0,\ \lambda_2^0,\ \dots,\ \lambda_m^0)$.

Пусть все эти предположения выполнены. Зафиксируем в функции Лагранжа

$$L = L(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_m)$$

множители λ_i, считая , что $\lambda_i = \lambda_i^0 \quad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ m)$. Получим функцию

$$L_1(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) = L(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \lambda_1^0,\ \lambda_2^0,\ \dots,\ \lambda_m^0).$$

Составим квадратичную форму

$$K(\mathrm{d}x_1,\ \mathrm{d}x_2,\ \dots,\ \mathrm{d}x_n) = \mathrm{d}^2L_1(M_0), \tag{40}$$

где M_0 имеет координаты $(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)$.

Переменные $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ в точке условного экстремума удовлетворяют уравнениям связи (39). Поэтому дифференциалы этих переменных связаны между собой соотношениями

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \ \dots \ + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \ \dots \ + \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n = 0. \end{cases} \tag{41}$$

Это система линейных уравнений относительно переменных $\mathrm{d}x_i\ (i = 1,\ 2,\ \dots,\ n)$. Так как ранг матрицы этой системы равен m, то, решив систему (41), m величин $\mathrm{d}x_i$ можно выразить через остальные $n - m$ дифференциалов. Если найденные таким путем выражения подставить в $\mathrm{d}^2L_1(M_0)$, то получится квадратичная форма (40) с учетом уравнений связи (39). Она будет содержать уже не n, а $n - m$ дифференциалов независимых переменных.

Если эта форма положительно (отрицательно) определенная, то M_0 есть точка минимума (максимума) функции (38) при условиях (39). Если данная форма знакопеременная, то функция (38) не имеет в точке M_0 условного экстремума при указанных условиях [8, гл. 4, § 43, п. 43.5].

57. Методом множителей Лагранжа исследовать на экстремум функцию

$$u = x^2 + y^2 + 2z^2 \tag{42}$$

при условии

$$x - y + z = 1. \tag{43}$$

Решение.

Составим функцию Лагранжа

$$L = x^2 + y^2 + 2z^2 + \lambda(x - y + z - 1) \tag{44}$$

и вычислим ее частные производные:

$$L_x = 2x + \lambda,$$
$$L_y = 2y - \lambda,$$
$$L_z = 4z + \lambda,$$
$$L_\lambda = x - y + z - 1.$$

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0, \\ 2y - \lambda = 0, \\ 4z + \lambda = 0, \\ x - y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Из первых трех уравнений выразим через λ остальные переменные:

$$x = -\frac{\lambda}{2}, \ y = \frac{\lambda}{2}, \ z = -\frac{\lambda}{4}.$$

Подставляя эти выражения в последнее уравнение указанной системы, найдем

$$\lambda = -\frac{4}{5}$$

и затем

$$x = \frac{2}{5},\ \ y = -\frac{2}{5},\ \ z = \frac{1}{5}.$$

Считая, что в равенстве (44) $\lambda = -\frac{4}{5}$, получим функцию

$$L_1 = x^2 + y^2 + 2z^2 - \frac{4}{5}(x - y + z - 1).$$

Вычислим ее производные

$$\frac{\partial L_1}{\partial x} = 2x - \frac{4}{5},\ \ \frac{\partial L_1}{\partial y} = 2y + \frac{4}{5},\ \ \frac{\partial L_1}{\partial z} = 4z - \frac{4}{5},$$

$$\frac{\partial^2 L_1}{\partial x^2} = 2,\ \frac{\partial^2 L_1}{\partial x \partial y} = 0,\ \ \frac{\partial^2 L_1}{\partial x \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 L_1}{\partial y^2} = 2,\ \frac{\partial^2 L_1}{\partial y \partial z} = 0,\ \ \frac{\partial^2 L_1}{\partial z^2} = 4$$

и запишем полный дифференциал второго порядка

$$\mathrm{d}^2 L_1 = 2\mathrm{d}x^2 + 2\mathrm{d}y^2 + 4\mathrm{d}z^2.$$

Дифференцируя обе части уравнения связи (43), получим зависимость между дифференциалами переменных

$$\mathrm{d}x - \mathrm{d}y + \mathrm{d}z = 0,$$

или

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}y - \mathrm{d}x.$$

С учетом этого соотношения полный дифференциал второго порядка $\mathrm{d}^2 L_1$ принимает вид

$$\mathrm{d}^2 L_1 = 2\mathrm{d}x^2 + 2\mathrm{d}y^2 + 4(\mathrm{d}y^2 - 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{d}x^2),$$

или

$$\mathrm{d}^2 L_1 = 6\mathrm{d}x^2 - 8\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 6\mathrm{d}y^2. \tag{45}$$

Матрица этой квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ее угловые миноры

$$6 > 0, \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 20 > 0.$$

Квадратичная форма (45) положительно определена. Следовательно, функция (42) имеет в точке $\left(\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ условный минимум:

$$u_{\min} = u\left(\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}.$$

58. Методом множителей Лагранжа исследовать на экстремум функцию

$$u = x - 2y + 2z$$

при условии

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Ответ:

$$u_{\min} = u\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = -3,$$

$$u_{\max} = u\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 3.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие / Г.Н. Берман – СПб. : Профессия, 2005. – 432 с.

2. Бутузов, В.Ф. Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменных : учеб. пособие для вузов / В.Ф. Бутузов [и др.]. – М. : Высш. шк., 1993. – 480 с.

3. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учеб. пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М. : АСТ : Астрель, 2005. – 558 с.

4. Зорич, В.А. Математический анализ. Часть I / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1981. – 544 с.

5. Ильин, В.А. Линейная алгебра / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М. : Наука, 2005. – 278 с.

6. Ильин, В.А. Основы математического анализа. Часть I / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М. : Наука, 1998. – 616 с.

7. Кудрявцев, Л.Д. Математический анализ. Т. I / Л.Д. Кудрявцев. – М. : Дрофа, 2003. – 703 с.

8. Кудрявцев, Л.Д. Математический анализ. Т. II / Л.Д. Кудрявцев. – М. : Дрофа, 2004. – 720 с.

9. Ляшко, И.И. Справочное пособие по математическому анализу. Введение в анализ, производная, интеграл / И.И. Ляшко [и др.]. – Киев : Вища школа, 1984. – 456 с.

10. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. 1: учеб. пособие / Н.С. Пискунов. – М. : Интеграл-Пресс, 2004. – 415 с.

11. Пособие по математике для поступающих в вузы / Под ред. Г.Н. Яковлева. – М : ОНИКС 21 век: Альянс-В : Новая Волна, 2001. – 720 с.

12. Ривкинд, Я.И. Дифференциальное и интегральное исчисление в задачах : учеб. пособие / Я.И. Ривкинд. – Минск : Вышэйш. шк. 1971. – 192 с.

13. Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость : учеб. пособие для вузов / Л.Д. Кудрявцев [и др.]; под ред. Л.Д. Кудрявцева. – М. : Наука, 1984. – 592 с.

14. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных : учеб. пособие для вузов / Л.Д. Кудрявцев [и др.]; под ред. Л.Д. Кудрявцева. – М. : Наука, 1994. – 496 с.

15. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1 : учеб. пособие / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1970. – 607 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 3

1 ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ 4

1.1 Равенство множеств 4
1.2 Таблицы истинности 5
1.3 Метод математической индукции 6
1.4 Бином Ньютона 8
1.5 Сумма степеней натуральных чисел 10
1.6 Формула Эйлера 12
1.7 Критерий Коши 16
1.8 Верхний и нижний пределы последовательности 19
1.9 Признак существования предела 22
1.10 Сходимость итерационного процесса 24
1.11 Вычисление предела последовательности 26
1.12 Равномерная непрерывность функции 27

2 ПРОИЗВОДНЫЕ 31

2.1 Односторонние производные 31
2.2 Дифференцируемость функции в точке 33
2.3 Производная, имеющая точку разрыва 36
2.4 Формула Лейбница 38
2.5 Производные высших порядков от рациональных функций 40

3 ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ 43

3.1 Предел 43
3.2 Дифференцирование неявных функций 45
3.3 Дифференцирование параметрически заданных функций 47
3.4 Полные дифференциалы высших порядков 50
3.5 Зависимость функций 52
3.6 Экстремум 54
3.7 Условный экстремум 59

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 64

Учебное издание

Файницкий Юрий Львович

ПРЕДЕЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ

Учебное пособие по самостоятельной работе

Технический редактор Ф. В. Г р е ч н и к о в
Редакторская обработка М. Г. Б о к а р е в а, А. А. Г н у т о в а
Корректорская обработка С. А. Н е ч и т а й л о
Компьютерная верстка Ю. Л. Ф а й н и ц к и й
Доверстка Н. А. Д о ц е н к о, А. А. Г н у т о в а
Донабор А. А. Г н у т о в а

Подписано в печать 19.12.06. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 3,95. Усл. кр.-отт. 4,07. Печ. л. 4,25.
Тираж 50 экз. Заказ . ИП-22 / 2006

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.