

**СГАУ: 6 (У)**

Г 962

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»

А.Н. Гусев  
С.А. Ишков

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ  
АВТОМАТИЧЕСКОГО  
УПРАВЛЕНИЯ**

САМАРА  
2005

СГАУ: 6(У)  
Г341

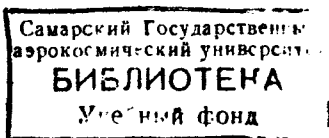
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

А.Н. Гусев, С.А. Ишков

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

*Учебное пособие*

Допущено Учебно-методическим объединением высших учебных заведений Российской Федерации по образованию в области авиации, ракетостроения и космоса в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки дипломированного специалиста 652600 – "Ракетостроение и космонавтика" и специальностям 130600 "Ракетостроение", 130700 "Космические летательные аппараты и разгонные блоки".



САМАРА 2005

**УДК 518.714:629.7**

**Гусев А.Н., Ишков С.А. Основы теории автоматического управления:** Учеб. пособие / Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2005. 164 с.

**ISBN 5-7883-0334-6**

Излагается курс лекций по основам теории автоматического управления.

Приводятся необходимые сведения о математическом описании, методах анализа и синтеза систем автоматического управления. Издание переработанное и дополненное.

Предназначено для студентов специальностей 1301, 1306, 1307, 0105, 1905. Работа подготовлена на кафедре динамики полета и систем управления.

Табл. 3. Ил. 99. Библиогр.: 17 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета.

Рецензенты: проф., д-р техн. наук МАИ В. В. Малышев,  
проф., д-р техн. наук А. И. Мантуров,  
доц., канд. техн. наук Е. И. Давыдов

**ISBN 5-7883-0334-6**

© А.Н. Гусев, С.А. Ишков, 2005

© Самарский государственный аэрокосмический университет, 2005

## Основные понятия и задачи теории автоматического управления

### Общие сведения об автоматическом управлении

Управление- это такая организация того или иного процесса, которая обеспечивает достижение определенных целей. Автоматическое управление- это управление, осуществляемое без участия человека. Любой процесс управления включает в себя следующие основные этапы:

- сбор и обработка информации о положении объекта управления в целях оценки сложившейся ситуации;
- принятие решения о наиболее целесообразных действиях;
- исполнение принятого решения.

Сбор информации о положении объекта управления заключается в измерении его координат, а также величин задающих и возмущающих воздействий. Для решения этой задачи используются различные измерительные устройства, образующие так называемую информационно - измерительную подсистему. Обработка полученной информации имеет целью выработку, на основании принятого закона управления, управляющего сигнала, который должен обеспечить достижение цели управления. Обработка информации и принятие решения о необходимых действиях осуществляются в логико-вычислительной подсистеме. Управляющие сигналы, полученные в логико-вычислительной подсистеме, поступают на исполнительную подсистему, которая приводит в действие регулирующие органы объекта управления, которые и решают задачу приведения его в требуемое положение. Совокупность объекта управления и управляющей подсистемы, в которую входят вышеперечисленные устройства (подсистемы), и образует систему автоматического управления (САУ).

Рассмотрим основные принципы автоматического управления.

1. Управление по разомкнутой схеме (разомкнутые САУ, рис.1 ).

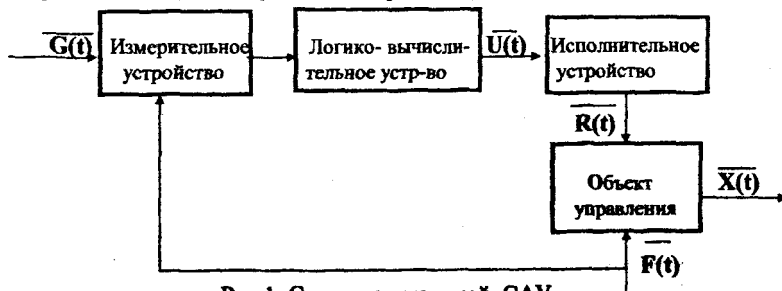


Рис.1. Схема разомкнутой САУ

Вектор выходных координат  $X(t)$  объекта управления зависит от вектора регулирующего воздействия  $\bar{R}(t)$  и вектора возмущений  $\bar{F}(t)$ . Управляю-

щее воздействие  $\bar{U}(t)$  вычисляется по измеренным значениям задающего воздействия  $\bar{G}(t)$  и вектора возмущений:

$$\bar{U}(t) = f(\bar{G}(t), \bar{F}(t)). \quad (1)$$

Координаты выходного вектора  $\bar{X}(t)$  в каждый момент времени определяют состояние объекта управления и называются **параметрами состояния**. Задачей управления в общем случае является приведение параметров состояния в определенное соответствие задающим воздействиям, в частном случае может решаться задача  $\bar{X}(t) = \bar{G}(t)$ . Решению этой задачи препятствуют различного рода случайные возмущения.

Разомкнутым системам присущи следующие недостатки:

- инвариантность (независимость) параметров состояния обеспечивается только по отношению к тем компонентам вектора возмущений, которые могут быть измерены;

- инвариантность по отношению к контролируемым (задающим) воздействиям обеспечивается только при строгом соответствии параметров объекта управления и управляющей подсистемы их расчетным значениям.

Точное измерение всех координат вектора возмущений – задача невыполнимая. Параметры объекта управления в процессе эксплуатации меняются случайным образом и проконтролировать этот процесс большей частью невозможно. Все это приводит к тому, что разомкнутая система не может с высокой точностью решить задачу управления. Такие системы не нашли практического применения.

## 2. Управление по замкнутой схеме (замкнутые САУ, рис.2).

В этом случае по данным измерений параметров состояния, всех или только необходимых, а также известным входным воздействиям формируется вектор отклонений  $\bar{E}(t) = \bar{G}(t) - \bar{Y}(t)$ .

В этом выражении  $\bar{Y}(t) = \bar{C}\bar{X}(t)$  - выходной вектор измерительной подсистемы,  $\bar{C}$  - матрица-оператор преобразований информации в измерительных устройствах, которую часто называют матрицей наблюдения, а всю измерительную подсистему - наблюдающим устройством.

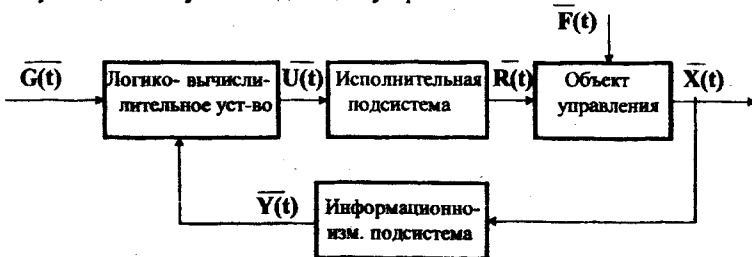


Рис.2. Схема замкнутой САУ

Управляющий сигнал формируется в функции от отклонения

$$\bar{U}(t) = f(\bar{E}(t)) \quad (3)$$

Задачей САУ является сведение отклонения к минимуму. В большинстве случаев матрица  $C$  является единичной и  $\bar{E}(t) = \bar{G}(t) - \bar{X}(t)$ .

Так как величина отклонения от заданного значения содержит обобщенную информацию о влиянии всех компонентов случайных возмущений и отклонениях параметров объекта от расчетных значений, то замкнутые системы свободны от недостатков разомкнутых систем и именно поэтому они получили самое широкое распространение. Практически всегда САУ является замкнутой.

Если имеется возможность точно измерить какие-либо компоненты возмущающего воздействия, то можно ввести в систему дополнительные сигналы и формировать управляющее воздействие в функции отклонения и изменений возмущений. Такие системы используют оба изложенных принципа управления и называются комбинированными.

Реализация принципа управления по отклонению возможна только при замыкании цепи отрицательной обратной связи, т.е. цепи от выхода объекта управления до входа логико-вычислительной подсистемы, т.е. входа системы в целом. Эта обратная связь называется главной и всегда является отрицательной. Относительным недостатком замкнутых систем является их склонность к возникновению колебаний, что является следствием наличия обратной связи.

В свете рассмотренного кратко охарактеризуем основные задачи теории автоматического управления (ТАУ).

1. Разработка методов анализа САУ.
2. Разработка методов синтеза САУ, удовлетворяющих заданным требованиям.
3. Разработка принципов построения и методов коррекции динамических свойств САУ.

#### Классификация САУ

Системы автоматического управления можно классифицировать по следующим признакам.

1. По наличию или отсутствию дополнительных источников энергии САУ подразделяются на системы прямого и непрямого регулирования. Системы прямого регулирования - это системы, в которых для приведения в действие регулирующих органов не требуются дополнительные источники энергии, т.е. чувствительный элемент непосредственно перемещает регулирующий орган. Примером такой системы может служить регулятор заданного уровня воды в паровом котле, изобретенный русским механиком И.И. Ползуновым в 1765г.

В противном случае САУ является системой непрямого регулирования. Эти САУ используются в подавляющем числе случаев, так как практически всегда сигнал ошибки  $E(t)$  недостаточен по мощности для управления регулирующим органом.

2. По характеру сигналов, циркулирующих в системе, САУ подразделяются на непрерывные (аналоговые), дискретные и дискретно-непрерывные (гибридные).

3. По виду уравнений, описывающих систему, САУ подразделяются на линейные и нелинейные.

4. По характеру изменения задающего воздействия САУ делятся на системы стабилизации, следящие системы и системы программного регулирования.

Системы стабилизации - это САУ, которые обеспечивают поддержание требуемого значения регулируемой величины относительно неизменного значения задающего воздействия. Отметим, что здесь и в дальнейшем отдельные компоненты векторов задающего воздействия, выходных координат и т.д. обозначаются малыми буквами.

Следящие системы предназначены для изменения регулируемой величины по закону, который заранее неизвестен, т.к. в общем случае величина задающего воздействия изменяется во времени и это изменение может быть случайным.

Программные САУ - это системы, в которых задающее воздействие изменяется по заданной программе, т.е.  $g(t) = g_{np}(t)$ .

Нетрудно заметить, что системы стабилизации и программные САУ являются частным случаем следящих систем.

5. По величине и характеру ошибки  $\varepsilon(t)$  САУ бывают статическими и астатическими.

В системах, статических по отношению к какому-либо воздействию, ошибка, вызванная этим воздействием, по окончании процесса регулирования становится равной некоторой постоянной величине, называемой статической ошибкой.

В системах, астатических по отношению к какому-либо воздействию, ошибка, вызванная этим воздействием, по окончании процесса регулирования становится равной нулю.

6. По числу замкнутых контуров регулирования САУ бывают одноконтурными и многоконтурными.

7. По характеру зависимости коэффициентов дифференциальных уравнений, описывающих систему от времени, САУ бывают стационарными и нестационарными. В стационарных САУ указанные коэффициенты не зависят от времени.

8. С точки зрения возможностей изменения параметров управляющей подсистемы, в зависимости от изменяющихся в процессе функционирования параметров объекта управления САУ бывают обыкновенными и самонастраивающимися (адаптивными).

Предлагаемое учебное пособие посвящено описанию обыкновенных стационарных САУ.

# 1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ САУ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

## 1.1. Математические модели САУ

Математическим аппаратом исследования САУ являются дифференциальные уравнения, которые описывают движение системы и являются уравнениями динамики. Из уравнений динамики, положив все производные равными нулю, можно получить уравнения статики, которые описывают поведение системы в установившемся режиме.

Дифференциальные уравнения САУ и ее элементов, составленные в соответствии с физическими законами их функционирования и факторами, от которых зависят переменные уравнений, практически всегда являются нелинейными. Дифференциальные уравнения САУ, записанные в виде системы уравнений или одного дифференциального уравнения высокого порядка, представляют собой математическую модель системы. Математическая модель является основой для анализа свойств системы и степени их соответствия поставленным требованиям. Итак, исходная математическая модель САУ является нелинейной. Отсутствие однозначных аналитических методов решения нелинейных дифференциальных уравнений не позволяет создать какие-либо общие эффективные методы анализа и синтеза САУ. Именно это и послужило причиной развития идеи линеаризации, т.е. замены исходной нелинейной модели линейной, близкой по решению к исходной модели в определенном диапазоне изменения начальных условий и параметров. Линеаризация проводится по методу малого отклонения, который основан на разложении нелинейных функций в ряд Тейлора.

Пусть САУ описывается дифференциальным уравнением  $n$  - го порядка

$$a_0 x^{(n)} + F(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) = F_1(g, \dot{g}, \dots, g^{(m)}). \quad (1.1)$$

В этом выражении  $F$  и  $F_1$  - некоторые нелинейные функции. Представим переменные, входящие в уравнение, в следующем виде:

$$x = x_0 + \Delta x, \quad \dot{x} = \dot{x}_0 + \Delta \dot{x}, \dots, \quad x^{(n)} = x_0^{(n)} + \Delta x^{(n)}, \\ g = g_0 + \Delta g, \quad \dot{g} = \dot{g}_0 + \Delta \dot{g}, \dots, \quad g^{(m)} = g_0^{(m)} + \Delta g^{(m)}.$$

В этих выражениях нижний индекс "0" означает установившееся значение переменной, а знак  $\Delta$  - отклонение переменной от установившегося значения. Разложим нелинейные функции в ряд Тейлора в окрестности установившегося режима:

$$F(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) = F(x_0, \dot{x}_0, \dots, x_0^{(n-1)}) + \\ + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} \left( \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^i \Delta x + \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)^i \Delta \dot{x} + \dots + \left( \frac{\partial F}{\partial x^{(n-1)}} \right)^i \Delta x^{(n-1)} \right)^i + R_k;$$



$$F_1(g, \dot{g}, \dots, g^{(m)}) = F_1(g_0, \dot{g}_0, \dots, g_0^{(m)}) + \\ + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} \left( \left( \frac{\partial F_1}{\partial g} \right)^* \Delta g + \left( \frac{\partial F_1}{\partial \dot{g}} \right)^* \Delta \dot{g} + \dots + \left( \frac{\partial F_1}{\partial g^{(m)}} \right)^* \Delta g^{(m)} \right)^i + R_{k1}.$$

Индекс "\*" около частных производных означает, что они вычислены в точке установившегося режима.

Допустим, что отклонения переменных от установившегося режима настолько малы, что остаточными членами, а также членами, содержащими произведения отклонений и отклонения в степенях выше первой, можно пренебречь как бесконечно малыми высших порядков малости по сравнению с членами, содержащими отклонения в первой степени. В соответствии с этим предположением будем полагать, что  $R_i = R_{ki} = 0$  и  $i=1$ .

Сделаем обозначения

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x^{(i)}} \right)^* = a_{n-i}, \quad \left( \frac{\partial F_1}{\partial g^{(j)}} \right)^* = b_{m-j}, \\ i = n-1, \dots, 0; \quad j = m, \dots, 0.$$

С учетом сделанных предположений и обозначений дифференциальные уравнения системы примут вид

$$a_0 x_0^{(n)} + a_0 \Delta x^{(n)} + F(x_0, \dot{x}_0, \dots, x_0^{(n-1)}) + \\ + a_1 \Delta x^{(n-1)} + a_2 \Delta x^{(n-2)} + \dots + a_{(n-1)} \Delta \dot{x} + a_n \Delta x = \\ = F_1(g_0, \dot{g}_0, \dots, g_0^{(m)}) + b_m \Delta g^{(m)} + b_1 \Delta g^{(m-1)} + \dots + b_m \Delta g.$$

В состав полученного выражения входит уравнение установившегося режима - первый и третий член в левой части и первый член в правой части. Установившееся движение нам задано и не представляет предмета исследования. Вычтем из полученного уравнения уравнение установившегося движения и получим уравнение в отклонениях, поведение которых нас и интересует. В дальнейшем, в целях сокращения записей, знак  $\Delta$  будем опускать. Получим

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{x} + a_n x = \\ b_0 g^{(m)} + b_1 g^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} \dot{g} + b_m g. \quad (1.2)$$

Полученное дифференциальное уравнение является линейным уравнением и определяет линейную модель системы. Отметим, что использовать линейную модель для исследования системы можно только при малых отклонениях переменных и поэтому часто говорят, что результаты исследований, полученных при использовании линейной модели, справедливы только в малом.

Уравнение в отклонениях (1.2) описывает возмущенное движение системы, являющееся результатом действия каких-либо возмущений, приводящих к появлению отклонений от установившегося режима. Уравнение установившегося режима описывает невозмущенное движение.

Сложность решения дифференциальных уравнений высокого порядка без применения вычислительной техники и невозможность на основании численных решений создать общие методы анализа и синтеза систем привели к широкому использованию методов, связанных с применением математического аппарата преобразований Лапласа и Фурье. Эти методы и составили сущность так называемой классической теории автоматического управления.

Необходимо отметить, что существуют нелинейные функции, которые невозможно линеаризовать по методу малого отклонения, и в этих случаях используют специальные методы, разработанные для исследования нелинейных систем.

## 1.2. Передаточные функции САУ

Понятие передаточной функции системы является основополагающим в классической теории автоматического управления (ТАУ), к изучению основ которой мы и приступаем.

Определение передаточной функции связано с преобразованием Лапласа и поэтому вначале приведем некоторые основные сведения из этого преобразования [1,13].

При использовании преобразования Лапласа некоторой функции времени  $x(t)$  ставится в однозначное соответствие функция  $X(s)$ , где  $s$ - оператор Лапласа. Функция времени  $x(t)$  называется оригиналом, а функция  $X(s)$  ее изображением. Изображение и оригинал связаны соотношением

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

Приведем некоторые теоремы преобразования Лапласа, которые будут использованы при изложении курса.

1. Теорема линейности. Для любых действительных или комплексных

$$Af(t) + Bg(t) \Rightarrow AF(s) + BG(s). \quad (1.3)$$

Знак  $\Rightarrow$  означает соответствие изображения оригиналу.

2. Теорема запаздывания. Для любого постоянного  $\tau > 0$

$$f(t - \tau) \Rightarrow e^{-s\tau} F(s). \quad (1.4)$$

3. Теорема дифференцирования оригинала.

Если  $f(t) \Rightarrow F(s)$ , то

$$\dot{f}(t) \Rightarrow sF(s) - f(0). \quad (1.5)$$

Применив эту теорему к производным высших порядков, получим

$$f^{(n)}(t) \Rightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \dot{f}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (1.6)$$

При нулевых начальных условиях выражение (1.6) упрощается:

$$f^{(n)} \Rightarrow s^n F(s) . \quad (1.7)$$

4. Теорема интегрирования оригинала. Если  $f(t) \Rightarrow F(s)$  и

$$g(t) = \int_0^t f(t) dt, \text{ то}$$

$$g(t) \Rightarrow \frac{F(s)}{s} . \quad (1.8)$$

5. Теорема о начальном значении оригинала

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) . \quad (1.9)$$

6. Теорема о конечном значении оригинала

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) . \quad (1.10)$$

Перейдем к определению передаточной функции. Пусть система или какое-либо звено ее описываются дифференциальным уравнением вида (1.2). Полагая начальные условия нулевыми, перейдем в этом уравнении к изображению по Лапласу. В соответствии с теоремой 3 получим

$$\begin{aligned} a_0 s^n X(s) + a_1 s^{n-1} X(s) + \dots + a_{n-1} s X(s) + a_n X(s) = \\ = b_0 s^m G(s) + b_1 s^{m-1} G(s) + \dots + b_{m-1} s G(s) + b_m G(s) . \end{aligned}$$

Вынесем в полученном выражении за скобки изображения переменной и входного воздействия и сделаем обозначения

$$A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n .$$

$$B(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m .$$

С учетом этих обозначений исходное дифференциальное уравнение в изображениях по Лапласу получит вид

$$A(s)X(s) = B(s)G(s) . \quad (1.11)$$

Определим теперь зависимость выходной величины от входного воздействия:

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} G(s) = W(s)G(s) . \quad (1.12)$$

Передаточной функцией системы (звена)  $W(s)$  называется отношение изображения по Лапласу выходной величины к изображению по Лапласу входной величины при нулевых начальных условиях.

Требование нулевых начальных условий не вносит принципиальных трудностей. В случае  $x(0)^{(k)} \neq 0$  при переходе к изображениям используют теорему 3 в форме (1.6), переносят члены, соответствующие начальным условиям, в правую часть уравнения и считают их возмущающими воздействиями, относительно которых получают передаточные функции.

Будем полагать, что все элементы в схеме замкнутой САУ (рис.2) описываются уравнениями вида (1.2). Некоторым исключением в данном случае

является уравнение объекта управления, в правую часть которого необходимо добавить оператор  $\sum_{i=0}^k m_k f^{(k-i)}$ , определяющий возмущающее воздействие. В соответствии с принципом суперпозиции, справедливым только для линейных систем, уравнение объекта управления в изображениях по Лапласу при нулевых начальных условиях запишется в виде

$$A_0(s)X(s) = B_0(s)R(s) + M(s)F(s).$$

В этом выражении  $M(s) = m_0 s^k + m_1 s^{k-1} + \dots + m_k$ .

Тогда можно записать:

$$W_0(s) = \frac{X(s)}{R(s)} = \frac{B_0(s)}{A_0(s)} \text{ — передаточная функция объекта}$$

управления по регулирующему воздействию;

$$W_{0f}(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{M(s)}{A_0(s)} \text{ — передаточная функция объекта}$$

управления по возмущению. Аналогично для других элементов схемы запишем:

$$W_1(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{B_1(s)}{A_1(s)} \text{ — передаточная функция логико-}$$

вычислительной подсистемы;

$$W_2(s) = \frac{R(s)}{U(s)} = \frac{B_2(s)}{A_2(s)} \text{ — передаточная функция исполни-}$$

тельной подсистемы;

$$W_{oc}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{B_{oc}(s)}{A_{oc}(s)} \text{ — передаточная функция цепи об-}$$

ратной связи (информационно - измерительной подсистемы). Теперь схему замкнутой САУ можно изобразить так, как показано на рис.1.1.

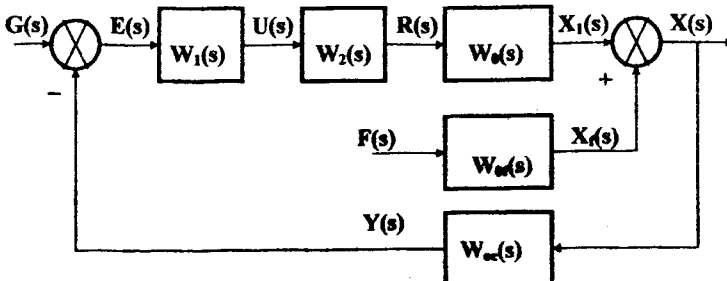


Рис.1.1. Структурная схема САУ

Схема системы автоматического управления, изображенная в виде соединения передаточных функций составляющих ее звеньев, называется структурной схемой.

На основании полученной схемы и выражений (1.11) и (1.12) составим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} X(s) - W_0(s)R(s) &= W_{of}(s)F(s) \\ R(s) - W_2(s)U(s) &= 0 \\ U(s) - W_1(s)E(s) &= 0 \\ Y(s) - W_{oc}(s)X(s) &= 0 \\ E(s) + W_{oc}(s)X(s) &= G(s). \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Составим и раскроем характеристический определитель системы (1.13):

$$D(s) = 1 + W_1(s)W_2(s)W_0(s)W_{oc}(s). \quad (1.14)$$

Так как звенья с передаточными функциями  $W_1(s)$ ,  $W_2(s)$ ,  $W_0(s)$  входят в прямую цепь регулирования, то передаточная функция  $W_n(s) = W_1(s)W_2(s)W_0(s)$  называется передаточной функцией прямой цепи. Составив и раскрыв замещенный определитель по отношению к регулируемой величине, получим

$$R_x(s) = W_n(s)G(s) + W_{of}(s)F(s).$$

Тогда

$$X(s) = \frac{W_n(s)}{1 + W_n(s)W_{oc}(s)} G(s) + \frac{W_{of}(s)}{1 + W_n(s)W_{oc}(s)} F(s). \quad (1.15)$$

Передаточная функция  $\Phi(s) = \frac{X(s)}{G(s)} = \frac{W_n(s)}{1 + W_n(s)W_{oc}(s)}$  назы-

вается передаточной функцией замкнутой системы по задающему (регулирующему) воздействию.

Передаточная функция  $W(s) = W_n(s)W_{oc}(s)$  называется передаточной функцией разомкнутой системы.

Передаточная функция  $\Phi_f(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{W_{of}(s)}{1 + W(s)}$  называется пере-

даточной функцией замкнутой системы по возмущению.

Составим и раскроем замещенный определитель относительно ошибки регулирования  $E(s)$ :

$$R_E(s) = G(s) + W_{oc}(s)W_{of}(s)F(s).$$

Тогда 
$$E(s) = \frac{1}{1+W(s)} G(s) + \frac{W_{oc}(s)W_{of}(s)}{1+W(s)} F(s). \quad (1.16)$$

Передаточная функция  $\Phi_{\varepsilon}(s) = \frac{E(s)}{G(s)} = \frac{1}{1+W(s)}$  называется

передаточной функцией замкнутой системы по ошибке от задающего воздействия.

Передаточная функция  $\Phi_{\varphi}(s) = \frac{E(s)}{F(s)} = \frac{W_{oc}(s)W_{of}(s)}{1+W(s)}$  назы-

вается передаточной функцией замкнутой системы по ошибке от возмущающего воздействия.

Нетрудно видеть, что при единичной обратной связи, т.е. при  $W_{oc}(s)=1$ , выполняется равенство

$$\Phi_{\varepsilon}(s) = 1 - \Phi(s). \quad (1.17)$$

### 1.3. Динамические характеристики САУ

#### 1.3.1. Временные характеристики САУ

Временные характеристики представляют собой зависимость выходного сигнала системы от времени при подаче на ее вход некоторого типового воздействия. В ТАУ используются два вида временных характеристик:

- переходная характеристика (переходная функция);
- импульсная переходная характеристика (функция веса).

Переходной характеристикой  $h(t)$  называется зависимость выходного сигнала системы от времени при подаче на ее вход единичного ступенчатого воздействия  $I(t)$  (рис. 1.2) Данное входное воздействие определяется выражением

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t \geq 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

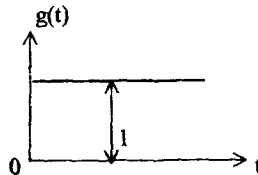


Рис. 1.2. Единичное ступенчатое воздействие

Изображение по Лапласу единичного ступенчатого воздействия будет

$$I(s) \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}.$$

Обозначим изображение переходной функции как  $H(s)$ , а передаточную функцию системы как  $W(s)$  и получим

$$H(s) = W(s) \frac{1}{s}. \quad (1.19)$$

Переходная функция может быть определена по ее изображению использованием формулы обратного преобразования Лапласа, в частности с помощью таблиц преобразования Лапласа.

При неединичном ступенчатом воздействии  $g(t) = N1(t)$ , где  $N = \text{const}$ , в соответствии с принципом суперпозиции выходная реакция системы будет

$$x(t) = Nh(t). \quad (1.20)$$

Импульсной переходной характеристикой (ИПХ) или функцией веса системы  $k(t)$  называется зависимость выходной величины от времени при подаче на вход воздействия в виде дельта-функции  $\delta(t - \tau)$  (рис.1.3), которая определяется следующим образом:

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau \\ \infty & \text{при } t = \tau \\ 0 & \text{при } t > \tau. \end{cases} \quad (1.21)$$

Определим основное свойство дельта-функции и ее связь с единичным ступенчатым воздействием. Допустим, что некоторая функция  $g(t - \tau)$  (рис.1.4) определяется выражением

$$g(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau \\ \infty & \text{при } t = \tau \\ 0 & \text{при } t > \tau. \end{cases} \quad (1.22)$$

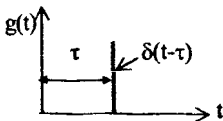


Рис.1.3. Дельта-функция

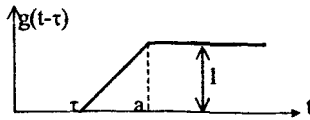


Рис.1.4. Функция  $g(t - \tau)$

Найдем производную от функции  $g(t - \tau)$ :

$$g(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau \\ \frac{1}{a} & \text{при } \tau < t < a \\ 0 & \text{при } t > a. \end{cases} \quad (1.23)$$

Очевидно, что графически эта производная представляет собой прямоугольный импульс (рис.1.5), амплитуда которого возрастает с уменьшением величины  $a$ , а длительность уменьшается. Площадь этого прямоугольника постоянна и равна единице.

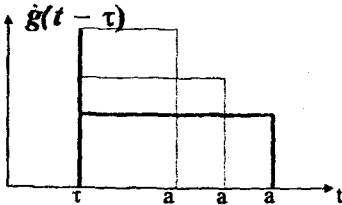


Рис. 1.5. График функции  $\dot{g}(t - \tau)$

Из выражений (1.22), (1.23) и рис. 1.3, 1.4 и 1.5 следует, что в пределе при  $a \rightarrow 0$  функция  $g(t - \tau)$  стремится к единичному ступенчатому воздействию, т.е.

$$\lim_{a \rightarrow 0} g(t - \tau) = 1(t - \tau),$$

а предел функции  $\dot{g}(t - \tau)$  равен бесконечности

$$\lim_{a \rightarrow 0} \dot{g}(t - \tau) = \infty = \lim_{t \rightarrow \tau} \delta(t - \tau).$$

Отсюда можно сделать следующие выводы:

$$\left. \begin{aligned} \delta(t - \tau) &= \dot{1}(t - \tau) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

В частном случае, когда  $\tau = 0$ , изображение дельта-функции равно

$$L\{\delta(t)\} = L\left\{\frac{d}{dt} 1(t)\right\} = 1, \text{ т.е. } \delta(s) = 1.$$

Отсюда следует, что изображение функции веса определяется выражением

$$K(s) = W(s). \quad (1.25)$$

Следовательно,

$$k(t) \Rightarrow W(s). \quad (1.26)$$

Функция веса системы может быть определена так же, как и переходная функция, или путем дифференцирования переходной функции в соответствии с первой формулой выражений (1.24).

Пример. Найти переходную функцию и функцию веса системы, имеющей передаточную функцию

$$W(s) = \frac{k}{Ts + 1}.$$

Изображение переходной функции будет



$$H(s) = W(s) \frac{1}{s} = \frac{k}{s(Ts+1)} = k \frac{\alpha}{s(s+\alpha)},$$

где  $\alpha = \frac{1}{T}$ .

Используя таблицы преобразования Лапласа, по полученному изображению найдем оригинал переходной функции (рис.1.6):

$$h(t) = k(1 - e^{-\alpha t}) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}).$$

Для изображения функции веса (рис.1.7) можно записать

$$K(s) = \frac{k}{Ts+1} = k \frac{\alpha}{s+\alpha} \text{ и по таблицам изображений Лапласа получим}$$

$k(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}$ . Аналогичный результат получим дифференцированием выражения для переходной функции.

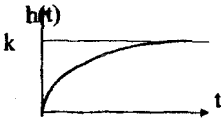


Рис. 1.6. Переходная функция



Рис.1.7. Функция веса

Импульсную переходную характеристику удобно использовать для определения реакции системы на некоторое воздействие  $f(t)$  произвольного вида:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) k(t-\tau) d\tau. \quad (1.27)$$

Естественно, что сигнал на выходе физически реализуемой системы не может появиться раньше входного сигнала, т.е.  $k(t)=0$  при  $t<0$ . С точки зрения преобразования Лапласа это соответствует условию

$$\lim_{s \rightarrow \infty} W(s) = 0. \quad (1.28)$$

Если

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}, \quad (1.29)$$

то условие (1.28) выполняется только при  $m < n$ . Это и есть выражение принципа физической реализуемости системы.

### 1.3.2. Частотные характеристики САУ

Пусть входное воздействие  $g(t)$  представляет собой гармоническую функцию вида

$$g(t) = G_m \cos \omega t.$$

Используя формулу Эйлера, можно записать

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}.$$

Тогда входное воздействие можно представить в виде суммы двух воздействий:

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) = \frac{G_m}{2} e^{j\omega t} + \frac{G_m}{2} e^{-j\omega t}. \quad (1.30)$$

Дифференциальное уравнение системы в изображениях по Лапласу запишется в виде

$$A(s)X(s) = B(s)G(s), \quad (1.31)$$

где полином  $A(s)$  имеет порядок  $n$ , а полином  $B(s)$  — порядок  $m$ .

Пусть на вход системы подано воздействие вида  $g_1(t)$ . Частное решение дифференциального уравнения будем искать в виде

$$x_1(t) = \frac{G_m}{2} W(j\omega) e^{j\omega t}.$$

Здесь  $W(j\omega)$  — некоторая функция частоты  $\omega$ .

Подставив  $g_1(t)$  и  $x_1(t)$  в (1.31), сократив полученное выражение на  $G_m/2$  и  $e^{j\omega t}$ , получим

$$\begin{aligned} (a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n)W(j\omega) = \\ = b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_m. \end{aligned}$$

Отсюда

$$W(j\omega) = \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_m}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}. \quad (1.32)$$

Сравнивая (1.32) и (1.29), можно заключить, что функция  $W(j\omega)$  получается из передаточной функции  $W(s)$  простой заменой  $s=j\omega$ . Эта замена с математической точки зрения означает переход от преобразования Лапласа к преобразованию Фурье [1,13].

Функция  $W(j\omega)$  называется частотной передаточной функцией системы.

Комплексную функцию  $W(j\omega)$  представим в виде

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (1.33)$$

Тогда

$$x_1(t) = \frac{G_m}{2} A(\omega) e^{j(\omega t + \varphi(\omega))}.$$

Если в (1.31) подставить функцию  $g_2(t) = \frac{G_m}{2} e^{-j\omega t}$ , то после преобразований, аналогичных предыдущим, получим

$$x_2(t) = \frac{G_m}{2} A(\omega) e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))}.$$

В соответствии с принципом суперпозиции

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = G_m A(\omega) \frac{e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} + e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))}}{2} = \\ &= G_m A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Это выражение показывает, что вынужденные колебания, вызываемые в устойчивой линейной динамической системе гармоническим входным воздействием, представляют собой гармоническую функцию времени, имеющую ту же частоту, что и входное воздействие, но отличающуюся от последнего по амплитуде и по фазе.

Зависимость отношения  $A(\omega)$  амплитуды выходного сигнала к амплитуде входного сигнала от частоты называется **амплитудной частотной характеристикой (АЧХ)** системы.

Зависимость фазового сдвига  $\varphi(\omega)$  между входным и выходным сигналами от частоты называется **фазовой частотной характеристикой (ФЧХ)** системы.

С этой точки зрения частотную передаточную функцию  $W(j\omega)$  называют также амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ) системы.

Методика определения частотных характеристик системы следующая.

1. В передаточной функции системы делают замену  $s=j\omega$  и полученную АФЧХ представляют в виде суммы вещественной и мнимой частей:

$$W(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = U(\omega) + jV(\omega).$$

Функцию  $U(\omega)$  называют **вещественной частотной характеристикой**, а функцию  $V(\omega)$  - **мнимой частотной характеристикой**.

2. Определяют АЧХ и ФЧХ:

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}. \quad (1.35)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}. \quad (1.36)$$

Пример. Определить частотные характеристики для звена с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k}{Ts + 1}.$$

Делаем замену  $s=j\omega$

$$W(j\omega) = \frac{k}{1+jT\omega} = \frac{k(1-jT\omega)}{(1+jT\omega)(1-jT\omega)} = \frac{k(1-jT\omega)}{1+T^2\omega^2}$$

Отсюда

$$U(\omega) = \frac{k}{1+T^2\omega^2}; \quad V(\omega) = -k \frac{T\omega}{1+T^2\omega^2};$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}; \quad \varphi(\omega) = -\arctg T\omega.$$

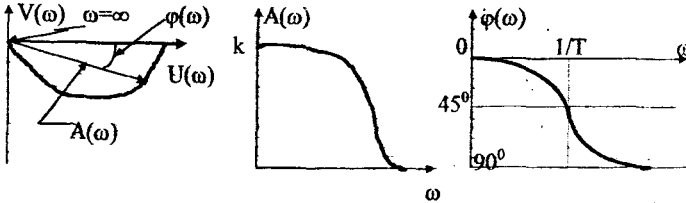


Рис. 1.8. Частотные характеристики звена с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k}{Ts+1}$$

Частотные характеристики широко используются при анализе и синтезе САУ и составляют основу рассматриваемой классической теории автоматического управления.

### 1.3.3. Логарифмические частотные характеристики САУ

Существенным недостатком рассмотренных выше частотных характеристик является то, что графически они, особенно для систем высокого порядка, являются кривыми достаточно сложной формы, что затрудняет их построение и использование для анализа систем. В целях исключения этого недостатка в большинстве случаев нашли применение логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ).

Логарифмической амплитудной частотной характеристикой (ЛАХ) называется кривая, соответствующая выражению

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) \quad (1.37)$$

и построенная в логарифмическом масштабе частот.

Логарифмической фазовой частотной характеристикой (ЛФХ) называется фазовая частотная характеристика  $\varphi(\omega)$ , построенная в логарифмическом масштабе частот.

Величина  $L(\omega)$  измеряется в децибелах, а  $\varphi(\omega)$  — в градусах или радианах. Единицами измерения логарифмической оси частот являются октавы и декады.

Октавой называется интервал частот, соответствующий изменению частоты в два раза и равный  $\lg 2 = 0.3010$ . Декадой называется интервал частот, соответствующий изменению частоты в десять раз и равный  $\lg 10 = 1$ . Легко подсчитать, что одна декада содержит 3.32 октавы. Точка, соответствующая значению частоты, равному нулю, лежит слева в бесконечности, т.к.  $\lg 0 = -\infty$ . Поэтому ось ординат проводится через любую точку оси частот так, чтобы справа располагалась та часть ЛЧХ, которую нужно исследовать.

Можно рекомендовать следующую методику построения логарифмической сетки координат. Вначале ось частот разбивается на декады и октавы, причем каждая декада разбивается на октавы отдельно (рис.1.9). Для удобства инженерной практики под точками этой оси пишут не значения логарифмов частот, а сами частоты.

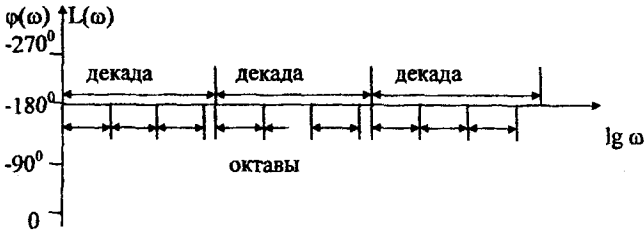


Рис. 1.9. Оси логарифмической системы координат

Рекомендуется ось ординат в отношении фазовой характеристики располагать так, чтобы с точкой начала координат совпадало значение фазы, равное  $-180^\circ$ , положительное направление шло вниз, а отрицательное - вверх. Общепринятое расположение оси фазы не является ошибкой, но рекомендованное здесь расположение во многих случаях облегчает применение для анализа и синтеза систем разработанных графоаналитических методов.

Если исследуемая точка частоты не совпадает ни с октавой, ни с декадой, то ее положение на оси частот по отношению к началу координат или началу какой-либо декады при избранном масштабе  $m$  [мм/дек] можно определить по формуле

$$\omega_x = m \lg \frac{\omega_x}{\omega_0} \quad (1.38)$$

Здесь  $\omega_0$  - частота, соответствующая началу координат или началу декады.

Обратная задача, т.е. определение значения частоты по положению соответствующей ей точки на оси частот, решается использованием формулы

$$\omega_x = \omega_0 10^{\omega_x / m} \quad (1.39)$$

При построениях ЛЧХ вручную удобным является масштаб, равный  $m=50$  мм/дек.

Во многих случаях передаточную функцию системы можно представить в виде произведения передаточных функций элементарных звеньев:

$$W(s) = \prod_{i=1}^n W_i(s).$$

Тогда 
$$W(j\omega) = \prod_{i=1}^n W_i(j\omega) = \prod_{i=1}^n A_i(\omega) e^{j\varphi_i(\omega)}.$$

В соответствии с правилами о логарифме произведения и произведении показательных функций получим

$$L(\omega) = 20 \lg \prod_{i=1}^n A_i(\omega) = \sum_{i=1}^n L_i(\omega); \quad (1.40)$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega). \quad (1.41)$$

Таким образом, логарифмические характеристики сложной системы могут быть получены суммированием ЛЧХ составляющих ее простых звеньев.

Пример. Определить ЛЧХ для САУ с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k}{Ts+1}.$$

Используя результаты предыдущего примера, получим

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1+T^2\omega^2}.$$

При  $\omega < \frac{1}{T}$  величина  $T^2\omega^2 \ll 1$  и  $L(\omega) \approx 20 \lg k$ . Это уравнение прямой, параллельной оси частот.

При  $\omega > \frac{1}{T}$  величина  $T^2\omega^2 \gg 1$  и  $L(\omega) \approx 20 \lg k - 20 \lg T\omega$ .

Это уравнение прямой, имеющей наклон к оси частот, равный  $-20$  дБ/дек, и сопрягающейся с предыдущей прямой в точке  $\omega_c = 1/T$ .

Таким образом, ЛАХ данной системы может быть приближенно построена в виде двух сопрягающихся отрезков прямых (рис. 1.10). Такая ЛАХ называется асимптотической. Возможность замены кривых асимптотическими ЛАХ является важным достоинством ЛЧХ. Ошибка при такой замене для большинства простых систем не велика и для рассматриваемой системы ее максимальное значение в точке  $\omega = \omega_c$  не превышает 3 дБ.

Фазовая характеристика исследуемой системы определена выше.

Частота  $\omega_c = 1/T$  называется частотой сопряжения. Частота  $\omega_c$ , при которой ЛАХ пересекает ось частот, что соответствует значению  $A(\omega) = 1$ , называется частотой среза системы.

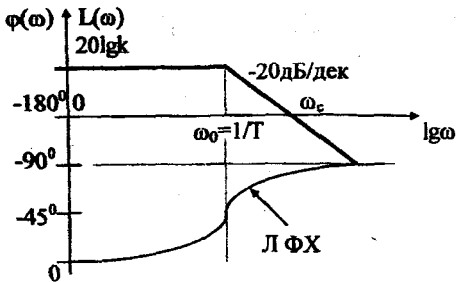


Рис. 1.10. ЛФХ системы с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k}{Ts + 1}.$$

В заключение отметим, что так как для физически реализуемых систем  $n > m$ , то

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} W(j\omega) = 0.$$

Это означает, что все реально осуществимые системы являются фильтрами нижних частот.

## 2. ТИПОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

### 2.1 Динамические звенья САУ

При изучении САУ ее схему удобно представлять не в виде соединения ее элементов, классифицированных по функциональному назначению и при-

ципу действия, а в виде структурной схемы, т.е. в виде соединения динамических звеньев.

**Динамическое звено** - это математическая модель элемента или его части, записанная в виде дифференциального уравнения или передаточной функции.

В ТАУ динамические звенья, которые описываются дифференциальными уравнениями не выше второго порядка, принято называть **типовыми динамическими звеньями**. Различают восемь типов звеньев [2,4,8,14].

1. Усилительное (безынерционное) звено

$$W(s) = k.$$

2. Идеальное дифференцирующее звено

$$W(s) = ks.$$

3. Идеальное интегрирующее звено

$$W(s) = \frac{k}{s}$$

4. Аperiodическое звено первого порядка

$$W(s) = \frac{k}{Ts + 1}$$

5. Звено второго порядка

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1};$$

а) колебательное звено при  $0 < \zeta < 1$ ;

б) аperiodическое звено второго порядка при  $\zeta > 1$ ;

в) консервативное звено при  $\zeta = 0$ .

6. Форсирующее звено первого порядка

$$W(s) = k(Ts + 1)$$

7. Форсирующее звено второго порядка

$$W(s) = k(T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1)$$

8. Звено чистого запаздывания

$$W(s) = e^{-\tau s}$$

Все динамические звенья обладают направленностью действия - от входа звена к его выходу, что на структурных схемах обозначается стрелками.

## 2.2. Соединения динамических звеньев

Имеются три типа соединений динамических звеньев:

- последовательное;
- параллельное;
- встречно- параллельное или соединение в виде обратной связи.

Последовательным называется соединение, при котором выходная переменная каждого предыдущего звена подается на вход последующего звена.

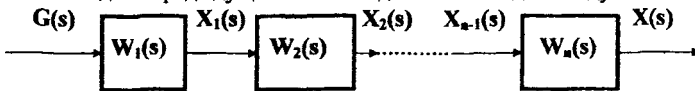


Рис.2.1. Последовательное соединение динамических звеньев

Из рис.2.1 следует, что

$$\begin{aligned} X(s) &= W_n(s)X_{n-1}(s) = W_n(s)W_{n-1}(s)X_{n-2}(s) = \\ &= W_1(s)W_2(s) \dots W_n(s)G(s) \end{aligned}$$

Таким образом, передаточная функция последовательного соединения динамических звеньев равна произведению передаточных функций звеньев, составляющих схему:



$$W(s) = \prod_{i=1}^n W_i(s). \quad (2.1)$$

**Параллельным** называется такое соединение динамических звеньев, при котором входная переменная для всех звеньев одна и та же, а выходные переменные всех звеньев суммируются.

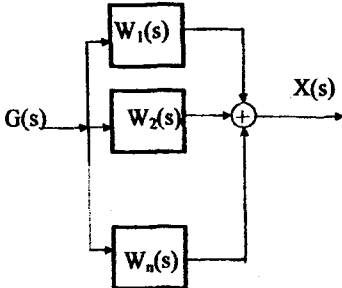


Рис. 2.2. Параллельное соединение динамических звеньев

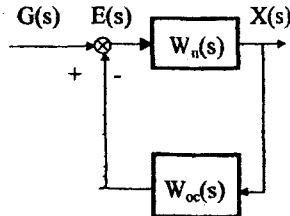


Рис. 2.3. Встречно-параллельное соединение динамических звеньев

Из рис. 2.2 следует

$$X(s) = W_1(s)G(s) + W_2(s)G(s) + \dots + W_n(s)G(s) = \sum_{i=1}^n W_i(s)G(s).$$

Передаточная функция параллельного соединения динамических звеньев равна сумме их передаточных функций:

$$W(s) = \sum_{i=1}^n W_i(s). \quad (2.2)$$

**Встречно-параллельным** (соединением с обратной связью) называется такое соединение динамических звеньев, при котором сигнал с выхода звена прямой цепи подается на его вход через звено обратной связи (рис.2.3). Обратная связь может быть как положительной, так и отрицательной, что на рисунке обозначено соответствующими знаками.

Составим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} X(s) &= W_n(s)E(s) \\ E(s) &= G(s) \pm W_{oc}(s)X(s) \end{aligned} \right\}$$

Решив эту систему уравнений относительно регулируемой величины и ошибки регулирования, получим

$$X(s) = \frac{W_n(s)}{1 \mp W_n(s)W_{oc}(s)} G(s).$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + W_n(s)W_{oc}(s)} G(s).$$

Отсюда можно записать, что при встречно-параллельном соединении

$$\Phi(s) = \frac{X(s)}{G(s)} = \frac{W_n(s)}{1 + W(s)} \text{ — передаточная функция замкнутой системы по}$$

задающему воздействию, а  $\Phi_{\square}(s) = \frac{E(s)}{G(s)} = \frac{1}{1 + W(s)}$  — передаточная

функция замкнутой системы по ошибке от задающего воздействия, где в обоих случаях  $W(s) = W_n(s)W_{oc}(s)$  — передаточная функция разомкнутой системы. В выражениях передаточных функций замкнутой системы знак плюс соответствует отрицательной обратной связи, а знак минус — положительной обратной связи.

Сравнивая полученные выражения с формулами, выведенными в п. 1.2, можно сделать вывод об их полной аналогии. Это означает, что передаточные функции можно получать не только по дифференциальным уравнениям системы, а и по ее структурной схеме. Следовательно, **структурная схема есть форма записи дифференциального уравнения системы.**

**Пример.** Система задана структурной схемой (рис.2.4). Требуется определить ее передаточные функции.

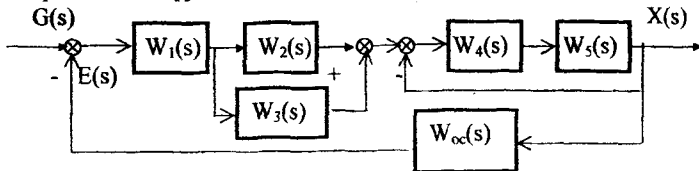


Рис. 2.4. Структурная схема САУ.

Получение передаточных функций системы, заданной своей структурной схемой, так называемое “сворачивание схемы”, всегда начинается с самого внутреннего контура. В заданной структурной схеме два внутренних контура. Определим в соответствии с правилами о соединениях динамических звеньев их передаточные функции. Звенья  $W_2(s)$  и  $W_3(s)$  соединены параллельно и передаточная функция соединения

$$W_{23}(s) = W_2(s) + W_3(s).$$

Звенья  $W_1(s)$  и  $W_{23}(s)$  соединены последовательно и поэтому

$$W_{123}(s) = W_1(s)W_{23}(s).$$

Звенья  $W_4(s)$  и  $W_5(s)$  соединены последовательно и охвачены отрицательной единичной обратной связью:

$$W_{45}(s) = \frac{W_4(s)W_5(s)}{1 + W_4(s)W_5(s)}.$$

Для передаточной функции прямой цепи получим

$$W_n(s) = W_{123}(s)W_{45}(s).$$

В результате преобразований структурная схема системы примет вид, показанный на рис. 2.5.

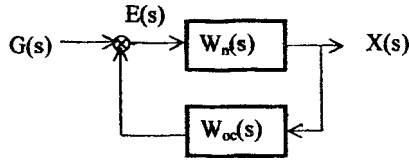


Рис. 2.5. Преобразованная структурная схема

Для передаточных функций замкнутой системы получим

$$\Phi(s) = \frac{X(s)}{G(s)} = \frac{W_n(s)}{1 + W(s)}.$$

$$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{E(s)}{G(s)} = \frac{1}{1 + W(s)}.$$

$$W(s) = W_n(s)W_{oc}(s).$$

### 2.3. Характеристики типовых динамических звеньев

#### 1. Усилительное звено: $W(s)=k$ .

Для этого звена временные и частотные характеристики определяются простыми выражениями:

$$H(s) = k \frac{1}{s}; \quad h(t) = k1(t);$$

$$k(t) = k\delta(t); \quad W(j\omega) = k;$$

$$A(\omega) = k; \quad \varphi(\omega) = 0;$$

$$L(\omega) = 20 \lg k.$$

#### 2. Идеальное дифференцирующее звено: $W(s)=ks$ .

Изображение переходной функции этого звена  $H(s) = ks \frac{1}{s} = k$ .

В соответствии с обратным преобразованием Лапласа получим

$$h(t) = k\delta(t); \quad k(t) = k\delta(t);$$

$$W(j\omega) = jk\omega; \quad A(\omega) = k\omega;$$

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega.$$

$$\varphi(\omega) = +90^\circ.$$

Логарифмическая амплитудная характеристика звена является прямой линией наклоном +20дБ/дек (рис.2.6). Определим значение частоты среза, т.е. точку пересечения ЛАХ с осью частот:

$$L(\omega_c) = 20 \lg k + 20 \lg \omega_c = 0;$$

$$\omega_c = \frac{1}{k}.$$

(2.3)

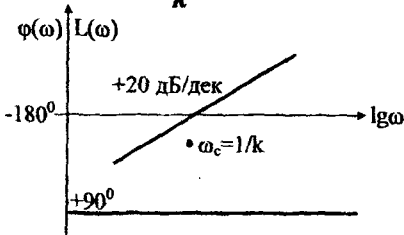


Рис. 2.6. ЛЧХ идеального дифференцирующего звена

3. Идеальное интегрирующее звено:  $W(s) = k/s$ .

Для этого звена  $H(s) = \frac{k}{s} * \frac{1}{s} = \frac{k}{s^2}$ . Тогда  $h(t) = kt$  и

$k(t) = k$ . Для частотных характеристик получим

$$W(j\omega) = -j \frac{k}{\omega}; \quad A(\omega) = \frac{k}{\omega};$$

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega; \quad \varphi(\omega) = -90^\circ.$$

Уравнение для  $L(\omega)$  - это уравнение прямой с наклоном  $-20 \text{ дБ/дек}$  (рис.2.7). Частоту среза звена определим из уравнения

$$L(\omega_c) = 20 \lg k - 20 \lg \omega_c = 0.$$

Получим:  $\omega_c = k$ .

(2.4)

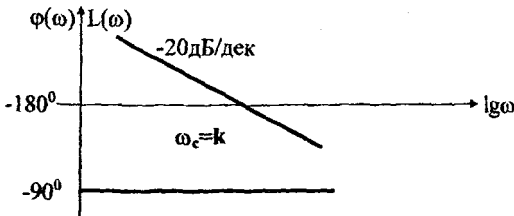


Рис. 2.7. ЛЧХ идеального интегрирующего звена

4. Аперриодическое звено 1-го порядка:  $W(s) = \frac{k}{Ts + 1}$ .

Все характеристики этого звена рассмотрены в вышеприведенных примерах.

5. Звено 2-го порядка:  $W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1}$ .

Дифференциальное уравнение этого звена в изображениях по Лапласу можно записать в виде

$$(T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1)X(s) = kG(s).$$

При единичном ступенчатом воздействии на входе дифференциальное уравнение относительно оригиналов имеет вид

$$T^2 \frac{dx^{(2)}}{dt^2} + 2T\zeta \frac{dx}{dt} + x = k.$$

Характеристическое уравнение, соответствующее этому дифференциальному уравнению, полностью совпадает с полиномом знаменателя передаточной функции, приравненным нулю. Поэтому полином знаменателя передаточной функции называется **характеристическим полиномом**, а **приравненный нулю — характеристическим уравнением системы**. Корни характеристического полинома звена второго порядка будут

$$s_{1,2} = -\frac{\zeta}{T} \pm \frac{1}{T} \sqrt{\zeta^2 - 1}.$$

а) Колебательное звено.

В этом случае  $\zeta < 1$  и корни комплексно-сопряженные. Решение дифференциального уравнения в этом случае имеет вид

$$x(t) = e^{-\frac{\zeta}{T}t} (C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t) + k.$$

Произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  вычисляются, как известно, по начальным условиям и, если последние нулевые, то

$$C_1 = k \frac{\alpha}{\beta}; \quad C_2 = -k.$$

В этих выражениях  $\alpha = \frac{\zeta}{T}$ ;  $\beta = \frac{1}{T} \sqrt{1 - \zeta^2}$ .

Тогда выражение для переходной функции колебательного звена после элементарных преобразований примет вид

$$h(t) = k(1 - e^{-\frac{\zeta}{T}t}) \left( \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t + \cos \beta t \right). \quad (2.5)$$

Продифференцировав это выражение, получим функцию веса звена

$$k(t) = k \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} e^{-\frac{\zeta}{T}t} \sin \beta t. \quad (2.6)$$

Вид переходной функции и функции веса колебательного звена показаны на рис.2.8 и 2.9.

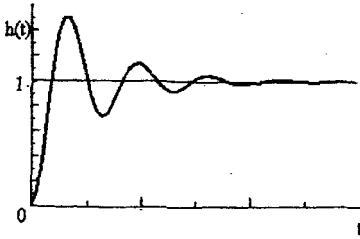


Рис. 2.8. Переходная функция колебательного звена

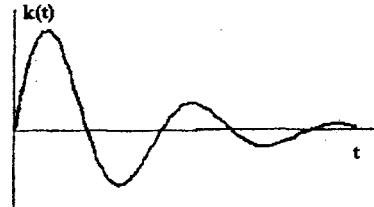


Рис. 2.9. Функция веса колебательного звена

Определим частотные характеристики звена (рис.2.11,2.12):

$$W(s)|_{s=j\omega} = \frac{k}{(1-T^2\omega^2) + j2T\zeta\omega} = U(\omega) - jV(\omega) =$$

$$= \frac{k(1-T^2\omega^2)}{(1-T^2\omega^2)^2 + 4T^2\zeta^2\omega^2} - j \frac{2T\zeta\omega}{(1-T^2\omega^2)^2 + 4T^2\zeta^2\omega^2}.$$

В соответствии с изложенной выше методикой вычисления частотных характеристик получим

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + T^2\zeta^2\omega^2}}; \quad (2.7)$$

$$\varphi(\omega) = -\text{arctg} \frac{2T\zeta\omega}{1-T^2\omega^2}. \quad (2.8)$$

Проанализируем последнее выражение. Амплитудно-фазовая частотная характеристика колебательного звена показана на рис. 2.10.

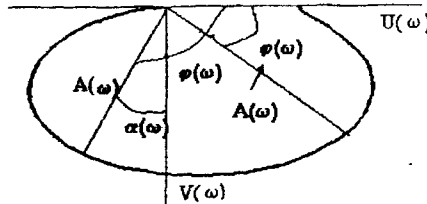


Рис. 2.10. АФЧХ колебательного звена

Из выражения (2.8) следует:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = 0; \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = 0; \quad \lim_{\omega \rightarrow \frac{1}{T}} \varphi(\omega) = -90^\circ.$$

Из рис.2.10 следует, что при  $\omega > 1/T$ , пользуясь формулой (1.36), будем вы-

числитель не фазовый сдвиг, а некоторый угол  $\alpha(\omega)$ , являющийся только добавкой к действительному фазовому сдвигу, который в данном случае равен

$$-180^\circ + \left| \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} \right| = -180^\circ + |\alpha(\omega)|. \text{ Окончательно для ФЧХ колебательного звена получим}$$

лебательного звена получим

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \frac{2T\zeta\omega}{1-T^2\omega^2} & \text{при } \omega \leq \frac{1}{T} \\ -180 + \operatorname{arctg} \frac{2T\zeta\omega}{T^2\omega^2 - 1} & \text{при } \omega > \frac{1}{T}. \end{cases} \quad (2.9)$$

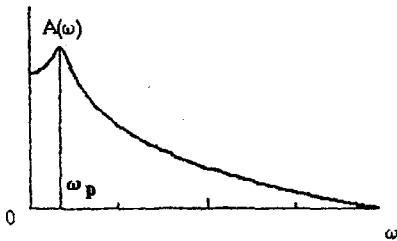


Рис. 2.11. АЧХ колебательного звена

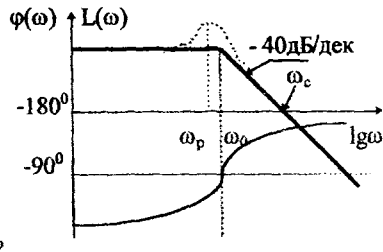


Рис. 2.12. ЛЧХ колебательного звена

Для логарифмической амплитудной характеристики можно записать

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4T^2 \zeta^2 \omega^2}.$$

При  $\omega < 1/T$  получим, что  $\omega^2 T^2 \ll 1$  и  $4T^2 \zeta^2 \omega^2 \ll 1$ . Тогда в этом диапазоне частот ЛАХ звена можно считать равной  $L(\omega) = 20 \lg k$ . Это уравнение прямой, параллельной оси частот. При  $\omega > 1/T$  с достаточной для практики точностью справедливы соотношения:  $\omega^2 T^2 \gg 1$  и  $(\omega^2 T^2)^2 \gg 4T^2 \zeta^2 \omega^2$ . В этом частотном диапазоне можно считать  $L(\omega) = 20 \lg k - 40 \lg T \omega$ . Это уравнение прямой, имеющей наклон  $-40 \text{ дБ/дек}$  и начинающейся при частоте  $\omega_0 = 1/T$  (рис. 2.12). В окрестности этой точки точная ЛАХ при малых значениях показателя затухания  $\zeta$  может сильно отличаться от асимптотической. В этих случаях необходимо уточнить асимптотическую ЛАХ в окрестности частоты сопряжения. Для решения этой задачи разработаны специальные таблицы и графики.

Показанная на рисунках резонансная частота  $\omega_p$  может быть вычислена по формуле

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}.$$

В этой точке

$$L(\omega_p) = 20 \lg \frac{k}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}. \quad (2.10)$$

Из выражения (2.7) для АЧХ видно, что при  $T = \text{const}$  амплитуда колебаний на выходе звена тем меньше, чем больше величина  $\zeta$ . В тоже время частота колебаний  $\beta$  с увеличением  $\zeta$  также уменьшается и при  $\zeta=1$  становится равной нулю. Таким образом, увеличение  $\zeta$  приводит к затуханию колебательного процесса и с этой точки зрения параметр  $\zeta$  получил название **относительного показателя затухания**.

Исследование уже полученных выражений для переходных функций апериодического звена 1-го порядка и колебательного звена показывает, что чем больше величина  $T$ , тем медленнее затухает свободная составляющая процесса (собственное движение системы, являющееся решением однородного уравнения) и тем медленнее процесс приходит к установившемуся движению. Параметр  $T$  характеризует инерционность системы и поэтому получил название **постоянной времени**.

б) Аperiodическое звено 2-го порядка.

В этом случае  $\zeta > 1$  и корни характеристического уравнения вещественные и отрицательные:

$$\lambda_1 = -\frac{\zeta}{T} - \frac{1}{T} \sqrt{\zeta^2 - 1};$$

$$\lambda_2 = -\frac{\zeta}{T} + \frac{1}{T} \sqrt{\zeta^2 - 1}.$$

Сделаем обозначения:  $T_1 = \frac{1}{|\lambda_1|}$ ;  $T_2 = \frac{1}{|\lambda_2|}$ .

Передаточную функцию звена второго порядка теперь можно записать в виде

$$W(s) = \frac{k}{T^2 (s + |\lambda_2|)(s + |\lambda_1|)} = \frac{k}{T^2 |\lambda_1 \lambda_2| (T_2 s + 1)(T_1 s + 1)}.$$

Учитывая, что  $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{T^2}$ , окончательно получим для передаточной

функции апериодического звена 2-го порядка

$$W(s) = \frac{k}{(T_2 s + 1)(T_1 s + 1)}, \quad (2.11)$$

$T_2 > T_1$ .

Определим изображение переходной функции:

$$H(s) = \frac{k}{s(T_2 s + 1)(T_1 s + 1)}.$$



На примере определения оригинала переходной функции рассмотрим применение для этой цели метода неопределенных коэффициентов. Представим изображение в следующей форме:

$$H(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{T_1 s + 1} + \frac{C}{T_2 s + 1}.$$

В этом выражении  $A, B, C$  - неопределенные коэффициенты. Приведем полученное выражение к общему знаменателю и полученный числитель приравняем значению числителя исходного изображения:

$$A(T_1 T_2 s^2 + (T_2 + T_1)s + 1) + Bs(T_2 s + 1) + Cs(T_1 s + 1) = k.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях оператора  $s$ , получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} AT_1 T_2 + BT_2 + CT_1 &= 0 \\ A(T_1 + T_2) + B + C &= 0 \\ A &= k. \end{aligned} \right\}$$

Решив эту систему, получим:  $B = \frac{kT_1^2}{T_2 - T_1}$ ;  $C = -\frac{kT_2^2}{T_2 - T_1}$ . Подставим

эти значения в выражение для переходной функции

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{k}{s} + \frac{kT_1^2}{T_2 - T_1} \frac{1}{T_1 s + 1} - \frac{kT_2^2}{T_2 - T_1} \frac{1}{T_2 s + 1} = \\ &= \frac{k}{s} + \frac{kT_1}{T_2 - T_1} \frac{1}{s + \alpha_1} - \frac{kT_2}{T_2 - T_1} \frac{1}{s + \alpha_2}. \end{aligned}$$

В этом выражении  $\alpha_1 = 1/T_1$ ,  $\alpha_2 = 1/T_2$ . В соответствии с таблицами преобразования Лапласа для оригинала переходной функции получим (рис.2.13)

$$h(t) = k \left( 1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} e^{-t/T_1} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-t/T_2} \right). \quad (2.12)$$

Продифференцировав  $h(t)$ , получим выражение для функции веса звена

$$k(t) = \frac{k}{T_2 - T_1} (e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}). \quad (2.13)$$

Передаточная функция апериодического звена 2-го порядка с точки зрения структуры представляет собой последовательное соединение двух апериодических звеньев 1-го порядка и его частотные характеристики в соответствии с ранее полученными выражениями можно записать следующим образом:

$$A(\omega) = \prod_{i=1}^2 A_i(\omega) = \frac{k}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1} \sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}}; \quad (2.14)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg T_1 \omega - \arctg T_2 \omega. \quad (2.15)$$

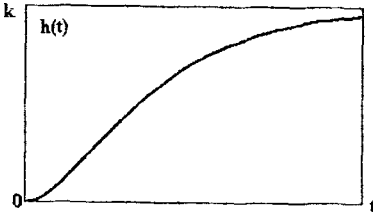


Рис. 2.13. Переходная функция аperiodического звена 2-го порядка

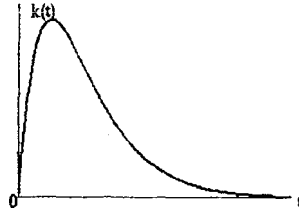


Рис. 2.14. Функция веса аperiodического звена 2-го порядка

На примере этого звена рассмотрим методику построения ЛЧХ сложного звена.

1. Передаточная функция сложного звена представляется в виде произведения передаточных функций типовых звеньев, причем эти звенья располагаются в порядке убывания постоянных времени:

$$W(s) = \frac{k}{(T_2 s + 1)(T_1 s + 1)} = \frac{k}{(T_2 s + 1)} * \frac{1}{(T_1 s + 1)}.$$

При таком представлении передаточной функции весь коэффициент передачи относят к какому-либо одному звену, обычно первому.

2. Производится расчет частот сопряжения и они отмечаются на оси частот:

$$\omega_{01} = \frac{1}{T_2}; \omega_{02} = \frac{1}{T_1}.$$

3. Строятся ЛАХ отдельных звеньев и общая ЛАХ строится путем их суммирования. Суммирование производится путем сложения наклонов асимптот элементарных звеньев в точках сопряжения.

Рассматриваемое звено является последовательным соединением двух аperiodических звеньев 1-го порядка и поэтому

$$L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg T_2 \omega - 20 \lg T_1 \omega. \quad (2.16)$$

4. Для построения фазовой характеристики рекомендуется произвести расчеты по формуле (2.15) и эти расчеты оформить в виде табл.2.1. Можно показать, что  $\varphi(\omega) = -90^\circ$  при  $\omega = 1 / \sqrt{T_1 T_2}$ .

Таблица 2.1

$\omega$	...	...	...	...	...
$\varphi_1(\omega)$	...	...	...	...	...
$\varphi_2(\omega)$	...	...	...	...	...
$\varphi(\omega)$	...	...	...	...	...

Графическое построение делается для суммарной фазовой характеристики.

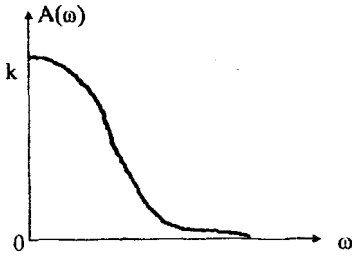


Рис. 2.15. АЧХ аperiodического звена 2-го порядка

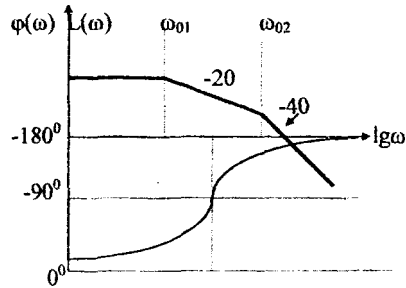


Рис.2.16. ЛЧХ аperiodического звена 2-го порядка

6. Форсирующее звено 1-го порядка:  $W(s) = k(Ts + 1)$ .

Изображение переходной функции будет

$$H(s) = k(Ts + 1) \frac{1}{s} = KT + \frac{k}{s}.$$

По таблицам преобразования Лапласа легко получить оригинал

$$h(t) = kT\delta(t) + k1(t). \quad (2.17)$$

Тогда

$$k(t) = kT\delta(t) + k\delta(t) \quad (2.18)$$

Определим частотные характеристики:

$$W(j\omega) = k(1 + jT\omega);$$

$$A(\omega) = k\sqrt{T^2\omega^2 + 1}; \quad (2.19)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg T\omega; \quad (2.20)$$

$$L(\omega) = 20\lg k + 20\lg\sqrt{T^2\omega^2 + 1} \approx$$

$$\approx \begin{cases} 20\lg k \text{ нпу} & \omega \leq \frac{1}{T} \\ 20\lg k + 20\lg T\omega \text{ нпу} & \omega > \frac{1}{T}. \end{cases} \quad (2.21)$$

Частотные характеристики звена показаны на рис. 2.17 и 2.18.

7. Форсирующее звено 2-го порядка:  $W(s) = k(T^2s^2 + 2T\zeta s + 1)$ .

При  $\zeta > 1$  звено превращается в последовательное соединение двух форсирующих звеньев 1-го порядка, характеристики которых известны. Поэтому рассмотрим только случай, когда  $0 < \zeta < 1$ :

$$H(s) = W(s) \frac{1}{s} = kTs + 2kT\zeta + \frac{k}{s};$$

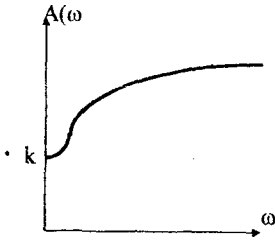


Рис. 2.17. АЧХ форсирующего звена 1-го порядка

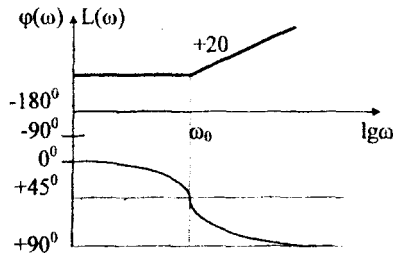


Рис. 2.18. ЛЧХ форсирующего звена 1-го порядка

$$h(t) = kT\delta(t) + 2kT\zeta\delta(t) + k1(t). \quad (2.22)$$

Для частотных характеристик (рис. 2.19, 2.20) получим

$$W(j\omega) = k((1 - T^2\omega^2) + j2T\zeta\omega);$$

$$A(\omega) = k\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4T^2\zeta^2\omega^2}; \quad (2.23)$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \arctg \frac{2T\zeta\omega}{1 - T^2\omega^2} & \text{npu } \omega \leq \frac{1}{T} \\ 180^\circ - \arctg \frac{2T\zeta\omega}{T^2\omega^2 - 1} & \text{npu } \omega > \frac{1}{T}; \end{cases} \quad (2.24)$$

$$L(\omega) = 20\lg k + 20\lg\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4T^2\zeta^2\omega^2} \approx$$

$$\approx \begin{cases} 20\lg k & \text{npu } \omega \leq \frac{1}{T} \\ 20\lg k + 40\lg T\omega & \text{npu } \omega > \frac{1}{T}. \end{cases} \quad (2.25)$$

Сравнение выражений для полученных частотных характеристик с такими же характеристиками колебательного звена позволяет сделать вывод, что они обратны последним.

8. Звено чистого запаздывания:  $W(s) = e^{-\tau s}$ .

Для этого звена

$$H(s) = \frac{1}{s} e^{-\tau s}; \quad h(t) = 1(t - \tau);$$

$$k(t) = \delta(t - \tau); \quad W(j\omega) = e^{-j\omega\tau} = \cos\omega\tau + j\sin\omega\tau;$$

$$A(\omega) = 1; \quad \varphi(\omega) = -\arctg t\omega; \quad L(\omega) = 0.$$

Таким образом, звено чистого запаздывания не изменяет амплитуду сигнала, а вносит фазовое запаздывание, тем большее, чем больше время запаздывания  $\tau$ .

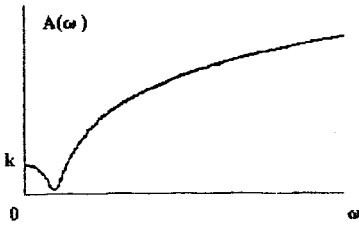


Рис. 2.19. АЧХ форсирующего звена 2-го порядка

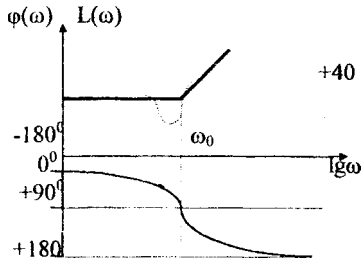


Рис. 2.20. ЛЧХ форсирующего звена 2-го порядка

Рассмотрим пример построения ЛЧХ системы, передаточная функция которой представляет собой произведение передаточных функций типовых динамических звеньев.

Пример. Передаточная функция самолета по углу тангажа может быть записана в виде

$$W(s) = \frac{k(T_1 s + 1)}{s(T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1)}.$$

Построим ЛЧХ при следующих значениях параметров:

$$k = 0.9; \quad T_1 = 1.8; \quad T = 1.2; \quad \zeta = 1.$$

1. Разбиваем исходную передаточную функцию на звенья в порядке убывания постоянных времени:

$$W(s) = \frac{k}{s} (T_1 s + 1) \frac{1}{T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1}.$$

Необходимо отметить, что желательно интегрирующее звено или дифференцирующее звено, если они имеются, располагать первыми.

2. Определяем частоты сопряжения:

$$\omega_{01} = \frac{1}{T_1} = 0.555; \quad \omega_{02} = \frac{1}{T} = 8.33.$$

Асимптота, соответствующая интегрирующему звену, пересекает ось частот при частоте  $\omega_n = k$ . Так как из всех полученных частот минимальной является  $\omega_{01}$ , то за начало координат по оси частот примем  $\omega = 0.1$ . Избрав масштаб, определим положение рассчитанных частот на соответствующей оси. Пусть  $m = 50 \text{ мм/дек}$ . Тогда

$$\omega_{01} = m \lg \frac{\omega_{01}}{\omega_0} = 37.2 \text{ мм при } \omega_0 = 0.1;$$

$$\omega_{02} = m \lg \frac{\omega_{02}}{\omega_0} = 46 \text{ мм при } \omega_0 = 1.$$

Для точки пересечения асимптоты интегрирующего звена с осью частот полу-

$$\text{чим } \omega_u = m \lg \frac{\omega_u}{\omega_0} = 47.7 \text{ мм при } \omega_0 = 0.1.$$

Полученные точки необходимо нанести на ось частот.

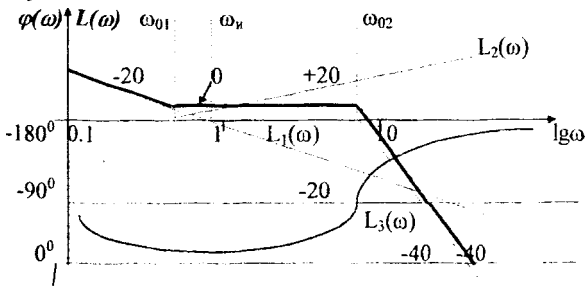


Рис. 2.21. ЛЧХ самолета как объекта управления по тангажу

3. Строим асимптотические ЛАХ звеньев  $L_1(\omega)$ ,  $L_2(\omega)$ ,  $L_3(\omega)$  и, суммируя их, получим асимптотическую ЛАХ системы  $L(\omega)$ , которая показана на рис.2.21 утолщенной линией.

4. Рассчитываем ЛФХ и расчеты сводим в табл.2.2.

$$\varphi(\omega) = -90^\circ + \arctg T_1(\omega) + \varphi_3(\omega).$$

Здесь  $\varphi_3(\omega)$  - фазовая характеристика колебательного звена, определяемая выражением (2.9).

Таблица 2.2

$\omega$	1	2	4	8	10
$\varphi_1(\omega)$	-90	-90	-90	-90	-90
$\varphi_2(\omega)$	60.5	74.5	82	86	87
$\varphi_3(\omega)$	-1.5	-3	-7	-67	-151
$\varphi(\omega)$	-31	-66	-15	-71	-154

По этим данным строится график ЛФХ.

### 3. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

#### 3.1. Основные понятия теории устойчивости

В процессе функционирования система подвергается различного рода возмущающим воздействиям, которые вызывают отклонения ее от положения равновесия или заданного движения.

**Система автоматического управления называется устойчивой, если после прекращения действия возмущений, вызвавших ее отклонение от положения равновесия, она возвращается в это положение равновесия или заданного движения.**

Следовательно, только устойчивая система является работоспособной.

Пусть САУ описывается системой нелинейных стационарных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy_k(t)}{dt} = Y_k(y_1, y_2, \dots, y_n, t), \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (3.1)$$

где  $y_k$ - переменные состояния системы;

$Y_k$ - известные функции, определенные в некоторой фиксированной области  $G$  пространства переменных  $y_k$  при любом  $t > 0$ .

В этом пространстве уравнения (3.1) определяют компоненты  $Y_k$  вектора скорости движения некоторой точки  $M$ , называемой изображающей точкой. С физической точки зрения уравнения (3.1) следует рассматривать как математическую форму записи тех физических законов, которым подчиняется система автоматического управления. Область  $G$  определения функций  $Y_k$  является той частью пространства состояний, на которую распространяется действие указанных физических законов.

Пусть величины  $y_{10}, \dots, y_{n0}$  обозначают начальные значения переменных состояния. Каждой системе начальных значений соответствует единственное решение

$$y_k = y_k(y_{10}, \dots, y_{n0}), \quad k=1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

уравнений (3.1), определенное для любых  $t \geq t_0$ . Допустим, что среди всех движений нас интересует то, которое описывается заданными функциями времени

$$y_k(t) = y_k^*(t), k=1, 2, \dots, n. \quad (3.3)$$

В частном случае, когда система стационарна и функции  $Y_k$  явно не зависят от времени, тогда движения (3.3) являются установившимися. Им отвечают так называемые очевидные решения

$$y_k^* = const, k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.4)$$

служащие корнями уравнений

$$Y_k(y_1, \dots, y_n) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

В дальнейшем будем говорить об устойчивости движения системы, имеющей решение (3.3), рассматривая ее установившееся движение (3.4) как частный случай. Введем в рассмотрение отклонения от заданного движения

$$x_k = y_k - y_k^*, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.5)$$

Подставив выражения для  $y_k$ , полученные из (3.5), в исходную систему уравнений, получим

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, \dots, x_k, t), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.6)$$

где  $X_k(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = Y_k(x_1 + y_1^*, \dots, x_n + y_n^*, t)$ .

Уравнения (3.6) записаны относительно отклонений, появившихся в результате каких-либо возмущений, и по терминологии Ляпунова называются **уравнениями возмущенного движения** [1,7,13,15].

Формула (3.5) определяет преобразование переноса начала координат в точку с координатами  $y_k^*$  и поэтому, если решение системы (3.1) сходится к значениям  $y_k^*$ , то решение системы (3.6) сходится к нулю. Уравнения

$$x_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.7)$$

называются **уравнениями невозмущенного движения**.

При  $t=t_0$  переменные  $x_k$  принимают свои начальные значения  $x_{k0}$ , которые называются **возмущениями**. Каждой заданной системе таких возмущений соответствует единственное решение

$$x_k = x_k(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, t), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.8)$$

Эти решения представляют собой **возмущенное движение системы**.

Изучим поведение разностей (3.5) при  $t > t_0$ . Рассмотрим для этого уравнение

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 = R^2, \quad (3.9)$$

которое определяет в  $n$ -мерном пространстве квадрат расстояния изображающей точки  $M$  от начала координат. Возмущенное движение при  $t > t_0$  может протекать следующим образом:

- 1) изображающая точка  $M$  все более удаляется от начала координат, а величина  $R$  неограниченно возрастает (кривая 1 на рис.3.1);
- 2) изображающая точка  $M$  остается внутри некоторой окрестности начала координат, так что величина  $R$  все время имеет ограниченное значение, не превосходящее наперед заданное малое положительное число  $\varepsilon$ , т.е.  $R < \varepsilon$  (кривая 2 на рис.3.1);



- 3) изображающая точка  $M$  с течением времени возвращается в начало координат, т.е.  $\lim_{t \rightarrow \infty} R = 0$  (кривая 3 на рис.3.1).

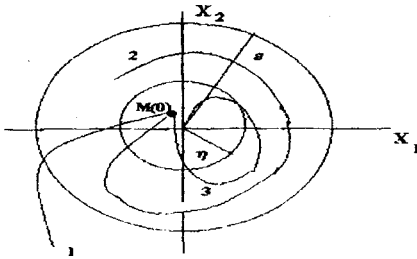


Рис. 3.1. Виды движения изображающей точки

Равновесное состояние  $x_k=0$  можно считать устойчивым, если система, получив начальное возмущение, в дальнейшем продолжает оставаться в ближайшей окрестности равновесного состояния или возвращается в него. Следует дать конкретное толкование понятию “ближайшая окрестность” и основоположник теории устойчивости А.М. Ляпунов дал следующее определение устойчивости.

Невозмущенное движение называется устойчивым по отношению к величинам  $x_k$ , если при всяком произвольно заданном положительном числе  $\varepsilon$ , как бы мало оно ни было, найдется другое такое положительное число  $\eta(\varepsilon)$ , при котором для возмущений  $x_{k0}$ , удовлетворяющих условиям

$$|x_{k0}| < \eta, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.10)$$

возмущенное движение будет удовлетворять неравенствам

$$|x_k(t)| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.11)$$

при любом  $t > t_0$ . Неравенства (3.10) ограничивают область допустимых начальных отклонений.

Если при сколь угодно малом  $\varepsilon > 0$  невозможно найти  $\eta(\varepsilon)$ , при котором удовлетворяются неравенства (3.11), то система неустойчива.

Если система устойчива и ее движение таково, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} R = 0$ , то эта система асимптотически устойчива.

Отсюда следует, что на рис. 3.1 кривая 1 соответствует неустойчивой системе, кривая 2 - устойчивой системе, а кривая 3 - асимптотически устойчивой системе.

А.М. Ляпунов разработал различные методы оценки устойчивости САУ. Прямой, или так называемый второй метод Ляпунова, применим для исследо-

вания всех классов систем и основан на использовании специальных функций Ляпунова. Мы уже говорили, что значительное число систем допускает линеаризацию по методу малого отклонения и Ляпунов впервые доказал допустимость суждения об устойчивости в малом, т.е. при малых отклонениях, исходной нелинейной системы по уравнениям первого приближения, полученным в результате линеаризации.

### 3.2 Исследование устойчивости по уравнениям первого приближения

Любое линейное дифференциальное уравнение имеет решение вида

$$x(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} + x_m(t), \quad (3.12)$$

где  $\lambda_i$  - корни характеристического уравнения,  $x_m(t)$  - частное решение, определяющее требуемое движение системы. Отклонение от заданного движения запишется в виде

$$\varepsilon(t) = x(t) - x_m(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}.$$

Отсюда следует, что если все корни характеристического уравнения отрицательны (имеют отрицательную вещественную часть), то  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$  и линей-

ная система асимптотически устойчива. Если среди корней характеристического уравнения имеется хотя бы один, имеющий положительную вещественную часть, то  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \infty$  и линейная система неустойчива. Можно ли по корням

характеристического уравнения линеаризованной системы оценить устойчивость исходной нелинейной системы при малых отклонениях? А.М. Ляпунов доказал следующие теоремы об устойчивости в малом.

**Теорема 1.** Если вещественные части  $\alpha_k$  всех корней  $\alpha_k \pm j\beta_k$  характеристического уравнения первого приближения отрицательны, то невозмущенное движение исходной нелинейной системы асимптотически устойчиво независимо от неучитываемых членов разложения в ряд Тейлора выше первого порядка малости.

**Теорема 2.** Если среди корней характеристического уравнения первого приближения найдется хотя бы один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение исходной нелинейной системы неустойчиво независимо от неучитываемых членов разложения в ряд Тейлора выше первого порядка малости.

Критические случаи, когда нельзя судить об устойчивости по уравнениям первого приближения, возникают, если среди всех корней имеется группа корней, вещественная часть которых равна нулю, а остальные имеют отрицательные вещественные части.

Рассмотрим рис.3.2.

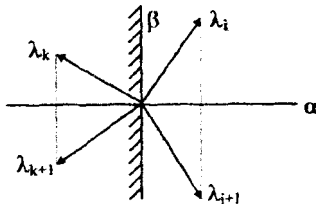


Рис. 3.2. Расположение корней системы на комплексной плоскости

Корни характеристического уравнения, имеющие отрицательные вещественные части, расположены в левой полуплоскости и называются устойчивыми корнями (полюсами) системы. Корни с положительными вещественными частями расположены в правой полуплоскости и являются неустойчивыми полюсами системы. С этой точки зрения мнимая ось является границей устойчивости и штрихуется слева.

Представляет интерес часто встречающийся случай, когда характеристический полином системы имеет один нулевой корень, а остальные корни лежат в левой полуплоскости. Это соответствует уравнению системы, в котором равен нулю свободный член  $a_n$ :

$$(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s)X(s) = B(s)G(s).$$

Вынося за скобки оператор  $s$ , получим

$$(a_0 s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \dots + a_{n-1})sX(s) = B(s)G(s).$$

Так как оператор Лапласа при нулевых начальных условиях является символом дифференцирования, то можно сделать вывод, что последнее уравнение записано относительно скорости регулируемой величины. Характеристическое уравнение

$$(a_0 s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \dots + a_{n-1}) = 0$$

по условию имеет только устойчивые корни и, следовательно, система устойчива относительно скорости регулируемой величины. По отношению к самой регулируемой величине система нейтральна и ее значение после окончания процесса регулирования произвольно и зависит от начальных условий. Такие системы называются **нейтрально устойчивыми**.

Оценка устойчивости непосредственно по корням характеристического уравнения возможна, но малоприменяема в инженерной и научной практике, так как знание численных значений корней не несет информации о путях стабилизации системы, если она неустойчива или имеет малые запасы устойчивости. Поэтому для целей анализа устойчивости разработаны специальные критерии, позволяющие исследовать вопросы устойчивости без определения корней характеристического уравнения.

### 3.3. Алгебраические критерии устойчивости

#### 3.3.1. Необходимое условие устойчивости

Характеристическое уравнение системы после определения его корней может быть представлено в виде

$$a_0(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n) = 0$$

Если система устойчива и все ее корни имеют отрицательные вещественные части, то после раскрытия скобок в последнем выражении получим характеристическое уравнение системы

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0,$$

в котором все коэффициенты  $a_i, i=1, 2, \dots, n$ , будут строго больше нуля.

**Для устойчивости системы необходимо, но недостаточно, чтобы все коэффициенты ее характеристического уравнения были строго больше нуля.**

Понятие недостаточности означает, что если какой-либо коэффициент характеристического уравнения системы меньше нуля или равен нулю, то система неустойчива, но положительность всех коэффициентов еще не означает, что система устойчива. Нужны дополнительные исследования.

#### 3.3.2. Критерий устойчивости Гурвица

Для оценки устойчивости по этому критерию необходимо из коэффициентов характеристического уравнения составить определитель Гурвица по следующим правилам:

- 1) по главной диагонали выписываются все коэффициенты характеристического уравнения от  $a_1$  до  $a_n$  в порядке возрастания индексов;
- 2) столбцы определителя заполняются коэффициентами от главной диагонали вниз по убывающим, а вверх - по возрастающим индексам;
- 3) места коэффициентов, индексы которых больше  $n$  или меньше нуля, заполняются нулями.

Для примера составим определитель Гурвица для системы 5-го порядка. Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$a_0 s^5 + a_1 s^4 + a_2 s^3 + a_3 s^2 + a_4 s + a_5 = 0,$$

где все коэффициенты строго больше нуля. Получим

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{vmatrix}.$$

Для того чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части и система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты и все диагональные определители определителя Гурвица были строго больше нуля.

Для устойчивости системы 5-го порядка необходимо выполнение условий

$$\begin{aligned} a_4 &> 0, \quad k=0, 1, 2, \dots, 5; \\ \Delta_2 &= a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0; \\ \Delta_3 &= a_3 \Delta_2 - a_1^2 a_4 > 0; \\ \Delta_4 &= a_4 \Delta_3 - a_2 a_5 \Delta_2 + a_0 a_5 (a_1 a_4 - a_0 a_3) > 0; \\ \Delta_5 &= a_5 \Delta_4 > 0. \end{aligned}$$

Так как при выполнении необходимого условия устойчивости всегда  $a_n > 0$ , то об устойчивости системы можно судить по определителям до  $\Delta_{n-1}$  включительно. Доказано, что если  $\Delta_{n-1} = 0$ , то система находится на колебательной границе устойчивости, т.е. имеет пару чисто мнимых корней. Из условия  $\Delta_{n-1} = 0$  можно определить критические значения параметров системы, при которых она выходит на границу устойчивости.

Пример. Исследовать устойчивость системы стабилизации угла тангажа самолета и определить критическое значение передаточного числа автопилота по углу тангажа. Система задана структурной схемой (рис. 3.3).

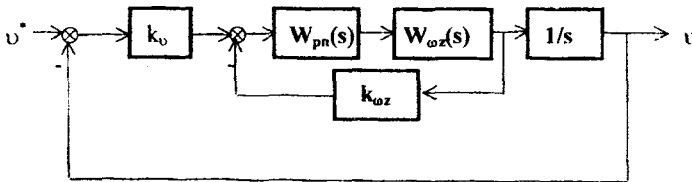


Рис.3.3. Структурная схема системы стабилизации угла тангажа

На схеме обозначено:

$k_0$  - передаточное число (коэффициент передачи) автопилота по углу тангажа;

$$W_{pn}(s) = \frac{1}{T_{pn}s + 1} \quad \text{— передаточная функция рулевого привода;}$$

$$W_{\omega_z}(s) = \frac{k_c(T_1 s + 1)}{T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1} \quad \text{— передаточная функция самолета по угловой скорости тангажа } \omega_z;$$

$k_{\omega_z}$  - передаточное число автопилота по угловой скорости тангажа.

Для передаточной функции разомкнутой системы можно записать:

$$W(s) = \frac{k_v k_c W_{pn}(s) W_{\omega z}(s)}{s(1 + k_{\omega z} W_{pn}(s) W_{\omega z}(s))} = \frac{k_v k_c (T_1 s + 1)}{s(a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3)}$$

где  $a_0 = T^2 T_{pn}$ ;  $a_1 = 2TT_{pn}\zeta + T^2$ ;  $a_2 = T_{pn} + 2T\zeta + k_{\omega z} k_c T_1$ ;  
 $a_3 = 1 + k_{\omega z} k_c$ .

Передаточная функция замкнутой системы примет вид

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{k_v k_c (T_1 s + 1)}{d_0 s^4 + d_1 s^3 + d_2 s^2 + d_3 s + d_4}$$

где  $d_0 = a_0$ ;  $d_1 = a_1$ ;  $d_2 = a_2$ ;  $d_3 = a_3 + k_v k_c T_1$ ;  $d_4 = k_v k_c$ .

Составим определитель Гурвица:

$$\Delta = \begin{vmatrix} d_1 & d_3 & 0 & 0 \\ d_0 & d_2 & d_4 & 0 \\ 0 & d_1 & d_3 & 0 \\ 0 & d_0 & d_2 & d_4 \end{vmatrix}$$

Оценим устойчивость системы для следующих значений параметров:

$$k_v = 5; k_{\omega z} = 1.2; k_c = 0.9; T_1 = 1.8; T = 0.12; \zeta = 0.1.$$

При этих значениях для коэффициентов характеристического уравнения получим

$$d_0 = a_0 = 0.00115; d_1 = a_1 = 0.0163; d_2 = a_2 = 2.048; a_3 = 2.08; \\ d_3 = 10.18; d_4 = 4.5.$$

Следовательно, все коэффициенты характеристического уравнения замкнутой системы положительны и

$$\Delta_2 = d_1 d_2 - d_0 d_3 = 0.021675 > 0;$$

$$\Delta_3 = d_3 \Delta_2 - d_1^2 d_4 = 0.21945 > 0;$$

$$\Delta_4 = d_4 \Delta_3 = 0.98755 > 0.$$

Условия устойчивости выполнены и система при избранных параметрах устойчива.

Определим критическое значение передаточного числа по углу тангажа, для чего приравняем третий диагональный определитель нулю и сделаем преобразования:

$$d_3(d_1 d_2 - d_0 d_3) - d_1^2 d_4 = 0.$$

Отсюда

$$d_3^2 - \frac{d_1 d_2}{d_0} d_3 + \frac{d_1^2}{d_0} d_4 = 0.$$

В последнем выражении только  $d_3$  и  $d_4$  являются функциями коэффициента  $k_v$ , подставив их в него, получим квадратное уравнение относительно этого коэффициента:

$$(k_c T_1)^2 k_v^2 + (2a_3 k_c T_1 - \frac{d_1 d_2}{d_0} k_c T_1 + \frac{d_1^2}{d_0} k_c) k_v + (a_3^2 - \frac{d_1 d_2}{d_0} a_3) = 0.$$

Решив это уравнение, получим критическое значение передаточного числа по углу тангажа

$$(k_v)_{кр} = 16.56.$$

Система устойчива, если  $k_v < 16.56$ .

### 3.3.3. Критерий устойчивости Рауса

Критерий Рауса требует несколько меньшего объема вычислений, чем критерий Гурвица, и более удобен для программирования на ЭВМ. Для суждения об устойчивости системы по этому критерию необходимо составить таблицу Рауса.

Таблица Рауса

i (номер строки)	k (номер столбца)								
	1	2	3	4	5	6	7	8	.....
1	$d_0$	$d_2$	$d_4$	$d_6$	$d_8$	$d_{10}$	$d_{12}$	$d_{14}$	.....
2	$d_1$	$d_3$	$d_5$	$d_7$	$d_9$	$d_{11}$	$d_{13}$	$d_{15}$	.....
3	$c_{13}$	$c_{23}$	$c_{33}$	$c_{43}$	$c_{53}$	$c_{63}$	$c_{73}$	.....	.....
4	$c_{14}$	$c_{24}$	$c_{34}$	$c_{44}$	$c_{54}$	$c_{64}$	$c_{74}$	.....	.....
5	$c_{15}$	$c_{25}$	$c_{35}$	$c_{45}$	$c_{55}$	$c_{65}$	.....	.....	.....
6	$c_{16}$	$c_{26}$	$c_{36}$	$c_{46}$	$c_{56}$	.....	.....	.....	.....
7	$c_{17}$	$c_{27}$	$c_{37}$	$c_{47}$	.....	.....	.....	.....	.....

Элементы каждой строки для  $i > 2$  вычисляются по формуле

$$C_{ki} = \frac{C_{1,i-1} C_{k+1,i-2} - C_{1,i-2} C_{k+1,i-1}}{C_{1,i-1}}. \quad (3.13)$$

Для того чтобы корни характеристического уравнения лежали в левой полуплоскости и система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все элементы первого столбца таблицы Рауса были строго положительны.

### 3.4. Частотные критерии устойчивости

#### 3.4.1. Принцип аргумента

Частотные критерии устойчивости используются в графоаналитическом виде и отличаются большой наглядностью при проведении расчетов. В основе всех частотных методов лежит принцип аргумента.

Рассмотрим характеристическое уравнение системы

$$D(s) = d_0 s^n + d_1 s^{n-1} + \dots + d_{n-1} s + d_n = 0.$$

Если  $\lambda_i, i=1, 2, \dots, n$  - корни этого уравнения, то

$$D(s) = d_0 (s - \lambda_1) (s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n).$$

Каждому корню на комплексной плоскости соответствует определенная точка, и геометрически на этой плоскости каждый корень можно изобразить в виде вектора с модулем  $|\lambda_i|$ , проведенного из начала координат (рис.3.4). Сделаем замену  $s=j\omega$  и получим

$$D(j\omega) = d_0 (j\omega - \lambda_1) (j\omega - \lambda_2) \dots (j\omega - \lambda_n).$$

В соответствии с правилом вычитания векторов получим, что конец каждого элементарного вектора  $(j\omega - \lambda_i)$  находится на мнимой оси.

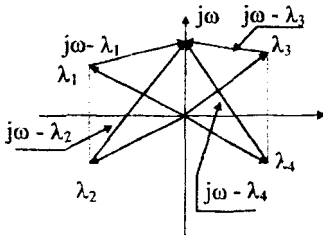


Рис. 3.4. К определению принципа аргумента

Аргумент вектора  $D(j\omega)$  равен сумме аргументов элементарных векторов

$$\arg \bar{D}(j\omega) = \sum_{i=1}^n \arg(j\omega - \lambda_i).$$

Направление вращения вектора  $(j\omega - \lambda_i)$  против часовой стрелки при изменении частоты от  $-\infty$  до  $+\infty$  принято считать положительным, а по часовой стрелке - отрицательным. Предположим, что характеристическое уравнение имеет  $m$  корней в правой полуплоскости и  $n - m$  корней в левой полуплоскости. При изменении частоты от  $-\infty$  до  $+\infty$  каждый вектор  $(j\omega - \lambda_i)$ , начало которого лежит в левой полуплоскости, повернется на угол  $+\pi$ , а каждый вектор, начало которого лежит в правой полуплоскости - на угол  $-\pi$ . Изменение аргумента вектора  $D(j\omega)$  при этом будет

$$\Delta \arg D(j\omega) = (n - m)\pi - m\pi = (n - 2m)\pi. \quad (3.14)$$

$-\infty \leq \omega \leq +\infty$

Это выражение и определяет принцип аргумента.

**Изменение аргумента вектора  $D(j\omega)$  при изменении частоты от  $-\infty$  до  $+\infty$**



равно разности между числом  $(n-m)$  корней уравнения  $D(s)=0$ , лежащих в левой полуплоскости, и числом  $m$  корней этого уравнения, лежащих в правой полуплоскости, умноженной на  $\pi$ .

### 3.4.2. Критерий устойчивости Михайлова

Из (3.14) следует, что если все корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости, т.е.  $m=0$ , то

$$\Delta \arg D(j\omega) = n\pi \quad (3.15)$$

$$-\infty \leq \omega \leq \infty$$

Отсюда следует первая формулировка критерия Михайлова.

Система автоматического управления устойчива, если при возрастании частоты от  $-\infty$  до  $+\infty$  изменение аргумента вектора  $D(j\omega)$  будет равно  $n\pi$ , где  $n$  - порядок характеристического уравнения.

Вектор  $D(j\omega)$  можно представить в виде

$$D(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega).$$

Вещественная составляющая этого выражения является четной функцией, а мнимая - нечетной функцией частоты, т.е.  $U(-\omega)=U(\omega)$ ;  $V(-\omega)=-V(\omega)$  и  $D(-j\omega)=U(\omega) - jV(\omega)$ . Отсюда следует, что кривая Михайлова симметрична относительно вещественной оси и при ее построении можно ограничиться диапазоном частот от 0 до  $+\infty$ . Изменение аргумента вектора  $D(j\omega)$  при этом уменьшится в два раза и формулировка критерия Михайлова будет следующей.

Система автоматического управления устойчива, если при возрастании частоты от 0 до  $+\infty$  вектор  $D(j\omega)$  повернется на угол  $n\pi/2$  или, что то же самое, если кривая Михайлова при том же изменении частоты, начиная с положительной вещественной полуоси, обходит последовательно в положительном направлении  $n$  квадрантов и заканчивается в  $n$ -м квадранте (рис.3.5).

Если хотя бы один квадрант пропущен (рис.3.6), то система неустойчива.

Наблюдая за поведением кривой Михайлова для устойчивой САУ, можно заметить, что при ее прохождении через  $n$  квадрантов корни уравнений  $U(\omega)=0$  и  $V(\omega)=0$  чередуются между собой, т.е. между двумя корнями уравнения  $V(\omega)=0$  лежит один корень уравнения  $U(\omega)=0$ .

Система автоматического управления устойчива, если корни уравнений  $V(\omega)=0$  и  $U(\omega)=0$  вещественные и перемежаются между собой.

Система может находиться на границе устойчивости и этому соответствуют два случая:

1) характеристическое уравнение системы имеет один нулевой корень, что будет при  $a_n=0$ ; кривая Михайлова при этом выходит из начала координат;

2) характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней  $\pm j\omega_n$  и  $D(j\omega_n)=U(\omega_n)+jV(\omega_n)=0$ , что может быть только, если одновременно  $U(\omega_n)=0$  и  $V(\omega_n)=0$ ; это означает, что кривая Михайлова проходит через начало координат.

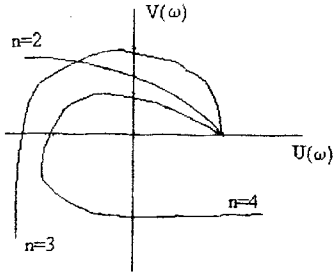


Рис. 3.5. Кривые Михайлова для устойчивых САУ

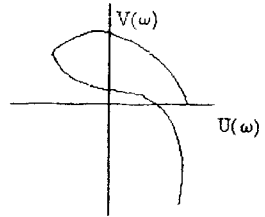


Рис. 3.6. Кривая Михайлова для неустойчивой САУ

Используя критерий Михайлова, можно определить критические значения параметров системы, при которых она находится на границе устойчивости, в частности критический коэффициент усиления. Для этого нужно решить систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} U(\omega, k) &= 0 \\ V(\omega, k) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

**Пример.** Используя критерий Михайлова, оценить устойчивость системы стабилизации угла тангажа самолета и определить критическое значение передаточного числа  $k_v$ .

Характеристическое уравнение замкнутой системы было получено выше и имеет вид

$$d_0 s^4 + d_1 s^3 + d_2 s^2 + d_3 s + d_4 = 0.$$

Сделаем замену  $s = j\omega$  и выделим вещественную и мнимую части

$$U(\omega) = -d_0 \omega^4 - d_2 \omega^2 + d_4;$$

$$V(\omega) = -d_1 \omega^3 + d_3 \omega.$$

Построенная при заданных ранее параметрах системы кривая Михайлова имеет вид, показанный на рис.3.7.

Кривая начинается на вещественной положительной полуоси, проходит последовательно 4 квадранта и заканчивается в 4-м квадранте. Следовательно, при данных параметрах исследуемая система устойчива.

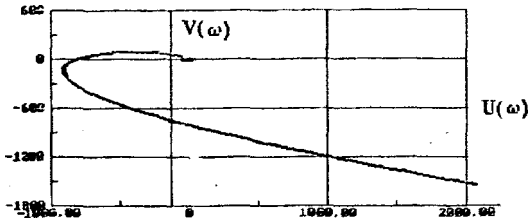


Рис. 3.7. Кривая Михайлова для системы стабилизации угла тангажа

Для определения критического значения передаточного числа по углу тангажа составим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} U(\omega, k_v) &= d_0 \omega^4 - d_2 \omega^2 + k_c k_v \\ V(\omega, k_v) &= -d_1 \omega^3 + (a_3 + k_v k_c T_1) \omega \end{aligned} \right\}$$

Из второго уравнения системы определяем частоту и, подставив выражение для нее в первое уравнение, после преобразований получим квадратное уравнение относительно искомого значения передаточного числа:

$$(k_c T_1)^2 k_v^2 + (2a_3 k_c T_1 - \frac{d_1 d_2}{d_0} k_c T_1 + \frac{d_1^2}{d_0} k_c) k_v + (a_3 - \frac{d_1 d_2}{d_0} a_3) = 0$$

Полученное уравнение будет абсолютно идентично полученному при решении задачи по критерию Гурвица и результат таким же:

$$(k_v)_{кр} = 16.56.$$

Построение кривой Михайлова для систем высокого порядка может быть связано с громоздкими вычислениями и графическими построениями. В этих случаях может быть более просто оценить устойчивость по корням уравнений  $U(\omega)=0$  и  $V(\omega)=0$ . Определим корни этих уравнений и расположим их на числовой оси (рис.3.8).

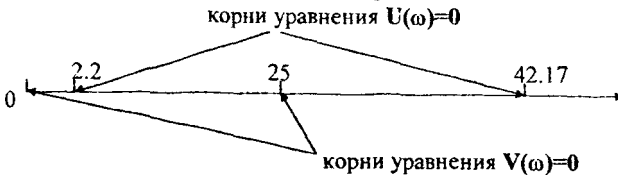


Рис. 3.8. Расположение корней на числовой оси

Корни вещественные и перемежаются между собой. Система стабилизации угла тангажа устойчива.

### 3.4.3 Критерий устойчивости Найквиста

Критерий устойчивости Найквиста позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по виду АФЧХ разомкнутой системы.

Пусть передаточные функции разомкнутой и замкнутой системы имеют

$$\text{вид: } W(s) = \frac{B(s)}{A(s)}; \quad \Phi(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{B(s)}{A(s)+B(s)}.$$

Введем функцию

$$N(s) = 1 + W(s) = \frac{A(s)+B(s)}{A(s)} = \frac{D(s)}{A(s)}, \quad (3.17)$$

где  $D(s)$ - характеристический полином замкнутой системы. Перейдя к частотным представлениям, получим

$$\bar{N}(j\omega) = \frac{\bar{D}(j\omega)}{\bar{A}(j\omega)}. \quad (3.18)$$

Вектор  $N(j\omega)$  называется вектором Найквиста. Очевидно, что числитель и знаменатель этого вектора имеют один и тот же порядок  $n$ . При использовании критерия Найквиста следует различать два случая.

1. Разомкнутая система устойчива и ее характеристическое уравнение  $A(s)=0$  имеет все корни в левой полуплоскости. Тогда при изменении частоты от 0 до  $\infty$

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg \bar{A}(j\omega) = n \frac{\pi}{2}. \quad (3.19)$$

Изменение аргумента вектора  $D(j\omega)$  в общем случае равно

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg \bar{D}(j\omega) = (n - 2m) \frac{\pi}{2}, \quad (3.20)$$

где  $m$ - число корней уравнения  $D(s)=0$ , лежащих в правой полуплоскости.

Изменение аргумента вектора Найквиста будет

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg \bar{N}(j\omega) = (n - 2m) \frac{\pi}{2} - n \frac{\pi}{2}. \quad (3.21)$$

Если замкнутая система устойчива, то  $m=0$  и

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg \bar{N}(j\omega) = 0.$$

Так как при  $\omega \rightarrow \infty$   $W(j\omega) \rightarrow 0$ , то  $N(j\omega) \rightarrow 1$ . Рассмотрим рисунок 3.9,а, на котором показана кривая Найквиста, которую описывает вектор Найквиста при изменении частоты от 0 до  $\infty$ . Нетрудно убедиться, что вектор Найквиста опишет угол, равный нулю только в случае, если его годограф не охватывает начало координат. Перенесем начало координат в точку с координатами  $(1, j0)$  (рис.3.9,б). Можно убедиться, что изменение аргумента вектора Найквиста будет равно ну-

лю, если АФЧХ  $W(j\omega)$  разомкнутой системы не охватывает критическую точку с координатами  $(-1, j0)$ .

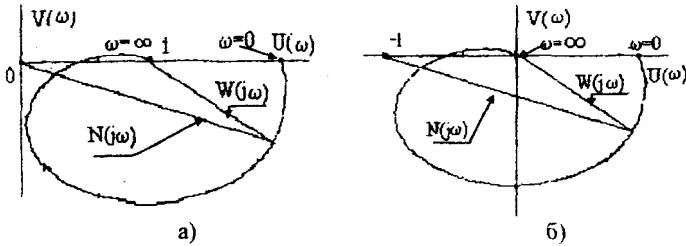


Рис. 3.9. К определению критерия Найквиста

Критерий Найквиста для рассматриваемого случая формулируется следующим образом.

Система автоматического управления, устойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчивой и в замкнутом состоянии, если АФЧХ  $W(j\omega)$  разомкнутой системы при изменении частоты от 0 до  $\infty$  не охватывает критическую точку с координатами  $(-1, j0)$ .

Особенности возникают, если разомкнутая система нейтрально-устойчива, т.е.

$$W(s) = \frac{B(s)}{sA_1(s)}$$

где полином  $A_1(s)$  имеет все корни в левой полуплоскости. При  $\omega=0$  АФЧХ разомкнутой системы  $W(j\omega)=\infty$  и проследить поведение кривой АФЧХ в окрестности этой точки невозможно. При изменении частоты от  $-\infty$  до  $+\infty$  наблюдается движение корней вдоль мнимой оси снизу вверх и при  $\omega=0$  происходит бесконечный разрыв. При этом обойдем нулевой корень (рис.3.10) по полуокружности бесконечно малого радиуса  $\rho$  так, чтобы этот корень остался слева, т.е. искусственно отнесем его к левой полуплоскости.

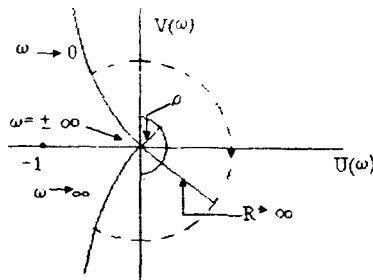


Рис. 3.10. Годограф Найквиста для нейтрально- устойчивой САУ

При движении по этой полуокружности в положительном направлении независимая переменная изменяется по закону

$$s = \rho e^{j\varphi(\omega)},$$

где фаза  $\varphi(\omega)$  изменяется от  $-\pi/2$  до  $+\pi/2$ . Подставив это выражение в передаточную функцию вместо множителя  $s$  в знаменателе, получим

$$W(s) = \frac{K(s)}{\rho} e^{-j\varphi(\omega)} = R(s)e^{-j\varphi(\omega)},$$

где  $R \rightarrow \infty$  при  $\rho \rightarrow 0$ , а фаза  $\varphi(\omega)$  изменяется от  $+\pi/2$  до  $-\pi/2$ . Следовательно, в окрестности нулевого корня годограф  $W(j\omega)$  представляет собой часть окружности бесконечно большого радиуса, движение по которой происходит при увеличении частоты в отрицательном направлении.

Для оценки устойчивости замкнутой системы, если разомкнутая система нейтрально устойчива, необходимо АФЧХ  $W(j\omega)$  разомкнутой системы дополнить дугой бесконечно большого радиуса, начиная с меньших частот, в отрицательном направлении и для полученной замкнутой кривой воспользоваться критерием Найквиста для систем, устойчивых в разомкнутом состоянии.

2. Разомкнутая система неустойчива. В этом случае

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} A(j\omega) = (n - 2p) \frac{\pi}{2},$$

где  $p$  - число корней характеристического уравнения разомкнутой системы, лежащих в правой полуплоскости. Если замкнутая система устойчива, т.е.  $m=0$ , то

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \bar{N}(j\omega) = n \frac{\pi}{2} - (n - 2p) \frac{\pi}{2} = 2\pi \frac{p}{2}, \quad (3.22)$$

т.е. АФЧХ разомкнутой системы охватывает критическую точку  $(-1, j0)$  в положительном направлении ровно  $p/2$  раз.

Система, неустойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчивой в замкнутом состоянии, если АФЧХ  $W(j\omega)$  разомкнутой системы при изменении частоты от 0 до  $\infty$  охватывает критическую точку  $(-1, j0)$  в положительном направлении ровно  $p/2$  раз, где  $p$  - число правых полюсов разомкнутой системы.

Определение числа охватов критической точки - непростая задача, особенно в случае систем высокого порядка. Поэтому в практических приложениях нашла применение другая формулировка критерия Найквиста для рассматриваемого случая.

Переход годографа  $W(j\omega)$  через отрезок вещественной полуоси  $(-\alpha, -1)$ , т.е. левее критической точки при увеличении частоты сверху вниз, считается положительным, а снизу вверх - отрицательным.

Система, неустойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчивой в замкнутом состоянии, если разность между числом положительных и отрицательных переходов АФЧХ разомкнутой системы равна  $p/2$ :

$$P^+ - P^- = \frac{p}{2}, \quad (3.23)$$

где  $P^+$  — число положительных переходов,  $P^-$  — число отрицательных переходов.

Например, передаточная функция ракеты-носителя “Авангард” имеет два неустойчивых полюса и ее АФЧХ показана на рис. 3.11.

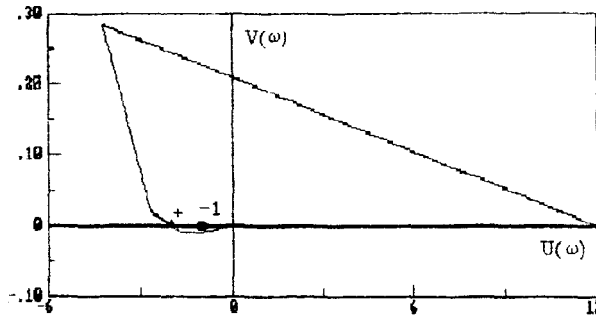


Рис. 3.11. АФЧХ ракеты “Авангард”

Очевидно, что для данной ракеты как объекта управления  $P^+ = 1$ , а  $P^- = 0$  и  $P^+ - P^- = 1 = \frac{p}{2}$ . Замкнутая система будет устойчивой.

#### 3.4.4. Запасы устойчивости

Устойчивость замкнутой САУ зависит от расположения годографа АФЧХ разомкнутой системы относительно критической точки. Чем ближе эта кривая проходит от критической точки, тем ближе замкнутая САУ к границе устойчивости. Для устойчивых систем удаление АФЧХ разомкнутой системы от критической точки принято оценивать запасами устойчивости по фазе и по модулю.

Допустим, что АФЧХ некоторой разомкнутой системы имеет вид, показанный на рис. 3.12.

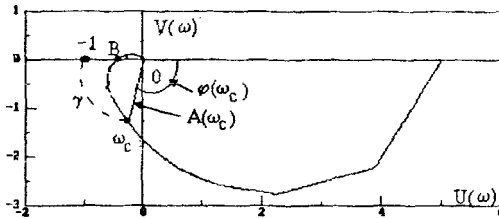


Рис. 3.12. АФЧХ разомкнутой системы

Угол  $\gamma$ , образуемый прямой, проходящей через точку пересечения АФЧХ с окружностью единичного радиуса, что соответствует частоте среза системы, и отрицательной вещественной полуосью, называется запасом устойчивости системы по фазе:

$$\gamma = 180^\circ - |\varphi(\omega_c)|. \quad (3.24)$$

Запасом устойчивости по модулю называется величина

$$h = \frac{1}{OB} = \frac{1}{A(\omega_\pi)}, \quad (3.25)$$

где  $A(\omega_\pi)$  - значение АФЧХ при частоте  $\omega = \omega_\pi$ , при которой она пересекает вещественную ось.

Для всех систем должны выполняться требования:

$$\gamma \geq 24^\circ; \quad h \geq 2.$$

Так как АФЧХ графически строится в определенном масштабе, то для вычисления запаса устойчивости по модулю можно просто измерить длины отрезков, соответствующих единице и  $OB$ , и разделить результат первого измерения на второй. Если увеличивать коэффициент усиления системы, то точка  $B$  будет смещаться влево и при  $OB = -1$  коэффициент усиления примет критическое значение. Поэтому запас устойчивости по модулю можно определить и по формуле

$$h = \frac{k_{кр}}{k}$$

Пример. Используя критерий Найквиста, оценить устойчивость замкнутой системы стабилизации угла тангажа и определить ее запасы устойчивости.

Передаточная функция разомкнутой системы была получена ранее и имеет вид

$$W(s) = \frac{k_0 k_c (T_1 s + 1)}{s(a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3)}.$$

Численные значения коэффициентов заданы или вычислены ранее. Сделаем замену  $s = j\omega$ :



$$W(j\omega) = \frac{k_v k_c (1 + jT_1\omega)}{j\omega(-a_1\omega^2 + a_3) + j(-a_0\omega^3 + a_2\omega)} =$$

$$= \frac{k_v k_c (1 + jT_1\omega) [(a_0\omega^4 - a_2\omega^2) - j(a_3\omega - a_1\omega^2)]}{(a_0\omega^4 - a_2\omega^2)^2 + (a_3\omega - a_1\omega^3)^2}$$

После преобразований получим

$$U(\omega) = \frac{k_v k_c ((a_0 - a_1 T_1)\omega^4 + (a_3 T_1 - a_2)\omega^2)}{(a_0\omega^4 - a_2\omega^2)^2 + (a_3\omega - a_1\omega^3)^2},$$

$$V(\omega) = \frac{k_v k_c (a_0 T_1 \omega^5 + (a_1 - a_2 T_1)\omega^3 - a_3\omega)}{(a_0\omega^4 - a_2\omega^2)^2 + (a_3\omega - a_1\omega^3)^2}.$$

Изменяя частоту от 0 до  $\infty$ , построим кривую АФЧХ (рис. 3.13). Проведя дугу окружности единичного радиуса, определим, что запас устойчивости по фазе  $\gamma = 110^\circ$ . Для рассматриваемого примера получим, что  $h = 3.3$ .

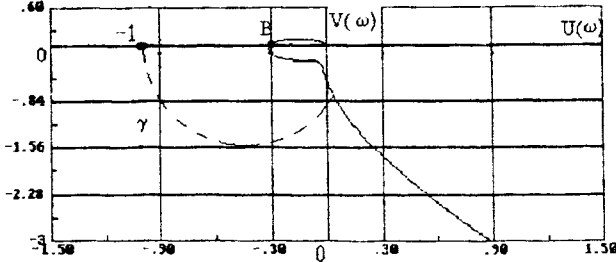


Рис. 3.13. АФЧХ системы стабилизации угла тангажа

Полученные запасы устойчивости удовлетворяют вышеуказанным требованиям.

#### 3.4.5. Оценка устойчивости по ЛЧХ

АФЧХ разомкнутой системы подразделяются на два типа:

- 1) АФЧХ первого рода, все точки, пересечения которых с вещественной осью расположены справа от критической точки (кривая 1, рис. 3.14);
- 2) АФЧХ второго рода, точки, пересечения которых с вещественной осью расположены как справа, так и слева от критической точки (кривая 2, рис. 3.14).

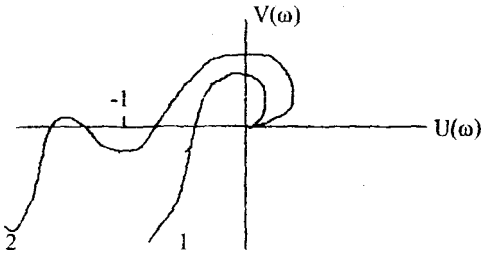


Рис. 3.14. Типы АФЧХ

В системах первого рода увеличение коэффициента усиления ведет к сдвигу ветви кривой влево и приближению ее к критической точке. Запасы устойчивости при этом уменьшаются и при  $k=k_{кр}$  система попадает на границу устойчивости. Уменьшение коэффициента усиления стабилизирует систему. В системах 2-го рода переход системы на границу устойчивости может происходить как при увеличении коэффициента усиления, так и при его уменьшении. Из критерия Найквиста следует, что замкнутая система, имеющая в разомкнутом состоянии АФЧХ 1-го рода, устойчива, если всем точкам АФЧХ, вплоть до точки пересечения ее с окружностью единичного радиуса ( $\omega=\omega_c$ ), соответствуют значения фазы  $\varphi(\omega)$  больше, чем  $-\pi$ , т.е. должно выполняться неравенство  $\omega_c < \omega_{\pi}$ . Этому определению легко дать интерпретацию на языке ЛЧХ (рис.3.15,3.16).

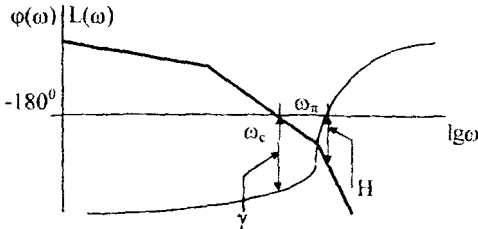
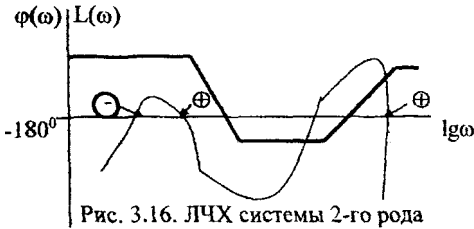


Рис. 3.15. ЛЧХ системы 1-го рода

Для того чтобы система, устойчивая в разомкнутом состоянии и имеющая АФЧХ первого рода, была устойчивой и в замкнутом состоянии, необходимо и достаточно, чтобы при всех частотах, при которых ЛАХ положительна, значения фазовой характеристики были больше, чем  $-\pi$ , т.е.  $\omega_c < \omega_{\pi}$ .

По ЛЧХ легко определяются и запасы устойчивости, причем запас устойчивости по усилению в логарифмическом масштабе должен удовлетворять условию  $|H| > 6\text{дБ}$ , что соответствует значениям  $k > 2$ .

Для того чтобы САУ, неустойчивая в разомкнутом состоянии и имеющая АФЧХ 2-го рода, была устойчивой в замкнутом состоянии, необходимо и достаточно, чтобы разность между числом положительных и отрицательных переходов фазовой характеристикой через линию  $-180^\circ$  была равна  $p/2$ , где  $p$  — число корней характеристического уравнения разомкнутой системы, лежащих в правой полуплоскости при всех частотах, когда  $L(\omega) > 0$ .



Необходимо подчеркнуть, что показанные способы оценки устойчивости по ЛЧХ и определения запасов устойчивости справедливы при таком расположении оси ординат относительно фазовой характеристики, когда с началом координат совмещена точка  $\varphi(\omega) = -180^\circ$ .

По ЛЧХ можно определить и критический коэффициент усиления. Для этого необходимо сместить ЛАХ вдоль линий сопряжения параллельно самой себе так, чтобы выполнить условие  $\omega_k = \omega_\pi$  и вычислить коэффициент усиления для вновь полученной ЛАХ. Определение критического коэффициента усиления для статической и астатической систем иллюстрируется рис. 3.17,а и 3.17,б.

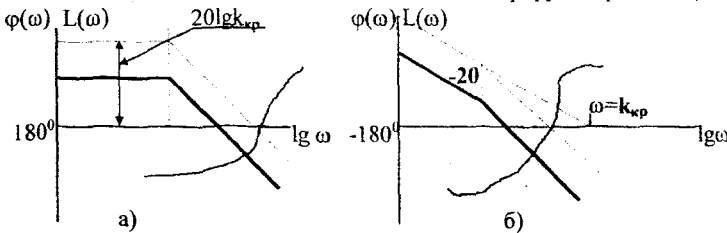


Рис. 3.17. Определение критического коэффициента усиления

Некоторые особенности возникают при определении критического коэффициента усиления, если в состав передаточной функции разомкнутой системы входит колебательное звено с малым показателем затухания, причем начало асимптоты, соответствующей этому звену, лежит ниже оси частот. В этом случае критический коэффициент усиления определяется в момент касания резонансного пика оси частот.

Пример. Построить ЛЧХ системы стабилизации угла тангажа и оценить ее устойчивость. Определить запасы устойчивости и рассчитать критическое значение передаточного числа по углу тангажа.

Передаточную функцию разомкнутой системы можно привести к виду

$$W(s) = \frac{k_c k_v (T_1 s + 1)}{a_0 s (s + |\lambda_1|) (s^2 + bs + c)}$$

Корни характеристического уравнения разомкнутой системы имеют значения:

$$\lambda_1 = -1.023; \lambda_{2,3} = -6.56 \pm j41.5.$$

Следовательно,  $b = 13.12$ ;  $c = 1765.3$ . После преобразований получим

$$W(s) = \frac{k_c k_v (T_1 s + 1)}{a_3 s (T_2 s + 1) (T_3^2 s^2 + 2T_3 \zeta_3 s + 1)},$$

где  $T_2 = \frac{1}{|\lambda_1|} \approx 1$ ;  $T_3 = \frac{1}{\sqrt{c}} = 0.0238$ ;  $\zeta_3 = \frac{b}{2T_3 c} = 0.156$ .

Определим частоты сопряжения и разобьем сетку координат:

$$\omega_{01} = \frac{1}{T_1} = 0.555; \omega_{02} = \frac{1}{T_2} \approx 1; \omega_{03} = \frac{1}{T_3} = 42.$$

Построим ЛАХ системы, учитывая, что коэффициент усиления разомкнутой системы равен  $k = k_c k_v / a_3 = 2.16$ . Так как относительный показатель затухания мал, то необходимо полученную ЛАХ уточнить в окрестности частоты сопряжения  $\omega_{03}$ . Это можно сделать как по специальным графикам, так и расчетным путем по известной амплитудной частотной характеристике. АЧХ данной системы определяется выражением

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega} \frac{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}}{\sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1} \sqrt{(1 - T_3^2 \omega^2)^2 + 4T_3^2 \zeta_3^2 \omega^2}}.$$

Подставив несколько значений частоты в окрестности частоты сопряжения  $\omega_{03}$ , получим значения АЧХ, рассчитаем значения ЛЧХ и построим уточняющую кривую. Фазовая частотная характеристика строится как сумма фазовых характеристик типовых звеньев, входящих в состав передаточной функции:

$$\varphi(\omega) = -90^\circ + \arctg T_1 \omega - \arctg T_2 \omega + \varphi_3(\omega),$$

$$\text{где } \varphi_3(\omega) = \begin{cases} -\text{arctg} \frac{2T_3 \zeta_3 \omega}{1 - T_3^2 \omega^2} & \text{при } \omega \leq \frac{1}{T_3} \\ -180^\circ + \text{arctg} \frac{2T_3 \zeta_3 \omega}{T_3^2 \omega^2 - 1} & \text{при } \omega > \frac{1}{T_3} \end{cases}$$

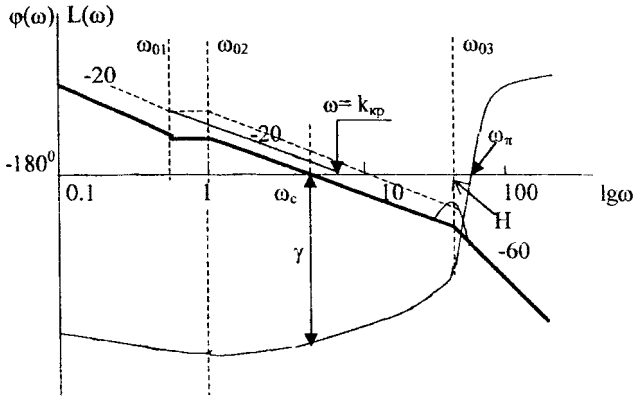


Рис. 3.18. ЛЧХ системы стабилизации угла тангажа

Из графиков ЛЧХ следует, что  $\omega_c < \omega_\pi$  и, следовательно, замкнутая система устойчива. Запас устойчивости по фазе  $\gamma = 108^\circ$ . Для систем, в которые входят колебательные звенья с малым относительным коэффициентом затухания, запас устойчивости по модулю определяется в точке резонанса и в данном случае он равен  $\approx 10$ дБ, что соответствует значению  $h=3.16$ . Полученные значения запасов устойчивости незначительно отличаются от значений, рассчитанных в соответствии с критериями Гурвица и Михайлова. В исследуемом случае критический коэффициент усиления определяется при касании  $L(\omega_p)$  оси частот. Перенесем ЛАХ параллельно самой себе так, чтобы в точке  $\omega = \omega_p$  она касалась оси частот, и продлим первую асимптоту до пересечения с осью частот. В этой точке  $k = \omega = 7.244$ , что соответствует значению  $(k_c)_{кр} = 16.74$ .

### 3.5. Выделение областей устойчивости

Среди физических параметров, характеризующих САУ, всегда имеется несколько, легко поддающихся изменению и использующихся для определенной настройки системы. При конструировании системы весьма важно знать диапазоны значений изменяемых параметров, допустимые с точки зрения сохранения устойчивости САУ. Об этих диапазонах можно судить, если в пространстве изменяемых параметров построить область устойчивости, т.е. выде-

лить область значений параметров, при которых система сохраняет устойчивость.

Область устойчивости в теории автоматического управления принято называть  $D$  – областью, а представление области параметров в виде областей устойчивости и неустойчивости называют  $D$  – разбиением.

### 3.5.1. Построение области устойчивости по алгебраическим критериям

Допустим, что коэффициенты характеристического уравнения

$$d_0 s^n + d_1 s^{n-1} + \dots + d_{n-1} s + d_n = 0$$

зависят от двух изменяемых параметров  $\mu$  и  $\lambda$ . Для построения области устойчивости прежде всего нужно в соответствии с необходимым условием устойчивости выделить область изменяемых параметров, при нахождении в которой коэффициенты характеристического уравнения положительны. Это можно сделать, решив систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} d_i(\mu, \lambda) &= 0, \\ i &= 0, 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Для построения границы положительности коэффициентов  $a_i$  необходимо из решений уравнений (3.26) выбрать те, которые обеспечивают положительность всех коэффициентов. Из всех границ положительности только две одновременно могут быть и границами устойчивости. Такими являются границы, уравнениями которых являются

$$\left. \begin{aligned} d_0(\mu, \lambda) &= 0 \\ d_n(\mu, \lambda) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

Доказано, что если  $d_0$  и  $d_n$  приблизятся к нулю, то характеристическое уравнение будет иметь два действительных корня

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= -\frac{d_1}{d_0}, \\ s_2 &= -\frac{d_n}{d_{n-1}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

При дальнейшем уменьшении коэффициенты  $d_0$  и  $d_n$  перейдут через ноль, станут отрицательными, а корни (3.28) окажутся положительными. Так как вещественные корни определяют аperiodические составляющие решения дифференциального уравнения, то границы (3.27) называют аperiodическими границами устойчивости. На самих границах устойчивости корни (3.28) равны соответственно  $\pm\infty$  и 0. Стороны кривых,  $d_i(\mu, \lambda)=0$ , примыкающие к области положительности соответствующих коэффициентов, штрихуются в сторону положительности. Может случиться так, что какой-либо из коэффициентов,  $d_0$  или  $d_n$ , не зависит от изменяемых параметров. Это означает отсутствие соответствующей аperiodической границы устойчивости.

Колебательной границей устойчивости называется кривая в плоскости изменяемых параметров, при переходе через которую пара комплексно – сопряженных корней изменяет знак своей вещественной части на обратный. Доказано, что колебательная граница устойчивости определяется выражением

$$\Delta_{n-1}(\mu, \lambda) = 0. \quad (3.29)$$

В этом выражении  $\Delta_{n-1}$  – (n-1) – й определитель Гурвица. Колебательная граница устойчивости штрихуется в сторону положительности  $\Delta_{n-1}$ .

**Пример.** Построить область устойчивости в плоскости параметров  $k_v$  и  $k_{\omega z}$  системы стабилизации угла тангажа.

Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$d_0 s^4 + d_1 s^3 + (T_{pn} + 2T\zeta + k_{\omega z} k_c T_1) s^2 + (1 + k_{\omega z} k_c + k_v k_c T_1) s + k_v k_c = 0.$$

Исследуем неравенства  $d_2 > 0$ ,  $d_3 > 0$ ,  $d_4 > 0$ . Из первого неравенства следует, что для положительности коэффициента  $d_2$  необходимо, чтобы выполнялось условие

$$k_{\omega z} > -\frac{T_{pn} + 2T\zeta}{k_c T_1} > -0.064.$$

Неравенство  $d_4 > 0$  определяет, что для положительности этого коэффициента необходимо, чтобы  $k_v > 0$ . Для выполнения неравенства  $d_3 > 0$  требуется, чтобы

$$k_{\omega z} > -\frac{1 + k_v k_c T_1}{k_c}.$$

При любых значениях передаточного числа по углу больших нуля правая часть последнего выражения по модулю будет больше единицы. Таким образом, границами положительности коэффициентов будут

$$k_{\omega z} = -0.064 \approx 0,$$

$$k_v = 0.$$

От изменяемых параметров зависит коэффициент  $d_n = d_4$  и не зависит коэффициент  $d_0$ . Поэтому уравнение  $k_v = 0$  одновременно является и аperiodической границей устойчивости.

Составив определитель Гурвица, для его  $\Delta_{n-1}$  минора получим

$$\Delta_{n-1} = d_3(d_1 d_2 - d_0 d_3) - d_1^2 d_4.$$

Подставим в это выражение значения коэффициентов  $d_2$ ,  $d_3$ ,  $d_4$  как функций параметров  $k_v$  и  $k_{\omega z}$ , после преобразований получим квадратное уравнение, определяющее передаточное число по угловой скорости как функцию от передаточного числа по углу тангажа :

$$k_{\omega z} = f(k_v).$$

По этому выражению строится колебательная граница устойчивости. График деления области исследуемых параметров на области устойчивости и неустойчивости показан на рис. 3.19.

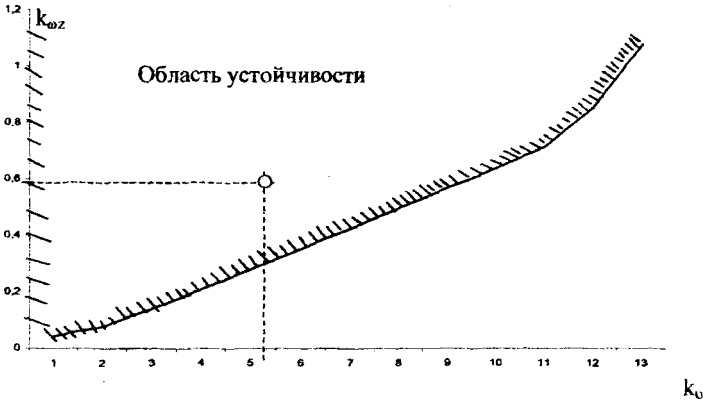


Рис.3.19. Область устойчивости системы стабилизации угла тангажа

Граница колебательной неустойчивости штрихуется в сторону положительности  $\Delta_{n-1}$ -го определителя Гурвица, а прямая  $k_{\omega z}=0$  в сторону положительности этого коэффициента. Для проверки полученных результатов выберем какие-либо значения параметров внутри заштрихованной области, например  $k_v=5$ ,  $k_{\omega z}=0,6$ , вычислим значения коэффициентов характеристического уравнения и оценим устойчивость замкнутой системы по критерию Гурвица. Получим, что при выбранных значениях передаточных чисел система устойчива. Это означает, что и вся область, внутрь которой обращены штрихи, является областью устойчивости.

### 3.5.2 D – разбиение в плоскости одного параметра

Пусть нас интересует влияние какого-либо одного параметра на устойчивость САУ и этот параметр входит в характеристическое уравнение линейно, так что это уравнение можно представить в виде

$$Q(j\omega) + \mu R(\omega) = 0. \quad (3.30)$$

Сделав замену  $s=j\omega$ , получим

$$\mu(j\omega) = \frac{Q(j\omega)}{R(j\omega)} = U(\omega) + jV(\omega). \quad (3.31)$$



Задавая значения частоты от  $-\infty$  до  $+\infty$ , можно построить кривую  $\mu(\omega)$ , отображающую мнимую ось плоскости корней на плоскость  $\mu$ . Эта граница D-разбиения симметрична относительно вещественной оси. Поэтому вычисления можно вести в диапазоне частот от 0 до  $+\infty$ , а затем дополнить полученную кривую ее зеркальным отображением на диапазон частот от  $-\infty$  до нуля. При движении по мнимой оси от  $-\infty$  до  $+\infty$  на плоскости корней область устойчивости остается слева. Поэтому при движении по кривой D-разбиения в сторону увеличения частоты ее штрихуют слева. Область, внутрь которой обращены штрихи, является предполагаемой областью устойчивости. Для окончательного решения необходимо взять какое-либо вещественное значение параметра  $\mu$  в исследуемой области и воспользоваться каким-либо критерием устойчивости. Если при избранном значении параметра система устойчива, то рассматриваемая область является областью устойчивости.

**Пример.** Построить область устойчивости системы стабилизации угла тангажа в плоскости передаточного числа  $k_v$ .

Характеристическое уравнение исследуемой системы можно записать в виде

$$Q(s) + k_v R(s) = 0,$$

где 
$$Q(s) = d_0 s^4 + d_1 s^3 + d_2 s^2 + r_1 s,$$

$$R(s) = k_c (T_1 s + 1),$$

$$r_1 = 1 + k_c k_{\omega z}.$$

В полученных выражениях сделаем замену  $s = j\omega$  и получим

$$Q(j\omega) = (d_0 \omega^4 - d_2 \omega^2) + j(r_1 \omega - d_1 \omega^3),$$

$$R(j\omega) = k_c (1 + jT_1 \omega),$$

$$k_v(\omega) = -\frac{Q(j\omega)}{R(j\omega)} = -\frac{(\alpha + j\beta)(1 - jT_1 \omega)}{k_c (1 + T_1^2 \omega^2)} =$$

$$= -\frac{(\alpha + \beta T_1 \omega) + j(\beta - \alpha T_1 \omega)}{k_c (1 + T_1^2 \omega^2)},$$

$$U(\omega) = -\frac{\alpha + \beta T_1 \omega}{k_c (1 + T_1^2 \omega^2)},$$

$$V(\omega) = -\frac{\beta - \alpha T_1 \omega}{k_c (1 + T_1^2 \omega^2)}.$$

В этих выражениях  $\alpha = d_0 \omega^4 - d_2 \omega^2$ ,  $\beta = r_1 \omega - d_1 \omega^3$ .

Построенная по этим выражениям кривая D-разбиения показана на рис. 3.20.

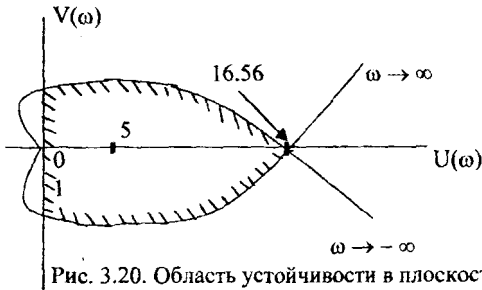


Рис. 3.20. Область устойчивости в плоскости  $k_v$ .

Так как необходимым условием устойчивости рассматриваемой системы является  $k_v > 0$ , то мнимая ось также является границей устойчивости и штрихуется в сторону положительности  $k_v$ . Значение этого коэффициента, равное 5, находится внутри заштрихованной области и мы знаем, что при этом значении система устойчива. Значит, и весь отрезок вещественной оси, расположенный внутри заштрихованной области, дает значения передаточного числа по углу, при которых система устойчива. Можно показать, что окончание этого отрезка находится в точке, равной критическому значению коэффициента  $k_v = 16.56$ .

### 3.5.3. D – разбиение в плоскости двух параметров

Пусть коэффициенты характеристического уравнения линейно зависят от двух параметров  $\mu$  и  $\lambda$  так, что его можно записать в виде

$$\mu P(s) + \lambda Q(s) + S(s) = 0. \quad (3.32)$$

После замены  $s = j\omega$  получим

$$\begin{aligned} P(j\omega) &= P_1(\omega) + jP_2(\omega), \\ Q(j\omega) &= Q_1(\omega) + jQ_2(\omega), \\ S(j\omega) &= S_1(\omega) + jS_2(\omega). \end{aligned}$$

Так как равенство нулю всего преобразованного характеристического уравнения может выполняться только если одновременно равны нулю его вещественная и мнимая части, то получим систему уравнений относительно изменяемых параметров:

$$\left. \begin{aligned} \mu P_1(\omega) + \lambda Q_1(\omega) &= -S_1(\omega) \\ \mu P_2(\omega) + \lambda Q_2(\omega) &= -S_2(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

Разрешив систему (3.33) относительно  $\mu$  и  $\lambda$ , получим

$$\mu(\omega) = \frac{\Delta\mu(\omega)}{\Delta(\omega)}; \quad \lambda(\omega) = \frac{\Delta\lambda(\omega)}{\Delta(\omega)},$$

$$\begin{aligned} \Delta(\omega) &= P_1(\omega)Q_2(\omega) - P_2(\omega)Q_1(\omega), \\ \Delta\mu(\omega) &= -S_1(\omega)Q_2(\omega) + S_2(\omega)Q_1(\omega), \\ \Delta\lambda(\omega) &= -S_2(\omega)P_1(\omega) + S_1(\omega)P_2(\omega). \end{aligned}$$

Задавая значения частоты от  $-\infty$  до  $+\infty$ , определим совокупность точек на плоскости  $\mu - \lambda$ , образующих кривую  $D$  – разбиения. Функции  $\mu(\omega)$  и  $\lambda(\omega)$  являются четными и поэтому при изменении частоты в указанных выше пределах кривая  $D$  – разбиения пробегается дважды. При построении кривой  $D$  – разбиения в плоскости двух параметров необходимо руководствоваться следующими правилами [8, 14]:

1) если в системе (3.33) первое уравнение получено из вещественных частей, а второе – из мнимых частей функций  $P(j\omega)$ ,  $Q(j\omega)$  и  $S(j\omega)$  и если параметр  $\mu$  по написанию стоит первым, а  $\lambda$  – вторым, то система координат должна быть правой, т.е. ось  $\mu$  является осью абсцисс с отсчетом положительных значений вправо, а ось  $\lambda$  – осью ординат с отсчетом положительных значений вверх;

2) двигаясь по кривой  $D$  – разбиения при изменении частоты в сторону увеличения, ее штрихуют слева, если  $\Delta(\omega) > 0$ , и справа, если  $\Delta(\omega) < 0$ ; в результате кривая штрихуется дважды с одной стороны, так как на концах кривой при  $\omega = 0$  и  $\omega = \infty$  знак главного определителя  $\Delta(\omega)$  изменяется.

Может быть случай, когда при  $\omega = \omega^* \neq 0, \infty$  одновременно  $\Delta(\omega)^* = \Delta\mu(\omega^*) = \Delta\lambda(\omega^*) = 0$ . Тогда система (3.33) становится линейно – зависимой и ее уравнения отличаются друг от друга только на постоянный множитель. В этом случае эта система сводится к одному уравнению, определяющему на плоскости  $\mu - \lambda$  прямую линию, которая называется особой прямой. Если особая прямая пересекает кривую  $D$  – разбиения в точке  $\omega = \omega^*$  и в этой точке определитель  $\Delta(\omega)$  меняет знак, то эта прямая также является границей устойчивости и в указанной точке изменяется направление штриховки кривой и особой прямой. Если при  $\omega = \omega^*$  изменение знака главного определителя не происходит, то штриховка на особую прямую не наносится. Если свободный член характеристического уравнения  $d_n = d_n(\mu, \lambda)$ , то это соответствует существованию особой прямой для  $\omega = 0$  и ее уравнение будет

$$d_n^*(\mu, \lambda) = 0. \quad (3.34)$$

Уравнение особой прямой для  $\omega = \infty$  определяется выражением

$$d_0^*(\mu, \lambda) = 0. \quad (3.35)$$

Прямые (3.34) и (3.35) называются концевыми. Они штрихуются одиночной штриховкой, согласованной в точках  $\omega = 0$  и  $\omega = \infty$  с направлением штриховки основной линии. Предполагаемая область устойчивости находится внутри заштрихованного участка и проверяется аналогично предыдущему. Переход через кривую  $D$  – разбиения, заштрихованную дважды, соответствует переходу через границу устойчивости двух корней, а переход через особую концевую с одинар-

ной штриховкой – переходу одного корня. Если концевые прямые не имеют общих точек с основной кривой, то штриховка на них наносится в сторону положительности параметров.

Пример. Построить область устойчивости системы стабилизации угла тангажа в плоскости параметров  $k_v$  и  $k_{\omega z}$ .

Характеристическое уравнение замкнутой системы может быть представлено в виде (3.32), где

$$P(s) = k_c T_1 s + k_c,$$

$$Q(s) = k_c T_1 s^2 + k_c s,$$

$$S(s) = d_0 s^4 + d_1 s^3 + (T_{pn} + 2T\zeta)s^2 + s.$$

После подстановки  $s=j\omega$  и выделения вещественных и мнимых частей получим

$$\begin{aligned} P_1(\omega) &= k_c; & P_2(\omega) &= k_c T_1 \omega; \\ Q_1(\omega) &= -k_c T_1 \omega^2; & Q_2(\omega) &= k_c \omega; \\ S_1(\omega) &= d_0 \omega^4 - (T_{pn} + 2T\zeta)\omega^2; & S_2(\omega) &= \omega - d_1 \omega^3. \end{aligned}$$

Составив систему уравнений (3.33) и решив ее, получим

$$\begin{aligned} \Delta(\omega) &= k_c^2 \omega + k_c^2 T_1^2 \omega^3, \\ \Delta k_v(\omega) &= -k_c (-d_0 \omega^5 + (T_{pn} + 2T\zeta)\omega^2) - k_c T_1 (\omega^3 - d_1 \omega^5), \\ \Delta k_{\omega z}(\omega) &= -k_c (\omega - d_1 \omega^3) - k_c T_1 (-d_0 \omega^5 + (T_{pn} + 2T\zeta)\omega^2). \end{aligned}$$

Определив корни этих уравнений, можно сделать вывод, что общих корней.

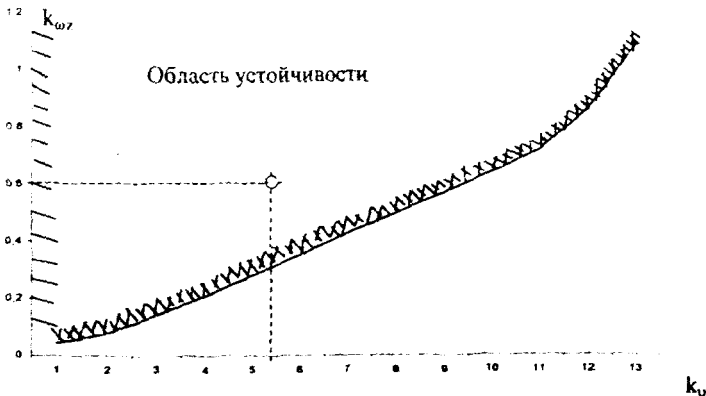


Рис. 3.21. Область устойчивости в плоскости параметров  $k_v$  и  $k_{\omega z}$

кроме нулевого корня, не существует. Значит, особых прямых нет, существует только конечная прямая, соответствующая уравнению  $d_n = k_c k_{yc} = 0$ . Руководствуясь вышеприведенными правилами, построим кривую D – разбегания (рис.3.21) и заштрихуем ее и конечную прямую. Проверку осуществим в точке  $k_0 = 5$ ,  $k_{ог} = 0.6$ . Мы уже ранее установили, что в этой точке система устойчива, а значит, и заштрихованная область является областью устойчивости.

#### 4. АНАЛИЗ КАЧЕСТВА ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ САУ

##### 4.1. Показатели качества САУ

Количественные оценки качества, так называемые прямые показатели качества, определяются по кривой переходного процесса (рис.4.1).

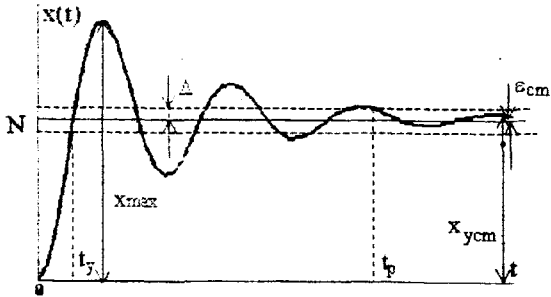


Рис.4.1. Переходная функция и показатели качества

Используются следующие прямые показатели качества:

- 1) величина перерегулирования  $\sigma$ ,

$$\sigma = \frac{X_{\max} - X_{ycm}}{X_{ycm}} 100\%, \quad (4.1)$$

которая характеризует максимальное отклонение регулируемой величины от ее установившегося значения, которое может быть определено в соответствии с теоремой о конечном значении оригинала:

$$x_{ycm} = x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s);$$

- 2) время переходного процесса или время регулирования  $t_p$  – наименьшее значение времени, после которого имеет место неравенство

$$|x(t) - x(\infty)| \leq \Delta, \quad (4.2)$$

где  $\Delta$  – заданная величина, обычно лежащая в пределах  $\Delta = 0.02 - 0.05$ ;

3) статическая ошибка  $\varepsilon_{cm}$  – величина отклонения установившегося значения регулируемой величины  $x(\infty)$  от требуемого значения  $N$ :

$$\varepsilon_{cm} = N - x(\infty) \quad (4.3)$$

или  $\varepsilon_{cm} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$ , где  $E(s)$  – изображение ошибки;

4) время установления  $t_y$  – промежуток времени, по истечении которого регулируемая величина первый раз достигает установившегося значения.

Для определения качества системы могут использоваться и другие показатели, соответствующие решаемой задаче, например, число колебаний регулируемой величины за время регулирования, частота и период колебаний и т.д.

Во всех случаях необходимо построить переходную функцию.

#### 4.2 Методы построения переходной функции

Изображение переходной функции имеет вид

$$H(s) = \Phi(s) \frac{1}{s}$$

Оригинал переходной функции может быть получен использованием точных и приближенных методов. Будем рассматривать только точные методы, связанные с применением обратного преобразования Лапласа.

Построение переходной функции при использовании таблиц преобразования Лапласа начинается с представления ее изображения в виде произведения передаточных функций типовых звеньев:

$$H(s) = \frac{B(s)}{sD(s)} = \frac{n}{\prod_{i=1}^n sD_i(s)}$$

Затем это выражение преобразуется в сумму передаточных функций с неопределенными коэффициентами

$$H(s) = \frac{A}{s} + \sum_{i=1}^m \frac{B_i}{s + |\lambda_i|} + \sum_{k=1}^l \frac{C_k s + D_k}{s^2 + b_k s + c_k} \quad (4.4)$$

В этом выражении  $A$ ,  $B_i$ ,  $C_k$ ,  $D_k$  – неопределенные коэффициенты,  $\lambda_i$  – вещественные корни уравнения  $D(s)=0$ , а выражения  $s^2 + b_k s + c_k$  – соответствуют комплексно – сопряженным корням характеристического уравнения. Выражение (4.4) необходимо привести к общему знаменателю и числитель полученного выражения приравнять числителю изображения исходной переходной функции  $B(s)$ . Приравняв члены при одинаковых степенях оператора  $s$  в левой и правой частях, получим систему уравнений относительно неопределенных коэффициентов. Вычислив значения этих коэффициентов, обратимся к таблицам преобразования Лапласа и определим оригиналы слагаемых формулы (4.4). Отметим, что оригиналы, соответствующие первым двум членам суммы (4.4), оп-

ределяются непосредственно из таблиц, определение оригиналов для третьего члена этой суммы может потребовать некоторых преобразований.

Оригинал переходной функции может быть получен использованием формулы обратного преобразования Лапласа, так называемой формулы разложения. В общем случае формула разложения имеет вид

$$h(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n_i - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_i} \left[ (s - s_i)^{n_i} \frac{B(s_i)}{s_i D(s_i)} e^{s_i t} \right]^{(n_i - 1)}, \quad (4.5)$$

где  $s_i$  – корни уравнения  $sD(s) = 0$ ,  $n_i$  – кратность корней. В случае только простых корней, когда среди них имеется  $m$  вещественных корней и  $l$  пар комплексно – сопряженных корней, формула разложения принимает вид

$$h(t) = \frac{B(0)}{D(0)} + \sum_{i=1}^m \frac{B(s_i)}{s_i D(s_i)} + 2 \sum_{k=1}^l A_k e^{\alpha_k t} \cos(\beta_k t + \varphi_k). \quad (4.6)$$

В этом выражении  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  – вещественная и мнимая части комплексно-сопряженных корней, а  $\dot{D}(s) = \frac{d}{ds} D(s)$ . Амплитуда и фаза колебательных составляющих определяются следующим образом:

$$\frac{B(s_k)}{s_k \dot{D}(s_k)} = U_k + jV_k,$$

$$A_k = \sqrt{U_k^2 + V_k^2}; \quad \varphi_k = \text{arctg} \frac{V_k}{U_k}.$$

При вычислениях по этим формулам, в первую подставляется только один из пары комплексно – сопряженных корней. При вычислении фазового сдвига необходимо учитывать квадрант, в котором находится вектор  $A_k e^{j\varphi_k}$ .

**Пример.** Построить переходную функцию замкнутой системы управления углом тангажа и определить показатели качества.

Передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$\Phi(s) = \frac{k_v k_c (T_1 s + 1)}{d_0 s^4 + d_1 s^3 + d_2 s^2 + d_3 s + d_4},$$

где все коэффициенты заданы или вычислены ранее. Корни характеристического уравнения равны:

$$\lambda_1 = -0.49; \quad \lambda_2 = -4.608;$$

$$\lambda_{3,4} = -4.538 \pm j41.37 = -\alpha \pm j\beta.$$

1. Построение переходной функции табличным методом.

Изображение переходной функции можно представить в виде

$$H(s) = \Phi(s) \frac{1}{s} = \frac{k_v k_c (T_1 s + 1)}{s d_0 (s + |\lambda_1|)(s + |\lambda_2|)(s^2 + bs + c)} =$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B_1}{s + |\lambda_1|} + \frac{B_2}{s + |\lambda_2|} + \frac{C_3 s + D_3}{s^2 + bs + c}.$$

Здесь  $b=2\alpha$ ,  $c=\alpha^2+\beta^2$ .

Приведем полученное выражение к общему знаменателю и приравняем числитель этого выражения к числителю исходного изображения переходной функции. Приравняв члены при одинаковых степенях оператора  $s$  в правой и левой частях, получим систему линейных уравнений относительно неопределенных коэффициентов. Из этой системы сразу определяется  $A=1$ , после чего решается система 4-го порядка:

$$\left. \begin{aligned} B_1 + B_2 + C_3 &= -1 \\ 13.684B_1 + 9.566B_2 + 5.098C_3 + D_3 &= -14.174 \\ 1773.892B_1 + 1736.517B_2 + 2.258C_3 + 5.098D_3 &= -1780.597 \\ 7981.379B_1 + 848.714B_2 + 2.258D_3 &= -1807.1077. \end{aligned} \right\}$$

Решение этой системы дает

$$\begin{aligned} B_1 &= -0.1318; \quad B_2 = -0.8789; \\ C_3 &= 0.01076; \quad D_3 = -4.02. \end{aligned}$$

Три первых слагаемых изображения переходной функции являются табличными. Необходимо преобразовать к табличному виду четвертое слагаемое:

$$\begin{aligned} \frac{C_3 s + D_3}{s^2 + bs + c} &= \frac{C_3 s + D_3}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} = C_3 \frac{s + D_3 / C_3}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} = \\ &= C_3 \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} + C_3 \frac{D_3 / C_3 - \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} = \\ &= C_3 \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{C_3 (D_3 / C_3 - \alpha)}{\beta} \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}. \end{aligned}$$

Полученные слагаемые являются табличными. Подставив численные значения параметров и используя таблицы преобразования Лапласа, получим выражение для переходной функции

$$h(t) = 1 - 0.1318e^{-0.49t} - 0.8789e^{-4.608t} + 0.01076e^{-4.538t} \cos 41.37t - 0.098e^{-4.538t} \sin 41.37t.$$

2. Построение переходной функции с использованием формулы разложения.



Вначале определим составляющие процесса, соответствующие вещественным корням:

$$\frac{B(s_1)}{s_1 \dot{D}(s_1)} = -0.1319; \quad \frac{B(s_2)}{s_2 \dot{D}(s_2)} = -0.8788.$$

Для колебательной составляющей получим

$$\frac{B(s_3)}{s_3 \dot{D}(s_3)} = -0.0147 + j0.0472,$$

$$A_3 = 0.0494.$$

Так как вектор этой составляющей находится во втором квадранте, то

$$\varphi_3 = \pi - \operatorname{arctg} \frac{0.0472}{0.0147} = 1.8725.$$

Следовательно,

$$h(t) = 1 - 0.1319e^{-0.49t} - 0.8788e^{-4.608t} +$$

$$+ 0.0988e^{-4.538t} \cos(41.37t + 1.8725).$$

Переходные процессы, полученные различными способами, совпадают с точностью до арифметических вычислений. Кривая переходной функции показана на рис.4.2.

Переходный процесс практически монотонный. Колебательная составляющая фактически никак себя не проявляет ввиду крайне малой амплитуды. Перерегулирование отсутствует:  $\sigma = 0$ . Время регулирования, определенное при  $\Delta = 0.05$ , приближенно равно 2.2с, что для системы автоматического регулирования угла тангажа в большинстве случаев является вполне приемлемым.

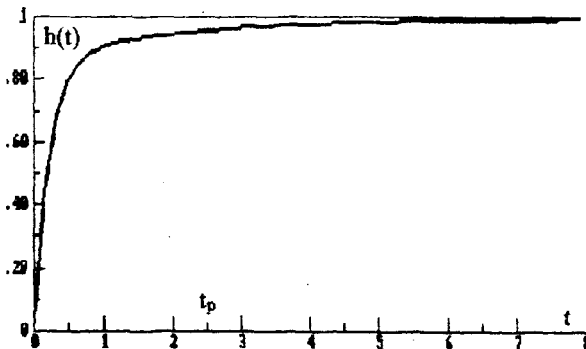


Рис.4.2. Переходная функция системы автоматического регулирования угла тангажа

### 4.3. Коэффициенты ошибок

Точность САУ в установившемся режиме, при относительно медленно изменяющихся воздействиях может быть оценена с помощью коэффициентов ошибок. Изображение ошибки определяется выражением

$$E(s) = \Phi_\varepsilon(s)G(s).$$

Разложим передаточную функцию системы по ошибке в степенной ряд в окрестности точки  $s=0$ . Отметим, что при  $s \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$  и именно поэтому мы говорим о точности в установившемся режиме.

$$\Phi_\varepsilon(s) = C_0 + C_1s + \frac{C_2}{2!}s^2 + \dots + \frac{C_i}{i!}s^i + \dots \quad (4.7)$$

Обозначим:  $K_i = \frac{C_i}{i!}$  и получим

$$\Phi_\varepsilon(s) = K_0 + K_1s + K_2s^2 + \dots + K_i s^i + \dots, \quad (4.8)$$

$$E(s) = (K_0 + K_1s + K_2s^2 + \dots + K_i s^i + \dots)G(s)$$

Учитывая, что оператор  $s$ , умноженный на изображение самой величины, является символом дифференцирования, можно для оригиналов записать

$$\varepsilon(t) = K_0g(t) + K_1\dot{g}(t) + K_2g^{(2)}(t) + \dots + K_i g^{(i)}(t) + \dots \quad (4.9)$$

Выражение (4.9) определяет зависимость ошибки регулирования от различных составляющих входного воздействия и коэффициенты  $K_i$  получили название коэффициентов ошибок:

- $K_0$  - коэффициент ошибки по положению;
- $K_1$  - коэффициент ошибки по скорости;
- $K_2$  - коэффициент ошибки по ускорению и т.д.

Из (4.8) следует, что

$$K_i(s) = \frac{1}{s^i} \left\{ \Phi_\varepsilon(s) - \sum_{m=0}^{i-1} K_m \right\}.$$

Численные значения коэффициентов ошибок определяются из этого выражения при  $s \rightarrow 0$ :

$$K_i = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^i} \left\{ \Phi_\varepsilon(s) - \sum_{m=0}^{i-1} K_m \right\}. \quad (4.10)$$

Очевидно, что  $K_0 = \Phi_\varepsilon(0)$ .

Входное воздействие можно представить в виде степенного ряда

$$g(t) = g_0 + g_1t + \frac{g_2}{2}t^2 + \dots + \frac{g_m}{m!}t^m,$$

где  $g_0$  – постоянная величина, характеризующая начальное значение,  $g_1 = \text{const}$  – скорость изменения входного воздействия,  $g_2 = \text{const}$  – ускорение и т.д. Тогда

$$G(s) = \frac{g_0}{s} + g_1 \frac{1}{s^2} + \frac{g_2}{2} \frac{1}{s^3} + \dots + \frac{g_m}{m!} \frac{1}{s^{m+1}}.$$

Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(s) = \frac{B(s)}{s^\nu A(s)},$$

где  $\nu$  – порядок астатизма системы. Для передаточной функции замкнутой системы по ошибке получим

$$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{1}{1+W(s)} = \frac{s^\nu A(s)}{s^\nu A(s) + B(s)}.$$

Изображение ошибки запишется в виде

$$E(s) = \frac{s^\nu A(s)}{s^\nu A(s) + B(s)} \left( \frac{g_0}{s} + \frac{g_1}{s^2} + \frac{g_2}{2!} \frac{1}{s^3} + \dots + \frac{g_m}{m!} \frac{1}{s^{m+1}} \right).$$

Отсюда следует, что если порядок астатизма больше порядка старшей производной воздействия, т.е.  $\nu > m$ , то ошибка в установившемся режиме будет равна нулю. Если  $\nu = m$ , то установившаяся ошибка будет равна постоянной величине, называемой статической ошибкой. И если  $\nu < m$ , то при  $t \rightarrow \infty$  и  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . В отношении коэффициентов ошибок последнее выражение позволяет сделать следующие выводы.

1. Если система статическая, т.е.  $\nu = 0$ , то существуют все составляющие ошибки и все коэффициенты ошибок не равны нулю, т.к.  $K_0 = \Phi_\varepsilon(0) \neq 0$ .

2. Система с астатизмом 1-го порядка,  $\nu = 1$ , не имеет ошибки по положению и  $K_0 = 0$ .

3. Система с астатизмом 2-го порядка,  $\nu = 2$ , не имеет ошибок по положению и по скорости и  $K_0 = 0, K_1 = 0$ .

Этот список можно продолжить. Таким образом, повышение порядка астатизма повышает точность системы в установившемся режиме. Но повышение порядка астатизма снижает запасы устойчивости, т.к. введение интегрирующих звеньев увеличивает фазовое запаздывание (снижает частоту  $\omega_n$ ). Поэтому на практике порядок астатизма выше второго не применяют, а чаще всего ограничиваются астатизмом первого порядка, используя для повышения точности другие способы.

#### 4.4. Интегральные оценки качества

Интегральные оценки характеризуют качество протекания переходных процессов. Наибольшее распространение получили две интегральные оценки:

$$J_0 = \int_0^{\infty} [x(t) - x(\infty)]^2 dt = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt, \quad (4.11)$$

$$J_1 = \int_0^{\infty} \left\{ [x(t) - x(\infty)]^2 + \tau^2 \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right\} dt = \\ = \int_0^{\infty} \left[ \varepsilon^2(t) + \tau^2 \left( \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right)^2 \right] dt. \quad (4.12)$$

Интеграл (4.11) определяет площадь под кривой квадрата динамической ошибки. Чем меньше этот интеграл, тем быстрее затухает переходный процесс и, следовательно, интеграл  $J_0$  служит мерой быстродействия системы. В ряде случаев система, удовлетворяющая условию минимума  $J_0$ , имеет значительную колебательность переходного процесса. Для уменьшения колебательности можно попробовать воспользоваться оценкой  $J_1$ . Представим этот интеграл в виде

$$J_1 = \int_0^{\infty} \left[ \varepsilon(t) + \tau \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right]^2 dt - \int_0^{\infty} 2\tau\varepsilon(t) \frac{d\varepsilon(t)}{dt} dt = \\ = \int_0^{\infty} \left[ \varepsilon(t) + \tau \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right]^2 dt - \tau\varepsilon^2(t) \Big|_0^{\infty}.$$

Последний член в полученном выражении является постоянной величиной и, если считать, что при  $t \rightarrow \infty$  ошибка  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ , то он равен  $\tau\varepsilon^2(0)$ . Минимальное значение интеграл  $J_1$  будет иметь, если подинтегральное выражение будет равно нулю, т.е.

$$\tau \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \varepsilon(t) = 0 \quad (4.13)$$

Решение этого дифференциального уравнения будет

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0)e^{-t/\tau} \quad (4.14)$$

При подаче на вход системы единичного ступенчатого воздействия начальное значение ошибки  $\varepsilon(0) = 1$  и можно рекомендовать следующую методику выбора величины постоянной времени  $\tau$ :

1) выберем из каких-либо соображений время регулирования  $t_p$  и величину  $\Delta$ , по уровню которой выбирается это время, т.е.  $\varepsilon(t_p) = e^{-t_p/\tau} = \Delta$ ;

2) определим логарифм натуральный от полученного выражения

$$-\frac{t_p}{\tau} = \ln \Delta.$$

Отсюда получим  $\tau = -\frac{t_p}{\ln \Delta}$ .

Рассмотрим методику вычисления интегральных оценок при единичном ступенчатом воздействии на входе системы. Если  $\Phi(s) = B(s)/D(s)$  – передаточная функция замкнутой системы, то [8,14,15]

$$X(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{d_0 s^n + d_1 s^{n-1} + \dots + d_{n-1} s + d_n} \cdot 1.$$

Если система устойчива, то

$$J_0 = \frac{1}{2d_n^2 \Delta} (B_m \Delta_m + B_{m-1} \Delta_{m-1} + \dots + B_0 \Delta_0 - 2b_m b_{m-1} \Delta) \quad (4.15)$$

В этом выражении:  $B_m = b_m^2$ ;

$$B_{m-1} = b_m b_{m-1};$$

$$B_{m-2} = b_m^2 - 2b_m b_{m-2};$$

⋮

$$B_k = b_k^2 - 2b_{k-1} b_{k+1} + \dots + 2(-1)^k b_m b_{2k};$$

$$B_0 = b_0^2.$$

Определитель  $\Delta$  составляется из коэффициентов характеристического уравнения замкнутой системы следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} d_n & -d_{n-2} & d_{n-4} & -d_{n-6} & \dots & 0 \\ 0 & d_{n-1} & -d_{n-3} & d_{n-5} & \dots & 0 \\ 0 & -d_n & d_{n-2} & -d_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -d_{n-1} & d_{n-3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & d_1 \end{vmatrix}.$$

Все определители  $\Delta_k$  ( $k=0,1,\dots,m$ ) получаются из  $\Delta$  заменой  $(m+1-k)$ -го столбца столбцом вида  $(d_{n-1}, d_n, 0, 0, 0, \dots, 0)$ .

Интеграл  $J_1$  можно записать в виде суммы двух интегралов:

$$J_1 = J_0 + J_{01},$$

где 
$$J_{01} = \tau^2 \int_0^{\infty} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 dt.$$

Если учесть, что  $\frac{dx}{dt} \rightarrow sX(s) = s\Phi(s) \frac{1}{s}$ , то можно сделать вывод, что в новой передаточной функции порядок числителя увеличится на единицу, т.е.  $m=m+1$  и свободный член  $b_m=0$ . Для вычисления интеграла  $J_{01}$  теперь можно воспользоваться выражением (4.15).

Недостатками интегральных оценок являются невозможность получения прямых показателей качества и высокая сложность вычислительных процедур. Достоинство – это возможность выразить интегральные оценки как функции параметров системы и, воспользовавшись известными методами поиска экстремума, определить значения этих параметров, дающие минимум избранной оценке. Именно это и послужило развитию аналитических методов синтеза систем автоматического управления, основанных на минимизации квадратичных интегральных оценок.

## 5. СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ САУ

### 5.1. Задача синтеза и способы коррекции

Задача синтеза и проектирования САУ заключается в таком выборе ее структурной схемы, параметров, характеристик и способа их технической реализации, при которых требуемые динамические и эксплуатационные свойства системы обеспечиваются простыми и надежными техническими средствами.

С точки зрения ТАУ целью синтеза является формирование закона управления, при котором достигаются заданные показатели устойчивости и качества системы. **Закон управления – это зависимость между отклонением регулирующего органа и сигналом ошибки.** Объект управления и исполнительные органы образуют так называемую неизменяемую часть системы, параметры которой являются исходной информацией при синтезе. Передаточную функцию неизменяемой части обозначим как  $W_0(s)$ . Конечная цель синтеза заключается в определении параметров специальных корректирующих устройств, которые, будучи добавлены к неизменяемой части системы, придадут ей необходимые свойства.

Существуют три способа коррекции САУ.

1. Последовательная коррекция:  $W(s) = W_{\text{noc}}(s)W_0(s)$ .

$W_{\text{noc}}(s)$  – передаточная функция последовательного корректирующего устройства.

2. Параллельная коррекция:  $W(s) = W_{\text{npp}}(s) + W_0(s)$ .

$W_{\text{npp}}(s)$  – передаточная функция параллельного корректирующего устройства.

3. Коррекция в виде обратных связей:  $W(s) = \frac{W_0(s)}{1 + W_{\text{oc}}(s)W_0(s)}$ .

$W_{oc}(s)$  – передаточная функция звена корректирующей обратной связи. Приравнивая полученные передаточные функции, можно выразить передаточную функцию любого вида коррекции через другие.

Наиболее просто коррекция САУ осуществляется изменением коэффициента передачи прямой цепи. Пусть система является статической и ее передаточная функция в разомкнутом состоянии имеет вид

$$W(s) = \frac{kB(s)}{A(s)}$$

Для передаточной функции замкнутой системы по ошибке получим

$$\Phi_{\varepsilon}(s) = \frac{1}{1+W(s)} = \frac{A(s)}{A(s)+kB(s)}$$

Будем считать, что все полиномы передаточной функции приведенные, т.е.  $b_m=1$ ,  $a_n=1$ . Если на вход системы подано ступенчатое воздействие с амплитудой  $N$ , то для статической ошибки можно записать

$$\varepsilon_{cm} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_{\varepsilon}(s) \frac{N}{s} = \frac{1}{1+k} N. \quad (5.1)$$

Пусть теперь система имеет астатизм первого порядка:

$$W(s) = \frac{kB(s)}{sA(s)}; \quad \Phi_{\varepsilon}(s) = \frac{sA(s)}{sA(s)+kB(s)}$$

Подадим на вход системы воздействие вида

$$g(t) = g_0 + \dot{g}t \rightarrow \frac{g_0}{s} + \frac{\dot{g}}{s^2},$$

где  $g_0 = const$  и  $\dot{g} = const$ . Для статической ошибки получим

$$\varepsilon_{cm} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_{\varepsilon}(s) \left( \frac{g_0}{s} + \frac{\dot{g}}{s^2} \right) = \frac{\dot{g}}{k}. \quad (5.2)$$

Из этих рассуждений следует, что для повышения точности системы в установившемся режиме необходимо увеличивать коэффициент передачи прямой цепи. При этом возрастает и быстродействие системы. Увеличение коэффициента передачи приближает систему к границе устойчивости и следует помнить, что при выборе коэффициента передачи прямой цепи только по условиям заданной точности можно получить неустойчивую систему и потребуются дополнительные меры по ее стабилизации.

Корректирующие устройства различных типов вводят в закон управления производные, интегралы и их комбинации от сигнала ошибки и промежуточных величин. Рассмотрим физический смысл введения производной и интеграла. Структурную схему системы представим в виде рис.5.1.

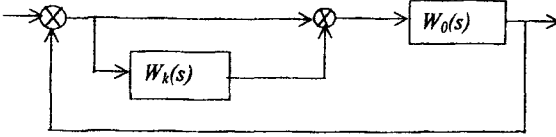


Рис. 5.1. Коррекция САУ

На этой схеме  $W_k(s)$  – передаточная функция корректирующего устройства. Допустим, что  $W_k(s) = k_k s$ , т.е. в закон управления вводится производная от сигнала ошибки. Тогда для АФЧХ системы можно записать

$$W(j\omega) = (1 + jk_k \omega)W_0(j\omega) = A_0(\omega)e^{j\varphi(\omega)} + k_k \omega A_0(\omega)e^{j(\varphi(\omega) + 90^\circ)}.$$

Изменение АФЧХ скорректированной системы по сравнению с исходной показано на рис. 5.2. Из рисунка следует, что введение производной сдвигает АФЧХ в положительном направлении и удаляет ее от критической точки. Введение производной в закон регулирования всегда преследует цель повышения запасов устойчивости и снижения колебательности.

Пусть теперь  $W_k(s) = \frac{k_k}{s}$ , т.е. в закон управления вводится интеграл. В

этом случае

$$W(j\omega) = (1 + \frac{k_k}{j\omega})W_0(j\omega) = A_0(\omega)e^{j\varphi(\omega)} + \frac{k_k}{\omega} A_0(\omega)e^{j(\varphi(\omega) - 90^\circ)}.$$

Из этого выражения следует, что при введении интеграла увеличивается коэффициент передачи на низких частотах и именно это повышает точность системы. Основная цель введения интеграла в закон управления – это повыше-

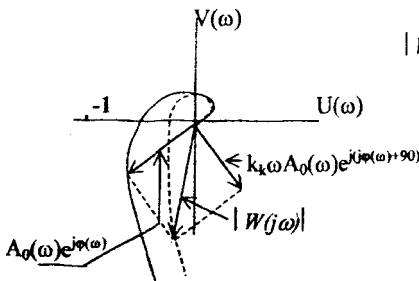


Рис. 5.2. Введение производной в закон управления

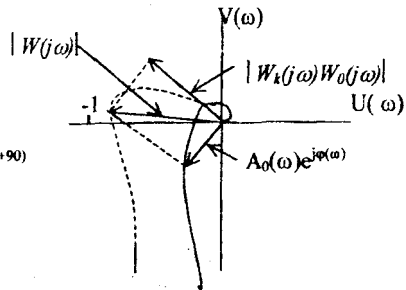


Рис. 5.3. Введение интеграла в закон управления



ние точности системы в установившемся режиме. Из рис. 5.3. следует, что при введении интеграла АФЧХ системы смещается в положительном направлении и приближается к критической точке. При введении интеграла в закон управления уменьшаются запасы устойчивости системы.

### 5.2. Синтез САУ методом ЛЧХ

Рассматриваемый метод разработан для определения структуры и параметров последовательного корректирующего устройства и справедлив для минимально – фазовых систем, т.е. систем, не имеющих нулей и полюсов в правой полуплоскости.

Синтез системы по данному методу состоит из следующих действий.

1) Построение ЛАХ неизменяемой части системы  $L_0(\omega)$ , так называемой располагаемой ЛАХ.

2) Построение желаемой ЛАХ системы на основании требований к ее динамическим показателям.

3) Определение передаточной функции корректирующего устройства. При последовательной коррекции желаемая ЛАХ определяется выражением

$$L(\omega) = L_0(\omega) + L_{\text{noc}}(\omega).$$

Отсюда следует

$$L_{\text{noc}}(\omega) = L(\omega) - L_0(\omega).$$

ЛАХ последовательного корректирующего устройства определяется вычитанием располагаемой ЛАХ из желаемой.

Определив ЛАХ корректирующего устройства, можно по ней найти его передаточную функцию и вычислить ее параметры. По этим данным, используя приведенные в литературе таблицы, определяются принципиальная схема корректирующего устройства и рассчитываются численные значения элементов схемы.

При построении желаемой ЛАХ ее делят на три участка: низкочастотный, среднечастотный и высокочастотный. Среднечастотный участок определяется асимптотой, пересекающей ось частот, протяженностью влево и вправо до первых сопрягающих частот. Слева от него располагается низкочастотный участок, справа – высокочастотный.

Низкочастотная часть желаемой ЛАХ выбирается из условий требуемой точности. Если синтезируемая система должна быть статической, то для получения заданной точности, как это следует из (5.1), коэффициент передачи должен удовлетворять условию

$$k \geq \frac{N - \varepsilon_{\text{cm}}}{\varepsilon_{\text{cm}}}. \quad (5.3)$$

Если в системе предполагается иметь астатизм 1-го порядка, то коэффициент передачи выбирается из условия требуемой точности по скорости задающего воздействия:

$$k \geq \frac{\dot{g}}{\varepsilon_{cm}}. \quad (5.4)$$

Этот вывод следует непосредственно из (5.2).

Достаточно точно низкочастотная часть строится по требуемой точности воспроизведения гармонического воздействия

$$g(t) = G_{\max} \sin \omega_k t.$$

Передаточная функция системы по ошибке в частотной области может быть записана следующим образом:

$$\Phi_{\varepsilon}(j\omega) = \frac{1}{1+W(j\omega)} = \frac{1}{1+A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}}.$$

Для того, чтобы ошибка воспроизведения была минимальной, необходимо чтобы  $A(\omega_k) \gg 1$ . Тогда амплитуда ошибки определяется выражением

$$E_{\max} \approx \frac{G_{\max}}{A(\omega_k)}.$$

Для обеспечения требуемой точности на АЧХ налагается требование

$$A(\omega_k) \geq \frac{G_{\max}}{E_{\max}}. \quad (5.5)$$

С точки зрения ЛЧХ это означает, что низкочастотный участок желаемой ЛАХ должен проходить не ниже некоторой контрольной точки, построенной по выражению

$$L(\omega_k) = 20 \lg \frac{G_{\max}}{E_{\max}}. \quad (5.6)$$

Часто при проектировании следящих систем задаются максимальная скорость слежения  $\dot{x}_{\max}$  и максимальное ускорение слежения  $\ddot{x}_{\max}$ . По этим данным можно подобрать эквивалентное гармоническое воздействие с параметрами

$$\dot{G}_{\max} = \dot{x}_{\max} = G_{\max} \omega_k; \quad \ddot{G}_{\max} = \ddot{x}_{\max} \omega_k^2.$$

Отсюда

$$\omega_k = \frac{\ddot{x}_{\max}}{\dot{x}_{\max}}; \quad G_{\max} = \frac{(\dot{x}_{\max})^2}{\ddot{x}_{\max}}. \quad (5.7)$$

По этим координатам строится контрольная точка. Доказано [2], что для обеспечения заданной точности в этом случае требуется, чтобы низкочастотная часть желаемой ЛАХ не заходила в запретную зону, ограниченную асимптотами с наклонами  $-20$ дБ/дек и  $-40$ дБ/дек, которые сопрягаются в контрольной точке (рис.5.4).



Рис. 5.4. Запретная зона

Наклон и протяженность среднечастотного участка определяются необходимыми запасами устойчивости. С этой точки зрения желательно, чтобы ось частот пересекала участок ЛАХ с наклоном  $-20\text{дБ/дек}$  протяженностью не менее одной декады. Хорошие результаты получаются, если частота среза и ближайшая частота сопряжения  $\omega_1$  справа от нее находятся в соотношении  $\omega_1/\omega_c \geq 2$ . При выполнении этих требований обычно получают  $\sigma \leq 20\%$  и  $\pi/\omega_c \leq t_p \leq 2\pi/\omega_c$ .

Не всегда удается выполнить построение такого среднечастотного участка. В этих случаях следует руководствоваться какими – либо соображениями, вытекающими из конкретной задачи, или рекомендациями, приведенными в литературе.

Высокочастотный участок желаемой ЛАХ находится ниже оси частот и не оказывает существенного влияния на процесс регулирования. Поэтому, по возможности, его нужно выбирать так, чтобы он совпадал с соответствующим участком располагаемой ЛАХ. Такой выбор существенно упрощает схему корректирующего устройства. Исключение составляет случай, когда высокочастотный участок располагаемой ЛАХ соответствует колебательному звену с малым показателем затухания. В этом случае высокочастотный участок желаемой ЛАХ должен проходить так, чтобы его удаление от оси частот на резонансной частоте удовлетворяло условию

$$L(\omega_p) < 20 \lg \frac{M}{M+1}, \quad (5.8)$$

где  $M$  – показатель колебательности системы, который выбирается в пределах от 1.1 до 1.3.

**Пример.** Система без коррекции задана передаточной функцией в разомкнутом состоянии

$$W(s) = \frac{k}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$$

где  $T_1 = 0.125\text{с}$ ,  $T_2 = 0.01\text{с}$ .

Так как заданная система обладает астатизмом 1-го порядка, то имеет смысл коэффициент передачи определить исходя из ошибки по скорости. Допустим, что максимальная скорость воздействия  $\dot{g}_{\max} = 10$ , максимально допустимая

ошибка не превышает 3% от этого значения. Тогда в соответствии с формулой (5.4) получим требуемое значение коэффициента передачи  $k \approx 330$ . Подставим это значение в исходную передаточную функцию и определим передаточную функцию замкнутой системы:

$$\Phi(s) = \frac{k}{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2) s^2 + s + k}$$

Условие устойчивости системы 3-го порядка, записанное в соответствии с критерием Гурвица, для данной системы будет

$$(T_1 + T_2) > k T_1 T_2.$$

Легко проверить, что при избранном значении коэффициента передачи замкнутая система неустойчива. Считая передаточную функцию разомкнутой системы с полученным коэффициентом передачи передаточной функцией неизменяемой части  $W_0(s)$ , синтезируем корректирующее устройство, обеспечивающее системе необходимые запасы устойчивости.

Построим ЛАХ неизменяемой части (рис. 5.5). Частоты сопряжения равны

$$\omega_{01} = \frac{1}{T_1} = 8; \quad \omega_{02} = \frac{1}{T_2} = 100.$$

Положение точки, в которой асимптота, соответствующая интегрирующему звену, пересекает ось частот, определяется выражением

$$\omega_{\mu} [\text{мм}] = m \lg \frac{\omega_{02}}{\omega_{01}} \approx 26 \text{ мм}$$

при  $m = 50$ .

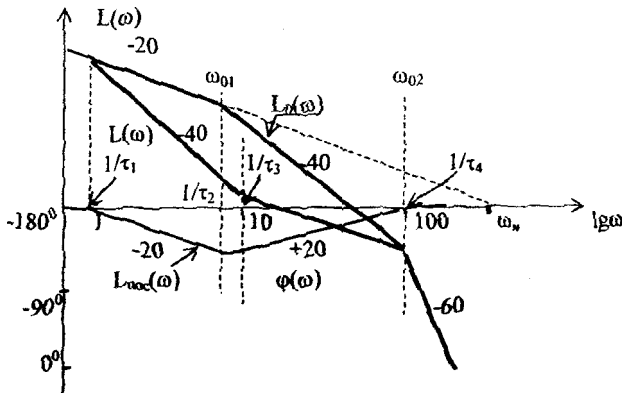


Рис. 5.5. Синтез системы методом ЛЧХ

Определим высокочастотный участок желаемой ЛАХ совпадающим с аналогичным участком располагаемой ЛАХ, а для стабилизации системы среднечастотный участок выберем так, чтобы он имел наклон  $-20\text{дБ/дек}$  и протяженность одну декаду. Вычтя из желаемой располагаемую ЛАХ, получим ЛАХ последовательного корректирующего устройства. По этой ЛАХ можно записать передаточную функцию корректирующего устройства:

$$W_{noc}(s) = \frac{(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_4 s + 1)}$$

Определив из графика частоты сопряжения корректирующего устройства, можно вычислить его постоянные времени:  $\tau_1 = 1.1$ ,  $\tau_2 = 0.125$ ,  $\tau_3 = 0.1$ ,  $\tau_4 = 0.01$ .

Для проверки результатов синтеза необходимо прежде всего построить фазовую характеристику и определить запасы устойчивости. Для рассматриваемого примера можно показать, что запас по фазе  $\gamma \approx 38^\circ$ , запас по модулю  $H = -12\text{дБ}$ . Запасы устойчивости удовлетворяют заданным. Для определения показателей качества необходимо построить переходный процесс. Если запасы устойчивости и показатели качества синтезированной системы не соответствуют заданным, то необходимо повторить расчет, изменив желаемую ЛАХ в требуемом направлении.

### 5.3. Особенности синтеза корректирующих обратных связей

Для коррекции САУ во многих случаях целесообразно использовать корректирующие цепи в виде местных обратных связей (рис.5.6).

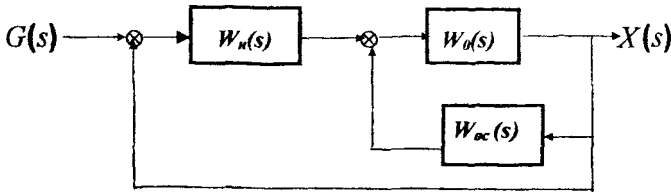


Рис. 5.6. Структурная схема коррекции обратными связями

Если желаемая ЛАХ реализуется с помощью корректирующего устройства  $W_{oc}(s)$ , то желаемая передаточная функция разомкнутой САУ будет

$$W(s) = \frac{W_H(s)W_0(s)}{1 + W_0(s)W_{oc}(s)} = W_{HCK}(s)W_n(s) \quad (5.9)$$

В этом выражении  $W_H(s)$  — передаточная функция участка неизменяемой части системы, не охваченного корректирующей обратной связью,  $W_0(s)$  — передаточная функция участка неизменяемой части системы, охваченного корректирующей обратной связью,  $W_{НСК}(s) = W_H(s)W_0(s)$  — передаточная функция разомкнутой нескорректированной системы,

$$W_n(s) = \frac{1}{1 \mp W_0(s)W_{oc}(s)} \text{ — требуемая передаточная функция после}$$

довательного корректирующего устройства, эквивалентного по своему влиянию корректирующей обратной связи, охватывающей участок с передаточной функцией  $W_0(s)$ .

Требуемая передаточная функция последовательного корректирующего устройства  $W_n(s)$  определяется методом ЛЧХ так, как было рассмотрено выше. По этой передаточной функции необходимо определить передаточную функцию  $W_{oc}(s)$ .

Эту задачу можно решить следующими способами.

#### 1. Аналитический метод

Из выражения для  $W_n(s)$  следует:

- для отрицательной обратной связи

$$W_{oc}(s) = \frac{1 - W_n(s)}{W_n(s)W_0(s)} = \frac{1}{W_0(s)} \left( \frac{1}{W_n(s)} - 1 \right); \quad (5.10)$$

- для положительной обратной связи

$$W_{oc}(s) = \frac{1}{W_0(s)} \left( 1 - \frac{1}{W_n(s)} \right). \quad (5.11)$$

Нетрудно видеть, что полученная передаточная функция зависит не только от  $W_n(s)$ , но и от передаточной функции  $W_0(s)$  звеньев, охваченных обратной связью.

Если синтезированную передаточную функцию звена обратной связи точно реализовать невозможно, то выбирают контур с передаточной функцией, близкой к требуемой. Затем определяются полученные запасы устойчивости и показатели качества. При необходимости расчет уточняется.

## 2. Графический метод

Метод рассмотрим для отрицательной обратной связи. В выражении для  $W_n(s)$  сделаем замену  $s = j\omega$ . Получим

$$W_n(j\omega) = \frac{1}{1 + W_0(j\omega)W_{oc}(j\omega)}.$$

Сделаем обозначение

$$W_{oc}^*(s) = \frac{1}{W_0(j\omega)W_{oc}(j\omega)}.$$

В области частот, где  $|W_0(j\omega)W_{oc}(j\omega)| \ll 1$ , выполняется условие

$$|W_{oc}^*(j\omega)| \gg 1 \text{ или } L_{oc}^*(\omega) = -L_0(\omega) - L_{oc}(\omega) \gg 0.$$

В этой области  $W_n(j\omega) = 1$  и  $L_n(\omega) = 0$ .

Из последнего выражения следует, что в рассматриваемой области частот должно выполняться условие

$$-L_{oc}(\omega) \gg L_0(\omega). \quad (5.12)$$

Поскольку это условие не связано с требованием получения определенного вида ЛАХ звена корректирующей обратной связи, то оно может быть сравнительно легко выполнено.

В области частот, где  $|W_0(j\omega)W_{oc}(j\omega)| \gg 1$ , справедливы соотношения

$$|W_{oc}^*(j\omega)| \ll 1 \text{ и } L_{oc}^*(\omega) = -L_0(\omega) - L_{oc}(\omega) \ll 0.$$

Выражение для АФЧХ эквивалентного последовательного корректирующего устройства в этом диапазоне частот примет вид

$$W_n(j\omega) = \frac{1}{W_0(j\omega)W_{oc}(j\omega)}. \quad (5.13)$$

Тогда  $L_n(\omega) = -L_0(\omega) - L_{oc}(\omega) = L_{oc}^*(\omega)$ .

Отсюда следует вывод: в области частот, где  $L_n(\omega) \ll 0$ , должно выполняться равенство

$$L_{oc}(\omega) = -\{L_n(\omega) + L_0(\omega)\}. \quad (5.14)$$

Таким образом, для того чтобы в этом диапазоне частот найти ЛАХ звена корректирующей обратной связи, необходимо сложить требуемую ЛАХ эквивалентного последовательного корректирующего устройства с

ЛАХ участка неизменяемой части, охваченного обратной связью, и эту сумму взять с обратным знаком.

Передаточная функция  $W_{oc}(s)$  определяется по виду ЛАХ или непосредственно из выражения (5.14).

Рассмотрим два частных, но часто встречающихся в практике автоматического управления случая коррекции звеньями обратной связи.

1. Передаточная функция участка неизменяемой части содержит колебательное звено с малым показателем затухания и имеет вид

$$W_0(s) = \frac{kB(s)}{T_0^2 s^2 + 2T_0\zeta_0 s + 1}$$

Необходимо обеспечить требуемое, большее чем исходное, значение показателя затухания.

Рассмотрим случай, когда полином числителя имеет нулевой порядок и  $kB(s) = k$ . Охватим рассматриваемое звено отрицательной обратной связью с передаточной функцией  $W_{oc}(s) = k_{oc} s$ . Для результирующей передаточной функции получим

$$W(s) = \frac{k}{T_0^2 s^2 + (2T_0\zeta_0 + kk_{oc})s + 1}$$

Следовательно,  $2T\zeta = 2T_0\zeta_0 + kk_{oc}$  и так как  $T = T_0$ , то для нового значения показателя затухания можно записать

$$\zeta = \frac{2T_0\zeta_0 + kk_{oc}}{2T_0}. \quad (5.15)$$

Задавшись требуемым значением показателя затухания, из (5.15) можно вычислить необходимое значение коэффициента передачи цепи обратной связи.

Пусть теперь полином числителя имеет первый порядок

$$kB(s) = k(T_1 s + 1).$$

Охватим исследуемый участок жесткой отрицательной обратной связью с коэффициентом передачи  $k_{oc}$ . Получим

$$W(s) = \frac{k(T_1 s + 1)}{T_0^2 s^2 + (2T_0\zeta_0 + k_{oc}kT_1)s + (1 + k_{oc}k)}$$

Сделаем обозначения:

$$T^2 = \frac{T_0^2}{1 + k_{oc}k}; \quad 2T\zeta = \frac{2T_0\zeta_0 + k_{oc}kT_1}{1 + k_{oc}k}; \quad k_{\Sigma} = \frac{k}{1 + k_{oc}k}.$$



Тогда результирующая передаточная функция скорректированного участка примет вид

$$W(s) = \frac{k_2(T_1 s + 1)}{T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1}. \quad (5.16)$$

С учетом сделанных обозначений для нового значения показателя затухания получим

$$\zeta = \frac{2T_0\zeta_0 + k_{oc}kT_1}{2T_0\sqrt{1+k_{oc}k}}. \quad (5.17)$$

Аналогично предыдущему из этого выражения можно вычислить требуемое значение коэффициента  $k_{oc}$ .

2. Динамическая система или звено обладает интегрирующими свойствами и это нарушает пропорциональную зависимость между входным и выходным сигналами. В общем случае передаточную функцию исходной системы можно записать в следующем виде:

$$W_0(s) = \frac{kB(s)}{sA(s)}.$$

Очевидно, что пропорциональности между входным и выходным сигналами нет и если, например, входной сигнал имеет постоянное значение, т.е.

$g(t) = g_0 = const \Rightarrow \frac{g_0}{s}$ , то в соответствии с теоремой о конечном значении

оригинала для установившегося значения выходной величины получим

$$x_{yc} = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sW_0(s) \frac{g_0}{s} = \infty.$$

Для компенсации интегрирующих свойств охватим исходную систему жесткой отрицательной обратной связью с коэффициентом  $k_{oc}$ . Получим

$$W(s) = \frac{kB(s)}{sA(s) + k_{oc}kB(s)}. \quad (5.18)$$

Теперь

$$x_{yc} = \lim_{s \rightarrow 0} sW(s) \frac{g_0}{s} = \frac{kb_m}{k_{oc}kb_m} g_0 = \frac{1}{k_{oc}} g_0 \quad (5.19)$$

Выбором коэффициента обратной связи можно обеспечить требуемую пропорциональность между входом и выходом.

## 6. ЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

При изучении основ теории автоматического управления ранее предполагалось, что задающие и возмущающие воздействия представляют собой известные функции времени. Во многих практических случаях необходимо исследовать качество работы САУ, когда указанные выше воздействия являются случайными функциями, т.е. когда понятие о переходном процессе теряет смысл.

Это направление ТАУ основывается на методах теории случайных функций и математической статистики.

### 6.1. Случайные функции и их характеристики

Функция, которая при каждом данном значении независимой переменной является случайной величиной, называется случайной функцией. Случайные функции, для которых независимой переменной является время, часто называют стохастическими процессами.

Основными характеристиками случайной функции (СФ) являются математическое ожидание  $M$ , дисперсия  $D$  и корреляционная функция  $K$ .

Математическое ожидание определяется выражением

$$M\{x(t)\} = m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) f(x, t) dx. \quad (6.1)$$

Дисперсия

$$\begin{aligned} D\{x(t)\} &= M\left\{[x(t) - m_x(t)]^2\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m_x(t)]^2 f(x, t) dx. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Физический смысл понятия корреляционной функции заключается в определении вероятности того, что в момент времени  $t_2$  случайная функция примет значение  $x_2$ , если в момент  $t_1 \leq t_2$  она получила значение  $x_1$ :

$$\begin{aligned} K_x(t_1, t_2) &= M\left\{[x(t_1) - m_x(t_1)][x(t_2) - m_x(t_2)]\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_1) - m_x(t_1)][x(t_2) - m_x(t_2)] f(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где  $x_1 = x(t_1)$ , а  $x_2 = x(t_2)$ .

В приведенных выражениях

$f(x, t)$  — одномерный дифференциальный закон распределения,  
 $f(x_1, x_2, t_1, t_2)$  — двумерный дифференциальный закон распределения.

В теории СФ математическое ожидание называют начальным моментом первого порядка, дисперсию-центральным моментом второго порядка, а корреляционную функцию - смешанным центральным моментом второго порядка. Раздел теории СФ, оперирующий только с моментами первых двух порядков, носит название корреляционной теории случайных функций.

Наиболее важным свойством СФ, определяющим возможность применения особых методов исследования, является зависимость или независимость свойств ее от начала отсчета времени. В соответствии с этим различают стационарные и нестационарные случайные функции. Для стационарных СФ все многомерные законы распределения зависят от взаимного расположения моментов времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , но не от самих значений этих величин (стационарность в узком смысле). Если этому условию удовлетворяют только моменты первых двух порядков, то СФ называется стационарной в широком смысле. Процессы преобразования именно стационарных в широком смысле СФ системами автоматического управления мы и будем рассматривать, называя в дальнейшем эти СФ просто стационарными.

По определению стационарной СФ ее математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, а корреляционная функция является функцией только промежутка времени  $\tau = t_2 - t_1$ , а не самих моментов отсчета времени:

$$\begin{aligned} m_x &= \text{const}; & D_x &= \text{const}; \\ K_x(\tau) &= M\{[x(t) - m_x][x(t + \tau) - m_x]\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m_x][x(t + \tau) - m_x] f(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Основные свойства корреляционной функции:

1.  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} K_x(\tau) = K_x(\infty) = 0$ .
2.  $K_x(0) = D_x$ .
3.  $K_x(0) \geq |K_x(\tau)|$  - невозрастающая функция.
4.  $K_x(\tau) = K_x(-\tau)$  - четная функция.

Важной характеристикой стационарной СФ является ее спектральная плотность  $S$ , которая связана с корреляционной функцией преобразованием Фурье:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (6.5)$$

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (6.6)$$

Учитывая свойство 2, получим

$$D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (6.7)$$

Стационарный случайный процесс обладает эргодическим свойством. Это означает, что все его статистические характеристики могут быть определены по одной реализации достаточно большой длительности, либо по ансамблю относительно коротких реализаций.

В практических приложениях широкое распространение получил стационарный случайный процесс типа "белый шум" для которого

$$K_x(\tau) = N\delta(\tau), \quad (6.8)$$

где  $N = \text{const}$ ,  $\delta(\tau)$  — дельта-функция.

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} N\delta(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau = N. \quad (6.9)$$

Важное прикладное значение такого сигнала состоит в том, что анализ систем относительно случайных сигналов произвольной формы с помощью специальных формирующих фильтров можно заменить анализом относительно белого шума, что значительно упрощает решение задачи.

До сих пор мы рассматривали одну случайную функцию. Рассмотрим теперь в рамках корреляционной теории систему двух стационарных случайных функций  $X$  и  $Y$ . Так как первый и второй моменты каждой СФ в отдельности представляют собой уже изученные математические ожидания и корреляционные функции, то остается рассмотреть второй смешанный момент ординат различных СФ, взятых в различные моменты времени — так называемую взаимную корреляционную функцию:

$$K_{xy}(t_1, t_2) = M\left\{[x(t_1) - m_x][y(t_2) - m_y]\right\}$$

Если взаимная корреляционная функция зависит только от промежутка времени  $\tau = t_2 - t_1$ , а не от самих моментов времени, то говорят, что указанные СФ стационарно связаны и их взаимную корреляционную функцию можно записать в следующем виде:

$$K_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m_x][y(t+\tau) - m_y] f(x, y, \tau) dx dy. \quad (6.10)$$

Для взаимной корреляционной функции справедливо равенство

$$K_{xy}(\tau) = K_{yx}(-\tau) \quad (6.11)$$

Остальные свойства взаимной корреляционной функции аналогичны свойствам обычной, как часто говорят — автокорреляционной функции. Если к взаимной корреляционной функции применить преобразование Фурье, то получим взаимную спектральную плотность.

6.2. Связь между корреляционными функциями и спектральными плотностями величин на входе и выходе линейной динамической системы

Пусть на вход САУ с передаточной функцией  $\Phi(s)$  и функцией веса  $k(t)$  поступает случайный стационарный сигнал  $g(t)$ , имеющий корреляционную функцию  $K_g(\tau)$  и спектральную плотность  $S_g(\omega)$  (рис. 6.1).

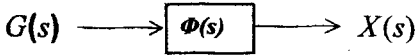


Рис.6.1. САУ при случайном воздействии на входе

Известно, что выходной сигнал определяется выражением

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\theta)k(\theta)d\theta \quad (6.12)$$

Тогда математическое ожидание сигнала на выходе будет

$$m_x = M\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} M\{g(t-\theta)\}k(\theta)d\theta = m_g \int_{-\infty}^{\infty} k(\theta)d\theta.$$

Так как функция веса является оригиналом передаточной функции, то в соответствии с теоремой о конечном значении оригинала получим

$$m_x = m_g \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} \Phi(s) = m_g \Phi(0). \quad (6.13)$$

Умножим обе части выражения (6.12) на  $g(t-\tau)$ :

$$x(t)g(t-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)g(t-\theta)k(\theta)d\theta.$$

Применив к этому выражению операцию математического ожидания, получим

$$K_{xg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} K_g(\tau-\theta)k(\theta)d\theta \quad (6.14)$$

Умножив обе части (6.12) на  $x(t+\tau)$  и применив снова операцию математического ожидания, можно записать

$$M\{x(t+\tau)x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} M\{g(t-\theta)x(t+\tau)\}k(\theta)d\theta \quad \text{или}$$

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xg}(\tau+\theta)k(\theta)d\theta \quad (6.15)$$

Применив к выражению (6.14) преобразование Фурье, получим

$$S_{xg}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ K_g(\tau-\theta)k(\theta)d\theta \right] e^{-j\omega\tau} d\tau =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ K_g(\tau - \theta) k(\theta) d\theta \right] e^{-j\omega\tau} e^{-j\omega\theta} e^{j\omega\theta} d\tau = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} k(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta * \int_{-\infty}^{\infty} K_g(\tau - \theta) e^{-j\omega(\tau - \theta)} d\tau.
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$S_{xg}(\omega) = \Phi(j\omega) S_g(\omega) \quad (6.16)$$

С помощью преобразования Фурье, после аналогичных преобразований, из выражения (6.15) получим

$$S_x(\omega) = \Phi(-j\omega) S_{xg}(\omega) \quad (6.17)$$

Подставим (6.16) в (6.17) и будем иметь

$$S_x(\omega) = |\Phi(j\omega)|^2 S_g(\omega) \quad (6.18)$$

**Спектральная плотность сигнала на выходе линейной динамической системы равна спектральной плотности входного сигнала, умноженной на квадрат амплитудно-фазовой частотной характеристики системы.**

Зная спектральную плотность, по вышеприведенным формулам можно определить корреляционную функцию и дисперсию выходного сигнала.

### 6.3. Анализ динамической точности САУ

Задача состоит в оценке динамической точности САУ, т.е. при непрерывно случайным образом изменяющихся воздействиях. Мерой динамической точности принято считать среднее квадратическое отклонение, которое определяется как

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} \quad (6.19)$$

Критерий минимума среднего квадратического отклонения (СКО) эффективен для широкого класса систем, но он не является универсальным, так как обеспечивает малое значение лишь средней, а не мгновенной ошибки. Поэтому в системах, где недопустимы большие, хотя и кратковременные ошибки, желательно задачу о целесообразном выборе передаточной функции системы решать не только на основе критерия минимума СКО, а с учетом ошибок в режиме переходного процесса.

Пусть на вход системы с передаточной функцией в разомкнутом состоянии  $W(s)$  поступает полезный случайный сигнал  $g(t) \Rightarrow G(s)$ , имеющий спектральную плотность  $S_g(\omega)$  (рис.6.2).



Рис 6.2. Система со случайным сигналом на входе

Передаточная функция системы по ошибке от задающего воздействия будет

$$\Phi_{\varepsilon}(s) = \frac{1}{1+W(s)}$$

Спектральная плотность ошибки определится как

$$S_{\varepsilon}(\omega) = |\Phi_{\varepsilon}(j\omega)|^2 S_g(\omega) \quad (6.20)$$

Далее определяются дисперсия и СКО.

Система может находиться одновременно под воздействием двух случайных сигналов: полезного  $-\alpha(t)$  и возмущающего  $-n(t)$ , приложенных в одной точке, т.е.  $g(t) = \alpha(t) + n(t)$ . Очевидно, что в этом случае

$$X(s) = \Phi(s)\alpha(s) + \Phi(s)N(s)$$

В данном случае передаточная функция замкнутой системы по возмущению совпадает с передаточной функцией по задающему воздействию. Ошибка системы определяется как разность между полезным (задающим) воздействием и управляемой величиной:

$$E(s) = \alpha(s) - X(s).$$

Отсюда

$$X(s) = \alpha(s) - E(s) = \Phi(s)\alpha(s) + \Phi(s)N(s);$$

$$E(s) = (1 - \Phi(s))\alpha(s) - \Phi(s)N(s) = E_{\alpha}(s) - E_n(s).$$

В этих выражениях

$$E_{\alpha}(s) = (1 - \Phi(s))\alpha(s) = \Phi_{\varepsilon}(s)\alpha(s) - \text{составляющая ошибки}$$

от задающего воздействия;

$$E_n(s) = \Phi(s)N(s) - \text{составляющая ошибки, вызванная помехой.}$$

Если полезный сигнал и помеха не коррелированы, то спектральная плотность ошибки будет

$$S_{\varepsilon}(\omega) = |\Phi_{\varepsilon}(j\omega)|^2 S_{\alpha}(\omega) + |\Phi(j\omega)|^2 S_n(\omega) \quad (6.21)$$

Рассмотрим случай, когда задающее и возмущающее воздействия приложены в различных точках (рис.6.3).

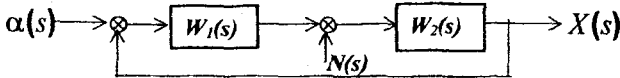


Рис. 6.3. Система с воздействиями в разных точках

Уравнения элементов системы в соответствии со схемой будут

$$\begin{aligned} E(s) &= \alpha(s) - X(s); \\ X(s) &= W_1(s)W_2(s)E(s) + W_2(s)N(s). \end{aligned}$$

Определив из первого уравнения  $X(s)$  и подставив во второе, найдем

$$(1 + W_1(s)W_2(s))E(s) = \alpha(s) - W_2(s)N(s)$$

Отсюда

$$E(s) = \frac{1}{1 + W(s)} \alpha(s) - \frac{W_2(s)}{1 + W(s)}$$

В этом выражении  $W(s) = W_1(s)W_2(s)$  — передаточная функция разомкнутой системы;

$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{1}{1 + W(s)}$  — передаточная функция замкнутой САУ по ошибке от задающего воздействия.

Обозначим через  $\Phi_n(s) = \frac{W_2(s)}{1 + W(s)}$  — передаточную функцию замкнутой системы по помехе. Если полезный сигнал и помеха не коррелированы, то можно записать

$$S_\varepsilon(\omega) = |\Phi_\varepsilon(j\omega)|^2 S_\alpha(\omega) + |\Phi_n(j\omega)|^2 S_n(\omega) \quad (6.22)$$

Далее по-прежнему следует вычисление дисперсии и СКО.

В практических приложениях вычисление интеграла вида

$$D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 S_g(\omega) d\omega$$

может вызвать существенные трудности. Для облегчения решения задачи этот интеграл приводится к специальному табличному виду. Методика приведения и значения табличных интегралов приводится в приложениях.

#### 6.4. Формирование сигнала с заданной спектральной плотностью

В ряде случаев теоретического и экспериментального исследования установившихся случайных процессов оказывается целесообразным свести приложенные к системе воздействия к одному и тому же типовому воздействию, в качестве которого выбирается белый шум.



Естественно, что при этом схема исследования должна быть преобразована таким образом, чтобы реализуемый ею установившийся случайный процесс  $x(t)$  имел бы такие же значения характеристик (корреляционной функции, спектральной плотности и математического ожидания), которые совпадали бы с их реальными значениями. Преобразование это может быть осуществлено с помощью стационарного формирующего устройства, параметры которого должны выбираться так, чтобы образующийся на выходе его установившийся случайный процесс под влиянием приложенного ко входу белого шума обладал характеристиками реального входного воздействия. Схемы, поясняющие описанное преобразование, показаны на рис. 6.4,а и 6.4,б.

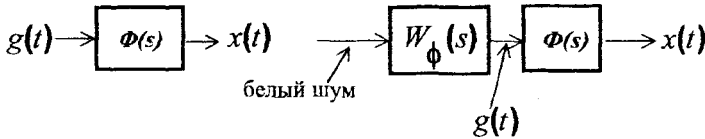


Рис.6.4а. Случайный сигнал на входе системы

Рис.6.4б. Белый шум на входе формирующего фильтра

Так как спектральная плотность является четной дробно-рациональной функцией частоты, то она может быть представлена в виде двух комплексно-сопряженных сомножителей:

$$S_g(\omega) = \Psi(j\omega)\Psi(-j\omega) = |\Psi(j\omega)|^2 \quad (6.23)$$

Потребуем, чтобы спектральная плотность реального случайного сигнала была равна

$$S_g(\omega) = N |W_\phi(j\omega)|^2 \quad (6.24)$$

Из (6.23) и (6.24) находится амплитудно-фазовая частотная характеристика формирующего фильтра:

$$W_\phi(j\omega) = \frac{\Psi(j\omega)}{\sqrt{N}} \quad (6.25)$$

Отметим, что установившиеся случайные процессы в реальной системе и в системе с формирующим устройством эквивалентны друг другу лишь по своим первым и вторым моментам и могут значительно различаться по моментам более высоких порядков. Однако, если воздействие в реальной системе и процесс на выходе формирующего устройства являются нормальными случайными функциями, то они полностью соответствуют друг другу.

### 6.5. Синтез оптимальных передаточных функций САУ при случайных воздействиях

Выше было показано, что если на входе системы помимо управляющего есть и возмущающее воздействие (помеха), то ошибка такой системы состоит из двух составляющих. Часто оказывается, что стремление уменьшить одну составляющую приводит к увеличению второй и наоборот. Задача синтеза и состоит в том, чтобы обеспечить минимально возможную сумму обеих составляющих.

Возможны несколько способов решения задачи синтеза. Первый и наиболее простой применим, если уже известна структура системы. В этом случае необходимо, используя вышеприведенные выражения, определить СКО как функцию варьируемых параметров системы и обычным методом определить их значения, дающие минимум ошибки. Еще один способ применим, когда полезный сигнал имеет более низкочастотный спектр, чем помеха (рис.6.5).

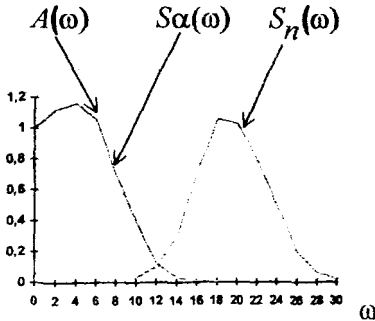


Рис.6.5. АЧХ системы, спектральные плотности полезного сигнала и помехи

В этом случае полоса пропускания системы должна быть выбрана достаточно широкой для обеспечения необходимой точности воспроизведения полезного сигнала, но такой ширины, чтобы полностью отфильтровать помехи.

В наиболее общем случае, когда спектры полезного сигнала и помехи накладываются друг на друга, систему строят так, чтобы ее частотная характеристика максимально приближалась к спектральной характеристике полезного сигнала.

Рассмотрим методику определения оптимальной передаточной функции по критерию минимума СКО, когда структура системы неизвестна, а известна только передаточная функция неизменяемой части.

При определении оптимальной частотной характеристики замкнутой САУ  $\Phi(j\omega)$  по критерию минимума СКО между идеальным сигналом  $\mu(t)$  и оптимальным сигналом  $x(t)$  предположим, что:

1) идеальная частотная характеристика  $\Phi_{ud}(s)$  или идеальная функция веса  $k_{ud}(t)$  известны;

2) полезный сигнал  $\alpha(t)$  и помеха  $n(t)$  являются стационарными эргодическими случайными процессами с нулевым математическим ожиданием и их корреляционные функции и спектральные плотности известны;

3) на время переходного процесса ограничения не накладываются, т.е. решение ищется в классе систем с "бесконечной памятью".

Схема постановки задачи приведена на рис. 6. 6.

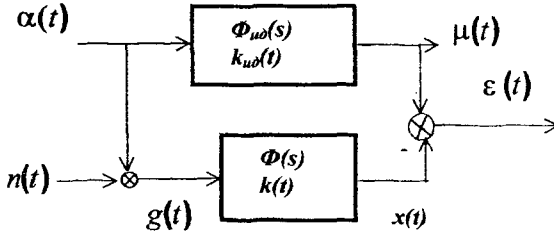


Рис.6.6. Схема синтеза оптимальной САУ

Необходимое условие, которому должна удовлетворять оптимальная импульсная переходная функция  $k(t)$ , получено Н.Винером в виде интегрального уравнения

$$\int_0^{\infty} K_g(\tau - \theta)k(\theta)d\theta = K_{\mu g}(\tau) \quad (6.26)$$

при  $\tau \geq 0$ .

Корреляционная функция суммарного сигнала на входе определяется выражением

$$K_g(\tau) = K_{\alpha}(\tau) + K_n(\tau) + K_{\alpha n}(\tau) + K_{n\alpha}(\tau).$$

Условие  $\tau \geq 0$  отражает принцип физической осуществимости системы. Если полезный сигнал и помеха не коррелированы, то

$$K_{\alpha n}(\tau) = K_{n\alpha}(\tau) = 0.$$

Уравнение (26) можно преобразовать к виду

$$K_{\mu g}(\tau) - \int_0^{\infty} K_g(\tau - \theta)k(\theta)d\theta = q(\tau), \quad (6.27)$$

где  $q(\tau)$  — некоторая функция, равная нулю при  $\tau \geq 0$ . Это условие приводит к тому, что функция  $Q(j\omega)$ , связанная с  $q(\tau)$  преобразованием Фурье, не будет содержать полюсов в верхней полуплоскости плоскости  $\omega$ . Преобразование Фурье дает возможность перейти к спектральным плотностям:

$$S_{\mu g}(\omega) - \Phi(j\omega)S_g(\omega) = Q(\omega) \quad (6.28)$$

Предположим, что спектральная плотность входного сигнала имеет дробно-рациональный вид и может быть представлена в виде

$$S_g(\omega) = \Psi(j\omega)\Psi(-j\omega) = \Psi(j\omega)\Psi^*(j\omega) \quad (6.29)$$

Здесь  $\Psi(j\omega)$  имеет все нули и полюсы в верхней полуплоскости, а  $\Psi^*(j\omega)$  - в нижней полуплоскости плоскости  $\omega$ . Разделим (6.28) на  $\Psi^*(\omega)$  и получим

$$\frac{S_{\mu g}(\omega)}{\Psi^*(j\omega)} - \Phi(j\omega)\Psi(j\omega) = \frac{Q(\omega)}{\Psi^*(j\omega)} \quad (6.30)$$

Дробь в левой части выражения (6.30) можно преобразовать к виду суммы

$$\frac{S_{\mu g}(\omega)}{\Psi^*(j\omega)} = B(j\omega) = B^+(j\omega) + B^-(j\omega), \text{ причем } B^+(j\omega) \text{ имеет все}$$

нули и полюсы только в верхней полуплоскости, а  $B^-(j\omega)$  - только в нижней полуплоскости плоскости  $\omega$ . С учетом этого выражение (6.30) преобразуем к виду

$$B^+(j\omega) + B^-(j\omega) - \Phi(j\omega)\Psi(j\omega) = \frac{Q(\omega)}{\Psi^*(j\omega)}$$

Последнее выражение справедливо для всей плоскости  $\omega$ . Однако, поскольку необходимо выполнение условия физической реализуемости  $\tau \geq 0$ , то решение ищется только в верхней полуплоскости и указанное выражение принимает вид

$$B^+(j\omega) - \Phi(j\omega)\Psi(j\omega) = 0.$$

Отсюда для амплитудно-фазовой характеристики замкнутой САУ получим

$$\Phi(j\omega) = \frac{B^+(j\omega)}{\Psi(j\omega)}. \quad (6.31)$$

Передаточная функция замкнутой САУ  $\Phi(s) = \Phi(j\omega)|_{j\omega=s}$ . По этой передаточной функции определяется передаточная функция разомкнутой системы, а затем с учетом известной передаточной функции неизменяемой части находится передаточная функция корректирующего устройства.

#### Пример.

Полезный сигнал и помеха заданы своими корреляционными функциями:

$$K_{\alpha}(\tau) = a^2 e^{-a|\tau|}; \quad K_{\eta}(\tau) = b^2 e^{-a|\tau|}.$$

Полезный сигнал и помеха не коррелированы. Идеальная передаточная функция  $\Phi_{ид}(j\omega) = 1$ , т.е. должна быть решена задача оптимальной фильтрации.

Прежде всего определим спектральные плотности:

$$S_n(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} b^2 e^{-\alpha|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^0 b^2 e^{(\alpha-j\omega)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} b^2 e^{-(\alpha+j\omega)\tau} d\tau =$$

$$= \frac{b^2}{\alpha-j\omega} + \frac{b^2}{\alpha+j\omega} = \frac{2b^2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Аналогично получим

$$S_\alpha(\omega) = \frac{2a^2}{1+\omega^2}.$$

Далее процесс решения задачи Винера состоит из следующих операций:

1. Вычислим

$$S_g(\omega) = S_\alpha(\omega) + S_n(\omega) = \frac{\beta^2 + \gamma^2 \omega^2}{(1+\omega^2)(\alpha^2 + \omega^2)}.$$

Здесь  $\beta^2 = 2a^2\alpha^2 + 2b^2\alpha$ ;  $\gamma^2 = 2a^2 + 2b^2\alpha$ .

Разложим эту функцию на комплексно-сопряженные множители

$$S_g(\omega) = \frac{\gamma\omega - j\beta}{(\omega - j)(\omega - j\alpha)} * \frac{\gamma\omega + j\beta}{(\omega + j)(\omega + j\alpha)}$$

Отсюда

$$\Psi(j\omega) = \frac{\gamma\omega - j\beta}{(\omega - j)(\omega - j\alpha)},$$

$$\Psi^*(j\omega) = \frac{\gamma\omega + j\beta}{(\omega + j)(\omega + j\alpha)}.$$

2. Вычислим взаимную спектральную плотность

$$S_{\mu g}(\omega) = \Phi_{\omega\omega}(j\omega) S_\alpha(\omega) = \frac{2a^2}{1+\omega^2},$$

$$B(j\omega) = \frac{2a^2(\omega + j\alpha)}{(\omega - j)(\gamma\omega + j\beta)}.$$

3. Определим функцию  $B^+(j\omega)$ :

$$B(j\omega) = \frac{A_1}{\omega - j} + \frac{A_2}{\gamma\omega + j\beta}$$

Приведа к общему знаменателю и приравнявая числители этого и предыдущего выражений, получим систему уравнений, из решения которой будем иметь

$$A_1 = \frac{2a^2(1+\alpha)}{(\gamma+\beta)},$$

$$B^+(j\omega) = \frac{2a^2(1+\alpha)}{(\gamma+\beta)(\omega-j)}.$$

4. Вычислим частотную характеристику оптимальной системы

$$\Phi(j\omega) = \frac{B^+(j\omega)}{\Psi(j\omega)} = \frac{2a^2(1+\alpha) \cdot (j\omega) + \alpha}{(\gamma+\beta) \gamma(j\omega) + \beta}.$$

## 7. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### 7.1. Определение и особенности нелинейных систем

Нелинейной называется такая САУ, у которой зависимость между входными и выходными переменными одного или нескольких элементов описывается нелинейными уравнениями.

Все реальные элементы и системы, строго говоря, нелинейны, и к понятию линейной системы приходят путем линеаризации. Но на практике встречаются такие нелинейные элементы, к которым операция линеаризации по малому отклонению не применима. Такие нелинейности называют существенными. На рис. 7.1. приведены примеры таких нелинейностей. На рис. 7.1,а показана характеристика идеального реле, на рис. 7.1,б – характеристика с зоной насыщения, на рис. 7.1,в – нелинейная характеристика типа “модуль”.

Нелинейные системы по сравнению с линейными обладают целым рядом особенностей.

Прежде всего, к нелинейным дифференциальным уравнениям не применим принцип суперпозиции. Нелинейные дифференциальные уравнения не имеют каких – либо общих методик решения. Для исследования нелинейных дифференциальных уравнений нельзя использовать аппарат преобразований Лапласа и Фурье.

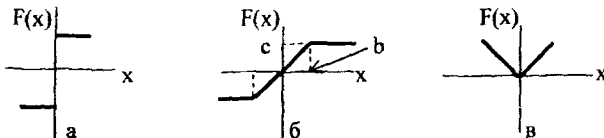


Рис. 7.1. Примеры существенных нелинейностей

Судить об устойчивости решений нелинейных дифференциальных уравнений на основании теорем Ляпунова, по дифференциальным уравнениям линеаризованных систем можно только при малых отклонениях от установившегося движения, т.е. можно судить только об устойчивости в малом. Между тем нелинейная система, устойчивая в малом, может быть неустойчивой при больших отклонениях. Различают кроме устойчивости в малом следующие виды устойчивости нелинейных систем. Система называется устойчивой в большом, если она устойчива при больших конечных по величине отклонениях. Система называется устойчивой в целом, если она устойчива при любых неограниченных по величине начальных отклонениях. Если система асимптотически устойчива в целом, то ее называют абсолютно устойчивой.

Особенностью нелинейных систем является возникновение в них, при некоторых начальных условиях, гармонических колебаний с определенной амплитудой и частотой - так называемых предельных циклов. Если предельный цикл устойчив, т.е. к нему сходятся все траектории сверху и снизу в определенном диапазоне начальных условий, то он называется автоколебаниями. Амплитуда и частота автоколебаний зависят только от параметров системы.

Рассмотрим некоторые методы исследования нелинейных САУ.

## 7.2. Метод фазовых портретов

Дифференциальное уравнение системы автоматического управления может быть преобразовано в систему  $n$  дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.1)$$

с начальными условиями  $x_i(0)$ . Величины  $x_i(t)$  можно рассматривать как координаты некоторой точки  $M$ , называемой изображающей точкой, в  $n$ -мерном пространстве. Изображающая точка при изменении координат описывает в этом пространстве некоторую кривую, которая называется фазовой траекторией. Совокупность фазовых траекторий, полученных при различных начальных условиях, называется фазовым портретом системы. Наглядное представление фазовых траекторий возможно только для систем, порядок которых не выше второго, или для систем, которые могут быть сведены к системам второго порядка. Исследование поведения нелинейных систем нижеизлагаемым методом возможно только для автономных стационарных систем. Система является автономной, если ее правая часть явно не зависит от времени.

Уравнение автономной системы 2-го порядка можно записать в виде

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}). \quad (7.2)$$

Полагая  $x = x_1$ ,  $\dot{x} = x_2$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ x_2 &= f(x_1, x_2) \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

Фазовыми координатами являются выходная переменная системы  $x_1$  и скорость ее изменения  $x_2$ . Разделим второе уравнение системы на первое и получим дифференциальное уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f(x_1, x_2)}{x_2}. \quad (7.4)$$

Уравнение (7.4) однозначно определяет касательную к фазовой траектории во всех точках, кроме тех, в которых одновременно выполняются равенства

$$\left. \begin{aligned} f(x_1, x_2) &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

В этих точках, которые называются особыми точками, не существует определенного направления касательной к траектории. В особых точках фазовые координаты равны нулю, следовательно, в этих точках система находится в положении равновесия. Для определения особых точек необходимо решить систему (7.5).

Выясним характер особых точек и оценим устойчивость положения равновесия системы в окрестности этих точек. Пусть  $x_1(0)$  и  $x_2=0$  есть координаты особой точки. Линеаризуем систему (7.3) в окрестности особой точки, полагая

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(0) + \eta, \\ x_2 &= \zeta. \end{aligned}$$

Тогда

$$f(x_1, x_2) = f(x_1(0), 0) + a\eta + b\zeta, \quad (7.6)$$

где  $a = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(0), 0)$ ,  $b = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1(0), 0)$  с точностью до малых не выше

первого порядка малости. Подставим выражение (7.6) в (7.3) и, принимая во внимание, что координаты особой точки удовлетворяют уравнениям (7.5), получим систему уравнений первого приближения

$$\left. \begin{aligned} \dot{\eta} &= \zeta \\ \dot{\zeta} &= a\eta + b\zeta \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

Решив эту систему уравнений, можно определить движение линеаризованной системы и ее фазовые траектории вблизи особой точки и оценить устойчивость положения равновесия. Нужно сразу сказать, что особых точек может быть несколько и судить об устойчивости каждого такого положения равновесия по линеаризованным уравнениям можно только в малом, т.е. при малых отклонениях



координат изображающей точки от него. Если при этих малых отклонениях фазовые координаты системы стремятся к особой точке или остаются в непосредственной близости от нее, то данное положение равновесия устойчиво и область отклонений, при которых это утверждение справедливо, называется областью притяжения рассматриваемой особой точки.

Системе (7.7) соответствует характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - b\lambda - a = 0. \quad (7.8)$$

Движение системы вблизи от особой точки определяется типом корней уравнения (7.8).

1. Корни комплексно – сопряженные:  $\lambda = h \pm j\omega$ . Решение системы имеет в этом случае вид

$$\begin{aligned} \eta &= m e^{ht} \sin(\omega t + \varphi), \\ \zeta &= m h e^{ht} \sin(\omega t + \varphi) + m \omega e^{ht} \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

Здесь  $m$  и  $\varphi$  – постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями. Изображающая точка стремится к началу координат (особой точке) при  $t \rightarrow \infty$  если  $h < 0$ , и удаляется от него, если  $h > 0$ . Фазовые траектории для таких случаев приведены на рис. 7.2,а и 7.2,б. Особая точка такого рода называется **фокусом**. При  $h < 0$  имеет место устойчивый фокус, при  $h > 0$  – неустойчивый фокус.

2. Корни вещественные одного знака. Решение системы (7.7) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \eta &= m_1 e^{\lambda_1 t} + m_2 e^{\lambda_2 t}, \\ \zeta &= m_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + m_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

Движение является аperiodическим. Изображающая точка асимптотически приближается к особой точке, если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  отрицательны, и удаляется от нее, если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  положительны. В частных случаях, когда  $m_2 = 0$ , из (7.9) получим

$$\zeta = \lambda_1 \eta, \quad (7.10)$$

а когда  $m_1 = 0$ ,

$$\zeta = \lambda_2 \eta. \quad (7.11)$$

Уравнения (7.10) и (7.11) определяют прямые, по которым движется изображающая точка в указанных случаях. Чтобы получить уравнение фазовых траекторий в общем случае, исключим из уравнений (7.9) время  $t$ . Для этого умножим первое уравнение сначала на  $\lambda_1$  и вычтем из второго, а затем умножим первое уравнение на  $\lambda_2$  и снова вычтем его из второго. В результате получим

$$\zeta - \lambda_1 \eta = m_2 e^{\lambda_2 t} (\lambda_2 - \lambda_1),$$

$$\zeta - \lambda_2 \eta = m_1 e^{\lambda_1 t} (\lambda_1 - \lambda_2),$$

откуда, исключая  $t$  путем логарифмирования, находим уравнение фазовых траекторий в виде

$$\zeta - \lambda_1 \eta = c(\zeta - \lambda_2 \eta)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}. \quad (7.12)$$

Здесь

$$\frac{1}{c} = \frac{m_1(\lambda_1 - \lambda_2)^{\lambda_1}}{m_2(\lambda_2 - \lambda_1)}. \quad (7.13)$$

Определив из уравнения производную  $d\zeta/d\eta$  в особой точке, можно убедиться, что все фазовые траектории касаются в особой точке той из прямых (7.10) и (7.11), которая соответствует меньшему по абсолютной величине из корней характеристического уравнения. Фазовые траектории, соответствующие этому случаю, показаны на рис. 7.2, в и рис. 7.2, г. Особая точка такого типа называется **узлом**. Если корни характеристического уравнения отрицательны, то имеет место устойчивый узел, если корни положительны – неустойчивый узел.

3. Корни чисто мнимые:  $\lambda = \pm j\omega$ . Решение системы (7.7) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \eta &= m \sin(\omega t + \varphi) \\ \zeta &= m\omega \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

Из (7.14) нетрудно получить уравнение фазовых траекторий

$$\frac{\eta^2}{m^2} + \frac{\zeta^2}{m^2 \omega^2} = 1. \quad (7.15)$$

Это уравнение определяет семейство эллипсов с полуосями  $m$  и  $m\omega$  (рис. 7.2, д). Такая особая точка называется **центром**. Такие фазовые траектории определяют наличие в системе незатухающих гармонических колебаний, т.е. соответствуют предельному циклу. Дальнейшие исследования заключаются в оценке устойчивости каждого предельного цикла. Если предельный цикл устойчив, то в системе происходят автоколебания. Если система имеет несколько предельных циклов, соответствующих одной и той же особой точке, то неустойчивые и устойчивые предельные циклы всегда чередуются.

4. Корни вещественные, различных знаков ( $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ ). Прямые (7.10) и (7.11) являются в данном случае асимптотами для фазовых траекторий. Т.к.  $\lambda_2 > 0$ , то где бы не находилась изображающая точка в начальный момент, в конечном итоге она всегда будет удаляться от положения равновесия. Исключение составляет случай движения точно по асимптоте, но при малейшем отклонении от нее изображающая точка начнет удаляться от положения равновесия. Такая особая точка называется **седлом**, она всегда соответствует положению неустойчивого равновесия. Фазовые траектории такого типа приведены на рис. 7.2, е. Таким образом, сутью данного метода является выделение особых точек,

построение фазовых траекторий и исследование фазового портрета системы с целью определения областей устойчивости и областей притяжения устойчивых предельных циклов.

Статическая характеристика нелинейного звена делит плоскость на участки, где дифференциальные уравнения системы имеют различный вид. Указанная характеристика называется с этой точки зрения линией переключения.

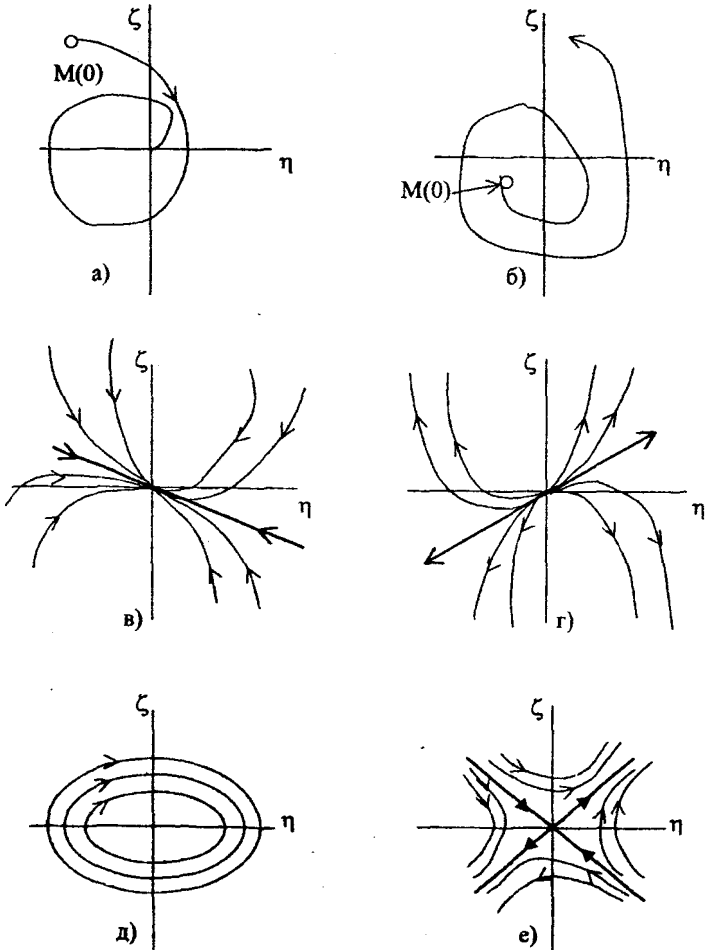


Рис. 7.2. Типы особых точек фазовой плоскости

Поэтому при построении фазовых траекторий необходимо помнить, что при переходе через линию переключения конечные значения переменных предыдущего участка являются начальными условиями для последующего участка.

Пример. Исследовать методом фазовых портретов систему стабилизации космического аппарата, структурная схема которой показана на рис.7.3.

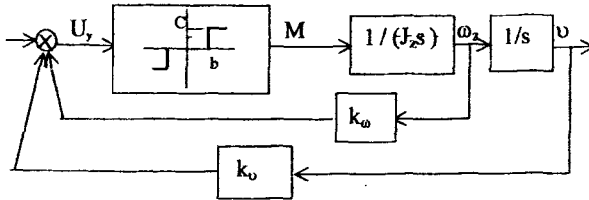


Рис. 7.3. Структурная схема системы стабилизации КА

Нелинейный элемент формирует момент, действующий на космический аппарат (КА), и этот момент определяется выражением

$$M = \begin{cases} C \operatorname{sign} U_y \operatorname{npu} |U_y| \geq b \\ 0 \operatorname{npu} |U_y| < b. \end{cases}$$

Система уравнений, составленная по структурной схеме, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\nu}{dt} &= \omega_z \\ \frac{d\omega_z}{dt} &= \frac{M}{J_z} \end{aligned} \right\}$$

В этих выражениях  $J_z$  – момент инерции КА. Очевидно, что

$$M = M(U_y) = M(-k_\nu \nu - k_\omega \omega_z) = M(\nu, \omega_z).$$

Из системы уравнений получим уравнение фазовых траекторий

$$\frac{d\omega_z}{d\nu} = \frac{M(\nu, \omega_z)}{J_z \omega_z}.$$

Решив систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} M(\nu, \omega_z) &= 0 \\ \omega_z &= 0, \end{aligned} \right\}$$

получим, что координаты особой точки (0,0) соответствуют началу координат.

Решение системы уравнений при  $|U_y| \geq b$  имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \omega_z(t) &= \omega_z(0) + \frac{M}{J_z} t \\ \nu(t) &= \nu(0) + \omega_z(0)t + \frac{M}{2J_z} t^2. \end{aligned} \right\}$$

При  $|U_y| < b$  получим

$$\left. \begin{aligned} \omega_z(t) &= \omega_z(0) \\ \nu(t) &= \nu(0) + \omega_z(0)t. \end{aligned} \right\}$$

Линия переключения определяется уравнением

$$|k_\nu \nu + k_\omega \omega_z| = b.$$

Выберем следующие численные значения параметров системы:

$$C=40 \text{ Нм}, J_z=1.05 \text{ кгм}^2, b=\pm 2 \text{ В}, k_\nu=0.5 \text{ В/град}, k_\omega=0.1 \text{ В/град/с}.$$

По определенным решениям системы уравнений и с учетом ранее сделанных замечаний по величине начальных условий при переходе через линию переключения построим фазовые траектории для  $\nu(0)=-10 \text{ град}$  и  $\nu(0)=-6 \text{ град}$  (рис.7.4).

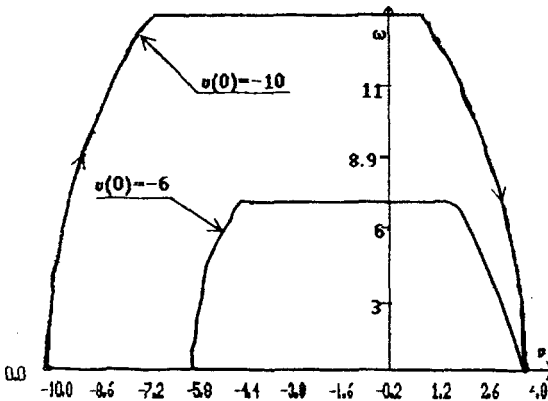


Рис. 7.4. Фазовые траектории системы стабилизации КА

Анализ полученных фазовых траекторий показывает, что они близки к типу устойчивого фокуса, но система по окончании процесса регулирования приходит не в особую точку, а в некоторую ее окрестность, определяемую из уравнения линии переключения при  $\omega_z = 0$ . В рассматриваемой задаче точка покоя имеет координаты  $(\pm 4 \text{ град}, 0)$ .

### 7.3. Метод гармонической линеаризации

Метод гармонической линеаризации позволяет с достаточной для практики точностью исследовать устойчивость и точность нелинейных систем, используя методы, разработанные для линейных систем. Метод дает возможность определить наличие автоколебаний, а также их частоту и амплитуду.

Нелинейная система представляется в виде соединения линейной и нелинейной части (рис. 7.5).

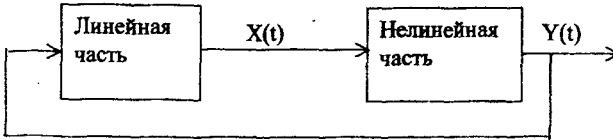


Рис. 7.5. Схема нелинейной системы

Выходной сигнал нелинейной части системы в общем случае определяется выражением

$$y = F(x, \dot{x}). \quad (7.16)$$

Обозначим как  $W(s) = \frac{R(s)}{Q(s)}$  передаточную функцию линейной части.

Система уравнений примет вид

$$\left. \begin{aligned} Q(s)x + R(s)y &= 0 \\ y &= F(x, \dot{x}). \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

Найдем условия, при которых на выходе линейной части системы возникают гармонические колебания вида

$$x(t) = A \sin \omega t. \quad (7.18)$$

В этом случае сигнал  $y(t)$  нелинейной части будет представлять собой также периодическую функцию, но отличную от синусоиды. Эту функцию можно разложить в ряд Фурье

$$y(t) = F_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \sin i\omega t + b_i \cos i\omega t). \quad (7.19)$$

В этом выражении  $a_i$  и  $b_i$  – коэффициенты Фурье. Для симметричных нелинейностей  $F_0 = 0$ .

Основным условием, которое накладывает метод на линейную часть системы, является условие фильтра нижних частот. Считается, что линейная часть пропускает только первую гармонику колебаний. Данное допущение позволяет считать высшие гармоники в (7.19) несущественными и ограничиться рассмотрением только первой гармоники сигнала  $y(t)$ :

$$y(t) = a(A, \omega) \sin \omega t + b(A, \omega) \cos \omega t. \quad (7.20)$$

Из (7.18) следует, что  $\sin \omega t = \frac{x(t)}{A}$  и т.к.  $\frac{dx(t)}{dt} = A\omega \cos \omega t$ , то выражение (7.20) можно переписать в виде

$$y(t) = \frac{a(A, \omega)}{A} x(t) + \frac{b(A, \omega)}{A\omega} \frac{dx(t)}{dt}. \quad (7.21)$$

Первое уравнение системы (7.17) примет вид

$$(Q(s) + R(s)(q(A, \omega) + \frac{q_1(A, \omega)}{\omega} s))X(s) = 0. \quad (7.22)$$

В этом выражении

$$\left. \begin{aligned} q(A, \omega) &= \frac{a(A, \omega)}{A} = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A\omega \cos \psi) \sin \psi d\psi \\ q_1(A, \omega) &= \frac{b(A, \omega)}{\pi A} = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A\omega \cos \psi) \cos \psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

$$\psi = \omega t.$$

Результат замены нелинейности  $F(x, \dot{x})$  выражением

$$(q(A, \omega) + \frac{q_1(A, \omega)}{\omega} s)X(s)$$

и называется гармонической линейризацией. Величины  $q$  и  $q_1$  называются коэффициентами гармонической линейризации или просто гармоническими коэффициентами. Для однозначных нелинейностей обычно  $q_1 = 0$ . Формулы для гармонических коэффициентов, соответствующих типовым нелинейностям, приводятся в приложениях.

Принципиальное отличие гармонической линейризации от обычной состоит в том, что при обычной линейризации нелинейную характеристику заменяют прямой линией с определенной постоянной крутизной, а при гармонической линейризации — прямой линией, крутизна которой зависит от амплитуды входного сигнала нелинейного элемента.

Рассмотрим методику определения амплитуды и частоты автоколебаний.

1. В характеристическом уравнении системы, полученном из (7.22), делаем замену  $s = j\omega$  и получим

$$Q(j\omega) + R(j\omega)(q(A, \omega) + jq_1(A, \omega)) = 0.$$

2. Из полученного выражения выделяем вещественную и мнимую части и приравниваем их нулю, что по критерию Михайлова, соответствует нахождению системы на колебательной границе устойчивости:

$$\left. \begin{aligned} U(q, q_1, \omega) &= 0 \\ V(q, q_1, \omega) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

3. Решение этой системы дает частоту и значения гармонических коэффициентов. Если эти значения вещественны и положительны, то в системе существует предельный цикл. По значениям гармонических коэффициентов можно определить амплитуду предельного цикла.

4. Общим признаком устойчивости предельного цикла, т.е. существования автоколебаний, является равенство нулю предпоследнего определителя Гурвица при полученных значениях амплитуды и частоты предельного цикла. Часто более удобно использовать условие устойчивости предельного цикла, в основе которого лежит критерий устойчивости Михайлова:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)^* \left(\frac{\partial V}{\partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial U}{\partial \omega}\right)^* \left(\frac{\partial V}{\partial A}\right)^* > 0. \quad (7.24)$$

Если это неравенство выполняется, то предельный цикл устойчив и в системе существуют автоколебания с определенными выше амплитудой и частотой. Индекс "\*" означает, что производные вычислены при уже известных значениях гармонических коэффициентов, амплитуды и частоты.

Пример. Допустим, что в уже рассмотренной выше системе стабилизации угла тангажа самолета рулевой привод нелинейный и его структурная схема имеет вид, показанный на рис. 7.6.

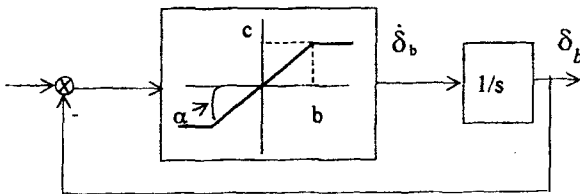


Рис. 7.6. Схема нелинейного рулевого привода

Зададим следующие параметры нелинейности скоростной характеристики рулевого привода:  $b = 0,12$ ,  $k_1 = \operatorname{tg} \alpha = c/b = 6,7$ . Коэффициенты гармонической линеаризации этой нелинейности определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} q(A) &= \frac{2k_1}{\pi} \left( \arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right) \\ q_1(A) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.25)$$

Заменив в схеме нелинейную характеристику гармоническим коэффициентом, получим передаточную функцию рулевого привода:

$$W_{\text{пр}}(A) = \frac{q(A)}{s + q(A)}$$



Подставим эту передаточную функцию в структурную схему системы стабилизации угла тангажа и определим передаточную функцию замкнутой системы:

$$\Phi(s) = \frac{k_v k_c q(A)(T_1 s + 1)}{d_0 s^4 + d_1 s^3 + d_2 s^2 + d_3 s + d_4}, \text{ где}$$

$$d_0 = T^2;$$

$$d_1 = T^2 q(A) + 2T\zeta;$$

$$d_2 = 1 + (2T\zeta + k_c k_\omega T_1) q(A);$$

$$d_3 = (1 + k_c k_\omega + k_c k_v T_1) q(A);$$

$$d_4 = k_c k_v q(A).$$

В характеристическом уравнении замкнутой системы сделаем замену  $s = j\omega$  и выделим вещественную и мнимую части:

$$\left. \begin{aligned} U(\omega) &= d_0 \omega^4 - d_2 \omega^2 + d_4 = 0 \\ V(\omega) &= -d_1 \omega^3 + d_3 \omega = 0. \end{aligned} \right\}$$

Из второго уравнения системы получим выражение для частоты  $\omega^2 = \frac{d_3}{d_1}$  и,

подставив его в первое уравнение, после преобразований получим

$$d_0 d_3^2 - d_1 d_2 d_3 + d_4 d_1^2 = 0.$$

Подставив сюда ранее определенные выражения для коэффициентов характеристического уравнения, можно получить квадратное уравнение относительно гармонического коэффициента, решив которое, найдем

$$q_1 = 2.7277,$$

$$q_2 = 0.3103.$$

По этим значениям можно вычислить для двух случаев все коэффициенты характеристического уравнения и определить частоты, соответствующие каждому значению  $q(A)$ . Получим:  $\omega_1 = 20.948$ ,  $\omega_2 = 10.534$ .

Оба значения гармонического коэффициента и соответствующие частоты вещественны и положительны. Следовательно, в системе существуют два предельных цикла. Значения амплитуды предельного цикла определяются численно путем подбора такого значения  $\frac{b}{A}$ , при котором формула для коэффициента

гармонической линеаризации дает значение, равное ранее вычисленному. В рассматриваемом случае получим

$$1) \frac{b}{A} = 0.3255, \quad A = 0.3687.$$

$$2) \frac{b}{A} = 0.0364, \quad A = 3.2967.$$

Теперь оценим устойчивость предельных циклов. Используем неравенство, полученное из критерия Михайлова, для чего определим

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial A} &= -\omega^2(2T\zeta + k_c k_\omega T_1) \frac{\partial q}{\partial A} + k_c k_v \frac{\partial q}{\partial A}; \\ \frac{\partial U}{\partial \omega} &= 4d_0 \omega^3 - 2d_2 \omega; \\ \frac{\partial V}{\partial A} &= -d_0 \omega^3 \frac{\partial q}{\partial A} + \omega(1 + k_c k_\omega + k_c k_v T_1) \frac{\partial q}{\partial A}; \\ \frac{\partial V}{\partial \omega} &= -3d_1 \omega^2 + d_3. \end{aligned}$$

Производная от коэффициента гармонической линеаризации, входящая в полученные выражения, вычисляется по формуле

$$\frac{\partial q}{\partial A} = \frac{2k_1}{\pi} \left\{ \frac{b}{A^2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}}} - \frac{b}{A^2} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} + \frac{b^3}{A^4 \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}}} \right\}$$

Расчеты по вышеприведенным формулам показывают, что первый предельный цикл неустойчив и возникает он при  $\omega(0) \approx 0.1166 (\approx 6.7^\circ)$ . Если начальное отклонение меньше указанного, то процесс на входе нелинейного элемента затухает (рис. 7. 7) и система устойчива.

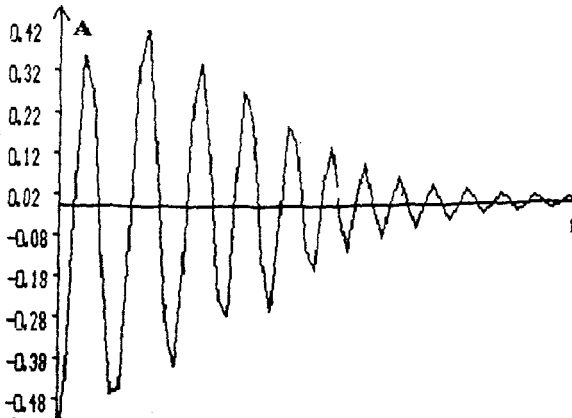


Рис. 7.7. Процесс на входе нелинейного элемента

Если начальное значение угла тангажа больше указанного, то процессы сходятся ко второму предельному циклу, который устойчив, и таким образом в системе возникают автоколебания (рис. 7.8).

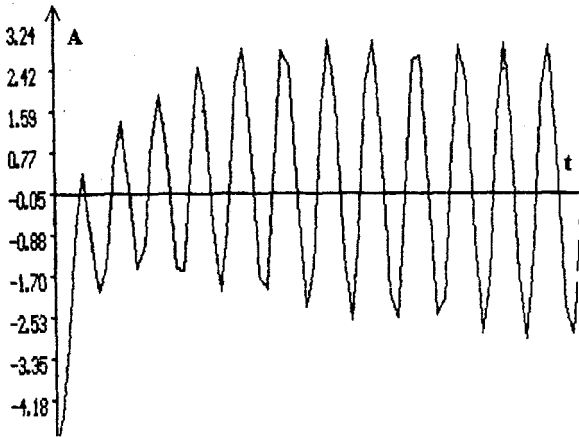


Рис. 7.8. Автоколебания на входе нелинейности

Путем моделирования определено, что область притяжения устойчивого предельного цикла лежит приблизительно в пределах  $\psi(0) \approx 0.1167 - 1.4$  ( $\approx 6.71^\circ - 80.2^\circ$ ).

#### 7.4. Применение метода гармонической линеаризации к исследованию вибрационной помехоустойчивости систем управления летательными аппаратами

Корпус летательного аппарата (ЛА) под воздействием управляющих и возмущающих сил и моментов совершает упругие колебания. Частотный спектр этих колебаний имеет вид множества ярко выраженных тонов. Упругие колебания воспринимаются гироскопическими приборами измерительной системы, которые и вводят их в контур управления. Несмотря на малую амплитуду, упругие колебания, частотный спектр которых значительно выше частот полезного сигнала, могут привести к серьезным нарушениям процесса управления.

Для каждого тона упругих колебаний, вызванных регулирующим воздействием, можно получить передаточную функцию ЛА и представить структурную схему канала системы управления, например, канала тангажа, в виде, показанном на рис.7.9. На этой схеме передаточная функция, определяющая за-

висимость тона упругих колебаний от отклонения рулевого органа, обозначена как  $W_i(s)$  и имеет вид:  $W_i(s) = \frac{\alpha_i}{s^2 + 2\zeta_i\omega_i s + \omega_i^2}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

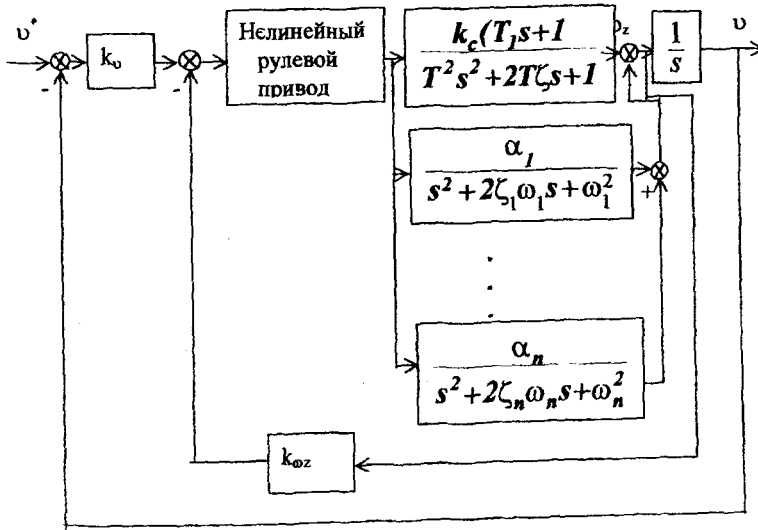


Рис. 7.9. Система стабилизации угла тангажа с учетом упругих колебаний

С возрастанием порядкового номера тона упругих колебаний амплитуда их быстро убывает и в практических приложениях учитывают обычно не более двух – трех первых тонов.

В состав рулевого привода и объекта управления входят интегрирующие звенья, которые практически подавляют сигналы упругих колебаний. Это дает возможность считать упругие колебания внешней высокочастотной помехой вида  $f_b(t) = B \sin \Omega_b t$ , поступающей на входы измерительных устройств и через них на вход нелинейного элемента рулевого привода. В структуре высокочастотного сигнала, вызванного упругими колебаниями, особую роль играет выходной сигнал датчика угловой скорости (ДУС), пропорциональный производной от сигнала  $f_b(t)$ :

$$\omega_{\text{дус}} = k_{\omega_z} (\omega_z + \frac{df_b(t)}{dt}) = k_{\omega_z} \omega_z + k_{\omega_z} B \Omega_b \cos \Omega_b t,$$

и в котором амплитуда сигнала упругих колебаний возрастает в  $\Omega_b$  раз.

В такой постановке можно считать, что на входах системы действуют два сигнала – полезный низкочастотный сигнал  $f(t)$  и высокочастотный сигнал

от упругих колебаний  $f_b(t)$ . Представив систему в виде соединения линейной и нелинейной частей по аналогии с предыдущим, ее уравнение получим в виде

$$Q(s)X(s) + R(s)F(x, sx) = S(s)f(t) + S_b(s)f_b(t). \quad (7.26)$$

При учете того, что спектр частот упругих колебаний значительно выше частот полезного сигнала, решение уравнения (7.26) будем искать в виде

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x^0(t) + x^*(t), \\ x^*(t) &= A_b \sin(\Omega_b t + \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (7.27)$$

В этом выражении  $x^0(t)$  – низкочастотная (полезная) составляющая решения,  $x^*(t)$  – высокочастотная составляющая решения от упругих колебаний. Подставим (7.27) в (7.26) и получим уравнение системы в виде

$$Q(s)X(s) + R(s)F(x^0, A_b, \Omega_b) = S(s)f(t) + S_b(s)f_b(t). \quad (7.28)$$

Разложим нелинейную функцию в ряд Фурье и, считая, что линейная часть является фильтром нижних частот, учтем только первую гармонику разложения:

$$\begin{aligned} F(x^0, A_b, \Omega_b) &= F^0(x^0, A_b, \Omega_b) + a \sin \psi + b \cos \psi, \\ \psi &= \Omega_b t. \end{aligned}$$

В этом выражении

$$F(x^0, A_b, \Omega_b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A_b \sin \psi, A_b \Omega_b \cos \psi) d\psi \quad (7.29)$$

По аналогии с предыдущим обозначим гармонические коэффициенты следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} q(x^0, A_b, \Omega_b) &= \frac{1}{\pi A_b} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A_b \sin \psi, A_b \Omega_b \cos \psi) \sin \psi d\psi, \\ q_I(x^0, A_b, \Omega_b) &= \frac{1}{\pi A_b} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A_b \sin \psi, A_b \Omega_b \cos \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (7.30)$$

Исходное уравнение (7.28) разделится на два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} Q(s)x^0 + R(s)F^0(x^0, A_b, \Omega_b) &= S(s)f(t), \\ Q(s)x^* + R(s) \left[ q(x^0, A_b, \Omega_b) + \frac{q_I(x^0, A_b, \Omega_b)}{\Omega_b} s \right] x^* &= \\ = S_b(s)f_b(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.31)$$

Первое уравнение системы определяет медленную (полезную) составляющую сигнала на выходе линейной части, а второе – вынужденную вибрационную составляющую. Функция  $F^0$  называется функцией смещения. Она зависит от параметров вынужденных колебаний, вызванных упругими деформациями, и именно это определяет их влияние на процесс управления по полезному сигналу. Линеаризуем функцию смещения в окрестности точки  $x^0=0$ . Такая линеаризация справедлива, т.к. в устойчивой системе при  $t \rightarrow \infty$  должно выполняться условие  $x^0 \rightarrow 0$ .

$$k_n(A_b, \Omega_b) = \left( \frac{\partial F^0}{\partial x_0} \right)_{x^0=0} \quad (7.32)$$

Коэффициент  $k_n$  называется нелинейным коэффициентом усиления по медленной составляющей. Выражения для коэффициентов гармонической линеаризации в условиях двухчастотного сигнала и нелинейного коэффициента усиления приводятся в справочной литературе. Например, для нелинейности насыщения скоростной характеристики рулевого привода (рис. 7.6) нелинейный коэффициент усиления определяется по формуле [11]

$$k_n = \frac{2k_1}{\pi} \arcsin \frac{b}{A_b} \quad (7.33)$$

Этот пример позволяет сделать вывод, справедливый и для других типов нелинейных элементов, что чем больше амплитуда вынужденных колебаний, тем меньше нелинейный коэффициент усиления  $k_n$ . Если объект управления устойчив, то уменьшение этого коэффициента вызовет только изменение масштаба процессов, связанное с возможным ухудшением качества системы. Если объект неустойчив, т.е. система имеет АФЧХ 2 – го рода, то уменьшение  $k_n$  вызывает снижение запасов устойчивости и при дальнейшем увеличении амплитуды упругих колебаний – потерю устойчивости.

Во втором уравнении системы (7.31) выразим переменную  $f_d(t)$  через  $x^*(t)$ :

$$\begin{aligned} f_b(t) &= B \sin(\Omega_b t + \varphi - \varphi) = B \cos \varphi \sin(\Omega_b t + \varphi) - \\ &- B \sin \varphi \cos(\Omega_b t + \varphi). \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что  $sx^* = A_b \Omega_b \cos(\Omega_b t + \varphi)$  и учитывая второе уравнение системы (7.27), получим

$$\cos(\Omega_b t + \varphi) = \frac{sx^*}{A_b \Omega_b},$$

$$\sin(\Omega_b t + \varphi) = \frac{x^*}{A_b}.$$

Тогда

$$f_b(t) = \frac{B}{A_b} \left( \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\Omega_b} s \right) x^*.$$

Подставим это выражение во второе уравнение системы (7.31) и после элементарных преобразований получим

$$\left[ Q(s) - \frac{S_b(s)}{A_b} \left( \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\Omega_b} s \right) + R(s) \left( q + \frac{q_1}{\Omega_b} \right) \right] x^* = 0.$$

Часть последнего выражения, заключенная в квадратные скобки, является характеристическим уравнением замкнутой гармонически линеаризованной системы и после подстановки в него  $s = j\Omega_b$  дает возможность определить амплитуду и фазу вынужденных колебаний на входе нелинейного элемента системы. По этим данным вычисляется нелинейный коэффициент усиления, и по характеристическому уравнению замкнутой системы по медленной составляющей

$$Q(s) + k_H R(s) = 0$$

судят о ее устойчивости.

Пример. Ракета – носитель “Авангард” на 75 – й секунде полета имеет передаточную функцию

$$W_P(s) = \frac{k_p(T_1 s + 1)}{(T_2 s + 1)(T_3 s - 1)(T_4 s - 1)},$$

где  $k_p = 4.48$ ,  $T_1 = 19.12$ ,  $T_2 = 0.66$ ,  $T_3 = 25.25$ ,  $T_4 = 0.69$ .

Объект управления неустойчив и имеет два полюса в правой полуплоскости. Структурная схема системы стабилизации угла тангажа показана на рис. 7.10.

Нелинейная характеристика насыщения скоростной характеристики показана на рис. 7.6. Передаточная функция рулевой машины избрана в виде

$$W_{PM}(s) = \frac{1}{s(T_{PM} s + 1)}, \quad \text{где } T_{PM} = 0.08.$$

Параметры нелинейной характеристики:  $k_1 = 10$ ,  $b = 0.035$ .

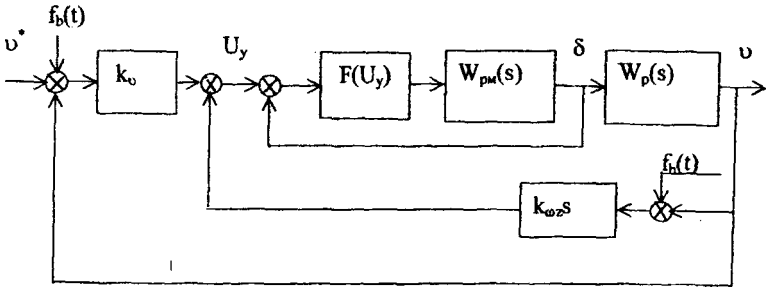


Рис. 7.10. Структурная схема нелинейной системы стабилизации угла тангажа ракеты

Рассмотрим методику оценки вибрационной помехоустойчивости.

1. Определяем амплитуду вибрационной составляющей на входе нелинейного элемента:

$$\begin{aligned} x^*(t) &= B(k_v \sin \Omega_b t + k_{\omega z} \Omega_b \cos \Omega_b t) = \\ &= B \sqrt{k_v^2 + (k_{\omega z} \Omega_b)^2} \sin(\Omega_b t + \text{arctg} \frac{k_{\omega z} \Omega_b}{k_v}). \end{aligned}$$

Отсюда

$$A_b = B \sqrt{k_v^2 + (k_{\omega z} \Omega_b)^2}.$$

2. Заменяем нелинейную характеристику нелинейным коэффициентом усиления и определяем передаточную функцию замкнутой гармонически линеаризованной системы:

$$\Phi(s) = \frac{k_n k_v k_p (T_1 s + 1)}{d_0 s^5 + d_1 s^4 + d_2 s^3 + d_3 s^2 + d_4 s + d_5}, \text{ где}$$

$$\begin{aligned} d_0 &= T_2 T_3 T_4 T_{pm}, \quad d_1 = T_{pm} (T_3 T_4 - T_2 (T_3 + T_4)) + T_2 T_3 T_4, \\ d_2 &= k_n T_2 T_3 T_4 + (T_3 T_4 - T_2 (T_3 + T_4)) + T_{pm} (T_2 - T_3 - T_4), \\ d_3 &= T_{pm} + T_2 - T_3 - T_4 + k_n (T_3 T_4 - T_2 (T_3 + T_4)) + k_n k_p k_{\omega z} T_1, \\ d_4 &= 1 + k_n (T_2 - T_3 - T_4) + k_n k_{\omega z} k_p + k_n k_v k_p T_1, \\ d_5 &= k_n (1 + k_v k_p). \end{aligned}$$



3. Используя критерии устойчивости Гурвица или Михайлова, определяем минимальное значение нелинейного коэффициента усиления  $(k_n)_{min}$ , при котором система попадает на границу устойчивости. Получим  $(k_n)_{min}=3.9$ .

4. Используя (7.33), определяем максимальное значение амплитуды вынужденных колебаний на входе нелинейности:

$$(A_b)_{max} = \frac{b}{\sin \frac{(k_n)_{min} \pi}{2k_1}} = 0.608.$$

5. В системе стабилизации рассматриваемого объекта учитываются два тона колебаний с частотами

$$\Omega_{b1} = 25.4 \frac{1}{c},$$

$$\Omega_{b2} = 62.5 \frac{1}{c}.$$

Для этих частот определим максимально возможные амплитуды упругих колебаний:

$$(B)_{max} = \frac{(A_b)_{max}}{\sqrt{k_v^2 + (k_{\omega z} \Omega_b)^2}} = \begin{cases} 0.00396 \approx 13.6' \\ 0.0016 \approx 5.6' \end{cases}$$

Допустимые, с точки зрения достижения границы устойчивости, амплитуды упругих колебаний очень малы, а если учесть требование гарантированных запасов устойчивости, то они будут еще меньше.

## 7.5. Исследование устойчивости нелинейных систем

### 7.5.1. Второй метод Ляпунова

Выдающийся русский математик Александр Михайлович Ляпунов в конце 19-го века разработал весьма общий метод исследования на устойчивость решений систем дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (7.34)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

получивший в дальнейшем название второго или прямого метода Ляпунова.

Прежде чем давать точные формулировки, кратко рассмотрим идею метода.

Предположим, что на устойчивость исследуется точка покоя системы (7.34), где  $x_i = 0, i=1, 2, \dots, n$ . Если бы с возрастанием  $t$  точки всех траекторий при-

ближались к началу координат или хотя бы не удалялись от него, то очевидно, что рассматриваемая точка покоя была бы устойчивой.

Проверка выполнения этого условия не требует знания решений системы уравнений (7.34). Действительно, если  $\rho$  — расстояние от точки траектории  $x_i(t)$  до начала координат, то

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2(t)} \quad \text{и} \quad \frac{d\rho}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial x_i} f_i. \quad (7.35)$$

Правая часть в (7.35) является известной функцией времени и координат процесса и, следовательно, можно исследовать ее знак. Если окажется, что  $\frac{d\rho}{dt} \leq 0$ , то точки на всех траекториях не удаляются от начала координат при возрастании времени и точка покоя  $x_i \equiv 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) устойчива.

Вместо  $\frac{d\rho}{dt}$  обычно вычисляют для упрощения дифференцирования производную  $\frac{d(\rho^2)}{dt} = 2\rho \frac{d\rho}{dt}$ , знак которой совпадает с  $\frac{d\rho}{dt}$ .

Однако точка покоя может быть устойчивой, и даже асимптотически устойчивой, и при немонотонном приближении к ней точек траектории с возрастанием времени. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно взглянуть на траектории типа центра или устойчивого фокуса, рассмотренные при изучении метода фазовых портретов. Поэтому вместо функций  $\rho$  А.М. Ляпунов рассматривал некоторые функции  $V(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ , являющиеся в некотором смысле «обобщенными расстояниями» до начала координат. Каждая  $V$ -функция определена в некоторой области  $G$ , заданной неравенством

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 < L,$$

где  $L$  — некоторая постоянная величина.

Прямой метод Ляпунова об изучении устойчивости сводится к построению таких функций  $V$  векторной переменной  $X(x_1, \dots, x_n)$ , полные производные которых по времени, вычисленные согласно (7.34), обладают некоторыми специфическими свойствами.

Всюкую функцию  $V$  назовем знакопостоянной, если она кроме нулевых значений принимает всюду в области  $G$  значения только одного знака.

Всякую знакостоянную функцию, принимающую нулевое значение только в начале координат, назовем знакоопределенной и, учитывая ее знак, определенно положительной или определенно отрицательной.

Наряду с функциями  $V$  будем рассматривать их полные производные по времени

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i. \quad (7.36)$$

Ляпуновым были доказаны следующие две фундаментальные теоремы:

**Теорема 1.** Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти знакоопределенную функцию  $V$ , производная (7.36) которой в силу этих уравнений была бы знакостоянной функцией противоположного знака с  $V$  или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение устойчиво.

**Теорема 2.** Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти знакоопределенную функцию  $V$ , производная (3) которой в силу этих уравнений была бы функцией знакоопределенной противоположного с  $V$  знака, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически. Функции  $V$ , удовлетворяющие условиям этих теорем, называются функциями Ляпунова.

**Пример 1.** Исследовать на устойчивость точку покоя  $x \equiv 0, y \equiv 0$  системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -3y + 6xy \\ \frac{dy}{dt} &= 7x - 14x^2y \end{aligned} \right\}$$

Выберем функцию Ляпунова в виде  $V=7x^2+3y^2$ . Эта функция является знакостоянной. Ее производная

$$\frac{dV}{dt} = 14x(-3y + 6xy^2) + 6y(7x - 14x^2y) \equiv 0.$$

Условия теоремы 1 выполнены, следовательно точка покоя устойчива.

**Пример 2.** Исследовать на устойчивость точку покоя  $x \equiv 0, y \equiv 0$  системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(t)x + kb(t)y \\ \frac{dy}{dt} &= -b(t)x + c(t)y \end{aligned} \right\}$$

$$a(t) \leq 0, c(t) \leq 0, k > 0.$$

Функцию Ляпунова выберем в виде  $V=x^2+ky^2$ . Найдем производную:

$$\frac{dV}{dt} = 2x[a(t)x+kb(t)y]+2ky[-b(t)x+c(t)y]=2[a(t)x^2+kc(t)y^2] \leq 0.$$

Выполнены условия теоремы 2, следовательно рассматриваемая точка покоя асимптотически устойчива.

Трудность применения прямого метода Ляпунова к решению прикладных задач связана с отсутствием широко разработанных общих приемов построения функций Ляпунова в тех или иных случаях. Наибольшее распространение для анализа устойчивости систем автоматического управления (САУ) находят функции Ляпунова в виде квадратичных форм:

$$V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} x_i x_j, \quad (7.37)$$

$$p_{ij} = p_{ji}.$$

В матричной форме можно записать

$$V = x^T P x,$$

где

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{ni} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратичная форма, представленная в виде (7.37) или соответствующей ей матрицы  $P$ , является знакопостоянной- положительно определенной, если  $x^T P x > 0$ , отрицательно определенной, если  $x^T P x < 0$ , или знакоопределенной- знакоположительной, если  $x^T P x \geq 0$ , и знакоотрицательной, если  $x^T P x \leq 0$ .

Укажем признаки, по которым можно проверить, какое из указанных выше свойств имеет изучаемая квадратичная форма или соответствующая ей матрица. Найдем собственные числа матрицы  $P - \lambda I$ , решив известное уравнение  $\det(\lambda I - P) = 0$ , где  $I$ -единичная матрица. Если все собственные числа рассматриваемой матрицы строго больше нуля, то квадратичная форма определено положительная, если все собственные числа строго отрицательны, то квадратичная форма определено отрицательная. При  $\lambda_i \geq 0$  квадратичная форма знакоположительна, а при  $\lambda_i \leq 0$  - знакоотрицательна.

Сформулируем еще один признак определенной положительности квадратичной формы, известный как критерий Сильвестра.

Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы каждый из угловых (диагональных) миноров

$$\Delta_k = \begin{pmatrix} P_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & P_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{k1} & \cdot & \cdot & \cdot & P_{kk} \end{pmatrix}$$

$k=1,2,\dots,n$ .

матрицы  $P$  был положителен.

Если задача о построении функций Ляпунова для какого-либо класса систем решена, то прямой метод можно рассматривать как наиболее эффективный метод исследования устойчивости. Его особенная ценность проявляется в тех случаях, когда интересуются исследованием устойчивости в большом, т.е. при любых конечных отклонениях. Кроме того, этот метод может применяться к изучению устойчивости тех систем управления, которые содержат существенно нелинейные и неаналитические (разрывные) характеристики. Во всех этих случаях возможность применения метода первого приближения исключена.

Следует помнить, что если какая-либо задача об устойчивости в теории управления может быть решена прямым методом, то это решение не будет однозначным. Действительно, функции Ляпунова определены столь общими свойствами, что их может быть построено бесчисленное множество. Следовательно, условия устойчивости, к которым приводит прямой метод, являются условиями достаточными и их нарушение еще не будет означать неустойчивости системы. Мы уже говорили о том, что свобода выбора функций Ляпунова позволяет строить критерии устойчивости систем, в которых некоторые нелинейные элементы не могут быть точно охарактеризованы. Любой другой известный метод исследования устойчивости не дает возможности решить задачу об устойчивости в большом в этом случае. Но полученное решение, в силу указанной многозначности функций Ляпунова и отсутствия условия необходимости, может оказаться неконструктивным, т.е. таким, которое предъявляет чрезмерно высокие требования к параметрам регулятора, реализовать которые практически невозможно.

Вопрос о конструктивности решений задачи прямым методом в каждом конкретном случае следует подвергать особому рассмотрению.

Некоторые методы построения функций Ляпунова изложены в [1,3,5].

### 7.5.2. Критерий абсолютной устойчивости В.М. Попова

Абсолютная устойчивость- это устойчивость в целом нелинейной системы при задании ее нелинейностей принадлежностью к определенному классу. При этом понимается задание нелинейности не конкретной характеристикой, а в более общем виде- с точностью только до определения ее класса. Типичным

случае такого задания является задание статической нелинейной характеристики тем, что она должна находиться в пределах определенного угла между осью абсцисс и некоторой прямой, как показано на рис. 7.11. При этом конкретная форма нелинейной характеристики может быть любой, в том числе и непостоянной. При таком определении характеристики говорят, что она задана в угле  $(0, k)$ . Здесь  $0$  и  $k$  - тангенсы углов наклона линий, ограничивающих этот угол.

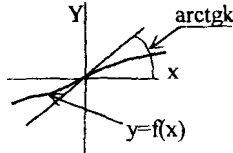


Рис. 7.11. Нелинейная характеристика, заданная в угле  $(0, k)$

Исследование систем при таком неконкретном задании нелинейностей вызвано не только чисто математическими соображениями в смысле упрощения задачи, но имеет и практический смысл в тех случаях, когда нелинейности известны неточно или могут изменяться.

Критерий абсолютной устойчивости В.М.Попова, предложенный в 1959г., относится к системам, которые можно представить в виде соединения линейной части с передаточной функцией  $W_n(s)$  и безынерционного нелинейного звена  $f(x)$  (рис. 7.12, а).

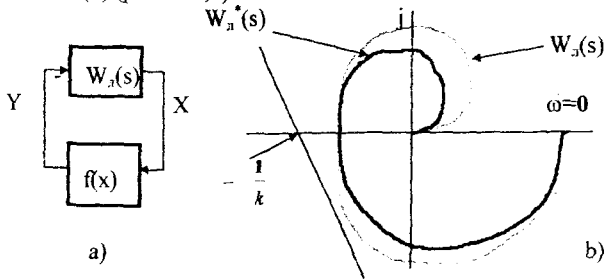


Рис. 7.12. Структурная схема системы и преобразованная АФЧХ

Характеристика нелинейного звена является однозначной и лежит в угле  $(0, k)$ . Минус на входе  $W_n(s)$  показывает, что обратная связь в системе отрицательна. Для суждения об устойчивости по этому критерию используется преобразованная амплитудно-фазовая частотная характеристика

$$W_n^*(j\omega) = \operatorname{Re} W_n(j\omega) + j\omega \operatorname{Im} W_n(j\omega) \quad (7.38)$$

Эта характеристика получается из АФЧХ  $W_n(j\omega)$  линейной части системы путем умножения ординат последней на текущее значение частоты  $\omega$  (рис. 7.12, б).

Рассмотрим вначале критерий В.М.Попова, когда линейная часть системы устойчива.

**Нелинейная система абсолютно устойчива, если при устойчивой линейной части системы через точку  $(-1/k, j0)$  можно провести хотя бы одну прямую линию так, чтобы вся характеристика  $W_n^*(j\omega)$  находилась от нее справа.** Такая линия называется линией Попова. На рис.7.12,б показан случай, когда имеет место абсолютная устойчивость.

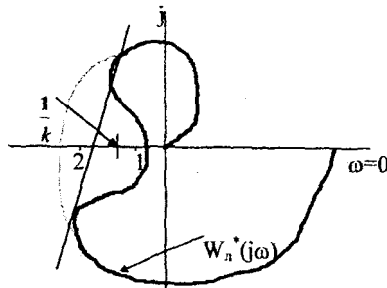


Рис. 7.13. АФЧХ системы, не обладающей абсолютной устойчивостью

Сплошная линия на рис.7.13 показывает, что критерий абсолютной устойчивости не выполняется. Разумеется, тем более он не выполняется, если характеристика  $W_n^*(j\omega)$  охватывает точку  $(-1/k, j0)$  (пунктир на рис.7.13).

Критерий В.М.Попова является достаточным, т.е. он дает часть области абсолютной устойчивости и его невыполнение может не означать отсутствия абсолютной устойчивости в какой-либо другой области.

Представляет интерес сравнить условия абсолютной устойчивости В.М.Попова с условиями устойчивости линейной системы, получаемой при предположении, что характеристика  $f(x)$  в угле  $(0, k)$  является линейной. Это значит, что нелинейное звено  $f(x)$  заменяется идеальным линейным звеном с коэффициентом передачи  $k_0$ , лежащим в пределах  $0 \leq k_0 \leq k$ .

Передачная функция для такой разомкнутой системы равна  $k_0 W_n(s)$ . Согласно критерию Найквиста условие устойчивости рассматриваемой линейной системы заключается в том, что АФЧХ  $k_0 W_n(j\omega)$  не должна охватывать точку  $(-1/k, j0)$ . Это эквивалентно условию, что АФЧХ  $W_n(j\omega)$  линейной части системы не охватывает точку  $(-1/k_0, j0)$ . Действительно, граница устойчивости по Найквисту соответствует равенству  $k_0 W_n(j\omega) = -1$ , т.е.  $W_n(j\omega) = -1/k_0$ . При изменении величины  $k_0$  в диапазоне от 0 до  $k$  точка  $(-1/k_0, j0)$  перемещается по действительной оси  $-\infty$  до  $-1/k_0$ . Поэтому условием устойчивости линейной системы при  $k_0 = 0 \div k$  является прохождение характеристики  $W_n(j\omega)$  через действительную ось правее точки  $(1/k, j0)$ , т.е. непересечение ею действительной оси левее этой точки.

Характеристики  $W_n(j\omega)$  и  $W_n^*(j\omega)$  имеют одинаковые действительные части и, следовательно, пересекают действительную ось в одних и тех же точках. Поэтому сформулированное условие устойчивости линейной системы полностью относится и к характеристике  $W_n^*(j\omega)$ .

Таким образом, достаточное условие устойчивости при произвольной форме однозначной нелинейной характеристики  $f(x)$  в угле  $(0, k)$  оказывается строже необходимого и достаточного условия в случае линейной характеристики  $f(x)$  в этом угле тем, что помимо необходимости нахождения характеристики  $W_n^*(j\omega)$  правее точки  $(-1/k, j0)$  требует еще возможности проведения через эту точку линии Попова. Например, в случае АФЧХ, изображенной на рис.7.13 сплошной линией, система устойчива при линейной характеристике в угле  $(0, k)$ , но не обладает абсолютной устойчивостью. Точка 1 на действительной оси определяет критический по устойчивости коэффициент передачи  $k_0$  для линейной системы, а точка 2-критическое значение  $k$  по условию абсолютной устойчивости в случае произвольной нелинейной характеристики  $f(x)$ . Таким образом, при произвольной форме  $W_n^*(j\omega)$  абсолютная устойчивость обеспечивается в меньшем угле, чем устойчивость в случае линейной системы.

Для того чтобы распространить рассмотренный критерий на системы с неустойчивой линейной частью, преобразуем предварительную схему системы, как это показано на рис.7.14,а. Здесь в схему введены два фиктивных звена с коэффициентом передачи  $k_\phi$ . Они ничего не изменяют в системе, так как их выходные сигналы взаимно компенсируют друг друга на входе линейной части системы.

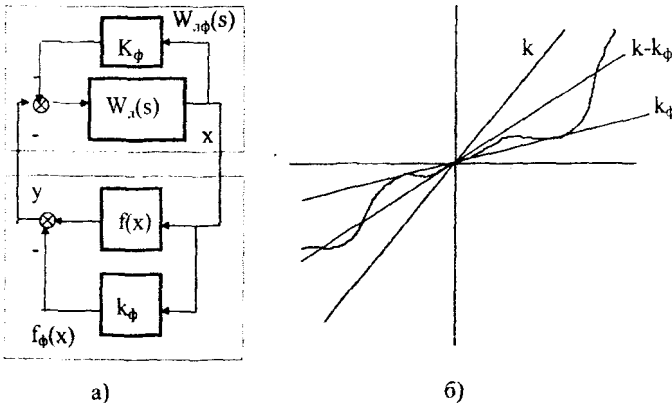


Рис.7.14. Система с неустойчивой линейной частью

В результате получаем систему, состоящую из линейной части с передаточной функцией



$$W_{л\phi}(s) = \frac{W_{л}(s)}{1 + k_{\phi} W_{л}(s)} \quad (7.39)$$

и нелинейной части с характеристикой

$$f_{\phi}(x) = f(x) - k_{\phi} x \quad (7.40)$$

Выберем величину коэффициента передачи  $k_{\phi}$  такой, чтобы за счет введенной отрицательной обратной связи вокруг  $W_{л}(s)$  новая линейная часть оказалась устойчивой, т.е. все полюсы передаточной функции  $W_{л\phi}(s)$  были левыми.

Отметим сразу, что если последнее не может быть осуществлено, то это уже означает отрицательный ответ на вопрос об абсолютной устойчивости исходной системы, так как при этом она оказывается неустойчивой даже при линейной характеристике  $f(x)$  любого наклона.

Применим к преобразованной системе с устойчивой линейной частью критерий абсолютной устойчивости В.М.Попова и получим следующее условие абсолютной устойчивости исходной системы с неустойчивой линейной частью:

система абсолютно устойчива, если через точку  $(-1/(k-k_{\phi}), j0)$  можно провести прямую линию, проходящую слева от характеристики  $W_{л\phi}(j\omega)$ . Абсцисса указанной точки определена в соответствии с соотношением (7.40). При этом  $k$  определяется углом, в котором задана характеристика  $f(x)$ .

В соответствии с критерием В.М.Попова характеристика  $f_{\phi}(x)$  должна лежать в угле, ограниченном с одной стороны осью абсцисс. С учетом (7.40) это означает, что характеристика  $f(x)$  должна лежать вне угла  $(0, k_{\phi})$ . Таким образом, сформулированный критерий должен быть дополнен требованием, чтобы характеристика  $f(x)$  лежала в угле  $(k_{\phi}, k)$ , как показано на рис.7.14,б. Характеристика  $f_{\phi}(x)$  при этом будет лежать в угле  $(0, (k-k_{\phi}))$ .

В частном случае, когда передаточная функция  $W_{л}(s)$  линейной части имеет мнимые или нулевые полюсы при остальных левых полюсах, изложенный критерий абсолютной устойчивости совпадает с ранее сформулированным для случая устойчивой линейной части, но должен быть дополнен двумя следующими условиями.

Во-первых, должна обеспечиваться так называемая предельная устойчивость, под которой понимается устойчивость линейной системы с передаточной функцией  $kW_{л}(s)$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Во-вторых, исключается касание характеристикой нелинейного звена оси абсцисс, т.е. абсолютная устойчивость рассматривается в угле  $(\epsilon, k)$ , где  $\epsilon$  - бесконечно малая величина.

Критерий В.М.Попова можно распространить на более общий случай нелинейности, когда характеристика  $f(x)$  лежит в угле  $(k_1, k_2)$ , где  $k_1$  может быть как положительным, так и отрицательным (рис.7.15,а). Этот случай сводится к основному случаю с характеристикой  $f(x)$  в угле  $(0, k)$ , если представить нелинейность в следующем виде:

$$f(x) = f_{\phi}(x) + k_1 x \quad (7.41)$$

Очевидно, что новая нелинейность  $f_{\phi}(x)$  лежит в угле  $(0, k)$ , где  $k = k_2 - k_1$ .

В результате получим схему, приведенную на рис.7.15,б, где нелинейность  $f_{\phi}(x)$  лежит в угле  $(0, k)$ , а линейная часть имеет передаточную функцию

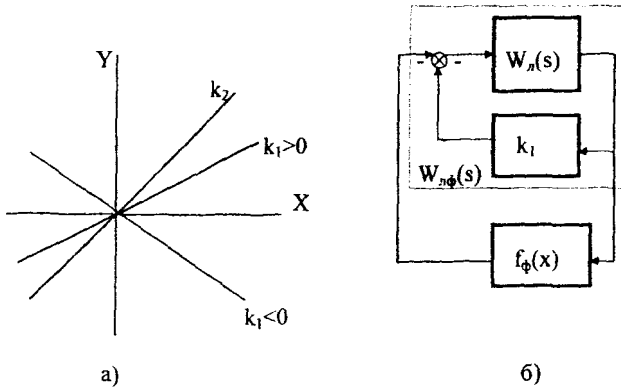


Рис.7.15. Оценка абсолютной устойчивости при произвольном угле  $(k_1, k_2)$

$$W_{\text{нф}}(s) = \frac{W_n(s)}{1 + k_1 W_n(s)} \quad (7.42)$$

Пример. Определить, будет ли абсолютно устойчивой система, если передаточная функция линейной части определяется выражением

$$W_n(s) = \frac{200}{s(0.0001s^2 + 0.101s + 1)}$$

а нелинейная характеристика показана на рис.7.16,а.

Преобразованная АФЧХ линейной части приводится к виду

$$\begin{aligned} W_n^*(j\omega) &= \operatorname{Re} W_n(j\omega) + j\omega \operatorname{Im} W_n(j\omega) = \\ &= \frac{20.2}{0.01\omega^2 + (1 - 0.0001\omega^2)^2} - j \frac{200(1 - 0.0001\omega^2)}{0.01\omega^2 + (1 - 0.0001\omega^2)^2} \end{aligned}$$

График  $W_n^*(j\omega)$  изображен на рис.7.16,б. Предельная точка, через которую может пройти прямая Попова при условии, что  $W_n^*(j\omega)$  будет располагаться справа, имеет абсциссу  $-0.202$ . Это означает, что если нелинейная характеристика однозначна и находится в пределах  $0 < \alpha < \alpha_{\max}$ , где

$$\alpha = \arctg \frac{1}{0.202} = 78.6^\circ, \text{ то система абсолютно устойчива независимо от}$$

формы нелинейной характеристики.

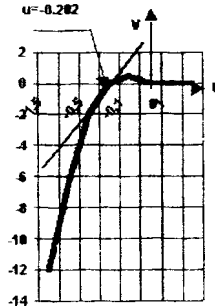
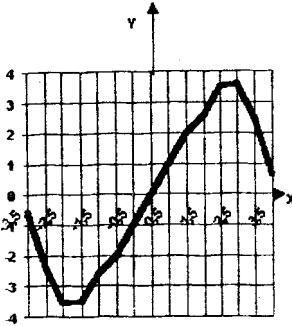


Рис.7.16а. Нелинейная характеристика

Рис.7.16б. График  $W^*(j\omega)$

С доказательством критерия В.М. Попова и его применением в некоторых частных случаях, например, при ограниченных воздействиях на входе системы, можно ознакомиться в [5,17].

Основное достоинство метода исследования абсолютной устойчивости замкнутых систем, имеющих вид, показанный на рис.7.11, при отсутствии входного сигнала заключается в том, что для его применения достаточно знать лишь частотные характеристики линейной части, а поэтому он пригоден для анализа систем высокого порядка.

## 8. ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### 8.1. Определение дискретной САУ

Система автоматического управления называется дискретной, если выходная величина какого – либо ее элемента имеет дискретный характер.

Большое внимание к теории и практике дискретных систем объясняется все большим использованием в замкнутом контуре управления цифровых вычислительных машин (ЦВМ). Это обеспечивает системе значительно большие вычислительные возможности, высокую стабильность, простоту перестройки ее структуры и параметров.

Так как информация о состоянии объекта управления является непрерывной, то перед подачей на вход ЦВМ ее необходимо преобразовать в дискретную форму. Эту задачу выполняет преобразователь “аналог – код”, кото-

рый в теории автоматического управления принято называть **импульсным элементом (ИЭ)**. Дискретизация осуществляется путем квантования непрерывного сигнала по времени и по уровню. Это означает, что аналоговый сигнал в ИЭ через равные промежутки  $T$  заменяется дискретными по уровню значениями, ближайшими к значениям непрерывного сигнала (рис.8.1).

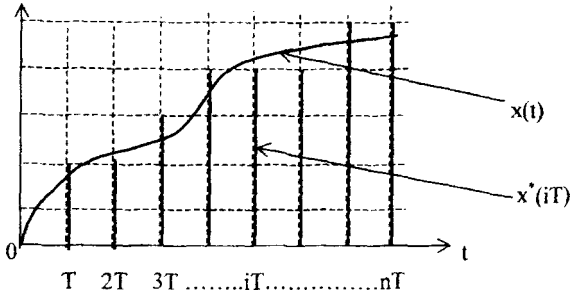


Рис.8.1. Дискретизация непрерывного сигнала

В результате дискретизации непрерывный сигнал заменяется серией импульсов бесконечно малой длительности, амплитуда которых близка к значениям непрерывного сигнала в моменты дискретизации. Ошибки дискретизации по уровню определяются только точностью представления чисел в ЦВМ и они настолько малы, что ими в практических приложениях можно пренебречь. Это дает возможность рассматривать ИЭ только как дискретизатор по времени. На структурных схемах ИЭ изображается в виде ключа. Серия импульсов  $x^*(iT)$  на выходе импульсного элемента называется **решетчатой функцией**. После произведения вычислений на выходе ЦВМ информация появляется также в виде решетчатой функции. Перед подачей этой информации на исполнительную систему, которая является аналоговой, ее необходимо преобразовать из дискретной в непрерывную. Эту задачу решают преобразователи “код – аналог”, которые в теории автоматического управления получили название **экстраполяторов**. В полном соответствии со своим наименованием эти устройства экстраполируют значение сигнала на такт вперед. Наиболее часто используется экстраполятор нулевого порядка, который реализует операцию

$$x(iT + T) = x(iT). \quad (8.1)$$

Работа экстраполятора нулевого порядка иллюстрируется рис.8.2.

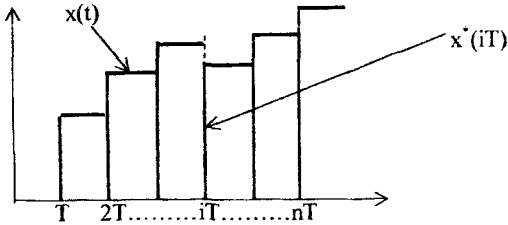


Рис.8.2. Работа экстраполятора нулевого порядка

Все вышесказанное позволяет общую схему дискретной (цифровой) САУ изобразить в виде, показанном на рис.8.3.

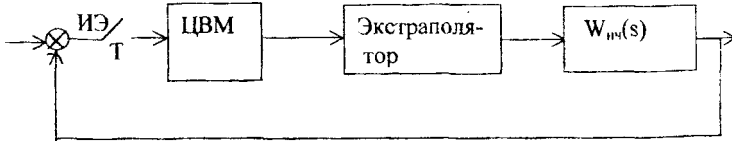


Рис. 8.3. Схема дискретной САУ

На схеме под  $W_m(s)$  подразумевается непрерывная часть системы. Следует отметить, что так как в состав системы входят как дискретные, так и аналоговые элементы, то такие системы часто называют дискретно – непрерывными или гибридными.

### 8.2. Основы Z – преобразования

Для анализа и синтеза дискретных САУ используется дискретное преобразование Лапласа в форме Z – преобразования [9].

Решетчатая функция  $x^*(t)$ , полученная из непрерывной функции  $x(t)$ , может быть записана в виде

$$x^*(iT) = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT) \delta(t - iT), \quad (8.2)$$

где  $\delta(t-iT)$  – дельта – функция.

Найдем преобразование Лапласа от выражения (8.2):

$$L\{x^*(iT)\} = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT) L\{\delta(t-iT)\} = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT) e^{-isT}. \quad (8.3)$$

Обозначим  $z = e^{sT}$ . Тогда можно записать

$$L\{x^*(iT)\} = Z\{x(t)\} = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT) z^{-i}. \quad (8.4)$$

Это и есть Z – преобразование функции  $x(t)$ .

Пример. Найти  $Z$ -преобразование функции  $x(t) = e^{-at}$ .

$$X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-iaT} z^{-i} = 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + \dots + e^{-kaT} z^{-k} + \dots$$

Этот ряд представляет собой геометрическую прогрессию с показателем

$$q = e^{-aT} z^{-1}. \text{ Сумма геометрической прогрессии } S = \frac{a_1}{1-q}, \text{ где } a_1 - \text{ первый}$$

член прогрессии. Получим

$$X(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}.$$

Рассмотрим некоторые основные теоремы  $Z$ -преобразования.

1. Изображение суммы функций равно сумме изображений.
2. Теорема о начальном значении оригинала

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z). \quad (8.5)$$

3. Теорема о конечном значении оригинала

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} X(z). \quad (8.6)$$

4. Теорема запаздывания

$$Z\{x(iT - nT)\} = X(z)z^{-n}. \quad (8.7)$$

В литературе по ТАУ приводятся таблицы преобразования Лапласа и  $Z$ -преобразования от типовых непрерывных функций.

### 8.3. Передаточные функции дискретных САУ

Рассмотрим схему дискретной системы, показанную на рис. 8.3. Определим передаточную функцию дискретной системы или какого-либо ее звена по аналогии с непрерывными системами как отношение  $Z$ -изображения выходного сигнала к  $Z$ -изображению входного сигнала при нулевых начальных условиях. Обозначим входной сигнал ЦВМ как  $E(z)$ , а выходной -  $Y(z)$ . Тогда

$$W_{\text{цвм}}(z) = \frac{Y(z)}{E(z)}.$$

Будем считать, что в системе используется экстраполятор нулевого порядка и определим его передаточную функцию. На вход экстраполятора поступает дельта-функция с амплитудой  $Y(0)$ . Экстраполятор запоминает это значение на один такт и формирует прямоугольный импульс (рис. 8.4). Для решения задачи искусственно продлим этот импульс в бесконечность, т.е. условно посчитаем, что экстраполятор формирует ступенчатый сигнал  $Y(0)1(t)$ , а для сохранения истинного положения дополним рисунок ступенчатым воздействием

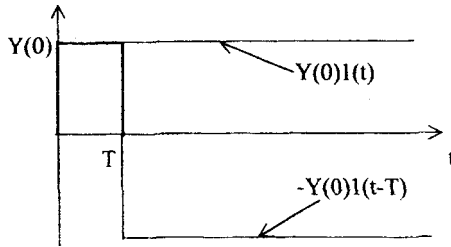


Рис. 8.4. Преобразование сигнала в экстраполиаторе

$-Y(0)I(t-T)$ . Теперь выходной сигнал экстраполиатора можно определить как  

$$Y_T(t) = Y(0)I(t) - Y(0)I(t-T).$$

Передаточная функция экстраполиатора нулевого порядка примет вид

$$W_z(s) = \frac{L\{Y_T(t)\}}{L\{Y(0)\delta(t)\}} = \frac{1 - e^{-sT}}{s}.$$

С учетом ранее сделанного обозначения  $e^{-sT} = z$ , окончательно получим

$$W_z(s) = \frac{z - 1}{z} \frac{1}{s}. \quad (8.8)$$

Множитель  $\frac{1}{s}$  относят к непрерывной части системы и считают, что ее передаточная функция определяется выражением

$$W_{нч}^*(s) = \frac{1}{s} W_{нч}(s).$$

Теперь структурную схему дискретной системы можно изобразить в виде, показанном на рис.8.5. Основная трудность дальнейших преобразований, имеющих целью получение Z- передаточной функции всей системы, заключается в получении Z – передаточной функции приведенной непрерывной части  $W_{нч}^*(s)$ . При этом необходимо помнить, что **если непрерывная часть системы задана в виде соединения каких – либо звеньев, то нельзя**

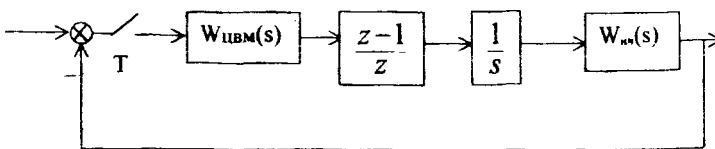


Рис. 8.5. Структурная схема дискретной САУ

определить  $Z$  – передаточную функцию каждого звена, а затем воспользоваться правилами о соединениях динамических звеньев.  $Z$  – преобразование необходимо определять от всей передаточной функции  $W_{нч}^*(s)$ .

Исключение из этого правила составляют приближенные методы получения  $Z$  – преобразования, например, методы подстановки и подбора корня.

Для получения точного  $Z$  – преобразования по непрерывной передаточной функции можно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов. Для этого необходимо найти полюсы непрерывной передаточной функции и представить ее в виде суммы элементарных динамических звеньев с неопределенными коэффициентами в числителе. После приведения к общему знаменателю составляется и решается система уравнений относительно неопределенных коэффициентов. Для каждого элементарного звена по таблицам можно определить его  $Z$  – передаточную функцию и затем, для получения передаточной функции приведенной непрерывной части, в соответствии с теоремой 1 просуммировать эти передаточные функции.

Если определены полюсы  $s_i$  приведенной непрерывной части, то для получения ее  $Z$  – изображения можно воспользоваться теоремой о вычетах:

$$W_{нч}(z) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Res} \left\{ \frac{z}{z - e^{s_i T}} W_{нч}^*(s) \right\}_{s=s_i} =$$

$$= \frac{z}{z - 1} \frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{i=0}^n \left( \frac{z}{z - e^{s_i T}} \frac{B(s_i)}{s_i A'(s_i)} \right).$$
(8.9)

В этом выражении  $B(s)$  и  $A(s)$  – полиномы числителя и знаменателя

передаточной функции непрерывной части системы, а  $A'(s) = \frac{dA(s)}{ds}$ .

После определения  $Z$  – передаточной функции непрерывной части легко определяются передаточные функции всей системы:

-  $W(z) = W_{цсм}(z) \frac{z-1}{z} Z \left\{ W_{нч}^*(s) \right\}$  – передаточная функция разомкнутой системы;

-  $\Phi(z) = \frac{W(z)}{1+W(z)}$  – передаточная функция замкнутой системы;

-  $\Phi_{\varepsilon}(z) = \frac{1}{1+W(z)}$  – передаточная функция замкнутой системы по ошибке.



#### 8.4. Исследование устойчивости дискретных САУ

По аналогии с предыдущим назовем уравнение

$$D(z) = I + W(z) = 0 \quad (8.10)$$

характеристическим уравнением замкнутой системы. При исследовании непрерывных систем было установлено, что для их устойчивости необходимо и достаточно, чтобы каждый корень характеристического уравнения  $s_i = \alpha_i \pm j\beta_i$  имел отрицательную вещественную часть. Учитывая, что  $z = e^{sT}$ , для каждого корня уравнения (8.10) можно записать

$$z_i = e^{\alpha_i T} (\cos \beta_i T + j \sin \beta_i T). \quad (8.11)$$

Это выражение есть уравнение окружности радиуса  $R = |z_i| = e^{\alpha_i T}$ . Нетрудно видеть, что при нахождении системы на границе устойчивости, когда  $\alpha_i = 0$ , радиус  $R = 1$ , и это есть уравнение границы устойчивости дискретной системы. Для устойчивой непрерывной системы  $\alpha_i < 0$ , что соответствует значению радиуса  $R < 1$ .

**Для устойчивости дискретной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения были по модулю строго меньше единицы или, что то же самое, лежали внутри круга единичного радиуса.**

Исследовать устойчивость дискретной системы путем определения корней характеристического уравнения неудобно и непродуктивно с точки зрения определения путей стабилизации системы. Желательно, как и ранее, иметь критерии устойчивости, позволяющие оценивать устойчивость без нахождения полюсов системы, определять запасы устойчивости, вычислять критические значения параметров и т.д. Критерии устойчивости, разработанные для дискретных систем, сложны и неудобны в использовании. Поэтому практическое применение нашли методы, полученные для непрерывных систем, которые можно использовать после преобразования передаточной функции дискретной системы, которое осуществляется подстановкой

$$z = \frac{I + w}{I - w} \quad (8.12)$$

Выражение (8.12) определяет так называемое билинейное преобразование, которое отображает внутренность единичного круга на плоскости  $z$  в левую полуплоскость плоскости  $w$ .

Для преобразованного характеристического уравнения  $D(w) = 0$  условием устойчивости является нахождение всех его корней в левой полуплоскости. Поэтому после билинейного преобразования для оценки устойчивости дискретной системы можно использовать все критерии, разработанные для непрерывных систем.

Пример. Передаточная функция разомкнутой системы задана выражением

$$W(z) = \frac{k(z+0.5)(z+1.065)}{(z-1)(z-0.135)(z-0.0183)}$$

Требуется:

- 1) для значения  $k=0.3$  оценить устойчивость замкнутой системы;
- 2) определить критическое значение коэффициента усиления.

Для решения поставленных задач используем критерий Гурвица. Передаточная функция замкнутой системы будет

$$\Phi(z) = \frac{k(z+0.5)(z+1.065)}{z^3 + d_1 z^2 + d_2 z + d_3},$$

где  $d_1 = k - 1.153$ ,  $d_2 = 0.156 + 1.565k$ ,  $d_3 = 0.533k - 0.00247$ . Для  $k = 0.3$  получим  $d_1 = -0.853$ ,  $d_2 = 0.525$ ,  $d_3 = 0.157$ . В характеристическом уравнении замкнутой системы сделаем замену  $z = \frac{1+w}{1-w}$  и после несложных преобразований полу-

чим

$$D(w) = 2.32w^3 + 3.7w^2 + 1.051w + 0.929.$$

Для системы 3-го порядка условие устойчивости, вытекающее из критерия Гурвица, определяется выражением

$$d_1 d_2 - d_0 d_3 > 0.$$

Подставим численные значения коэффициентов в это выражение и получим  $3.7 * 1.051 - 2.32 * 0.929 > 0$ .

Замкнутая система при заданном значении коэффициента усиления прямой цепи устойчива.

Для неизвестного значения коэффициента усиления после билинейного преобразования получим

$$d_0 = 2.311 + 0.032k, \quad d_1 = -0.966k + 4,$$

$$d_2 = 1.698 - 2.164k, \quad d_3 = 3.098k + 0.0053.$$

Из анализа выражений для коэффициентов характеристического уравнения следует, что необходимое условие устойчивости для коэффициентов  $d_0$  и  $d_3$  выполняется всегда, коэффициент  $d_1 > 0$ , если  $k < 4.14$ , а  $d_2 > 0$ , если  $k < 0.785$ . Условием нахождения системы 3-го порядка на колебательной границе устойчивости является равенство

$$d_1 d_2 - d_0 d_3 = 0.$$

Подставим значения коэффициентов и после элементарных преобразований получим квадратное уравнение относительно коэффициента усиления

$$k^2 - 8.767k + 3.41 = 0.$$

Решение уравнения дает два значения:  $k = 0.408$  и  $k = 8.36$ .

Сравнивая эти результаты с полученными выше, можно сделать вывод, что

$$(k)_{kp} = 0.408.$$

Для оценки устойчивости дискретной системы можно использовать и частотные характеристики, получающиеся после замены  $z = e^{j\omega T}$ . Однако полученные таким путем характеристики выражаются сложными трансцендентными функциями и их определение и использование связано со сложными вычислениями. Поэтому для использования частотных характеристик вначале к передаточной функции применяют билинейное преобразование (8.12). Из (8.12) также следует

$$\begin{aligned} w &= \frac{z-1}{z+1} = \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = \frac{(\cos \omega T - 1) + j \sin \omega T}{(\cos \omega T + 1) + j \sin \omega T} = \\ &= j \frac{\sin \omega T}{1 + \cos \omega T} = j \frac{2 \sin \frac{\omega T}{2} \cos \frac{\omega T}{2}}{2 \cos^2 \frac{\omega T}{2}} = j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}. \end{aligned}$$

Сравнивая полученный результат с заменой  $s = j\omega$ , можно сделать вывод, что по форме они совершенно одинаковы. Назовем псевдочастотой величину  $v = \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$  и для получения характеристик дискретной системы относительно псевдочастоты будем использовать подстановку  $w = jv$ . Псевдочастота и круговая частота связаны соотношением

$$\omega = \frac{2}{T} \operatorname{arctg} v. \quad (8.13)$$

Из полученных выражений видно, что частотные характеристики дискретных САУ относительно круговой частоты являются периодическими функциями с периодом  $\pm \frac{\pi}{T}$ . Нетрудно убедиться, что при изменении круговой частоты в

указанных пределах псевдочастота изменяется от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Так как частотные характеристики - периодические функции, то достаточно строить их в пределах

$0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$ . Частотные характеристики дискретных систем строятся относи-

тельно псевдочастоты и после этого для оценки устойчивости к ним применимы частотные критерии устойчивости. Построение частотных характеристик дискретных систем связано с большим объемом преобразований и вычислений. В то же время использование частотных характеристик предпочтительно в случаях, когда нужно не только оценить собственно устойчивость системы, но и определить запасы устойчивости и наметить пути стабилизации системы. Для

расчета и построения частотных характеристик дискретных систем используются различные прикладные программы вычислений. На рис.8.6 показаны ЛЧХ, построенные с использованием пакета прикладных программ "Classical Control" для передаточной функции разомкнутой системы из предыдущего примера.

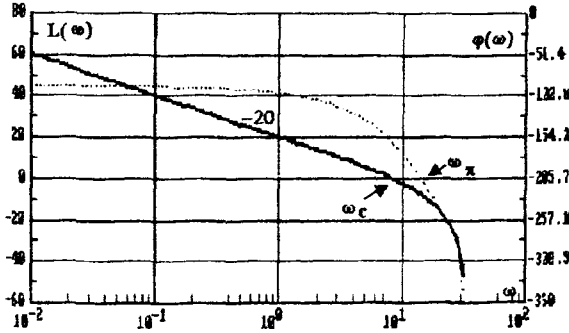


Рис.8.6. ЛЧХ системы

Из рисунка следует, что  $\omega_c < \omega_n$ , а значит, замкнутая система устойчива. В то же время запасы устойчивости, определенные из графиков,  $\gamma = 16^\circ$ ,  $H = -2.67$ дБ., явно недостаточны. Отметим также, что на приведенном рисунке на оси частот указаны значения круговых частот.

### 8.5. Анализ качества дискретных САУ

Показатели качества дискретной системы наиболее просто определяются по кривой переходного процесса, вызванного единичным ступенчатым воздействием:

$$I(t) \rightarrow \frac{z}{z-1}$$

Изображение переходной функции будет

$$H(z) = \Phi(z) \frac{z}{z-1} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Дискретные значения переходного процесса могут быть найдены путем разложения изображения  $H(z)$  в ряд Лорана, которое реализуется простым делением числителя изображения переходной функции на ее знаменатель. После деления получим

$$H(z) = C_0 + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + \dots + C_i z^i + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} C_i z^{-i}. \quad (8.14)$$

С другой стороны, по определению Z – преобразования

$$H(z) = \sum_{i=0}^{\infty} h(iT)z^{-i}. \quad (8.15)$$

Сравнивая (8.15) с (8.14), можно заключить, что коэффициенты разложения  $C_i$  равны дискретным значениям  $h(iT)$  переходной функции.

**Пример.** Передаточная функция замкнутой системы задана выражением

$$\Phi(z) = \frac{0.3(z+0.5)(z+1.065)}{z^3 - 0.853z^2 + 0.625z + 0.157}.$$

Считая, что  $T=0.1$ , построить переходную функцию. Для изображения переходной функции получим

$$H(z) = \frac{0.3z^3 + 0.4695z^2 + 0.15975z}{z^4 - 1.853z^3 + 1.4786z^2 - 0.468z - 0.157}.$$

Разделим числитель на знаменатель:

$$H(z) = 0.3z^{-1} + 1.0255z^{-2} + 1.614z^{-3} + 1.62z^{-4} + 1.14z^{-5} + 0.634z^{-6} + 0.503z^{-7} + 0.783z^{-8} + 1.183z^{-9} + 1.37z^{-10} + \dots$$

Отложив на графике ординаты дискретных значений и соединив их плавной кривой, получим переходную функцию системы (рис.8.7). Продлив вычисления дальше, можно определить все показатели качества, но уже и так ясно, что переходный процесс неудовлетворителен, т.к. перерегулирование превышает 60%, что является следствием малых запасов устойчивости.

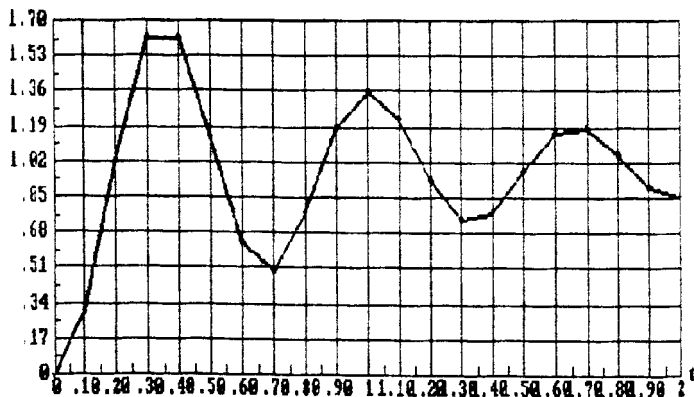


Рис.8.7. Переходная функция системы

По аналогии с непрерывными системами точность дискретных САУ в установившемся режиме можно оценивать с помощью коэффициентов ошибок. В общем случае коэффициенты ошибок дискретной системы определяются выражением

$$K_i = i! \frac{d^i}{ds^i} \Phi_\varepsilon(e^{sT}) \Big|_{s=0}. \quad (8.16)$$

Для вычисления практически используемых коэффициентов  $K_0$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  выведены формулы

$$\begin{aligned} K_0 &= \Phi_\varepsilon(z) \Big|_{z=1}, \\ K_1 &= zT \frac{d}{dz} \Phi_\varepsilon(z) \Big|_{z=1}, \\ K_2 &= 2zT \left[ T \frac{d}{dz} \Phi_\varepsilon(z) + zT \frac{d^2}{dz^2} \Phi_\varepsilon(z) \right] \Big|_{z=1}. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Введением в передаточную функцию прямой цепи звена  $\frac{z}{z-1}$ , что соответствует введению интеграла, системе можно придать астатизм. Передаточная функция разомкнутой системы в этом случае имеет вид

$$W(z) = \left( \frac{z}{z-1} \right)^\nu \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (8.18)$$

Здесь  $\nu$  - порядок астатизма. Передаточная функция замкнутой системы по ошибке будет равна

$$\Phi_\varepsilon(z) = \frac{(z-1)^\nu A(z)}{(z-1)^\nu A(z) + z^\nu B(z)}. \quad (8.19)$$

Очевидно, что при  $\nu = 1$  коэффициент ошибки по положению  $K_0 = 0$ . При астатизме второго порядка ( $\nu = 2$ ) получим, что  $K_0 = 0$ ,  $K_1 = 0$  и т.д.

### 8.6. Синтез дискретных САУ

Синтез дискретных САУ состоит в разработке такой программы обработки информации в ЦВМ, при которой синтезированная система удовлетворяет поставленным требованиям.

При синтезе дискретных систем необходимо учитывать некоторые особые условия, важнейшим из которых является условие грубости.

#### 8.6.1. Условие грубости дискретной системы

При синтезе замкнутой дискретной САУ ее передаточная функция не может быть выбрана произвольно, она должна удовлетворять определенным требованиям. Прежде всего желаемая передаточная функция замкнутой системы  $\Phi_{\text{з}}(z)$  должна удовлетворять условию физической реализуемости, которое выполняется, если  $\Phi_{\text{з}}(z)$  представляет собой правильную дробь по  $z$  ( $n > m$ ).

Условие физической реализуемости является необходимым, но в общем случае недостаточным. При практической реализации дискретных (цифровых) корректирующих цепей их характеристики могут несколько отличаться от необходимых. Если это отличие вызовет малое изменение процессов в замкнутой САУ, то такая САУ представляет собой грубую систему. Если же малое отличие характеристик качественно изменит процесс, то система будет негрубой. Следовательно, всякая синтезированная система должна удовлетворять условию грубости.

Предположим, что параметры дополнительной корректирующей цепи несколько отличаются от расчетных. Тогда передаточная функция замкнутой системы  $\Phi(z)$  будет несколько отличаться от желаемой  $\Phi_{ж}(z)$ . Оценим отклонение (вариацию)  $\Phi(z)$  от  $\Phi_{ж}(z)$ :

$$\delta\Phi(z) = \Phi(z) - \Phi_{ж}(z) \quad (8.20)$$

Обозначим как  $W_k(z)$  передаточную функцию корректирующей цепи. Тогда по определению вариации можно записать

$$\delta\Phi(z) = \frac{\partial\Phi(z)}{\partial W_k(z)} \delta W_k(z) \quad (8.21)$$

Для последовательной коррекции в прямой цепи

$$\Phi(z) = \frac{W_0(z)W_k(z)}{1+W_0(z)W_k(z)}, \quad (8.22)$$

где  $W_0(z) = P(z)/Q(z)$  - передаточная функция неизменяемой части системы. В соответствии с выражением (8.21) получим

$$\begin{aligned} \delta\Phi(z) &= \frac{W_0(z)[1+W_0(z)W_k(z)] - W_0(z)W_k(z)W_0(z)}{[1+W_0(z)W_k(z)]^2} \delta W_k(z) = \\ &= \frac{W_0(z)}{[1+W_0(z)W_k(z)]^2} \delta W_k(z). \end{aligned} \quad (8.23)$$

Передаточную функцию корректирующей цепи можно представить в виде

$$W_k(z) = \frac{z}{1 + \frac{P(z)Q_k(z)}{P_k(z)Q(z)}} \quad (8.24)$$

Вариация  $W_k(z)$ , вызванная вариациями параметров полиномов  $Q(z)$  и  $P(z)$ , равна

$$\delta W_k(z) = \frac{\partial W_k(z)}{\partial Q(z)} \delta Q(z) + \frac{\partial W_k(z)}{\partial P(z)} \delta P(z). \quad (8.25)$$

Учитывая выражение (8.24), для  $W_k(z)$  из (8.25) можно получить

$$\delta W_k(z) = \frac{\Phi_c(z) Q(z)}{1 - \Phi_c(z) P(z)} \left[ \frac{\delta Q(z)}{Q(z)} - \frac{\delta P(z)}{P(z)} \right]. \quad (8.26)$$

Подставим это выражение в (8.23) и, учитывая (8.24) и  $W_d(z)$ , после преобразований получим окончательное выражение для вариации передаточной функции замкнутой системы:

$$\delta \Phi(z) = \Phi_{жс}(z) \left[ 1 - \Phi_{жс}(z) \right] \left[ \frac{\delta Q(z)}{Q(z)} - \frac{\delta P(z)}{P(z)} \right]. \quad (8.27)$$

Если передаточная функция неизменяемой части не имеет нулей и полюсов по модулю больших единицы (устойчивая и минимально-фазовая неизменяемая часть), то и вариация  $\delta \Phi(z)$  не будет содержать неустойчивых полюсов и передаточная функция

$$\Phi(z) = \Phi_{жс}(z) + \delta \Phi(z) \quad (8.28)$$

будет соответствовать устойчивой замкнутой САУ. Чем меньше по абсолютной величине будут вариации  $\delta Q(z)$  и  $\delta P(z)$ , тем меньше будет отличаться передаточная функция замкнутой системы от желаемой и тем меньше будет отличаться процесс в системе от желаемого.

Если же передаточная функция неизменяемой части системы имеет нули или полюсы по модулю больше единицы, что соответствует неминимально-фазовой или неустойчивой неизменяемой части, то эти нули и полюсы будут совпадать с полюсами вариации (8.27) замкнутой системы, как бы ни были малы вариации  $\delta Q(z)$  и  $\delta P(z)$ . Следовательно, передаточная функция замкнутой системы, определяемая выражением (8.28), будет соответствовать неустойчивой системе. В этом случае система является негрубой, ибо при небольшом отличии параметров корректирующей цепи от заданных замкнутая САУ становится неустойчивой. Отсюда следует, что корректирующая цепь не должна содержать нулей и полюсов, которые близки к неустойчивым нулям и полюсам передаточной функции неизменяемой части системы. Иначе говоря, для обеспечения грубости замкнутой САУ нельзя сокращать неустойчивые нули и полюсы передаточной функции неизменяемой части разомкнутой системы с полюсами и нулями передаточной функции корректирующей цепи.

Этот вывод накладывает определенные ограничения на желаемую передаточную функцию замкнутой системы.

Представим числитель и знаменатель передаточной функции неизменяемой части системы в виде

$$\left. \begin{aligned} P(z) &= P^+(z)P^-(z) \\ Q(z) &= Q^+(z)Q^-(z), \end{aligned} \right\}$$

где  $P^+(z)$  и  $Q^+(z)$  имеют все нули по модулю меньше единицы, а полиномы  $P^-(z)$  и  $Q^-(z)$  - большие единицы. Тогда



$$W_0(z) = \frac{P^+(z)P^-(z)}{Q^+(z)Q^-(z)}. \quad (8.29)$$

Для устойчивой неизменяемой части системы  $Q(z)=1$ , а для минимально-фазовой неизменяемой части разомкнутой САУ  $P(z)=1$ . Если неизменяемая часть разомкнутой системы неустойчива и неминимально-фазовая, то передаточную функцию цепи коррекции (8.24) можно представить в виде

$$W_k(z) = \frac{Q^+(z)\Phi_c(z)Q^-(z)}{P^+(z)P^-(z)1-\Phi_c(z)}. \quad (8.30)$$

Для того чтобы  $W_k(z)$  не содержала неустойчивых нулей и полюсов  $W_0(z)$ , неустойчивые нули передаточной функции  $W_0(z)$ , т.е. нули  $P^-(z)$ , как видно из (8.30), должны входить в число нулей  $\Phi_c(z)$ , а неустойчивые полюсы  $W_0(z)$ , т.е. нули  $Q^-(z)$ , должны входить в число нулей передаточной функции замкнутой системы по ошибке  $\Phi_d(z)=1-\Phi_c(z)$ .

Действуя аналогично, можно определить условия грубости для систем с последовательной коррекцией в цепи обратной связи и для параллельной коррекции. В результате можно получить следующие выводы.

1. Для минимально-фазовой и устойчивой неизменяемой части разомкнутой САУ условия грубости заведомо выполняются и поэтому выбор желаемой передаточной функции замкнутой системы не стеснен ограничениями.

2. Для неминимально-фазовой и устойчивой неизменяемой части разомкнутой САУ условия грубости одинаковы при любом виде коррекции и накладывают определенные ограничения на выбор  $\Phi_c(z)$  - она должна содержать неустойчивые нули передаточной функции  $W_0(z)$ .

3. Для минимально-фазовой и неустойчивой неизменяемой части разомкнутой системы возникают дополнительные ограничения на выбор  $\Phi_c(z)$ , вытекающие из условия грубости, для последовательной коррекции в прямой цепи и параллельной коррекции (см. 8.30).

4. Для неминимально-фазовой и неустойчивой неизменяемой части разомкнутой САУ ограничения на выбор желаемой передаточной функции замкнутой системы возникают при всех видах коррекции.

Выше мы рассматривали замкнутую систему при одном внешнем воздействии, приложенном ко входу импульсного элемента. Изменение точки приложения входного воздействия изменяет вид передаточной функции замкнутой системы. Поэтому в силу неизбежных флюктуаций в различных точках замкнутой САУ следует выбирать  $\Phi_c(z)$ , исходя из наиболее жестких условий грубости, выведенных из анализа формулы (8.30). Таким образом, для всех видов коррекции  $\Phi_c(z)$  должна содержать нули  $P^-(z)$ , а  $\Phi_d(z)=1-\Phi_c(z)$  - нули  $Q^-(z)$ .

### 8.6.2. Методы синтеза дискретных САУ

Синтез дискретной системы может быть произведен с помощью ЛЧХ по методике, изложенной для непрерывных систем. Полученная передаточная

функция корректирующего устройства  $W_k(w)$  с помощью выражения для билинейного преобразования переводится в  $W_k(z)$ , что и определяет фрагмент программы ЦВМ.

Дискретная система может быть синтезирована по аналоговому прототипу, т.е. по выполнению условия

$$k(iT) = k(t) \Big|_{t=iT}.$$

Передаточная функция неизменяемой части известна:

$$W_0(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}.$$

Выбрав требуемую коррекцию, например использованием ЛЧХ, можно определить желаемую передаточную функцию замкнутой непрерывной системы, а следовательно и ее импульсную переходную характеристику  $k(t)$ . По ней можно определить желаемую передаточную функцию дискретной системы:

$$\Phi(z) = Z\{k(t)\}. \quad (8.31)$$

Далее определяется передаточная функция разомкнутой системы:

$$W(z) = \frac{\Phi(z)}{1 - \Phi(z)}. \quad (8.32)$$

С другой стороны, передаточная функция разомкнутой системы

$$W(z) = W_{\text{цвм}}(z) \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{1}{s} W_0(s)\right\}. \quad (8.33)$$

Выражения (8.32) и (8.33) позволяют определить передаточную функцию ЦВМ, т.е. программу ее работы.

Рассмотрим методику синтеза дискретной САУ по критерию быстродействия, когда основным является требование, чтобы выходной сигнал имел конечную и минимальную длительность.

Примем следующие обозначения:

$W_0(z)$  — передаточная функция неизменяемой части;

$D(z)$  — передаточная функция ЭВМ.

Тогда для передаточных функций разомкнутой и замкнутой системы можно записать:

$$W(z) = W_0(z)D(z),$$

$$\Phi(z) = \frac{W(z)}{1+W(z)} = \frac{W_0(z)D(z)}{1+W_0(z)D(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)}. \quad (8.34)$$

Если передаточные функции неизменяемой части и замкнутой системы известны, то из (8.34) следует:

$$D(z) = \frac{1 - \Phi(z)}{W_0(z)} = \frac{W(z)}{W_0(z)} \quad (8.35)$$

Представим передаточную функцию неизменяемой части в следующем виде:

$$W_0(z) = \frac{B(z)}{C(z)} = \frac{B^-(z)B^+(z)}{C^-(z)C^+(z)} \quad (8.36)$$

Полиномы с индексом "+" имеют все корни внутри круга единичного радиуса, а полиномы с индексом "-" вне этого круга. Операция представления передаточной функции в виде (8.36) называется факторизацией.

Условие грубости системы требует, чтобы передаточная функция желаемой замкнутой системы содержала в качестве своих нулей нули полинома  $B(z)$ , а передаточная функция  $1 - \Phi(z)$  в качестве своих нулей содержала нули полинома  $C(z)$ :

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{B^-(z)M(z)}{Q(z)}; \\ 1 - \Phi(z) &= \frac{C^-(z)N(z)}{Q(z)}. \end{aligned} \right\} \quad (8.37)$$

Выбор полиномов  $M(z)$ ,  $N(z)$  и  $Q(z)$  обеспечивает получение заданных качественных показателей процесса регулирования в дискретные моменты времени.

При необходимости получить конечную длительность процесса регулирования выбирают характеристический полином замкнутой системы в виде

$$Q(z) = z^l, \quad (8.38)$$

где  $l$  - целое положительное число.

В силу выражений (8.36) и (8.37) можно получить

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{C^+(z)M(z)}{B^+(z)N(z)}, \\ W(z) &= \frac{B^-(z)M(z)}{C^-(z)N(z)}. \end{aligned}$$

Тогда для характеристического полинома замкнутой системы можно записать:

$$Q(z) = C^-(z)N(z) + B^-(z)M(z) = z^l. \quad (8.39)$$

Соблюдение принципа физической реализуемости обеспечивается, если

$$\|C^-(z)\| + \|N(z)\| \geq \|B^-(z)\| + \|M(z)\|. \quad (8.40)$$

Знак  $\|\cdot\|$  означает порядок полинома. При произвольных полиномах  $C(z)$  и  $B(z)$  это условие выполняется, если

$$\left. \begin{aligned} \|N(z)\| \geq \|B^-(z)\| \\ \|M(z)\| \geq \|C^-(z)\| - I. \end{aligned} \right\} \quad (8.41)$$

Из (8.40) и (8.41) следует, что минимальный порядок желаемого характеристического полинома замкнутой системы

$$l_{\min} = \|C^-(z)\| + \|B^-(z)\| \quad (8.42)$$

При избранных порядках полиномов  $N(z)$  и  $M(z)$  полиномиальное уравнение (8.39) решается развертыванием его в систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов указанных полиномов путем приравнивания членов с одинаковыми степенями оператора  $z$  в левой и правой части исходного уравнения.

Выбор  $l = l_{\min}$  определяет процесс минимальной и конечной длительности. В этом случае число уравнений полученной системы равно числу неизвестных коэффициентов и она имеет единственное решение. Чаще всего при таком выборе длительности процесса синтезируемая система не обладает достаточными запасами устойчивости и имеет высокое перерегулирование.

Для исключения этого явления есть два пути. Первый заключается в сохранении конечной длительности переходного процесса при увеличении времени регулирования путем выбора  $l > l_{\min}$ . В этом случае система алгебраических уравнений содержит неизвестных больше, чем уравнений, и имеет бесчисленное количество решений. Разность между числом уравнений и числом неизвестных равна величине увеличения порядка системы по сравнению с минимальным. Каких-либо общих рекомендаций по выбору "лишних" неизвестных коэффициентов дать невозможно. Одной из возможностей решения этой проблемы является наложение ограничений на коэффициенты числителя передаточной функции замкнутой системы. Для этого необходимо получить изображение переходной функции и выбрать ее значения исходя из требований к переходному процессу. Эти значения являются функциями коэффициентов полиномов  $B(z)$  и  $M(z)$ . Таким способом иногда удастся подобрать приемлемые значения "лишних" коэффициентов и затем решить систему уравнений относительно оставшихся коэффициентов полиномов  $M(z)$  и  $N(z)$ . Решение задачи и в этом случае неоднозначно и при невозможности получить желаемый переходный процесс приходится еще более увеличивать порядок системы.

Второй путь заключается в отказе и от конечной длительности переходного процесса. В этом случае характеристический полином замкнутой системы выбирается в следующем виде:

$$Q(z) = z^k (z - a)^{l-k}. \quad (8.43)$$

Величину перерегулирования и длительность переходного процесса, определяемую заданным временем регулирования, часто удается получить и при минимальном порядке системы путем надлежащего выбора величин  $a$  и  $k$ .

**Пример.** Рассмотрим структурную схему цифрового автомата стабилизации, в которой демпфирование осуществляется по аналоговому каналу (рис.8.8).

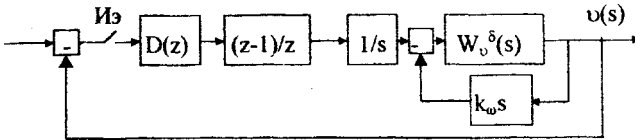


Рис 8.8. Структурная схема автомата стабилизации

Передаточная функция неизменяемой части определяется выражением

$$W_0(z) = \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{1 * W_9^\delta(s)}{s \quad 1+k_\omega s W_9^\delta(s)} \right\}$$

При вычисленном выше коэффициенте демпфирования и заданных параметрах объекта получим

$$W_0(z) = \frac{1.495 * 10^{-2} (z^2 - 0.6397z - 0.354)}{(z - 3.5 * 10^{-2})(z^2 - 2z + 1)}$$

Факторизация этой передаточной функции дает

$$P^+(z) = 11.495 * 10^{-2} (z^2 - 0.6397z - 0.354);$$

$$P^-(z) = 1;$$

$$Q^+(z) = z - 3.5 * 10^{-2};$$

$$Q^-(z) = z^2 - 2z + 1.$$

В соответствии с приведенными выше соображениями  $l_{min} = 2$ . Для обеспечения минимальной длительности переходного процесса порядки полиномов  $M(z)$  и  $N(z)$  должны быть равны соответственно 1 и 0, т.е.

$$M(z) = m_0 z + m_1,$$

$$N(z) = n_0.$$

Характеристический полином замкнутой системы примет вид

$$m_0 z + m_1 + (z^2 - 2z + 1)n_0 = z^2.$$

Приравнявая члены при одинаковых степенях оператора  $z$  в левой и правой части, получим

$$\left. \begin{aligned} n_0 &= 1, \\ m_0 - 2n_0 &= 0 \\ m_1 + n_0 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда  $m_0 = 2, m_1 = -1$ .

$$D(z) = \frac{C^+(z) * 2z - 1}{B^+(z) \quad 1};$$

$$W(z) = \frac{2z - 1}{z^2 - 2z + 1};$$

$$\Phi(z) = \frac{2z - 1}{z^2}.$$

Переходный процесс в такой системе имеет вид, показанный на рис.8.9.

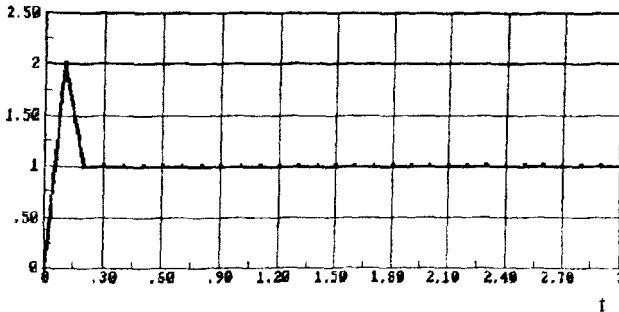


Рис.8.9.Переходный процесс минимальной и конечной длительности

Процесс действительно заканчивается на втором такте, но имеет очень большое перерегулирование.

Для повышения качества системы увеличим порядок ее до 4. На столько же возрастут порядки полиномов  $M(z)$  и  $N(z)$ , т.е. получим, что  $m=3, n=2$ . Характеристический полином примет вид

$$m_0 z^3 + m_1 z^2 + m_2 z + m_3 + (n_0 z^2 + n_1 z + n_2)(z^2 - 2z + 1) = z^4.$$

Соответствующая система алгебраических уравнений будет

$$m_0 = 1,$$

$$\left. \begin{aligned} m_0 + n_1 &= 2, \\ m_1 - 2n_1 + n_2 &= -1, \\ m_2 + n_1 - 2n_2 &= 0, \\ m_3 + n_2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

В системе 4 уравнения и 6 неизвестных. Зададим значения двух неизвестных, например,  $n_1 = 0.8$ ,  $n_2 = 0.4$ . Тогда решение относительно неизвестных коэффициентов будет:  $m_0 = 1.2$ ,  $m_1 = 0.2$ ,  $m_2 = 0$ ,  $m_3 = -0.4$ .

Переходный процесс в замкнутой системе при таком выборе порядка характеристического полинома показан на рисунке 8.10. Переходный процесс заканчивается на четвертом такте, но все еще имеет высокое перерегулирование (40%) и существенно уменьшить его подбором коэффициентов затруднительно.

Выберем теперь характеристический полином замкнутой системы в виде

$$Q(z) = (z - a)^l.$$

Выберем минимальный порядок системы  $l = l_{\min} = 2$  и выберем произвольно  $a = 0.6$ . Составив и решив систему алгебраических уравнений, получим

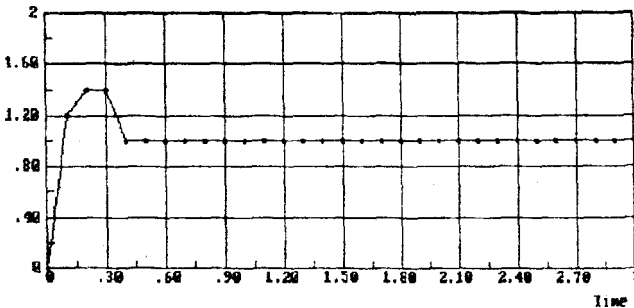


Рис.8.10.Переходный процесс конечной, но неминимальной длительности

$$n_0 = 1, \quad m_0 = 0.3, \quad m_1 = -0.2775.$$

Вычислив передаточную функцию, получим переходный процесс (рис.8.11). Показатели качества такой системы ( $\sigma = 16\%$ ,  $t_p = 2.7c$ ) вполне приемлемы.

### 8.7. Операционные методы цифрового моделирования дискретно – непрерывных систем

Для исследования дискретно – непрерывных САУ широко распространено моделирование их динамики на ЦВМ. Математическая модель для ее программирования на ЦВМ в любом случае сводится к описанию системы в форме

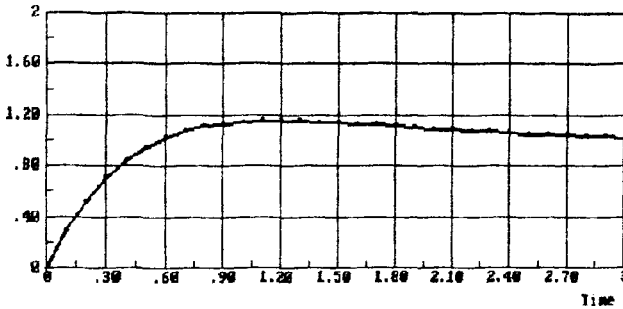


Рис.8.11.Переходный процесс неминимальной и неконечной длительности

разностных уравнений. Разностное уравнение (уравнение в конечных разностях) является аналогом дифференциальных уравнений в дискретной области. Формально переход от дифференциального уравнения к разностному осуществляется путем замены в первом производных конечными разностями в соответствии с выражением

$$\frac{dx^{(k)}(t)}{dt^k} = \frac{\Delta^k(iT)}{T^k}, \quad (8.44)$$

где  $\Delta^k(iT) = \sum_{v=0}^k (-1)^v x(iT - vT)$  - конечная разность к -

го порядка. Пусть дифференциальное уравнение системы имеет вид

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{(n-1)} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} + \dots + a_n x(t) = \\ = b_0 \frac{d^m f(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{(m-1)} f(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_m f(t). \end{aligned}$$

Подставив вместо производных выражения вида (8.44) и учитывая формулу конечных разностей, после преобразований получим

$$\begin{aligned} a_0^* x(iT - nT) + a_1^* x(iT - (n-1)T) + \dots + a_n^* x(iT) = \\ = T^{n-m} (b_0^* f(iT - mT) + \dots + b_m^* f(iT)). \end{aligned} \quad (8.45)$$

Это и есть уравнение системы в конечных разностях. В этом уравнении  $a_k^* = f(a_0, \dots, a_n, T)$ ,  $b_j^* = f(b_0, \dots, b_m, T)$ . Разностное уравнение даст возможность получить рекуррентную формулу для вычисления  $i$  - го значения выходной величины по ее прошлым значениям и значениям входной величины:



$$x(iT) = \frac{1}{a_n^*} \left\{ - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^* x(iT - (n-j)T) + T^{n-m} \sum_{j=0}^m b_j^* f(iT - (m-j)T) \right\}. \quad (8.46)$$

Рекуррентное выражение легко программируется для вычислений на ЦВМ. Недостатком такой математической модели является то, что начальное значение выходной величины не равно нулю:  $x(0) = \frac{T^{n-m} b_m^* f(0)}{a_n^*}$ . При малых зна-

чениях периода дискретизации эта ошибка невелика и ею можно пренебречь. С увеличением числа тактов вычислений ошибка дискретной модели непрерывной системы быстро уменьшается. Начальную ошибку можно исключить ее вычитанием из правой части (8.46) при  $i=0$ .

Применив Z-преобразование к (8.45) и учитывая теорему запаздывания, получим передаточную Z-функцию непрерывной системы

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{X(z)}{F(z)} = \frac{T^{n-m} (b_0^* z^{-m} + b_1^* z^{-(m-1)} + \dots + b_m^*)}{a_0^* z^{-n} + a_1^* z^{-(n-1)} + \dots + a_n^*} = \\ &= \frac{T^{n-m} z^{n-m} (b_m^* z^m + b_{m-1}^* z^{m-1} + \dots + b_0^*)}{a_n^* z^n + a_{n-1}^* z^{n-1} + \dots + a_0^*}. \end{aligned} \quad (8.47)$$

Отсюда следует, что, зная передаточную функцию дискретной системы в аппарате Z-изображений, легко получить моделирующее ее разностное уравнение. Важным обстоятельством является то, что при имитационном моделировании операцию преобразования дифференциального уравнения в разностное можно применить отдельно к каждому элементу непрерывной части системы и полученные уравнения включить в общую систему разностных уравнений, моделирующую дискретно-непрерывную САУ.

Пример. Передаточная функция элемента непрерывной части системы имеет вид

$$W(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1}.$$

Требуется получить соответствующее разностное уравнение. При  $T=0.5$  и  $\zeta=0.3$  переходная функция непрерывного элемента имеет вид, показанный на рис.8.12.

При заданных значениях параметров путем описанных выше преобразований получим разностное уравнение для  $T=0.1$  :

$$0.29x(iT) - 0.53x(iT - T) + 0.25x(iT - 2T) = T^2 f(iT).$$

Отсюда для рекуррентного выражения можно записать

$$x(iT) = -0.862x(iT - 2T) + 1.826x(iT - T) + \frac{T^2}{0.29} f(iT).$$

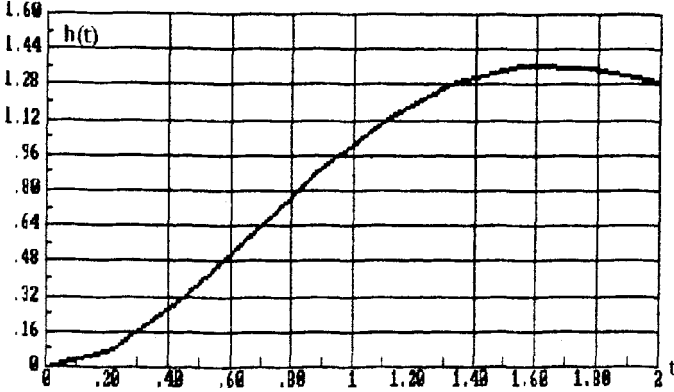


Рис.8.12. Переходная функция непрерывного элемента

Производя вычисления по полученной рекуррентной формуле с учетом вычитания начальной ошибки при  $i=0$ , получим для  $f(t)=1(t)$  переходную функцию, показанную на рис.8.13. Сопоставляя ординаты процессов, приведенных на рис.8.12 и 8.13 в точках квантования по времени, легко убедиться, что уже после пятого шага вычислений отличие дискретного процесса от точного не превышает 5%. Совершенно аналогичный результат получим, если для построения переходного процесса использовать передаточную функцию вида (8.47), предварительно умноженную на  $z^{-1}$  для обеспечения выполнения условия  $x(0)=0$ .

Допустим, что каким-либо способом получена передаточная функция вычислительной машины и требуется получить для программирования соответствующее разностное уравнение:

$$W(z) = \frac{X(z)}{F(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{d_0 z^n + d_1 z^{n-1} + \dots + d_n}. \quad (8.48)$$

Разделим числитель и знаменатель в (8.48) на  $d_0 z^n$ . Получим

$$W(z) = \frac{X(z)}{F(z)} = \frac{b_0^* z^{m-n} + b_1^* z^{m-n-1} + \dots + b_m^* z^{-n}}{1 + d_1^* z^{-1} + d_2^* z^{-2} + \dots + d_n^* z^{-n}}.$$

В этом выражении  $b_i^* = \frac{b_i}{d_0}$ ,  $d_i^* = \frac{d_i}{d_0}$ .

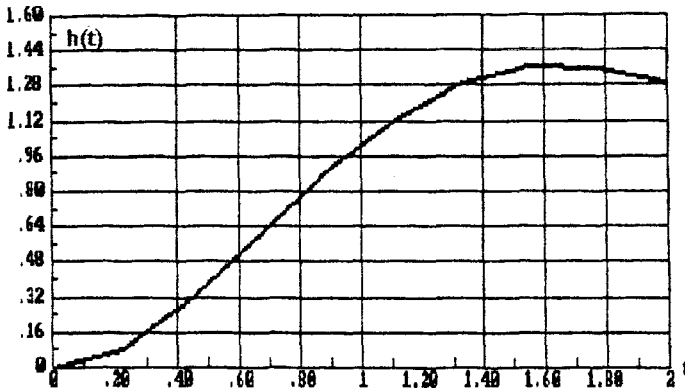


Рис.8.13. Переходная функция непрерывного элемента, вычисленная по разностному уравнению

Из полученного следует

$$(1 + d_1^* z^{-1} + d_2^* z^{-2} + \dots + d_n^* z^{-n})X(z) = (b_0^* z^m + \dots + b_m^* z^{-n})F(z).$$

Переходя к оригиналам, с учетом теоремы запаздывания получим

$$x(iT) = - \sum_{j=1}^n d_j^* x(iT - jT) + \sum_{j=0}^m b_j^* f(iT + mT - (n-j)T). \quad (8.49)$$

Это и есть рекуррентная формула для вычисления дискретных значений выходной величины.

Очень часто дискретно – непрерывная система задана в виде структурной схемы и желательно получить разностные уравнения непрерывных динамических звеньев непосредственно по их передаточным функциям. Для этой цели распространение нашли методы подстановки, связанные с заменой  $s = f(z)$ . При этом должны выполняться следующие требования:

1) если непрерывная передаточная функция  $W(s)$  соответствует устойчивой системе, то и полученная передаточная функция  $W(z)$  должна определять устойчивую систему;

2) способ должен допускать возможность отдельного применения к звеньям структурной схемы;

3) для постоянных сигналов коэффициент усиления дискретной цепи должен соответствовать тем же значениям коэффициента усиления непрерывной цепи.

Перечисленным требованиям наиболее полно удовлетворяет подстановка Тастина

$$s = \frac{2z-1}{Tz+1}. \quad (8.50)$$

Подстановка Тастина дает хорошие результаты при  $T \ll T_i$ , где  $T_i$  — основная постоянная времени непрерывной системы. В некоторых изданиях рекомендуют выбирать  $T \leq T_i/15$ . Этим требованиям не всегда удается удовлетворить и в таких случаях можно использовать модифицированную подстановку Тастина

$$s = \frac{w}{\operatorname{tg} \frac{wT}{2}} \frac{z-1}{z+1}. \quad (8.51)$$

При неизменном значении периода дискретизации удовлетворительное соответствие динамики непрерывной системы с ее дискретной моделью иногда можно получить подбором параметра Тастина  $w$ . Полученная подстановкой  $Z$  — передаточная функция описанным выше способом преобразуется в рекуррентную формулу.

Для получения дискретной модели непрерывной системы можно использовать метод подбора корня, который заключается в выполнении следующих операций:

- 1) определение нулей и полюсов передаточной функции непрерывной системы;
- 2) отображение нулей и полюсов  $s$  — плоскости в  $z$  — плоскости с использованием соотношений

$$z_{\text{полюс}} = e^{s_{\text{полюс}}T}; \quad z_{\text{нуль}} = e^{s_{\text{нуль}}T}.$$

- 3) образование полиномов  $Z$  — передаточной функции с полюсами и нулями, определенными в п.2;
- 4) определение конечного значения реакции непрерывной системы на единичное ступенчатое воздействие;
- 5) определение конечного значения реакции дискретной системы на единичное ступенчатое воздействие;
- 6) подбор конечного значения дискретной системы в соответствии с конечным значением непрерывной системы введением постоянной в передаточную функцию, образованную в п.3;
- 7) добавление нулей в передаточную функцию дискретной системы до получения  $m = n - 1$ ;
- 8) определение моделирующего разностного уравнения.

Для использования рассмотренного способа непрерывная система должна удовлетворять следующим требованиям:

- 1) быть асимптотически устойчивой и удовлетворять теореме о конечном значении;
- 2) конечное значение не должно равняться нулю.

Пример. Методом подбора корня получить разностное уравнение для моделирования на ЦВМ непрерывной системы, имеющей передаточную функцию

$$W(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{0.25s^2 + 0.3s + 1}$$

Параметры передаточной функции те же, что и в предыдущем примере.

Нулей передаточная функция не имеет, а полюсы комплексно - сопряженные и равные  $\alpha \pm j\beta$ , где  $\alpha = -0.6$ ,  $\beta = 1.908$ . Передаточную функцию моделирующей дискретной системы запишем в виде

$$W(z) = \frac{X(z)}{F(z)} = \frac{1}{0.25(z - e^{(\alpha + j\beta)T})(z - e^{(\alpha - j\beta)T})}$$

После преобразований и умножения на пока неизвестный коэффициент  $k$  получим

$$W(z) = \frac{4k}{z^2 - 2e^{\alpha T} \cos \beta T z + e^{2\alpha T}}$$

Конечное значение реакции непрерывной системы на единичное ступенчатое воздействие будет

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sW(s) \frac{1}{s} = 1$$

Конечное значение реакции дискретной системы на то же воздействие определится как

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} W(z) \frac{z}{z-1} = \frac{4k}{1 - 2e^{\alpha T} \cos \beta T + e^{2\alpha T}}$$

Для того чтобы конечные значения реакций непрерывной и дискретной систем были равны, коэффициент  $k$  должен быть равен

$$k = \frac{1 - 2e^{\alpha T} \cos \beta T + e^{2\alpha T}}{4} = 0.009393$$

Подставив коэффициент усиления, а также значения  $\alpha$  и  $\beta$  и дополнив передаточную функцию дискретной системы одним нулем, получим

$$W(z) = \frac{0.037572z}{z^2 - 1.849z + 0.887}$$

По этой передаточной функции можно получить моделирующее разностное уравнение и рекуррентную формулу, по которой и рассчитан переходный процесс, показанный на рис. 8.14.

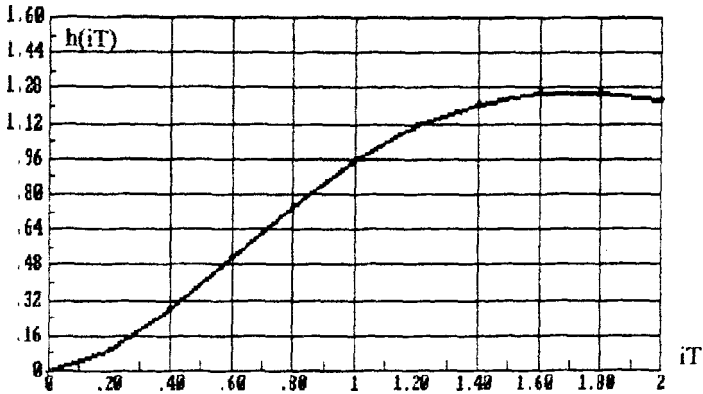


Рис.8.14. Переходный процесс, полученный при использовании метода подбора корня

Полученная переходная функция с достаточно высокой точностью соответствует переходной функции исходной непрерывной системы.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Араманович И.Г., Луиц Г.Л., Эльсгольц Э.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1965. 390с.
2. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1975. 768с.
3. Бесекерский В.А. и др. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1978. 510с.
4. Гусев А.Н., Вьюжанин В.А., Закаблукровский В.Д. Основы теории автоматического управления. Самара: Самар. аэрокосм.ун – т, 1996. 110с.
5. Д.Сю, Мейер А. Современная теория автоматического управления и ее применение. М.: Машиностроение, 1972. 552с.
6. Джон М. Смит. Математическое и цифровое моделирование для инженеров и исследователей. М.: Машиностроение, 1980. 272с.
7. Zubov В.И. Методы Ляпунова и их примененис. Л.: Изд-во ЛГУ, 1972.

- 8.Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование. М.: Машиностроение, 1978. 736с.
- 9.Кузин Л.Т. Расчет и проектирование дискретных систем управления. М.: Гос.науч. – техн. изд – во машиностроительной лит – ры, 1962. 672с.
- 10.Метод гармонической линеаризации в проектировании нелинейных систем автоматического управления/ Под ред. Толчеева Ю.И. М.: Машиностроение, 1970. 567с.
- 11.Попов Е.П. Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах. М.: Главная редакция физико – математической литературы, 1973. 584с.
- 12.Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968. 464с.
- 13.Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1970. 304с.
- 14.Солодовников В.В.,Плотников В.Н.,Яковлев А.В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования. М.: Машиностроение, 1985. 536с.
- 15.Теория автоматического регулирования. Книга 1. Математическое описание, анализ устойчивости и качества систем автоматического регулирования/ Под ред. Солодовникова В.В. М.: Машиностроение, 1967. 768с.
- 16.Теория автоматического регулирования. Книга 2. Анализ и синтез линейных непрерывных и дискретных систем автоматического регулирования/ Под ред. Солодовникова В.В. М.: Машиностроение, 1967. 680с.
- 17.Юревич Е.И. Теория автоматического управления. Л.: Энергия, 1969. 375с.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

## Приложение 1

ТАБЛИЦА ИЗОБРАЖЕНИЙ

№	$f(t)$	$F(s)$	$F(z)$
1	1	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
2	$t$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
3	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$
4	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-d}$ ; $d = e^{-aT}$
5	$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tzd}{(z-d)^2}$
6	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{(1-d)z}{(z-1)(z-d)}$
7	$e^{-at}(1-at)$	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$\frac{z^2 - zd(1+aT)}{(z-d)^2}$
8	$1 - e^{-at}(1+at)$	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$\frac{z - zd(1-aT) - z^2}{z-1 (z-d)^2}$
9	$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{z(d-c)}{(z-d)(z-c)}$ ; $d = e^{-aT}$ ; $c = e^{-bT}$
10	$e^{-at} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(s+a)^2 + \beta^2}$	$\frac{zd \sin \beta T}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2}$
11	$e^{-at} \cos \beta t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \beta^2}$	$\frac{z(z-d \cos \beta T)}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2}$



## КОЭФФИЦИЕНТЫ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

## 1. Релейные характеристики

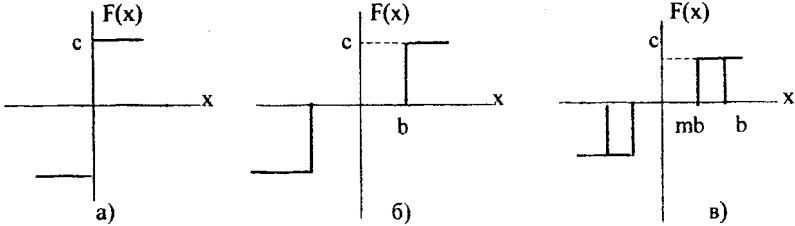


Рис.П1. Релейные характеристики

а) идеальная релейная характеристика

$$q(A) = \frac{4c}{\pi A}; \quad q_1(A) = 0;$$

$$q(A, x^0) = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{x^0}{A}\right)^2}; \quad q_1(A, x^0) = 0; \quad k_n = \frac{2c}{\pi A_c}$$

б) релейная характеристика с зоной нечувствительности

$$q(A) = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2}; \quad q_1(A) = 0;$$

$$A \geq b.$$

$$q(A, x^0) = \frac{2c}{\pi A} \left( \sqrt{1 - \left(\frac{b+x^0}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{b-x^0}{A}\right)^2} \right); \quad q_1(A, x^0) = 0;$$

$$A \geq b + |x^0|; \quad k_n = \frac{2c}{\pi \sqrt{A_c^2 - b^2}}$$

в) релейная характеристика общего вида

$$q(A) = \frac{2c}{\pi A} \left( \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{mb}{A}\right)^2} \right);$$

$$A \geq b;$$

$$q_1(A) = -\frac{2cb}{\pi A^2}(1-m);$$

$$q(A, x^0) = \frac{c}{\pi A} \left( \sqrt{1 - \left(\frac{b+x^0}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{b-x^0}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{mb+x^0}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{mb-x^0}{A}\right)^2} \right); \quad q_1(A, x^0) = -\frac{2cb}{\pi A^2}(1-m);$$

$$A \geq b + |x^0|.$$

2. Характеристика с ограниченным линейным участком

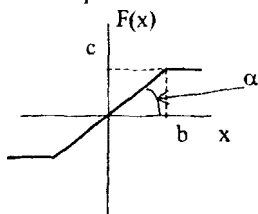


Рис. П2

$$q(A) = \frac{2k}{\pi} \left( \arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2} \right); \quad q_1(A) = 0;$$

$$A \geq b; \quad k = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$q(A, x^0) = \frac{k}{\pi} \left( \arcsin \frac{b-x^0}{A} + \arcsin \frac{b+x^0}{A} + \frac{b-x^0}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{b-x^0}{A}\right)^2} + \frac{b+x^0}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{b+x^0}{A}\right)^2} \right); \quad A \geq b + |x^0|; \quad q_1(A, x^0) = 0.$$

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Основные понятия и задачи теории автоматического управления.....	3
I. Математическое описание САУ и их характеристики.....	7
1.1. Математические модели САУ.....	7
1.2. Передаточные функции САУ.....	9
1.3. Динамические характеристики САУ.....	13
1.3.1. Временные характеристики САУ.....	13
1.3.2. Частотные характеристики САУ.....	17
1.3.3. Логарифмические частотные характеристики САУ.....	19
2. Типовые динамические звенья и их характеристики.....	22
2.1. Динамические звенья САУ.....	22
2.2. Соединения динамических звеньев.....	23
2.3. Характеристики типовых динамических звеньев.....	26
3. Устойчивость систем автоматического управления.....	38
3.1. Основные понятия теории устойчивости.....	38
3.2. Исследование устойчивости по уравнениям первого приближения.....	41
3.3. Алгебраические критерии устойчивости.....	43
3.3.1. Необходимое условие устойчивости.....	43
3.3.2. Критерий устойчивости Гурвица.....	43
3.3.3. Критерий устойчивости Рауса.....	46
3.4. Частотные критерии устойчивости.....	47
3.4.1. Принцип аргумента.....	47
3.4.2. Критерий устойчивости Михайлова.....	48
3.4.3. Критерий устойчивости Найквиста.....	51
3.4.4. Запасы устойчивости.....	54
3.4.5. Оценка устойчивости по ЛЧХ.....	56
3.5. Выделение областей устойчивости.....	60
3.5.1. Построение области устойчивости по алгебраическим критериям.....	61
3.5.2. Д – разбиение в плоскости одного параметра.....	63
3.5.3. Д – разбиение в плоскости двух параметров.....	64
4. Анализ качества линейных непрерывных САУ.....	68
4.1. Показатели качества САУ.....	68
4.2. Методы построения переходной функции.....	69
4.3. Коэффициенты ошибок.....	73
4.4. Интегральные оценки качества.....	74
5. Синтез линейных непрерывных САУ.....	77
5.1. Задача синтеза и способы коррекции.....	77
5.2. Синтез САУ методом ЛЧХ.....	80
5.3. Особенности синтеза корректирующих обратных связей.....	84

6. Линейные стационарные системы автоматического управления при случайных воздействиях.....	89
6.1. Случайные функции и их характеристики.....	89
6.2. Связь между корреляционными функциями и спектральными плотностями величин на входе и выходе линейной динамической системы.....	92
6.3. Анализ динамической точности САУ.....	93
6.4. Формирование сигнала с заданной спектральной плотностью.....	95
6.5. Синтез оптимальных передаточных функций САУ при случайных воздействиях.....	97
7. Нелинейные системы автоматического управления.....	101
7.1. Определение и особенности нелинейных систем.....	101
7.2. Метод фазовых портретов.....	102
7.3. Метод гармонической линеаризации.....	109
7.4. Применение метода гармонической линеаризации к исследованию вибрационной помехоустойчивости систем управления ЛА.....	114
7.5. Исследование устойчивости нелинейных систем.....	120
7.5.1. Второй метод Ляпунова.....	120
7.5.2. Критерий абсолютной устойчивости В.М.Попова.....	124
8. Дискретные системы автоматического управления.....	130
8.1. Определение дискретной САУ.....	130
8.2. Основы $Z$ – преобразования.....	132
8.3. Передаточные функции дискретных САУ.....	133
8.4. Исследование устойчивости дискретных САУ.....	136
8.5. Анализ качества дискретных САУ.....	139
8.6. Синтез дискретных САУ.....	141
8.6.1. Условие грубости дискретной системы.....	141
8.6.2. Методы синтеза дискретных САУ.....	144
8.7. Операционные методы цифрового моделирования дискретно – непрерывных систем.....	150
Библиографический список.....	157
Приложения.....	159

Учебное издание

*Гусев Александр Николаевич  
Ишков Сергей Алексеевич*

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ  
АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Учебное пособие

Редактор Т. К. К р е т и н и н а

Подписано в печать 12.04.2005 г. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 9,5. Усл. кр.-отг. 9,7. Уч.-изд.л. 10,25.

Тираж 200 экз. Заказ 36 . Арт. С-5/2005.

Самарский государственный  
аэрокосмический университет.  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

---

РИО Самарского государственного  
аэрокосмического университета.  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.