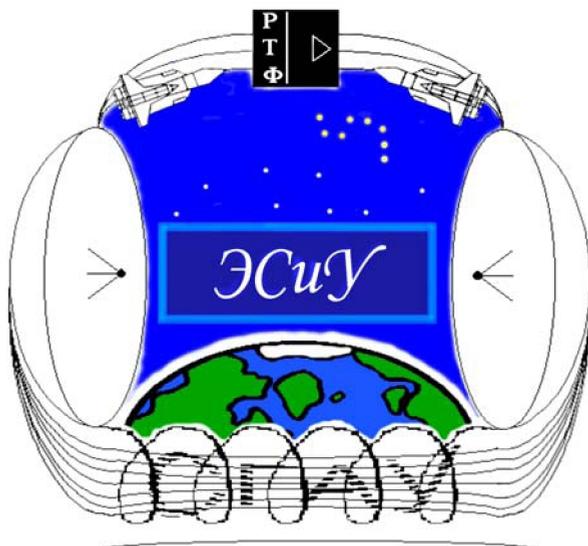


ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

*В.А. КОЛПАКОВ, А.И. КОЛПАКОВ, С.В. КРИЧЕВСКИЙ*

# ОСНОВЫ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА



САМАРА 2010

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

*В.А. КОЛПАКОВ, А.И. КОЛПАКОВ, С.В. КРИЧЕВСКИЙ*

## ОСНОВЫ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия для заочной формы обучения*

САМАРА  
Издательство СГАУ  
2010

УДК СГАУ: 539.2 (075)

ББК 22.3

К 615

Рецензент канд. техн. наук, доц. В. И. Чепурнов

**Колтаков В.А.**

К 615 **Основы физики твердого тела: учеб. пособие для заочной формы обучения / В.А. Колтаков, А.И. Колтаков, С.В. Кричевский.** – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2010. – 96 с.: ил.

**ISBN 978-5-7883-0764-0**

Учебное пособие соответствует программе специальности 210201 «Проектирование и технология радиоэлектронных средств». Содержит краткую теорию по физическим основам полупроводников, задачи с примерами подробного решения по каждому разделу и варианты контрольной работы.

Предназначено для студентов заочной формы обучения, изучающих курс «Основы физики твердого тела».

УДК СГАУ: 539.2 (075)

ББК 22.3

**ISBN 978-5-7883-0764-0**

© Самарский государственный  
аэрокосмический университет, 2010

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
1 ЭЛЕКТРОННЫЕ СВОЙСТВА ТВЕРДОГО ТЕЛА.....	5
1.1 Электроны в периодическом потенциальном поле.....	5
1.2 Энергетические зонные диаграммы и носители заряда в полупроводниках.....	6
1.3 Собственные и примесные полупроводники.....	11
1.4 Статистика Ферми-Дирака.....	17
1.5 Определение концентрации свободных носителей заряда в полупроводнике.....	19
1.6 Закон действующих масс.....	21
1.7 Уровень Ферми в примесных полупроводниках.....	22
1.8 Температуры истощения примесных и ионизация матричных атомов полупроводника.....	24
2 КИНЕТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ.....	27
2.1 Электропроводность полупроводников.....	27
2.2 Рекомбинация носителей заряда в полупроводниках.....	34
2.3 Движение носителей заряда в полупроводниках.....	40
2.4 Соотношения Эйнштейна.....	42
2.5 Диффузионная длина носителей заряда.....	43
2.6 Поверхностные явления в полупроводниках.....	44
3 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.....	49
3.1 Квантовая физика.....	49
3.2 Физика полупроводников.....	54
4 Упражнения для самопроверки.....	68
5 ВАРИАНТЫ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ.....	75
5.1 Вопросы к теоретической части домашнего задания.....	75
5.2 Варианты задач домашнего задания.....	76

## ВВЕДЕНИЕ

Процессы и явления, протекающие на атомно-молекулярном уровне, являются основой для генерации или преобразования функций, описывающих информационные сигналы в радиоэлектронике. В связи с этим необходимо изучать глубокую обратную связь между средами, являющимися материальными носителями информационных электрических сигналов, и достижениями в области физики твердого тела, физики полупроводников и новых технологий.

В этих условиях важнейшей задачей является всемерное повышение качества подготовки специалистов в области физики твердого тела путем изучения характерных особенностей строения кристалла и движения свободных носителей заряда в твердом теле в условиях активного воздействия на них электромагнитных полей. Исследования в этой области необходимы для разработки нового поколения сверхминиатюрных супербыстродействующих систем нанoeлектроники, т.к. по мере приближения размеров твердотельных структур к нанометровой области ( $1\text{ нм}=0,001\text{ мкм}=10^{-9}\text{ м}$ ) все больше проявляются квантовые свойства электрона, формируемые особенностями строения решетки кристалла. Преобладающими в этом случае становятся волновые процессы, характерные для таких квантовых частиц твердого тела, как электрон, фонон, фотон, широко используемых в квантовой электронике. С одной стороны, это приводит к нарушению работоспособности классических транзисторов, использующих закономерности поведения электрона как классической частицы, а с другой – открывает перспективы создания новых уникальных переключающих, запоминающих, усиливающих элементов для информационных систем. Поэтому изучение физических процессов и явлений в твердом теле становится крайне необходимым при разработке и эксплуатации приборов и систем нанoeлектроники, т.к. уже сегодня техника вплотную приблизилась к теоретической возможности запоминать и передавать 1 бит информации (0 и 1) с помощью одного электрона, локализация которого в пространстве может быть задана одним атомом.

# 1 ЭЛЕКТРОННЫЕ СВОЙСТВА ТВЕРДОГО ТЕЛА

## 1.1 Электроны в периодическом потенциальном поле

Представим себе, что атомы располагаются относительно друг друга на столь большом расстоянии, что взаимодействия между ними можно пренебречь. Тогда энергетическую схему таких атомов можно представить в следующем виде (рис. 1.1 а).

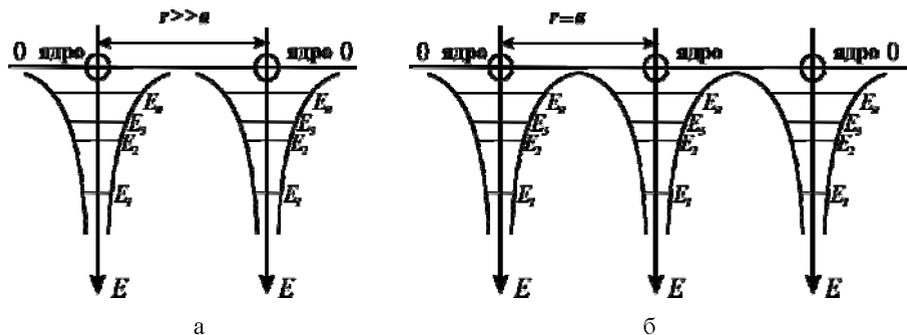


Рис. 1.1. Энергетические схемы атомов:  
а – удаленных относительно друг друга на расстояние  $r \gg a$ ,  
б – расположенных на расстоянии  $r = a$

Если потенциальную энергию взаимодействия электрона с ядром обозначить через  $E(r)$ , то каждый отдельный атом будет находиться в энергетической яме, ограниченной потенциальной кривой. Электрон в этом случае обладает отрицательной энергией и может находиться на одном из уровней  $E_1, E_2, \dots, E_n$ . Возникновение потенциального барьера шириной  $\delta$  препятствует свободному переходу электронов от одного атома к другому.

По мере сближения атомов взаимодействие между ними возрастает и на расстояниях, равных параметру решетки  $a$ , устанавливается равновесие между силами притяжения и силами отталкивания (рис. 1.1 б). Это приводит к частичному перекрытию потенциальных кривых и перемещению результирующей кривой на энергетический уровень, проходящий уже ниже нулевого уровня. Из этого следует, что сближение атомов приводит к уменьшению не только ширины, но и высоты потенциального барьера. При этом его высота оказывается даже несколько ниже первоначального положения энергетического уровня валентных электронов  $E_n$ , которые получают возможность практически беспрепятственно переходить от одного атома к другому, т.е. получают возможность формировать электрический ток в кристалле.

Пусть потенциал решетки имеет постоянную величину, тогда с точки зрения квантово-механического рассмотрения процессов, протекающих в твердом теле, движение электрона описывается уравнением плоской волны:

$$\psi(r) = c \exp(ikr) = c \exp[i(r_x x + r_y y + r_z z)], \quad (1.1)$$

где  $\psi$  – волновая функция;  $c$  – постоянный коэффициент;  $k$  – волновой вектор;  $r$  – радиус-вектор, а  $r_x = n_1 2\pi / L$ ;  $r_y = n_2 2\pi / L$ ;  $r_z = n_3 2\pi / L$  – проекция радиуса-вектора на оси  $x, y, z$ , соответственно;  $L$  – линейный размер кристаллической решетки. Следует отметить, что физический смысл имеет не сама функция  $\psi$ , а ее произведение на комплексно-сопряженную величину  $\psi^*$ . Величина  $W = \psi \psi^*$  определяет вероятность обнаружения электрона в данной точке пространства.

Электроны, в силу своей корпускулярно-волновой природы, не имеют одновременно определенных координат ( $x, y, z$ ) и составляющих импульсов ( $p_x, p_y, p_z$ ) в направлении этих координат. Поэтому согласно принципу неопределенности Гейзенберга, их состояние не может быть определено одновременным заданием этих параметров как состояние классической частицы, подчиняющейся соотношениям неопределенности

$$\Delta x \Delta p_x \geq h; \quad \Delta y \Delta p_y \geq h; \quad \Delta z \Delta p_z \geq h. \quad (1.2)$$

Здесь  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  – неопределенности в отношении координат;  $\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z$  – неопределенности в отношении составляющих импульса частицы;  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  Дж · с – постоянная Планка. Из этого следует, что энергетические уровни  $E_n$  при взаимодействии атомов должны расщепляться в зоны энергетических уровней, в области которых имеют право возникать электроны валентной орбитали каждого атома.

## 1.2 Энергетические зонные диаграммы и носители заряда в полупроводниках

При сближении атомов энергетические уровни  $E_1, E_2$  и  $E_3$  (рис.1.2 а) при  $r=a$  начинают взаимодействовать друг с другом. Дискретные энергетические уровни отдельных атомов расщепляются, образуя зоны уровней (рис.1.2 б).

В результате твердое тело можно представить в виде *зонной диаграммы*, в которой разрешенные для движения электронов энергетические зоны чередуются с запрещенными. Причем каждая разрешенная зона состоит, в свою очередь, из множества дискретных энергетических уровней, расстояния между которыми столь малы, что их расположение в зоне можно считать практически непрерывным.

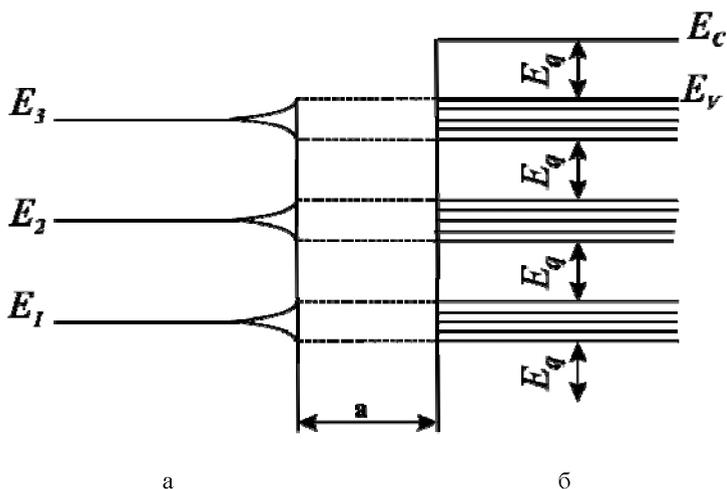


Рис. 1.2. Образование энергетических зон из дискретных энергетических уровней атомов (а) при их сближении на расстояние  $a$  (б)

Физико-химические процессы между атомами осуществляются только через взаимодействия их валентных электронов. Поэтому для расчетов энергетических параметров свободного электрона используют модель, содержащую энергетический уровень и зону валентных электронов, и энергетический уровень и зону, в области которых электрон становится свободным и может перемещаться в пространстве под действием электромагнитных сил. Эту зону принято называть зоной проводимости. Минимальный энергетический уровень в валентной зоне называют потолком валентной зоны и обозначают  $E_v$ , а максимальный энергетический уровень в зоне проводимости называют дном зоны проводимости и обозначают  $E_c$ . Эти энергетические уровни располагаются друг от друга на величину энергии ионизации (работы выхода) электрона. Всякое движение электрона вдоль координатной оси этой зоны запрещено, поэтому ее называют запрещенной зоной и обозначают  $E_g$ . Энергетический уровень  $E_i$  разделяет запрещенную зону на две равные половины.

Таким образом, энергетическую диаграмму отдельного атома можно отобразить в виде двух энергетических уровней (рис.1.3 а), а связанных атомов – в виде двух энергетических зон (1.3 б).

Эти представления о структуре связи атомов в кристалле твердого тела полностью соответствуют физическим свойствам полупроводников и диэлектриков и могут быть описаны диаграммами (рис.1.4 а,б).

При температуре  $T = 0$  К валентная зона всегда полностью заполнена электронами, поэтому в зоне проводимости электроны отсутствуют.

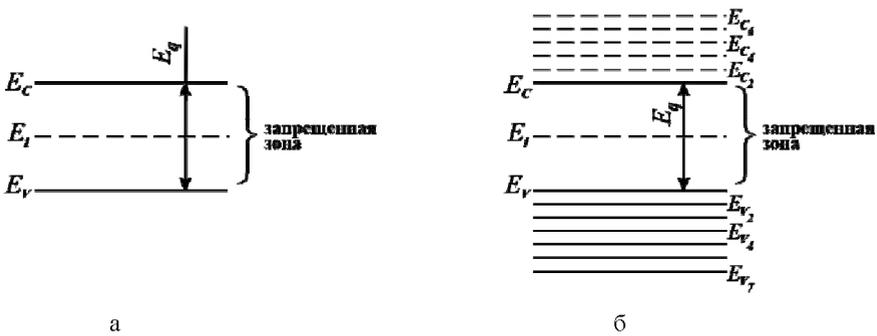


Рис. 1.3. Энергетическая диаграмма: а – отдельного атома; б – связанных атомов в решетке кристалла твердого тела

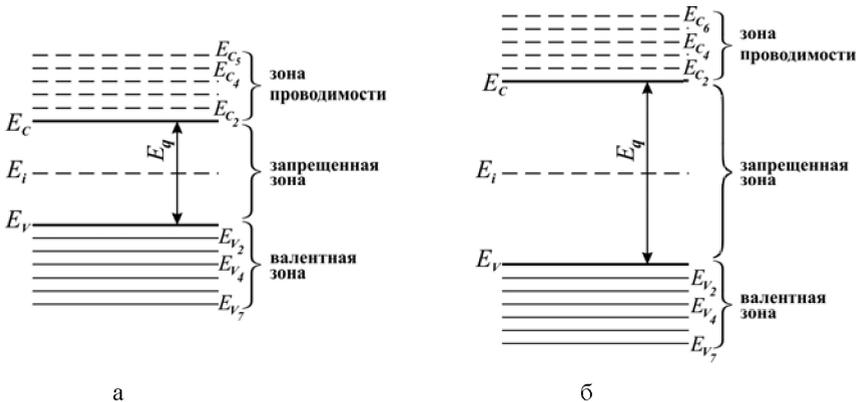


Рис. 1.4. Энергетические зонные диаграммы при температуре  $T = 0$  К: а – полупроводника; б – диэлектрика

При  $T \neq 0$  К атомы валентной зоны могут быть ионизованы, а свободные электроны, получившие энергию равную или больше ширины запрещенной зоны, перебрасываются в зону проводимости и становятся свободными. В случае воздействия на кристалл электрического поля свободные электроны, не прекращая теплового движения, начинают дрейфовать вдоль энергетического уровня зоны проводимости в направлении контактов внешней цепи. Следует отметить, что различие между полупроводниками и диэлектриками состоит лишь в большей ширине *запрещенной зоны* последних (рис. 1.4 а, б).

Металлы по характеру изменения проводимости настолько значительно отличаются от полупроводников и диэлектриков, что для описания этих особенностей потребовалось создание специальных диаграмм (рис. 1.5 а, б):

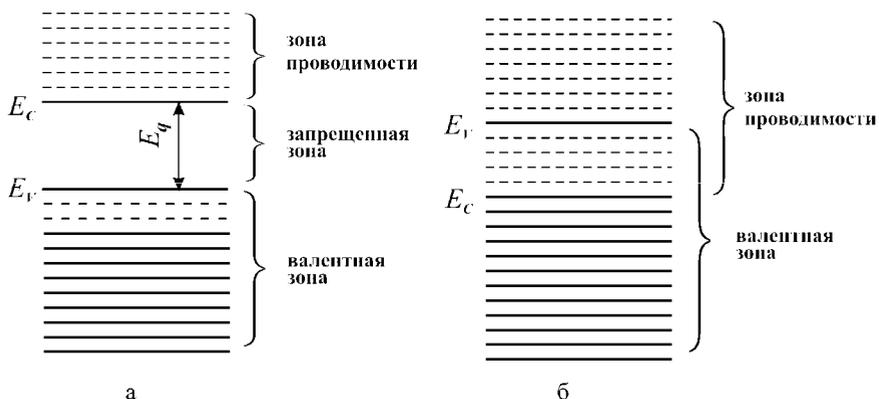


Рис. 1.5. Зонные диаграммы, характеризующие свойства металлов:  
 а – пунктиром обозначены энергетические уровни, не заполненные электронами и при  $T=0$  К; б – в зоне проводимости имеются энергетические уровни, заполненные электронами и при  $T=0$  К

Отличительными особенностями энергетических диаграмм металлов являются или частичное незаполнение энергетических уровней в валентной зоне (а), или перекрытие зон (б). Ширина запрещенной зоны в последнем случае близка к нулю. При подобных свойствах металла даже слабое электрическое поле способно привести электроны в движение вдоль этих уровней, образуя электрический ток в твердом теле.

Большинство полупроводников являются твердыми телами с регулярной кристаллической структурой, т. е. монокристаллами. Их кристаллическая решетка состоит из множества повторяющихся и примыкающих друг к другу элементарных ячеек, имеющих определенные форму и размеры.

Атомы в кристаллической решетке алмазоподобных полупроводников (кремний, германий, арсенид галлия) связаны друг с другом за счет парного объединения валентных электронов соседних атомов, при этом каждый из атомов остается электрически нейтральным. Такая связь называется *ковалентной*. Повышение температуры вызывает колебательное движение атомов кристаллической решетки. В результате ковалентные связи между атомами могут разрываться, что приводит к образованию пары носителей заряда: свободного электрона и незаполненной связи атома, от которого оторвался электрон. Эта незаполненная связь по своим электрическим свойствам подобна свободному положительному заряду, который принято называть дыркой. Перемещение свободного положительного заряда осуществляется за счет того, что незаполненная электроном связь быстро заполняется одним из ионизованных валентных электронов соседнего атома, на месте которого образуется новая дырка. Бесконечное повторение этого процесса создает эффект движущего положительного заряда, величина которого по абсолютному значению равна заряду электрона.

Процесс образования свободных носителей заряда (электронов, дырок) называется *генерацией* носителей заряда (рис. 1.6, переход 1). Если этот процесс происходит под воздействием теплоты, то его называют *термогенерацией*.

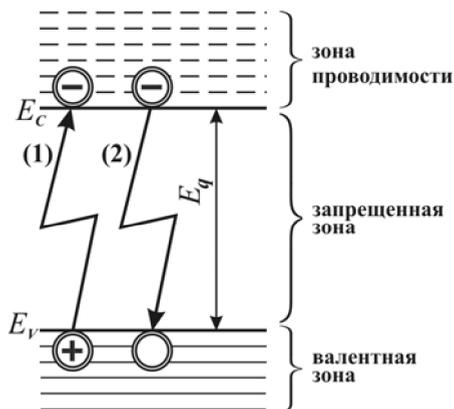


Рис. 1.6. Генерация (ионизация) (1) и рекомбинация (2) электронов в полупроводнике

Электроны и дырки, образовавшиеся в результате генерации, совершают тепловое движение в полупроводниковом кристалле в течение некоторого времени, называемого *временем жизни*. Переход свободного электрона с энергетического уровня  $E_c$  на незаполненную связь дырки уровня  $E_v$  приводит к исчезновению свободных электрона и дырки. Этот процесс называется *рекомбинацией* (рис. 1.6, переход 2). Таким образом, при температуре  $T \neq 0$  К в зоне проводимости постоянно находится некоторое количество свободных электронов, частично заполняющих ее.

Характерной особенностью полупроводника является его способность изменять величину электропроводности под воздействием внешних факторов – температуры, сильного электрического поля, различного типа излучений, внедрения чужеродных атомов в узлы кристаллической решетки и т. д. Перешедшие в зону проводимости электроны занимают преимущественно наиболее низкие энергетические уровни вблизи дна зоны проводимости  $E_c$ .

Свойства электрона в твердом теле и в свободном пространстве не совпадают, поэтому и масса электрона в кристалле  $m_n$  не совпадает с его массой в свободном пространстве  $m_0$ . Величину  $m_n$  называют *эффективной массой* электрона.

С точки зрения физических представлений эффективная масса электрона является квантово-механическим параметром, используемым при расчетах взаимодействий свободных электронов с параметрами кристаллической решетки полупроводника, т.е. эффективная масса характеризует коллективное

воздействие колеблющихся атомных частиц решетки на движущийся свободный электрон.

Аналогичным свойством обладает и дырка, однако в этом случае под эффективной массой понимают условный способ учета коллективного воздействия на дырку всех электронов, находящихся в валентной зоне. Эффективная масса электрона ( $m_n$ ) всегда меньше эффективной массы дырки ( $m_p$ ), но обе массы всегда меньше массы покоя электрона ( $m_0$ ) в свободном пространстве.

### 1.3 Собственные и примесные полупроводники

Беспримесный, химически чистый полупроводник называется *собственным*. При температуре  $T = 0$  К в собственном полупроводнике нет свободных носителей заряда и его электрическая проводимость  $\sigma = 0$  (рис. 1.7 а). С точки зрения теории энергетических диаграмм это состояние характеризуется диаграммами, представленными на рис. 1.9 а.

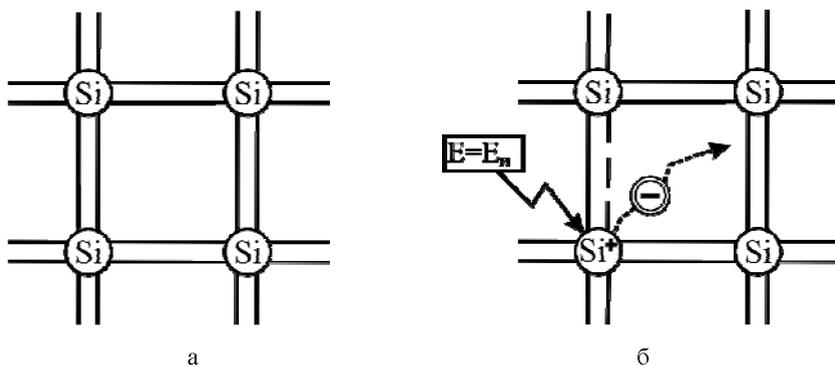


Рис. 1.7. Механизм образования в кристалле полупроводника положительного заряда – дырки: а – при  $T=0$  К; б – при  $T \neq 0$  К

Поглощение собственным полупроводником энергии равной или больше энергии связи валентного электрона с атомом приводит к разрушению их связи и образованию двух типов носителей заряда: свободный электрон в междоузлии и дырка в узле кристаллической решетки (рис. 1.7 б). Существует три механизма возникновения свободных электронов:

1. При отсутствии внешнего электрического поля и выполнении равенства  $E = E_{и}$ , где  $E_{и}$  – энергия ионизации валентных электронов, связь валентного электрона с атомом разрывается.

Однако у свободного электрона в этом случае отсутствует кинетическая энергия и он не покидает потенциального поля атома, которое притягивает его, и в конечном итоге через некоторое время осуществляется рекомби-

нация. Этот механизм генерирования свободных электронов не участвует в образовании долгоживущих электронно-дырочных пар, а следовательно, не участвует и в организации электрического тока.

2. При отсутствии внешнего электрического поля и выполнении неравенства  $E > E_{и}$  свободный электрон получает некоторое количество кинетической энергии и покидает зону действия потенциального поля атома. Включение свободного электрона в тепловое движение практически полностью устраняет возможность его рекомбинации с первичным ионом и приводит к образованию электронно-дырочной пары. Свободный электрон включается в тепловое движение и осуществляет процесс рекомбинации с другими ионами или в конечном итоге встречается со своим ионом и рекомбинирует с ним. Этот механизм также не образует проводимости, т.к. не формирует направленный поток свободных носителей заряда.

3. При наличии внешнего электрического поля и выполнении условия  $E \geq E_{и}$  происходит разделение зарядов за счет дрейфа свободного электрона против поля, а дырки – по полю. При этом оба свободных носителя заряда одновременно осуществляют хаотичное тепловое движение. Этот механизм приводит к разделению зарядов и формированию направленного потока электронно-дырочных пар, т.е. осуществляет формирование электрического тока в полупроводниках.

При  $T=0$  К собственный полупроводник является идеальным диэлектриком, т.к. при этих условиях все свободные электроны перейдут из зоны проводимости в валентную зону и рекомбинируют с дырками. Отсутствие свободных носителей заряда и делает собственный полупроводник при  $T=0$  К идеальным диэлектриком.

При  $T > 0$  К некоторое количество матричных атомов ионизируются и в кристалле появляются свободные носители заряда. Перешедшие в зону проводимости электроны занимают уровни энергии вблизи дна зоны проводимости  $E_c$ , а дырки вблизи потолка – валентной зоны  $E_v$ .

Если в узлы кристаллической решетки собственного полупроводника внедрить некоторое количество чужеродных атомов, то это приведет к значительному изменению его электрических свойств, например, электропроводности. Такие полупроводники принято называть *примесными*.

Примесь оказывает существенное влияние на проводимость полупроводника, поэтому ее также называют *примесной*.

Пусть в узел кристаллической решетки четырехвалентного полупроводника кремния (Si) (или германия (Ge)) будет внедрен атом большей валентности, например, пятивалентный мышьяк (As). При его взаимодействии с соседними матричными атомами четыре из пяти валентных электронов As вступают в ковалентную связь с четырьмя валентными электронами соседних атомов Si и образуют устойчивую электронную оболочку. Девятый электрон оказывается как бы экранированным от потенциальных полей окружающих атомов, и его связь со своим атомом значительно ослабляется (рис. 1.8).

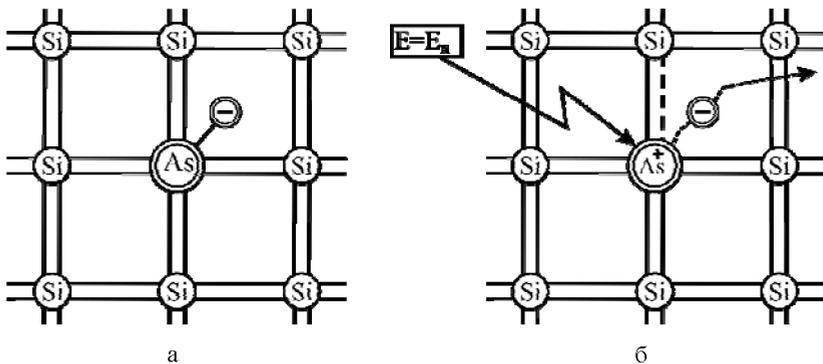


Рис. 1.8. Положение примесного атома (мышьяка) в узле кристаллической решетки Si : а –  $T=0$  К; б –  $T \neq 0$  К

Связь пятого электрона со своим атомом в этом случае настолько слаба, что уже при  $77$  К он отрывается от атома As и переходит в свободное состояние, а атом As приобретает положительный заряд. Однако дырки при этом не образуются, т.к. энергетический уровень атома мышьяка  $E_d$  находится в запрещенной зоне (рис. 1.9).

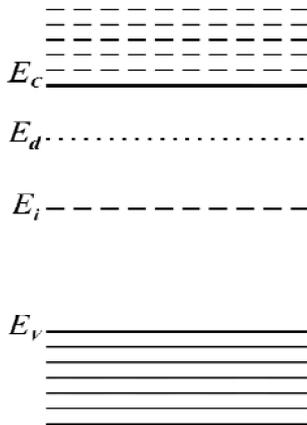


Рис. 1.9. Энергетическая диаграмма полупроводника, легированного атомами примеси донорного типа

Атомы примесей, способные отдать один из своих валентных электронов в зону проводимости, становясь при этом положительным ионом, называются *донорными*. Полупроводники, в узлы кристаллической решетки которых введены атомы донорной примеси, называются *электронными*, или *n*-типа проводимости. Если количество свободных электронов в полупроводнике *n*-типа превышает концентрацию собственных носителей заряда *n* и *p* на

порядок и более, то примесные электроны становятся *основными* носителями заряда полупроводника, а дырки – *неосновными*, т.к. получены от ионизации матричных атомов. В соответствии с этим проводимость в полупроводнике *n*-типа называется *электронной*.

Если в узлы кристаллической решетки Si ввести трехвалентный бор (B), то три его валентных электрона вступят во взаимодействие с четырьмя валентными электронами соседних матричных атомов Si, образуя с ними устойчивую ковалентную связь (рис. 1.10). Для образования восьмой электронной оболочки атомам кремния и бора не хватает одного электрона, т.е. возникает свободный энергетический уровень. Поскольку все связи валентных электронов задействованы, то свободный энергетический уровень атома бора также оказывается экранированным от потенциальных полей окружающих атомов и поэтому способен легко захватить из окружающего пространства свободный электрон, например, возникший в результате термогенерации матричных атомов Si. Атом бора становится при этом отрицательно заряженным ионом, энергетический уровень которого находится в запрещенной зоне. В идеальном случае этот механизм устраняет возможность появления в зоне проводимости свободного электрона. Матричный атом, делегировавший этот электрон атому бора, становится нескомпенсированным положительным ионом, т.е. в валентной зоне возникает свободный положительный заряд – дырка (рис. 1.10 б, 1.11).

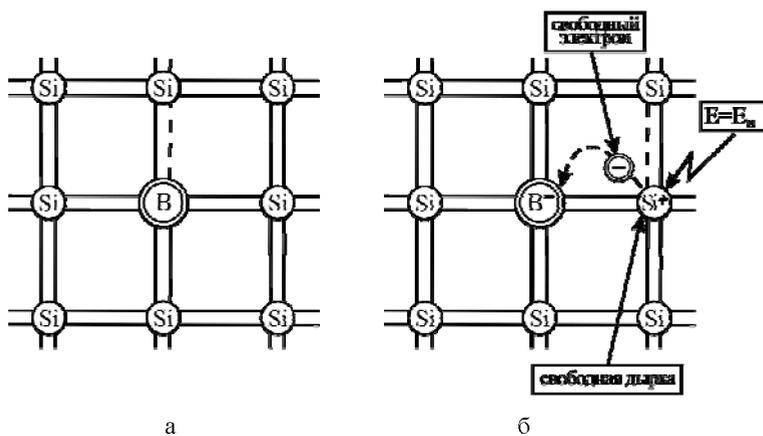


Рис. 1.10. Структура кристалла полупроводника с внедренным в его узел атомом бора

Атомы примеси, способные принимать свободные электроны, становясь при этом отрицательно заряженными ионами, условно называют *акцепторными*. Если в узлы кристаллической решетки собственного полупроводника внедрить некоторое количество атомов примеси акцепторного типа, то такой полупроводник называют *акцепторным* или *p*-типа проводимости.

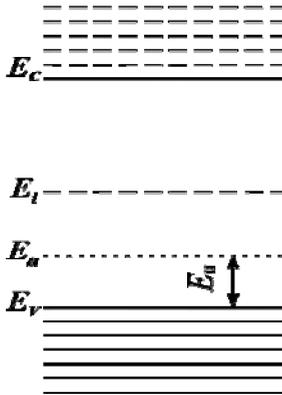


Рис. 1.11. Энергетическая диаграмма акцепторного полупроводника:  
 $E_{и}$  – энергия ионизации дырки

Пусть значительная часть электронов, возникших в результате ионизации собственных атомов, например Si, будет захвачена акцепторами. Тогда если количество дырок в валентной зоне на порядок и более превысит количество свободных электронов  $n_i$  в зоне проводимости, то дырки в валентной зоне становятся *основными* носителями заряда. Проводимость в этом случае называется *дырочной* и практически осуществляется путем переходов дырки (положительного заряда) от одного омического контакта к другому за счет ее взаимодействия с свободными электронами  $n_i$ , полученными, например, при действии в кристалле резонансных механизмов.

В полупроводниках могут одновременно содержаться как донорные, так и акцепторные атомы примеси. Изменением концентраций этих примесей осуществляют регулировку величины проводимости в конкретном полупроводнике или при создании структур полупроводниковых приборов. Такие полупроводники называются *компенсированными*.

Если концентрация атомов примеси в полупроводнике меньше на  $10^2 - 10^4$  по сравнению с числом матричных атомов, то такие полупроводники называются невырожденными. В этом случае потенциальные поля примесных атомов не взаимодействуют друг с другом, и следовательно не образуют дополнительного расщепления энергетических зон, т.е. не образуют дополнительных энергетических уровней.

Если концентрация примесных атомов в полупроводнике превышает эту величину, то среднее расстояние между атомами примеси становится столь малым, что возникает эффективное взаимодействие их потенциальных полей, в результате которого появляется значительное число дополнительных энергетических уровней. При этом эти уровни превращаются в зоны, сливающиеся с зоной проводимости в электронных полупроводниках и с валентной зоной – в дырочных. Это создает для свободных электронов условия, когда они всегда могут найти в окружающем пространстве свободные

энергетические уровни, соответствующие их энергии, и двигаться по ним, переходя от одного к другому, не теряя и не приобретая энергии. Такие полупроводники называют *вырожденными*. Вырождение полупроводника может наступить в следующих случаях: высокой температуры (значение  $kT$  велико), обычных рабочих температур – у полупроводников с малой шириной запрещенной зоны  $E_g$ , высокой степени легирования. *Степень* или *уровень легирования* определяется количеством примесных атомов в единице объема полупроводника. Величина проводимости вырожденных полупроводников близка к металлической, поэтому в рабочем интервале температур концентрация свободных носителей заряда не зависит от температуры.

Отрыв электрона от атома-донора или добавление недостающего электрона к атому-акцептору требует затраты некоторого количества энергии, которую условились называть энергией *ионизации* атомов примеси.

Энергетические уровни примесных атомов, расположенные вблизи  $E_c$  и  $E_v$ , называются *мелкими*, т.к. имеют малую величину энергии ионизации атомов примеси.

Энергетические уровни примесных атомов, расположенные вблизи  $E_i$ , называются *глубокими* и являются идеальными центрами рекомбинации, т.к. именно через них осуществляется переход электронов из зоны проводимости в валентную зону. Следует отметить, что энергетические уровни примесных атомов, расположенных в междоузлиях кристаллической решетки, также располагаются в запрещенной зоне вблизи  $E_i$ , но рекомбинационными центрами не являются, поэтому электрически пассивны.

Некоторые примеси создают в запрещенной зоне полупроводника несколько энергетических уровней и этим делят ее на несколько зон (рис. 1.12, переходы I, II). Это значительно облегчает переход электронов из валентной зоны в зону проводимости. Например, атомы золота в запрещенной зоне кремния создают энергетические уровни  $E_{Au1}=0,35$  эВ и  $E_{Au2}=0,54$  эВ.

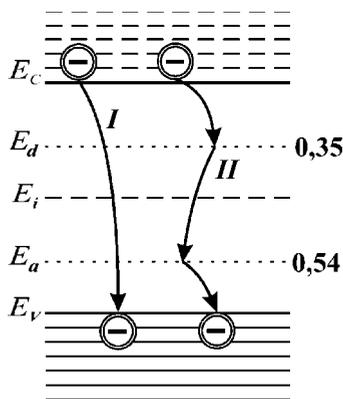


Рис. 1.12. Энергетическая диаграмма кремния: I – переход зона-зона; II – переход по энергетическим уровням атомов Au

Особую роль в любом реальном полупроводнике играет его поверхность. Структурные нарушения кристаллической решетки и наличие адсорбированных атомов создают вблизи поверхности полупроводника дополнительные энергетические уровни, называемые *поверхностными* (рис. 1.13).

Эти уровни могут занимать различное положение на энергетической диаграмме, чаще всего они находятся в пределах запрещенной зоны.



Рис. 1.13. Положение энергетических уровней в области поверхности полупроводника

#### 1.4 Статистика Ферми-Дирака

Пусть при некоторой установившейся фиксированной температуре ( $T = \text{const}$ ) полупроводник находится в состоянии термодинамического равновесия, условием существования которого является равенство скоростей генерации  $V_{\text{ген}}$  и рекомбинации  $V_{\text{рек}}$  свободных носителей заряда.

В единичном объеме полупроводника находится определенное для заданных энергетических условий число свободных носителей заряда, называемое *концентрацией*.

Концентрации электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне обычно значительно меньше числа энергетических состояний, содержащихся в этих зонах. Поэтому средняя плотность заполнения энергетических состояний электронами и дырками  $f$  соответствует неравенству

$$f \ll 1. \quad (1.3)$$

Если это условие выполняется, то полупроводник называется *невырожденным*, а если нет, то *вырожденным* ( $f \gg 1$ ).

В собственном полупроводнике при температуре  $T = 0$  К все энергетические уровни валентной зоны заполнены электронами, а уровни зоны проводимости свободны. С повышением температуры некоторое количество электронов покидает валентную зону и переходит в зону проводимости. Распределение электронов и дырок по энергиям в соответствующих зонах полупроводника описывается *статистикой Ферми – Дирака*. Согласно этой статистике вероятность того, что состояние с энергией  $E$  при температуре  $T$  будет занято электроном (дыркой), определяется функцией распределения Ферми – Дирака:

$$f_n(E, T) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)}, \quad (1.4)$$

где  $E$  – энергия, отсчитанная от произвольно выбранного уровня (обычно от уровня  $E_c$ );  $E_F$  – энергия Ферми, отсчитанная относительно того же уровня;  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/град – постоянная Больцмана.

Вероятность выражается в долях единицы или в процентах. Рассмотрим некоторый энергетический уровень в валентной зоне. Если он занят электроном, то  $f_n = 1$  и вероятность превращается в достоверность. Если же он не занят, то вероятность  $f_n = 0$ . Сумма вероятностей обоих событий «занят», «не занят» равна единице. Но вероятность того, что энергетический уровень в валентной зоне не занят электроном, есть вероятность нахождения на этом уровне дырки  $f_p$ . Таким образом,  $f_p = 1$ , если  $f_n = 0$ . Из этого следует, что сумма этих вероятностей  $f_n + f_p = 1$ . Подставляя в полученное равенство выражение (1.4) и решая его относительно  $f_p$ , получим соотношение

$$f_p(E, T) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_F - E}{kT}\right)}, \quad (1.5)$$

определяющее вероятность того, что рассматриваемый энергетический уровень  $E$  при температуре  $T$  занят дыркой. С формальной точки зрения *энергетический уровень Ферми  $E_F$* , входящий в выражения (1.4) и (1.5), – это уровень энергии, вероятность заполнения которого электроном при любых значениях температуры равна 0,5, или 50 %.

Анализ выражений (1.4) и (1.5) показывает, что при  $T = 0$  К и  $E > E_F$  справедливы и выражения  $f_n = 0$ ,  $f_p = 1$ . В случае же выполнения неравенства  $E < E_F$  функции Ферми-Дирака описываются равенствами  $f_n = 1$ , а  $f_p = 0$ . При температурах  $T \neq 0$  К из (1.4), (1.5) следует, что  $f_n \neq 0$  и  $f_p \neq 0$ . Функции распределения Ферми-Дирака для собственного полупроводника представлены на рис. 1.14. Заштрихованные площади пропорциональны концентрации носителей заряда в зонах.

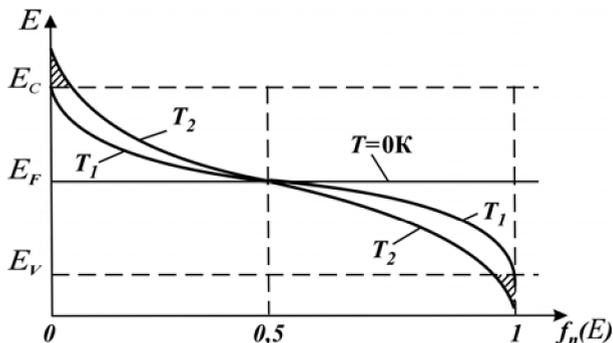


Рис. 1.14. Функции распределения Ферми-Дирака  $f_n(E)$  и  $f_p(E)$  при различных температурах ( $T_2 > T_1$ )

Если разности  $(E - E_F)$  в (1.4) и  $(E_F - E)$  в (1.5) значительно превышают среднюю тепловую энергию системы ( $E \gg E_F$ ), то в этих выражениях можно пренебречь единицей по сравнению с экспонентами. Тогда эти выражения можно переписать в следующем виде:

$$f_p(E, T) = \exp\left(-\frac{E - E_A}{kT}\right); \quad (1.6)$$

$$f_n(E, T) = \exp\left(-\frac{E_F - E}{kT}\right). \quad (1.7)$$

Выражения (1.6), (1.7) описывают статистику Максвелла-Больцмана. Физической основой статистики Максвелла-Больцмана является возможность использования функций  $f_n$  и  $f_p$  только для расчета параметров невырожденных полупроводников.

### 1.5 Определение концентрации свободных носителей заряда в полупроводнике

Рассмотрим некоторый интервал значений энергии  $dE$ , лежащий в зоне проводимости (или валентной зоне). Обозначим число энергетических состояний, соответствующих энергии  $E$ , которые могут быть заняты электронами, через  $N(E)$ . Тогда в интервале  $dE$  будет  $N(E) \cdot dE$  таких состояний. Выразив концентрацию электронов  $dn$ , имеющих энергии в интервале  $dE$ , как произведение  $N(E) \cdot dE$  на  $f_n(E, T)$  и интегрируя по всем значениям энергий в зоне проводимости (валентной зоне), найдем полное количество электронов в зоне проводимости в единице объема:

$$n = \int_{E_c}^{\infty} N(E) f_n(E, T) dE. \quad (1.8)$$

Аналогичные рассуждения приводят к выражению для концентрации дырок в валентной зоне:

$$p = \int_0^{E_v} N(E) f_p(E, T) dE. \quad (1.9)$$

Для вычисления интегралов в (1.8) и (1.9) необходимо знать закон распределения плотности энергетических состояний  $N(E)$ . Из квантовой механики известно выражение для  $N(E)$  в области энергий  $E > E_c$ :

$$N(E) = \frac{4\pi(2m_n)^{3/2}}{h^3} (E - E_c)^{1/2}. \quad (1.10)$$

Здесь  $m_n$  – эффективная масса электрона в зоне проводимости.

Выражение (1.10) справедливо в узкой полосе энергий вблизи дна зоны проводимости. После интегрирования (1.8) получаем выражение для концентрации свободных электронов в полупроводнике:

$$n = N_c \exp[-(E_c - E_F)/kT]. \quad (1.11)$$

Проведя аналогичные расчеты для дырок, после интегрирования (1.9) получим выражение для их концентрации:

$$p = N_V \exp[-(E_F - E_V)/kT]. \quad (1.12)$$

Коэффициенты  $N_c$  и  $N_V$  в приведенных выражениях называются *эквивалентными плотностями состояний* соответственно электронов и дырок. В предположении, что все свободные электроны сконцентрированы вблизи дна зоны проводимости, а дырки – вблизи потолка валентной зоны, их можно рассчитать по формулам:

$$N_c = 2 \left( \frac{2\pi m_n kT}{h^2} \right)^{3/2} = 0,5 \cdot 10^{16} \left( \frac{m_n}{m} \right)^{3/2} T^{3/2}; \quad (1.13)$$

$$N_V = 2 \left( \frac{2\pi m_p kT}{h^2} \right)^{3/2} = 0,5 \cdot 10^{16} \left( \frac{m_p}{m} \right)^{3/2} T^{3/2}, \quad (1.14)$$

где  $m_n$ ,  $m_p$  – эффективные массы электрона и дырки в полупроводнике;  $m$  – масса свободного электрона;  $k$  – постоянная Больцмана;  $h$  – постоянная Планка.

На рис. 1.15 а – в графически представлены функции  $N(E)$ ,  $f_n(E)$  и их произведение, определяющее концентрацию электронов в зоне проводимости, которая пропорциональна заштрихованной площади. Из рисунка видно, что основная часть свободных электронов находится вблизи дна зоны проводимости.

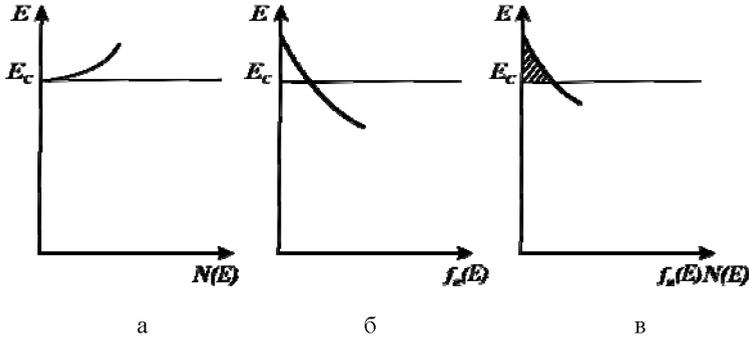


Рис. 1.15. Функции  $N(E)$  (а),  $f_n(E)$  (б) и их произведений  $N(E)f_n(E)$  (в)

В собственном полупроводнике энергетический уровень Ферми  $E_F$  располагается примерно посередине запрещенной зоны:

$$E_F = \frac{E_g}{2} + \frac{kT}{2} \ln \frac{N_v}{N_c} = \frac{E_g}{2} + \frac{3}{4} kT \ln \frac{m_p}{m_n}. \quad (1.15)$$

С ростом температуры уровень  $E_F$  обычно поднимается (как правило,  $m_p > m_n$ ), однако для большинства собственных полупроводников (кремния, германия и др.) в рабочих интервалах температур этим смещением можно пренебречь. В большинстве практических расчетов можно предположить, что выполняется равенство  $N_c = N_v$ . Тогда можно записать:

$$E_F = E_g / 2 = E_i,$$

где через  $E_i$  обозначена середина запрещенной зоны.

### 1.6 Закон действующих масс

Найдем произведение концентраций носителей заряда в полупроводнике:

$$\begin{aligned} n_n n_p &= N_c \exp\left(-\frac{E_c - E_F}{kT}\right) N_v \exp\left(-\frac{E_F - E_v}{kT}\right) = N_c N_v \exp\left(-\frac{E_c - E_v}{kT}\right) = \\ &= N_c N_v \exp\left(-\frac{E_g}{kT}\right). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Из (1.16) следует, что это произведение постоянно для данной температуры и не зависит от характера и количества примесей, содержащихся в полупроводнике, а определяется только шириной запрещенной зоны. Поскольку ранее на полупроводник не накладывалось никаких ограничений, полученное соотношение следует считать справедливым также для собственного полупроводника. Поэтому можно записать математическое выражение закона действующих масс для невырожденных полупроводников, связывающие концентрации основных и неосновных носителей заряда в примесном полупроводнике с концентрацией свободных носителей заряда в собственном полупроводнике, т.е. имеем равенство

$$n_n p_n = n_p p_p = n_i^2 = p_i^2.$$

Концентрация носителей заряда в собственном полупроводнике

$$n_i = p = p = \sqrt{N_C N_V} \exp(-E_g / 2kT). \quad (1.17)$$

Из (1.17) видно, что в собственном полупроводнике концентрация свободных носителей заряда определяется шириной запрещенной зоны  $E_g$  и величиной температуры. Причем влияние температуры на величину  $n_i$  тем сильнее, чем больше ширина запрещенной зоны полупроводника.

## 1.7 Уровень Ферми в примесных полупроводниках

Одним из основных положений в физике полупроводников является то, что *уровень Ферми  $E_F$  одинаков во всех частях равновесной системы*, какой бы разнородной она ни была ( $E_F = \text{const}$ ).

Функция Ферми-Дирака, определяемая (1.4), (1.5), справедлива не только для собственных, но и для примесных полупроводников.

В полупроводниках  $n$ -типа большое количество электронов переходит в зону проводимости с уровней доноров, при этом дырки в валентной зоне не появляются, т.к. энергетические уровни доноров располагаются в запрещенной зоне. Поэтому вероятность появления электрона в зоне проводимости выше вероятности появления дырки в валентной зоне. На энергетической диаграмме это отражается смещением уровня Ферми от середины запрещенной зоны в сторону дна зоны проводимости. Чем выше концентрация атомов доноров в полупроводнике  $N_D$ , тем больше это смещение. В полупроводнике  $p$ -типа проводимости, наоборот, уровень  $E_F$  располагается ниже уровня  $E_i$ , и с повышением концентрации атомов акцепторов  $N_A$  в нем уровень Ферми будет располагаться все ближе к потолку валентной зоны. Характер изменения функции Ферми-Дирака в запрещенной зоне примесных полупроводников представлен на рис. 1.16. Заштрихованные площади пропорциональны концентрациям носителей заряда в соответствующих зонах.

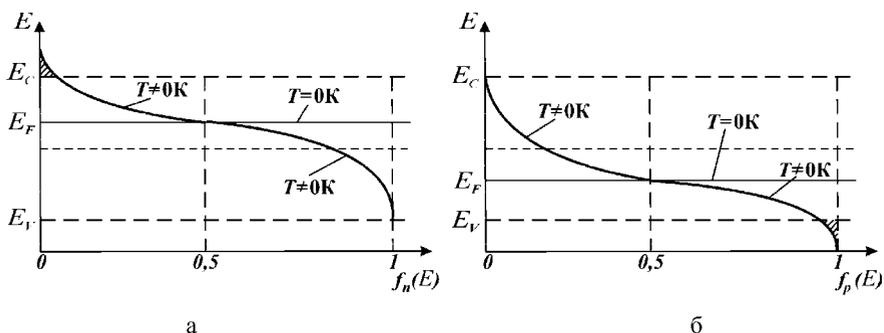


Рис. 1.16. Функции Ферми-Дирака  $f_n(E)$  и  $f_p(E)$  для примесных полупроводников: а –  $n$ -типа проводимости; б –  $p$ -типа проводимости

В соответствии с изменением функции Ферми-Дирака уровень Ферми в примесных полупроводниках при увеличении температуры устремляется к середине запрещенной зоны, т.к. происходит увеличение концентрации свободных носителей заряда в зоне проводимости и валентной зоне (рис. 1.17 а, б).

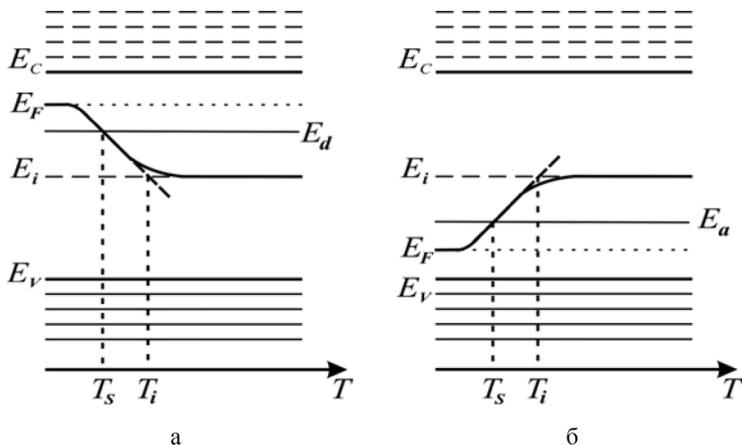


Рис. 1.17. Зависимость положения уровня Ферми  $E_F$  от температуры в примесных полупроводниках  $n$ -типа (а) и  $p$ -типа (б) проводимостей:  $T_S$  – температура истощения примесных атомов;  $T_i$  – температура ионизации матричных атомов

Рассмотрим характер этих зависимостей на примере полупроводника  $n$ -типа проводимости (рис. 1.17а). В области низких температур переходами электронов из валентной зоны в зону проводимости можно пренебречь и считать, что все электроны в зоне проводимости появляются в результате иони-

зации доноров. Аналогично (1.15), выражение для уровня Ферми  $E_F$  при низких температурах можно записать в виде

$$E_F = \frac{E_c - E_d}{2} + \frac{kT}{2} \ln \frac{N_d}{N_c}, \quad (1.18)$$

где  $E_d$  – энергетический уровень доноров;  $N_d$  – их концентрация.

### 1.8 Температуры истощения примесных и ионизация матричных атомов полупроводника

Из выражения (1.18) при  $T = 0$  К следует равенство  $E_F = (E_c - E_d) / 2$ .

С повышением температуры все большее количество атомов доноров отдает свои электроны в зону проводимости. В результате этого примесные уровни доноров постепенно *истощаются*, что в конечном итоге приводит к выполнению равенства  $n = N_d$ . Положение уровня Ферми в этом случае совпадает с энергетическим уровнем доноров в запрещенной зоне полупроводника. При этом, исходя из определения уровня Ферми, для концентрации электронов в зоне проводимости можно записать  $n_n = N_d / 2$  и вычислить с помощью (1.18) *температуру истощения примеси*:

$$T_s = \frac{E_c - E_d}{k \ln(2N_c / N_d)}. \quad (1.19)$$

Из (1.19) для германия при  $N_d = 10^{22} \text{ м}^{-3}$ ,  $E_{\text{ион}} = 0,01$  эВ получим  $T_s = 32$  К.

При всех температурах, отличных от нуля, электроны в зоне проводимости появляются не только за счет донорных атомов, но и за счет переходов в зону проводимости из валентной зоны. В последнем случае свободные электроны возникают за счет ионизации собственных атомов полупроводника. С учетом этого можно записать:

$$n_n = n_{\text{пр}} + n_i, \quad (1.20)$$

где  $n_{\text{пр}}$  – концентрация электронов, обусловленная ионизацией примеси;  $n_i$  – концентрация электронов, обусловленная генерацией собственных (матричных) атомов полупроводника.

При температурах  $T \gg T_s$  для рассматриваемого проводника

$$n_n = N_d + \sqrt{N_c N_v} \exp(-E_g / 2kT)$$

Из условия

$$\exp\left(\frac{E_c - E_F}{kT}\right) = \frac{N_c}{n_n}$$

найдем положение уровня  $E_F$  при  $T > T_s$ :

$$E_F = E_c - kT \ln(N_c / n_n).$$

С увеличением температуры собственная концентрация электронов ( $n_i$ ) в полупроводнике возрастает достигая примесной концентрации ( $n_{np} = N_D$ ), а при некоторых условиях и значительно превышая ее. Последнее условие соответствует переходу к собственной электропроводности. Температуру, при которой наступает собственная электропроводность, называют *температурой ионизации* и обозначают  $T_i$ . Графически  $T_i$  можно найти, построив касательную к кривой зависимости  $E_F(T)$  и найдя точку ее пересечения с уровнем  $E_i$  (рис. 1.17).

При  $T > T_i$  первым членом в выражении (1.20) можно пренебречь и тогда температуру  $T_i$  можно найти из выражения

$$T_i = \frac{E_g}{k \ln(N_c N_v / N_d^2)}. \quad (1.21)$$

Так, например, для германия с  $N_d = 10^{22} \text{ м}^{-3}$  при использовании (1.21) можно найти ее численное значение  $T_i = 450 \text{ К}$ .

На рис. 1.18 приведена температурная зависимость концентрации электронов в зоне проводимости для полупроводника  $n$ -типа проводимости.

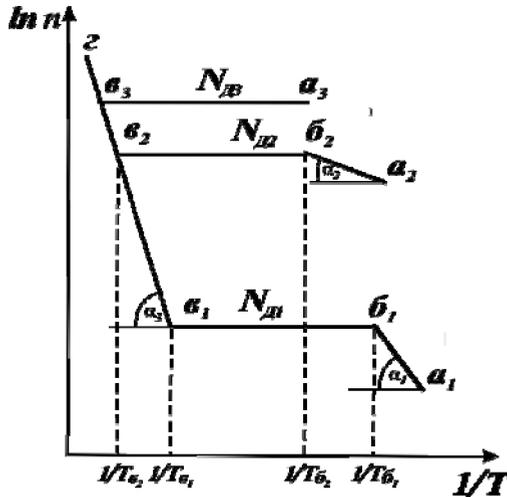


Рис. 1.18. Зависимость концентрации электронов от температуры в полупроводнике  $n$ -типа ( $N_{D3} > N_{D2} > N_{D1}$ )

На кривой имеются три участка, характеризующие области:  $ab$  – примесной электропроводности,  $bc$  – истощения примеси и  $cd$  – собственной электропроводности.

В рабочем диапазоне можно считать все примесные атомы полностью ионизированными и пренебречь собственной концентрацией  $n_i$ , тогда концентрации основных носителей заряда станут равными концентрациям примесных атомов:

$$n_n \approx N_D; \quad (1.22)$$

$$p_p \approx N_A. \quad (1.23)$$

Аналогично определяются положение уровня Ферми и концентрация носителей заряда в полупроводниках  $p$ -типа проводимости.

Таким образом, рабочий температурный диапазон примесных полупроводников ограничен снизу температурой полной ионизации примесей, а сверху – критической температурой, при которой примесный полупроводник превращается в собственный.

## 2 КИНЕТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

### 2.1 Электропроводность полупроводников

В отсутствие воздействия на кристалл внешних энергетических полей свободные электроны и дырки находятся в равновесном состоянии и при температуре  $T \neq 0$  К совершают тепловое движение. Средняя тепловая скорость свободных носителей заряда в объеме кристалла ( $\bar{V}$ ) велика и составляет при  $T = 300\text{К}$   $\bar{V} \approx 10^5$  м/с.

Совершая движение в твердом теле, свободные электроны и дырки испытывают *рассеяние* своей энергии, т. е. изменяют направление и скорость своего движения при столкновениях с узлами кристаллической решетки, дефектами решетки, атомами примесей и друг с другом. В результате этого устанавливается равновесное распределение и средняя скорость движения носителей заряда в любом направлении кристалла определяется равенством  $\bar{V} = 0$ .

При воздействии электрического поля на полупроводник средняя скорость движения носителей заряда в направлении напряженности электрического поля  $E_0$  становится уже не равной нулю. Эту скорость называют *дрейфовой скоростью*, а движение – *дрейфом*. Плотность электрического тока, формируемого дрейфом свободных носителей заряда, можно определить из равенства

$$j_n = en\bar{v}_{nE_0}, \quad (2.1)$$

где  $e$  – заряд электрона;  $n$  – концентрация электронов;  $\bar{v}_{nE_0}$  – средняя скорость дрейфа электронов в нормальном направлении к рассматриваемому сечению единичной площади.

В реальных кристаллах средняя скорость  $\bar{v}_{nE_0}$  пропорциональна напряженности электрического поля  $E_0$ , т. е.

$$\bar{v}_{nE_0} = \mu_n E_0. \quad (2.2)$$

Коэффициент пропорциональности  $\mu_n$  в (2.2) называется *подвижностью* электронов. Подставив (2.2) в (2.1), получим закон Ома в дифференциальной форме:

$$j_n = en\mu_n E_0 = \sigma_n E_0, \quad (2.3)$$

где  $\sigma_n = en\mu_n$  – удельная электрическая проводимость полупроводника  $n$  – типа проводимости.

Аналогичные рассуждения можно привести и для дырочной составляющей плотности тока, проходящего в полупроводнике  $p$  – типа проводимости.

сти. Тогда полную удельную проводимость в любом полупроводнике можно описать равенством

$$\sigma = \sigma_n + \sigma_p = e(n\mu_n + p\mu_p), \quad (2.4)$$

где  $\sigma_n$  и  $\sigma_p$  – электронная и дырочная составляющие проводимости;  $\mu_n$ ,  $\mu_p$  – подвижности свободных электронов и дырок;  $n$  и  $p$  – концентрации электронов и дырок в полупроводнике.

Выражение (2.4) справедливо при значениях напряженности электрического поля  $E_0$ , не превышающих некоторого *критического значения*  $E_{0кр}$ , т.е. когда подвижности свободных носителей заряда не зависят от напряженности электрического поля и остаются постоянными во всем диапазоне изменений напряженности поля  $E_0 \leq E_{0кр}$ .

При  $E_0 > E_{0кр}$  носители заряда приобретают за время свободного пробега дрейфовую составляющую скорости, сравнимую со скоростью теплового движения  $\bar{v}$ . При этом происходит насыщение скорости дрейфа и она перестает увеличиваться из-за роста числа столкновений в единицу времени. Поэтому при  $E_0 > E_{0кр}$  с ростом напряженности электрического поля подвижность уменьшается. Эта зависимость выражается эмпирической формулой

$$\mu = \mu_0 \left( \frac{E_{0кр}}{E_0} \right)^{1/2},$$

где  $\mu_0$  – подвижность, соответствующая критическому значению напряженности электрического поля.

Неравенство эффективных масс электронов и дырок в твердых телах определяет и неравенство их подвижностей  $\mu_n > \mu_p$ . Как следует из (2.2), чем больше подвижность, тем больше дрейфовая скорость носителей заряда и тем выше быстроедействие полупроводникового прибора.

Движение электронов в полупроводнике удобно описывать, пользуясь понятием средней *длины свободного пробега*  $\bar{\lambda}$ , равной среднему пути, который проходит электрон между двумя последовательными актами рассеяния. Если бы электрон уже в единичном акте рассеяния полностью терял свою скорость в первоначальном направлении, то выполнялось бы равенство

$$\bar{\lambda} = \bar{v}\bar{\tau},$$

где  $\bar{v}$  – средняя скорость движения электрона;  $\bar{\tau}$  – среднее *время релаксации*, равное среднему времени свободного пробега электрона.

Время релаксации характеризует: скорость установления равновесного состояния в системе, выведенной из этого состояния; количественно время, в течение которого разность неравновесной и равновесной концентраций

$(n - n_0)$  уменьшается в  $e$  раз ( $e \approx 2,72$ ). Часто, для того чтобы скорость в направлении первоначального движения стала равной нулю, требуется не одно, а в среднем  $\bar{v}$  столкновений электрона с рассеивающими центрами. При этом для определения среднего пути справедливо равенство

$$\bar{L} = \bar{\lambda} \bar{v} = \bar{v} \bar{\tau}. \quad (2.5)$$

Из (2.5) нетрудно определить среднее время релаксации:

$$\bar{\tau} = \bar{\lambda} \bar{v} / \bar{v}. \quad (2.6)$$

Отношение  $1/\bar{\lambda}$  называется *эффективностью столкновений*. В квантовой механике выражение для подвижности в невырожденном полупроводнике с учетом (2.5) и (2.6) записывается равенством

$$\mu_n = \frac{e}{m_n} \frac{\bar{\lambda} \bar{v}}{\bar{v}}. \quad (2.7)$$

Из (2.7) следует, что установление зависимости подвижности от температуры  $T$  сводится к определению температурной зависимости параметров  $\bar{\lambda}$  и  $\bar{v}$ .

Подвижность носителей заряда зависит от многих факторов, важнейшими из которых являются температура  $T$ , концентрация примесных атомов  $N$  и напряженность электрического поля при  $E_0 > E_{окр}$ . Зависимость подвижности от температуры определяется механизмами рассеяния носителей заряда. В электронных приборах наиболее распространенными являются механизмы рассеяния *на тепловых колебаниях решетки и ионизированных примесях*. Первый из них является определяющим при высоких, а второй – при низких температурах.

### Рассеяние на тепловых колебаниях решетки (на фононах)

Поле упругих колебаний, заполняющих кристалл, можно представить совокупностью квантов нормальных колебаний решетки – *фононов*. Появляясь в результате квантования нормальных колебаний, они представляют собой корпускулярный аспект описания коллективных волновых движений, охватывающих кристалл, поэтому обладают не только энергией, но и импульсом. Средняя длина свободного пробега электронов должна, очевидно, быть обратно пропорциональна концентрации фононов  $n_\phi$ , т. е.  $\bar{\lambda} \sim 1/n_\phi$ . При высоких температурах  $n_\phi \sim T$ . Из этого вытекает и справедливость пропорциональности

$$\bar{\lambda} \sim 1/T. \quad (2.8)$$

С другой стороны, в области высоких температур фононы обладают импульсом, по порядку величины равным импульсу электрона проводимости, что делает возможным прекращение движения электрона в данном направлении уже в единичном акте его столкновения с фононом, поэтому ( $\bar{v} \approx 1$ ). Подставив (2.8) в (2.7) и учитывая, что средняя скорость  $\bar{v} \sim T$ , получим

$$\mu_n \sim T^{-3/2}.$$

С повышением температуры возрастает амплитуда тепловых колебаний атомов в узлах кристаллической решетки и более вероятными становятся столкновения свободных носителей заряда с этими колебаниями. Это и определяет характер изменения (уменьшения) подвижности при высоких температурах.

### Рассеяние на ионизированных примесях

Из всех примесей, содержащихся в полупроводниковом кристалле, наибольшее влияние на рассеяние носителей заряда оказывают ионизированные примеси. Это связано с тем, что кулоновское поле, создаваемое такой примесью, действует на большом расстоянии и вызывает отклонение траектории свободных носителей заряда, движущихся даже сравнительно далеко от атома примеси. Величина  $\bar{\lambda}$  при рассеянии на примесных атомах должна быть обратно пропорциональна концентрации этих атомов ( $N$ ) и не зависеть от температуры, т. е.

$$\bar{\lambda} \sim 1/N = \text{const.} \quad (2.9)$$

Решение задачи об определении эффективности столкновений свободных носителей заряда с ионизированными атомами примесей можно представить в виде равенства

$$\bar{v} \sim \bar{v}^4 \left( \frac{\varepsilon}{Z_e} \right)^2 m_n, \quad (2.10)$$

где  $\varepsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость полупроводника,  $Z_e$  – заряд ионизированной примеси.

Из (2.10) следует, что чем выше скорость движения носителей заряда, больше их эффективная масса и сильнее ослабляется поле в кристалле (чем выше  $\varepsilon$ ), тем слабее носители заряда отклоняются полем заряженной примеси. Поэтому требуется большее число столкновений для прекращения движения в первоначальном направлении. С увеличением же заряда рассеивающего иона ( $Z_e$ ) число столкновений  $\bar{v}$  должно уменьшаться. В невырожденном полупроводнике справедливо  $\bar{v} \sim \sqrt{T}$ . Это дает право записать зависимость

$$\bar{v} \sim T^2. \quad (2.11)$$

Подставляя (2.9) и (2.11) в (2.7), получим

$$\mu_n \sim T^{3/2}.$$

Следовательно, в невырожденных полупроводниках чем выше температура, тем быстрее движутся носители заряда и тем меньше они изменяют траекторию своего движения при взаимодействии с ионами примеси.

На рис. 2.1 показаны кривые температурной зависимости подвижности  $\mu$  ( $1/T$ ) при различных значениях концентрации легирующей примеси в невырожденном полупроводнике.

Более строгий анализ показывает, что подвижность носителей заряда, определяемая рассеянием их на фонах, существенно зависит от их эффективной массы  $m_{эф}$ :

$$\mu \sim \frac{1}{m_{эф}^{5/2} T^{3/2}}.$$

Более того, для электронов и дырок она различна и в собственных полупроводниках  $m_n < m_p$ , поэтому  $\mu_n > \mu_p$ .

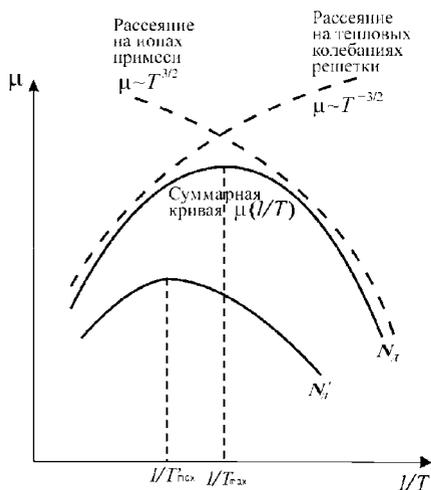


Рис. 2.1. Зависимость подвижности носителей заряда от температуры в невырожденном полупроводнике при различных концентрациях примеси  $N_A' > N_D'$

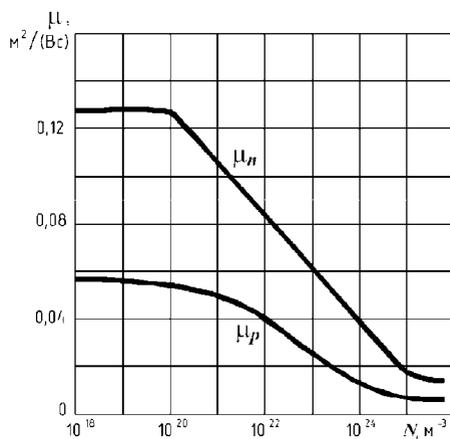


Рис. 2.2. Зависимость подвижности электронов  $\mu_n$  и дырок  $\mu_p$  в кремнии от концентрации легирующей примеси  $n$  при  $T=293$  К

Зависимость подвижности от концентрации легирующей примеси  $N$  сложная и в целом аналитически не описывается. Экспериментальные зависимости  $\mu_n = f(N)$  и  $\mu_p = f(N)$  для кремния приведены на рис. 2.2. Анализ этих зависимостей показывает, что центрами рассеяния являются атомы примеси, увеличение концентрации которых приводит к уменьшению средней длины свободного пробега носителей (2.9), а значит, снижению их подвижности.

### Собственная электропроводность полупроводников

В собственном полупроводнике отсутствуют чужеродные атомы, поэтому ионизации подвергаются матричные атомы. При не слишком низких температурах такие полупроводники обладают *собственной электрической проводимостью*  $\sigma_i$ . Это означает, что концентрации свободных электронов и дырок в собственных полупроводниках равны  $n = p = n_i = p_i$  и тогда (2.4) можно переписать в виде

$$\sigma_i = en_i(\mu_n + \mu_p) = ep_i(\mu_n + \mu_p).$$

С учетом выражений (1.13), (1.14) и (1.17), определяющих  $n_i$ , собственную электрическую проводимость можно описать равенством

$$\sigma_i = 2e \left( \frac{2\pi \sqrt{m_n m_p} kT}{h^2} \right)^{3/2} (\mu_n + \mu_p) \exp\left(-\frac{E_g}{2kT}\right) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{E_g}{2kT}\right). \quad (2.12)$$

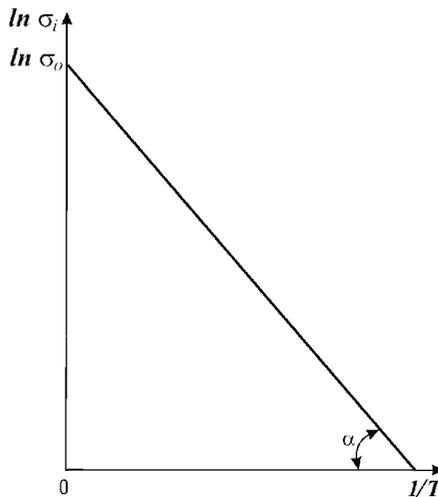


Рис.2.3. Зависимость собственной электрической проводимости

полупроводника от температуры

Из (2.12) следует, что при  $T \rightarrow \infty$  и  $\sigma_i \rightarrow \infty$ . На рис. 2.3 зависимость  $\sigma_i$  ( $1/T$ ) представлена в логарифмических координатах,  $\operatorname{tg} \alpha = E_g / 2kT$ . При заданной температуре концентрация носителей заряда и электрическая проводимость собственного полупроводника определяются шириной его запрещенной зоны  $E_g$ .

### Примесная электропроводность полупроводников

В диапазоне рабочих температур полупроводниковых приборов в выражении (2.4) можно пренебречь составляющими, связанными с неосновными носителями заряда. Тогда для полупроводников  $n$ - и  $p$ -типов проводимостей получим

$$\sigma_n = e(n_n \mu_n + p_n \mu_p) \approx e n_n \mu_n; \quad (2.13)$$

$$\sigma_p = e(p_p \mu_p + n_p \mu_n) \approx e p_p \mu_p. \quad (2.14)$$

Если воспользоваться равенствами (1.25) и (1.26), то эти формулы можно переписать в виде, удобном для практических расчетов:

$$\sigma_n = e N_D \mu_n; \quad (2.15)$$

$$\sigma_p = e N_A \mu_p. \quad (2.16)$$

На рис. 2.4 показаны кривые температурной зависимости  $\sigma/\sigma_0$  для кремния, содержащего различные количества примеси. Точка  $a$  соответствует температуре истощения примеси, а точка  $b$  – температуре ионизации, при которой примесный полупроводник превращается в собственный.

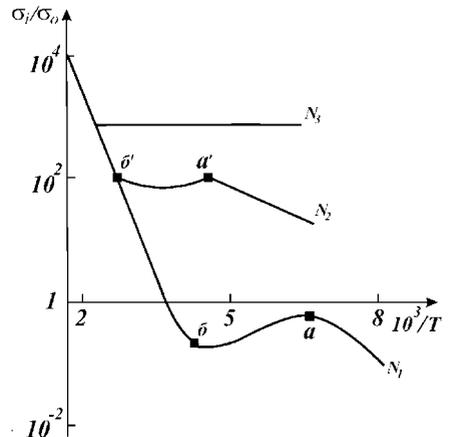


Рис. 2.4. Зависимость относительной удельной электрической проводимости примесного кремния от температуры  $N_3 > N_2 > N_1$ ;  $\sigma_0$  – удельная электрическая проводимость при  $T=293\text{K}$

Удельное электрическое сопротивление  $\rho_0$  является величиной, обратной удельной электрической проводимости.

## 2.2 Рекомбинация носителей заряда в полупроводниках

### Неравновесные носители заряда и их основные характеристики

Воздействие внешних источников энергии на кристалл может привести к появлению дополнительного количества свободных носителей заряда. Появление избыточной по отношению к равновесной концентрации свободных носителей заряда нарушает равновесие в системе, поэтому их называют *неравновесными носителями заряда*. При неизменной интенсивности внешнего фактора в полупроводнике устанавливается *равновесное состояние*, при котором скорости генерации и рекомбинации свободных носителей заряда равны. Из этого следует и справедливость равенств:  $\Delta n = n - n_0$  и  $\Delta p = p - p_0$ , где  $n$  и  $p$  – постоянные концентрации электронов и дырок при наличии внешнего фактора, а  $n_0$  и  $p_0$  – равновесные концентрации свободных электронов и дырок в полупроводнике в отсутствие воздействия внешних сил. Если в полупроводнике отсутствуют объемные заряды, то выполнение этих равенств означает и выполнение условия электрической нейтральности в каждой точке кристалла, т.е. означает выполнение равенства  $\Delta n = \Delta p$ .

Различают *низкий и высокий уровни возбуждения* полупроводника. В первом случае концентрация избыточных носителей заряда много меньше концентрации основных носителей заряда, но может значительно превышать концентрацию неосновных носителей. При высоком уровне возбуждения концентрация избыточных носителей заряда значительно выше равновесных.

После прекращения воздействия внешнего фактора, вызывающего генерацию избыточных носителей заряда, их концентрация из-за рекомбинации быстро уменьшается и достигает равновесных значений. Скорость, с которой протекает рекомбинация, определяется временем жизни неравновесных носителей заряда  $\tau$ .

Для определения закономерностей изменения  $\tau$  выделим в полупроводнике плоскопараллельный слой толщиной  $dx$  (рис. 2.5), перпендикулярный направлению движения электрона. Дырка, являясь положительным ионом, имеет сферическую симметрию распределения электрического поля, поэтому ее можно моделировать центром захвата электрона радиусом  $r$ . При взаимодействии свободного электрона с таким центром происходит рекомбинация с образованием нейтрального атома. В этом случае сечение захвата электрона дыркой можно описать равенством  $A_n = \pi r^2$ , согласно которому электрон, попадая в один из таких дисков, будет обязательно захвачен дыркой. Обозначим площадь выделенного слоя  $S$ , тогда объем этого слоя можно выразить произведением  $Sdx$ , а число дырок в нем  $pSdx$ , где  $p$  – концентрация дырок. Суммарная площадь захвата электрона дырками при прохождении им слоя толщиной  $dx$

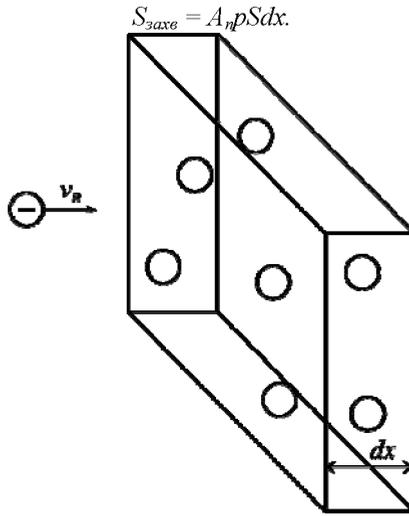


Рис. 2.5. Определение времени жизни свободных электронов

Вероятность того, что электрон при прохождении испытывает столкновение с дыркой,

$$W_n = S_{захе} / S = A_n p dx. \quad (2.17)$$

Учитывая, что  $dx = v_n dt$  и разделив левую и правую части (2.17) на  $dt$ , найдем вероятность столкновения электрона с дыркой в единицу времени:

$$P_n = A_n p v_n.$$

Поскольку такое столкновение заканчивается рекомбинацией, то  $P_n$  представляет собой вероятность рекомбинации электрона в единицу времени.

Величина  $\tau_n$ , обратная  $P_n$ , представляет собой *среднее время жизни* электрона в свободном состоянии:

$$\tau_n = \frac{1}{P_n} = \frac{1}{A_n v_n p}. \quad (2.18)$$

Аналогичное выражение можно записать для среднего времени жизни дырок:

$$\tau_p = \frac{1}{P_p} = \frac{1}{A_p v_p p}, \quad (2.19)$$

где  $A_p$  – сечение захвата дырки электроном;  $v_p$  – скорость движения дырки относительно электронов;  $n$  – концентрация электронов.

В полупроводниках захватывать электроны могут не только дырки, но и различные локальные центры, создающие в запрещенной зоне дискретные энергетические уровни. Произведение сечения захвата на скорость движения носителя заряда, усредненное по всем носителям в зоне, называется *коэффициентом рекомбинации*  $\gamma$ , т. е. для электронов и дырок можно записать:

$$\gamma_n = \overline{A_n v_n}; \quad (2.20)$$

$$\gamma_p = \overline{A_p v_p}. \quad (2.21)$$

Подставив (2.20) и (2.21) соответственно в (2.18) и (2.19), получим

$$\tau_n = \frac{1}{\gamma_n P};$$

$$\tau_p = \frac{1}{\gamma_p P}.$$

*Скорость рекомбинации* измеряется числом носителей заряда, ежесекундно рекомбинирующих в единице объема полупроводника. Для неравновесных носителей заряда она равна произведению вероятности рекомбинации носителей заряда в единицу времени на их избыточную концентрацию, т.е. можно записать выражения для скоростей рекомбинации электронов и дырок:

$$R_n = -\frac{\partial n}{\partial t} = P_n \Delta n = \frac{\Delta n}{\tau_n} = \gamma_n p \Delta n;$$

$$R_p = -\frac{\partial p}{\partial t} = P_p \Delta p = \frac{\Delta p}{\tau_p} = \gamma_p n \Delta p.$$

С точки зрения механизма движения свободных носителей заряда различают три типа рекомбинаций: *межзонную, через локальные уровни и поверхностную.*

При межзонной рекомбинации происходит переход электрона из зоны проводимости непосредственно на свободный уровень валентной зоны. При этом освобождается энергия, равная ширине запрещенной зоны, которая выделяется в виде кванта энергии электромагнитного излучения (фотона) или превращается в квант энергии тепловых колебаний решетки (фононов). В соответствии с этим различают *излучательную и фононную межзонную рекомбинацию.* Вероятность межзонной рекомбинации очень мала, более вероятны

переходы носителей заряда через локальные уровни, расположенные в запрещенной зоне.

### Рекомбинация через локальные уровни

На рис. 2.6 *а, б* показаны энергетические диаграммы полупроводника, содержащего глубокий локальный уровень  $E_L$  и мелкие локальные уровни  $E'_L$  и  $E''_L$ . Захват электрона глубоким уровнем отображается переходом 1 (рис. 2.6 *а*). После захвата электрон может быть переброшен обратно в зону проводимости (переход 3), следовательно, этот процесс, формируемый обратным тепловым переброном электрона, в рекомбинации не участвует. Однако если электрон будет переброшен в валентную зону (переход 2), то, попадая в сечение захвата дырки, он рекомбинирует с ней, образуя нейтральный атом.

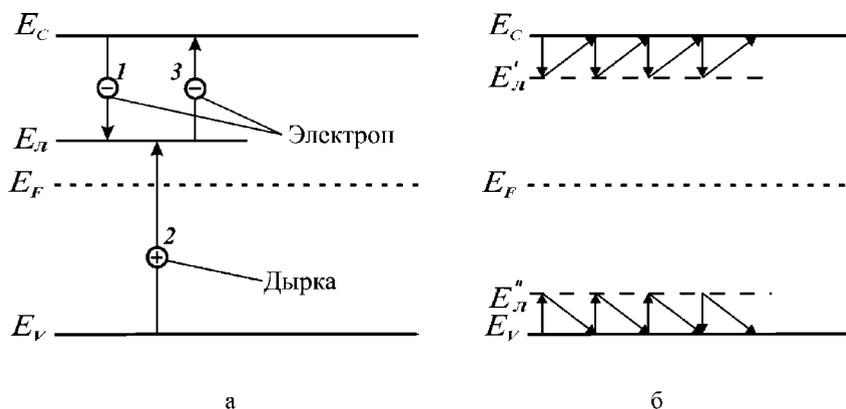


Рис. 2.6. Энергетическая диаграмма полупроводника, содержащего центры рекомбинации (*а*) и центры прилипания (*б*)

Для мелких локальных уровней вероятность обратного теплового переброса электрона очень велика. Поэтому в этом случае процесс сводится к энергичному обмену электронами локального уровня  $E'_L$  и зоны проводимости, локального уровня  $E''_L$  и валентной зоны (рис. 2.6 *б*). Такие локальные уровни принято называть *центрами прилипания*.

Энергетические уровни, располагающиеся в запрещенной зоне вблизи ее середины  $E_i$ , называются глубокими уровнями энергии. При переходе свободного электрона из зоны проводимости на такой уровень для осуществления его теплового переброса обратно в зону проводимости (переход 3 на рис. 2.6 *а*) потребуется уже поглощение одновременно нескольких фононов, так как одного кванта энергии для этого недостаточно. Это значительно уменьшает вероятность совершения такого события. Более вероятен переход электрона в валентную зону (переход 2), заканчивающийся его рекомбинаци-

ей с дыркой. Вероятность встречи дырки с локализованным неподвижным электроном значительно выше вероятности встречи с подвижным электроном. Поэтому глубокие локальные уровни являются эффективными центрами рекомбинации.

Пусть имеем одновалентный локальный уровень в стационарных условиях и концентрацию центров рекомбинации достаточно небольшую по сравнению с концентрацией избыточных носителей заряда, тогда простейшая модель рекомбинации может быть описана следующими выражениями для скорости рассасывания избыточных носителей заряда и времени жизни  $\tau$  неравновесных носителей заряда:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = - \frac{np - n_0 p_0}{(n + n_L)\tau_{p0} + (p + p_L)\tau_{n0}}; \quad (2.22)$$

$$\tau = P_p^{-1} \frac{n_0 + n_L}{(n_0 + p_0)} + P_n^{-1} \frac{p_0 + p_L}{(n_0 + p_0)}. \quad (2.23)$$

Здесь  $n_0, p_0$  – равновесные концентрации свободных электронов и дырок в исходном состоянии;  $n_L, p_L$  – равновесные концентрации свободных электронов и дырок, когда уровень Ферми совпадает с уровнем ловушек  $E_n$ ;  $P_p$  – вероятность захвата дырок ловушками, когда все ловушки заняты электронами;  $P_n$  – вероятность захвата электронов ловушками в условиях, когда все ловушки свободны;  $\tau_{p0}, \tau_{n0}$  – времена жизни дырок и электронов в этих условиях.

Используя (2.18) и (2.19), выражение для  $\tau$  можно переписать в виде, удобном для практических расчетов:

$$\tau = \tau_{p0} \frac{n_0 + n_L}{n_0 + p_0} + \tau_{n0} \frac{p_0 + p_L}{n_0 + p_0}. \quad (2.24)$$

На рис. 2.7 показаны изменения положения уровня Ферми  $E_F$  в зависимости от изменения концентрации основных носителей заряда (а) и зависимости времени жизни  $\tau$  неравновесных носителей заряда от концентрации основных носителей заряда (б). Кроме этого, выделены четыре характерные области изменения  $\tau$ , определяемые выражением (2.24).

**Поверхностная рекомбинация.** Следует учитывать, что приповерхностный слой имеет особую зонную структуру (см. рис. 1.13), а значит, и отличные от объемных количественные параметры. Если рабочий участок полупроводниковой пластины частично расположен в объеме, а частично – в приповерхностном слое, то время жизни неравновесных носителей заряда  $\tau$  связано с временами их жизни в объеме  $\tau_v$  и у поверхности  $\tau_s$  соотношением

$$1/\tau = 1/\tau_v + 1/\tau_s.$$

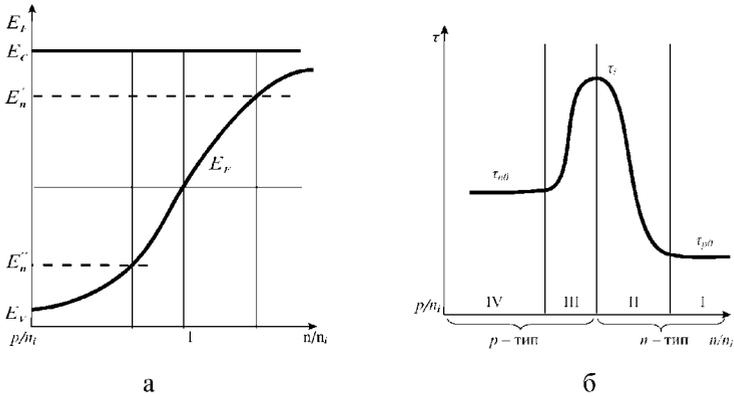


Рис. 2.7. Изменение положения уровня Ферми (а) и времени жизни неравновесных носителей  $\tau$  (б) в зависимости от концентрации основных носителей заряда в полупроводнике

Как правило, из-за большой концентрации ловушек вблизи поверхности  $\tau_s < \tau_v$ , поэтому  $\tau$  ближе к  $\tau_s$ .

Рассмотрим полупроводник, в запрещенной зоне которого имеется поверхностный рекомбинационный центр  $E_s$ . Пусть в нем равномерно по всему объему генерируются неравновесные носители заряда, обозначим их избыточные концентрации через  $\Delta n$  и  $\Delta p$ .

Наличие у поверхности полупроводника уровня  $E_s$ , выполняющего роль «стока» для неравновесных носителей заряда, приводит к возникновению направленных потоков носителей заряда к поверхности, пропорциональных значениям их избыточной концентрации:

$$j_n/e = S_n \Delta n;$$

$$j_p/e = S_p \Delta p,$$

где  $j_n, j_p$  – плотности тока электронов и дырок;  $e$  – заряд электрона;  $S_n, S_p$  – коэффициенты пропорциональности.

В условиях равновесия ток через поверхность равен нулю, поэтому эти плотности тока равны друг другу. Число носителей заряда, ежесекундно рекомбинирующих в единице площади поверхности,

$$q_s = j_p/l = j_n/l = S_n \Delta n = S_p \Delta p. \quad (2.25)$$

Из (2.25) видно, что  $S_n$  и  $S_p$  выражают относительную долю избыточных носителей заряда, ежесекундно рекомбинирующих в единице площади поверхности полупроводника. Эти коэффициенты имеют размерность скоро-

сти, поэтому и называются *скоростями поверхностной рекомбинации* электронов и дырок. Связь между скоростью поверхностной рекомбинации и временем жизни  $\tau$  в общем случае установить трудно, найдены решения этой задачи только для частных случаев.

### 2.3 Движение носителей заряда в полупроводниках

Движение носителей заряда в полупроводнике в общем случае обусловлено двумя процессами: *диффузией* под действием градиента их концентрации и теплового движения и *дрейфом* под действием электрического поля. Следовательно, полный ток состоит из четырех составляющих и для его плотности справедливо выражение

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{пЕ} + \mathbf{j}_{пD} + \mathbf{j}_{рЕ} + \mathbf{j}_{рD},$$

где  $\mathbf{j}_{пЕ}$ ,  $\mathbf{j}_{рЕ}$  – дрейфовые, а  $\mathbf{j}_{пD}$ ,  $\mathbf{j}_{рD}$  – диффузионные составляющие плотности тока электронов и дырок соответственно.

Поведение неравновесных носителей заряда в полупроводниках описывается *уравнением непрерывности*. В этом случае в полупроводнике р-типа в направлении оси  $x$  существует градиент концентрации электронов ( $dn/dx > 0$ ) и действует электрическое поле напряженностью  $E_{ox}$ .

Выделим в полупроводнике слой толщиной  $dx$ , расположенный перпендикулярно оси  $x$ , с площадью поперечного сечения  $1 \text{ м}^2$  (рис. 2.5). Объем этого слоя равен  $dx$ . Концентрации носителей заряда зависят от двух переменных – координаты  $x$  и времени  $t$ . Обозначим концентрацию электронов в слое в момент времени  $t$  через  $n(x, t)$ , а в момент времени  $(t + dt)$  – через  $n(x, t + dt)$ . Тогда изменение числа электронов в слое за время  $dt$  составит

$$[n(x, t + dt) - n(x, t)]dx = \frac{\partial n}{\partial t} dx dt.$$

Оно вызывается протекающими в слое процессами генерации, рекомбинации, диффузией и дрейфом носителей заряда. В результате генерации за время  $dt$  в слое объемом  $dx$  ионизирующий фактор создает  $g dx dt$  электронов, где  $g$  — скорость генерации электронов.

Вследствие рекомбинации в единицу времени в единице объема полупроводника исчезает  $R = -\frac{n - n_0}{\tau_n}$  свободных электронов. За время  $dt$  в объеме  $dx$  убыль электронов составит  $-\frac{n - n_0}{\tau_n} dx dt$ .

Наличие градиента концентрации, теплового движения и внешнего поля в направлении оси  $x$  приведет к тому, что поток электронов  $J_n(x)$ , втекающий в слой  $dx$ , будет не равен потоку  $J_n(x + dx)$ , вытекающему из слоя.

Изменение числа электронов за время  $dt$ , вызванное различием этих потоков, описывается соотношением

$$[J_n(x_n) - J_n(x + dx)]dt = \frac{\partial J_n}{\partial x} dxdt.$$

Полное изменение числа электронов в слое за время  $dt$  составит

$$\frac{\partial n}{\partial x} dxdt = \left( -\frac{\partial J_n}{\partial x} + g - \frac{n - n_0}{\tau_n} \right) dt dx.$$

Сократив обе части этого уравнения на  $dt dx$ , получим уравнение непрерывности для избыточных электронов:

$$\frac{\partial n}{\partial x} = -\frac{\partial J_n}{\partial x} + g - \frac{n - n_0}{\tau_n}. \quad (2.26)$$

Аналогичное уравнение можно получить для избыточных дырок:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial J_p}{\partial x} + g - \frac{p - p_0}{\tau_p}. \quad (2.27)$$

Поток электронов  $J_n$  удобно выразить через плотность тока  $J_n = -j_n/e$ , где  $e$  – заряд электрона. Плотность тока  $j_n$  содержит дрейфовую и диффузионную составляющие электрического тока. Плотность дрейфового тока электронов

$$j_{nE} = en\mu_n E_{ox}.$$

Плотность тока, обусловленного диффузией электронов, пропорциональна градиенту концентрации:

$$j_{nD} = eD_n \frac{\partial n}{\partial x}.$$

Коэффициент пропорциональности  $D_n$  называется *коэффициентом диффузии*. Тогда плотность тока, обусловленного дрейфом и диффузией электронов, выразим равенством

$$j_n = e \left( n\mu_n E_{ox} + D_n \frac{\partial n}{\partial x} \right).$$

Аналогичное выражение можно получить и для плотности тока дырок:

$$j_p = e \left( p \mu_p E_{ox} - D_p \frac{\partial p}{\partial x} \right).$$

Знак минус у диффузионной составляющей плотности тока дырок указывает на то, что направление диффузионного тока противоположно градиенту их концентрации. Заменяв в (2.26), (2.27) потоки  $J_n$  и  $J_p$  плотностями тока, получим уравнения непрерывности в виде

$$\frac{\partial n}{\partial x} = D_n \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + E_x \mu_n \frac{\partial n}{\partial x} + g - \frac{n - n_0}{\tau_n}; \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = D_p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + E_x \mu_p \frac{\partial p}{\partial x} + g - \frac{p - p_0}{\tau_p}. \quad (2.29)$$

## 2.4 Соотношения Эйнштейна

Рассмотрим полупроводник  $n$ -типа с неравномерным распределением атомов донорной примеси вдоль его длины, т.е. по оси  $x$  (рис. 2.10 а). Зависимость  $N_d(x)$ , схема возникновения диффузионного и дрейфового потоков  $J_{nD}$ ,  $J_{nE_0}$  и связанных с ними плотностями токов  $j_{nD}$ ,  $j_{nE_0}$  показаны на рис. 2.8 а, б. Диффузионное перетекание электронов  $J_{nD}$  формирует нескомпенсированные объемные заряды: положительный заряд ионизированных атомов доноров – в областях, из которых электроны ушли, и отрицательный заряд электронов – в областях с низкой концентрацией доноров, т.е. куда электроны пришли. Образование объемных зарядов сопровождается возникновением внутреннего электрического поля напряженностью  $E_{ox}$  и дрейфового тока  $J_{nE}$ , направленного противоположно диффузионному. При достижении равновесного состояния диффузионный и дрейфовый токи уравниваются:

$$e n \mu_n E_{ox} = e D_n \frac{\partial n}{\partial x}. \quad (2.30)$$

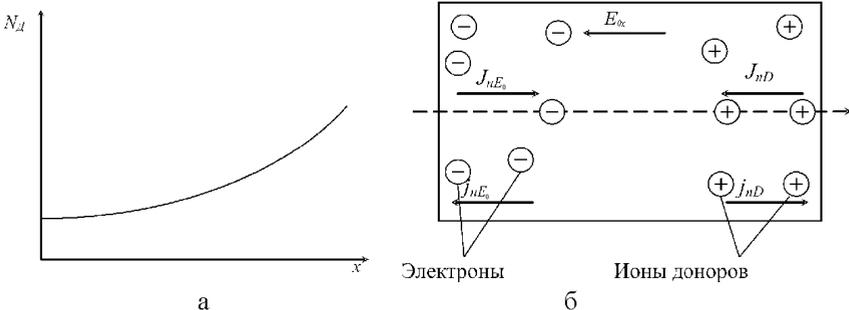


Рис. 2.8. Распределение концентрации легирующей примеси  $N_D(x)$  при  $\frac{dN_D(x)}{dx} > 0$  и схема возникновения электрического поля в полупроводнике

Электроны, находящиеся в электрическом поле напряженностью  $E_{ox}$ , обладают потенциальной энергией, равной  $-e\varphi(x)$ , где  $\varphi(x)$  – потенциал поля в точке  $x$ .

В соответствии с законом Больцмановского распределения в условиях равновесия концентрация электронов в области, охватывающей точку  $x$ , равна  $n(x) = c \exp\left[\frac{e\varphi(x)}{kT}\right]$ , где  $c$  – коэффициент пропорциональности.

Найдем производную  $dn/dx$ , учитывая, что  $E_{ox} = -\frac{d\varphi(x)}{dx}$ :

$$\frac{dn}{dx} = c \exp\left[\frac{e\varphi(x)}{kT}\right] \frac{e}{kT} E_{ox}. \quad (2.31)$$

Подставив (2.31) в (2.30), получим

$$D_n = \frac{kT}{e} \mu_n = \varphi_T \mu_n. \quad (2.32)$$

Аналогичное выражение можно записать для коэффициента диффузии дырок:

$$D_p = \frac{kT}{e} \mu_p = \varphi_T \mu_p. \quad (2.33)$$

Выражения (2.32) и (2.33) называются *соотношениями Эйнштейна*. Они связывают коэффициенты диффузии носителей заряда с их подвижностью.

## 2.5 Диффузионная длина носителей заряда

Для решения задачи о распределении неравновесных носителей заряда вдоль полупроводника, на одном конце которого поддерживается постоянная избыточная концентрация электронов  $\Delta n_0 = n - n_0$ , используем уравнение непрерывности. Для стационарного случая, когда  $dn/dt = 0$  и  $dp/dt = 0$ , при условии, что электрическим полем  $E_{ox}$  и генерацией носителей заряда в объеме полупроводника можно пренебречь, выражение (2.28) принимает вид

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{n - n_0}{D_n \tau_n}. \quad (2.34)$$

Граничными условиями этого дифференциального уравнения при  $x = 0$  служит равенство  $(n - n_0) = \Delta n_0$ , а при  $x \rightarrow \infty - (n - n_0) = 0$ . Решением уравнения (2.34) в этом случае служит выражение

$$\Delta n = n - n_0 = \Delta n_0 \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{D_n \tau_n}}\right). \quad (2.35)$$

Физически (2.35) определяет закон убывания концентрации избыточных носителей заряда вдоль полупроводника в стационарных условиях. Величина  $\sqrt{D_n \tau_n}$  имеет размерность длины, причем на протяжении отрезка длиной  $\sqrt{D_n \tau_n}$  концентрация избыточных носителей заряда уменьшается в  $e$  раз. Эта величина называется *диффузионной длиной электронов*:

$$L_n = \sqrt{D_n \tau_n}. \quad (2.36)$$

Аналогично можно записать выражение для *диффузионной длины дырок*:

$$L_p = \sqrt{D_p \tau_p}. \quad (2.37)$$

## 2.6 Поверхностные явления в полупроводниках

Формирование поверхности осуществляется путем разрыва кристаллической решетки полупроводника. Обрыв решетки приводит к тому, что вблизи поверхности кристалла появляются разрешенные дискретные энергетические уровни или зоны, причем в тех областях, в которых их возникновение было запрещено в бесконечном кристалле. Это привело к тому, что электроны, занимающие эти уровни, не могут проникать внутрь кристалла и локализируются у его поверхности. Такие уровни называются *поверхностными* или *уровнями Тамма*. Поверхностные уровни могут иметь свойства доноров, акцепторов или центров прилипания. Заполнение акцепторных уровней означает локализацию электронов, удаление электронов с донорных уровней – локализацию дырок на этих уровнях. В соответствии с условием электрической нейтральности образование заряда на поверхности должно сопровождаться возникновением в приповерхностном слое объемного заряда противоположного знака, основной задачей которого является нейтрализация поверхностного заряда. В результате приповерхностный слой полупроводника оказывается *обедненным* носителями заряда одного знака с поверхностным зарядом и *обогащенным* носителями заряда противоположного знака.

Обеднение и обогащение приповерхностного слоя полупроводника свободными носителями заряда под воздействием электрического поля на-

блюдается и в системе металл – диэлектрик – полупроводник и носит название *эффекта поля* (рис. 2.9). На металл подается положительный или отрицательный потенциал. Тогда равный по значению, но противоположный по знаку заряд на металлической пластине сосредоточивается не на поверхности, а в его приповерхностном слое. Если в металлах, имеющих очень высокую концентрацию носителей заряда ( $\sim 10^{28} \text{ м}^{-3}$ ), нейтрализация поверхностного заряда происходит уже на расстоянии, равном нескольким параметрам решетки, то в полупроводниках область объемного заряда простирается на значительную глубину ( $\sim 10^{-6} \text{ м}$  и более). Обычно ее принимают равной так называемой *дебаевской длине экранирования*  $L_D$ , определяемой как расстояние, на протяжении которого потенциал поля в веществе со свободными носителями заряда уменьшается в  $e$  раз. Расчеты показывают, что для собственного полупроводника выполняется равенство

$$L_D = \left( \frac{\varepsilon \varepsilon_0 kT}{2e^2 n_i} \right)^{1/2} = \left( \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \varphi_T}{2en_i} \right)^{1/2},$$

где  $\varepsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость полупроводника;  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная вакуума;  $\varphi_T = kT/e$  – температурный потенциал.

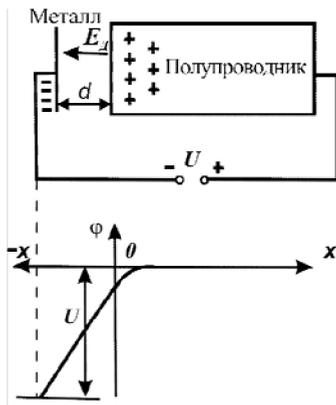


Рис. 2.9. Эффект поля в структуре металл-диэлектрик-полупроводник  
 $\varphi(x)$  – распределение потенциала

Для примесного полупроводника с концентрацией ионизированной примеси  $N$

$$L_D = \left( \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \varphi_T}{eN} \right)^{1/2}.$$

Следует отметить, что если выполняется неравенство  $N \gg n_i$ , то значение  $L_D$  в примесных полупроводниках много меньше, чем в собственных. Так, например, при температуре  $T = 300$  К в собственном кремнии  $L_D \approx 14$  мкм, а в примесном кремнии при концентрации примесных атомов  $N_D = 10^{22} \text{ м}^{-3}$   $L_D \approx 0,04$  мкм.

Образование заряда на поверхности полупроводника вызывает возникновение разности потенциалов между его поверхностью и объемом. Следствием этого является *искривление энергетических зон у поверхности*. При заряджении поверхности отрицательным зарядом энергетические зоны изгибаются вверх, образуя энергетический барьер, так как при перемещении электрона из объема к поверхности его энергия увеличивается. При заряджении поверхности положительным зарядом зоны изгибаются вниз, образуя потенциальную яму, в которую стекаются свободные носители заряда, т.е. происходит обогащение поверхности свободными носителями заряда. Изгиб зон простирается вглубь полупроводника примерно на величину  $L_D$ .

Концентрации электронов и дырок в приповерхностном слое полупроводника описываются соотношениями

$$n = n_i \exp\left(\frac{E_F - E_i}{kT}\right); \quad (2.38)$$

$$p = n_i \exp\left(\frac{E_i - E_F}{kT}\right). \quad (2.39)$$

Из (2.38) и (2.39) видно, что если в приповерхностной области полупроводника выполняется равенство  $E_i = E_F$ , то полупроводник обладает собственной проводимостью ( $n = p = n_i$ ), а если располагается ниже уровня Ферми ( $E_F > E_i$ ), то  $n > n_i > p$ . Следовательно, полупроводник в этой области обладает электропроводностью  $n$ -типа. В области, в которой уровень Ферми  $E_F > E_i$ , концентрации  $p > n_i > n$  и полупроводник имеет электропроводность  $p$ -типа.

Таким образом, в приповерхностной области полупроводника могут наблюдаться три важных процесса: обеднение, инверсия и обогащение приповерхностной области носителями заряда.

Обедненная область появляется в случае, когда на поверхности полупроводника возникает заряд, по знаку совпадающий с основными носителями заряда (рис. 2.10 а). Однако по величине он еще не настолько большой, чтобы вызвать пересечение кривой, соответствующей середине запрещенной зоны  $E_i$ , с уровнем Ферми  $E_F$ . Вызванный зарядом на поверхности изгиб зон приводит к увеличению расстояния от уровня Ферми до дна зоны проводимости в полупроводнике  $n$ -типа и до потолка валентной зоны в полупроводнике  $p$ -типа. Увеличение этого расстояния сопровождается обеднением приповерх-

ностной области основными носителями заряда, концентрация которых, как и концентрация неосновных носителей заряда, оказывается много меньше концентрации примесных атомов. Заряд примесных атомов в приповерхностной области оказывается нескомпенсированным зарядом подвижных носителей, поэтому он и определяет тип электропроводности в приповерхностной области полупроводника.

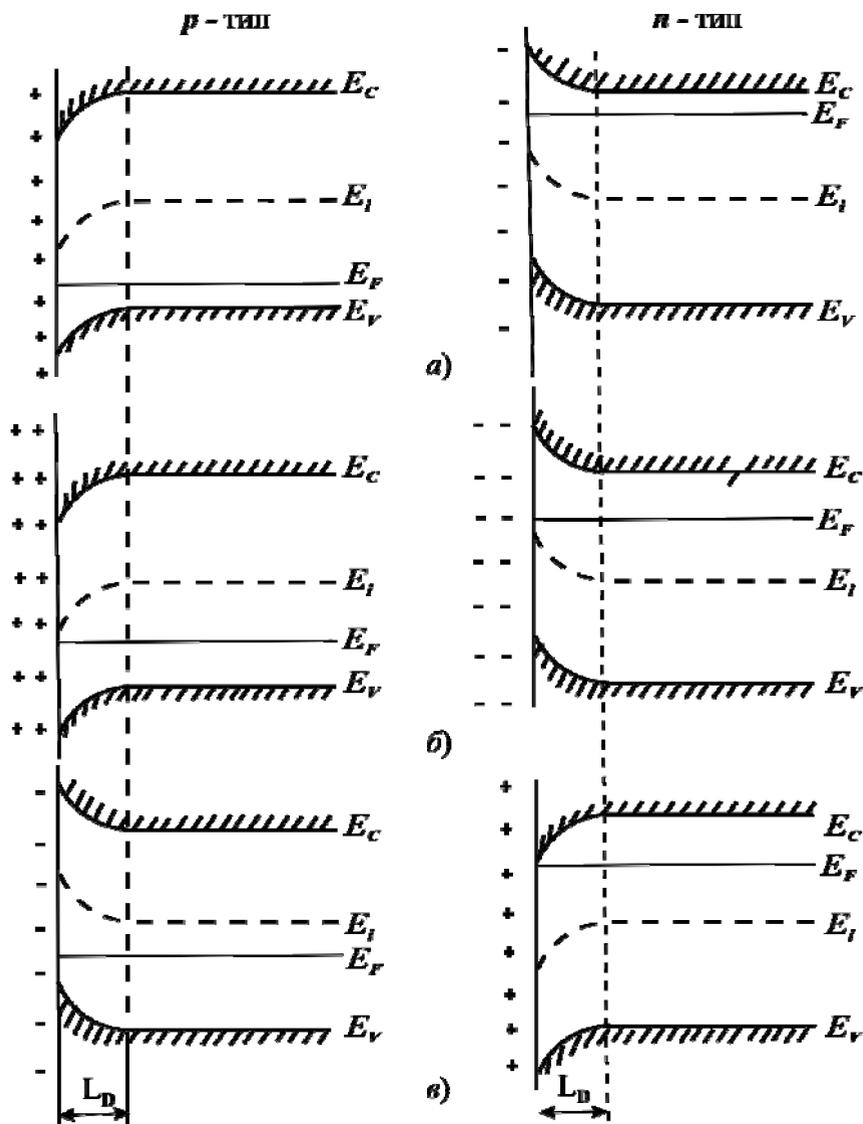


Рис. 2.10. Образование в приповерхностной области полупроводника под влиянием заряда на поверхности обедненного (*а*), инверсного (*б*) и обогащенного (*в*) слоев

Инверсная область в приповерхностном слое полупроводника возникает при высокой плотности поверхностного заряда, по знаку совпадающего с основными носителями заряда (рис. 2.10 *б*). Кривая, соответствующая середине запрещенной зоны  $E_i$ , в этом случае пересекает уровень Ферми и располагается выше его в полупроводнике *n*-типа и ниже – в полупроводнике *p*-типа. Расстояние от уровня Ферми до потолка валентной зоны в полупроводнике *n*-типа оказывается меньше расстояния до дна зоны проводимости. Вследствие этого концентрация неосновных носителей заряда для полупроводника *n*-типа – дырок в приповерхностном слое оказывается выше концентрации основных носителей заряда – электронов и тип электропроводности в нем изменяется. В полупроводнике *p*-типа расстояние от уровня  $E_F$  до дна зоны проводимости  $E_c$  оказывается меньше расстояния до потолка валентной зоны  $E_v$ , вследствие чего концентрация неосновных носителей заряда – электронов в приповерхностном слое оказывается выше концентрации основных носителей заряда – дырок и тип электропроводности в нем изменяется. Описанное явление называется *инверсией*, а слои, в которых оно имеет место – *инверсными*.

Обогащенная область появляется в приповерхностном слое в случае, когда знак поверхностного заряда противоположен знаку основных носителей заряда в полупроводнике (рис. 2.10 *в*). Под влиянием заряда на поверхности происходит притяжение к ней основных носителей и обогащение ими приповерхностного слоя. Такие слои называются *обогащенными*. Электрические свойства обогащенных контактов близки к омическим, поэтому их используют при формировании контактов к полупроводниковым приборам.

### 3 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

#### 3.1 Квантовая физика

1. Основываясь на характеристиках кристаллической структуры типа алмаза, рассчитайте следующие параметры кремния:

- число атомов, содержащихся в элементарной ячейке (единичном кубе);
- атомный радиус структуры, полагая, что длина ребра элементарной ячейки кристалла кремния  $a \approx 0,354$  нм;
- число атомов в  $1 \text{ см}^3$ ;
- число атомов, приходящихся на единицу площади в кристаллических плоскостях (111), (100) и (110). Приведенные значения индексов Миллера характеризуют положение плоскостей в кристалле. Три указанные здесь плоскости существенны для технологии полупроводниковых приборов;
- удельную плотность, положив, что атомная масса кремния равна 28.

#### Решение

а) Структура типа алмаза подобна кубической гранецентрированной структуре, каждой вершине которой принадлежит  $1/8$  атома, центру каждой грани –  $1/2$  атома. Однако здесь атом в центре тетраэдра чередуется с атомом, принадлежащим вершине (т. е. на каждую элементарную ячейку приходится дополнительно  $(1/2) \cdot 8$  тетраэдров). Следовательно, число атомов в элементарной ячейке структуры типа алмаза составляет

$$8 \cdot (1/8) + 6 \cdot (1/2) + 4 = 8.$$

б) Атомный радиус представляет собой длину отрезка, соединяющего два ближайших узла. Решетку типа алмаза можно получить из двух кубических гранецентрированных решеток, если одну из них сместить по диагонали куба в соответствии с вектором трансляции  $(a/4, a/4, a/4)$ . Тогда атомный радиус в решетке типа алмаза составит  $\sqrt{3} \frac{a}{4} = \sqrt{3} \cdot 0.354 / 4 = 0.23 \text{ нм}$ , а число атомов в

$$1 \text{ см}^3 \quad N = 8/a^3 = 8 \cdot 10^{21} / (0.354)^3 \approx 5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}.$$

в) Удельное число атомов в плоскости (111) можно подсчитать, обратившись к рис.3.1. Сторона треугольника в плоскости (111)  $b = a\sqrt{2}$ . Его площадь  $A = 1/2 \cdot a^2 \sqrt{3}$ . Число атомов, относящихся к данному треугольнику,  $3 \cdot (1/6) + 3(1/2) = 2$ . Тогда число атомов на единицу площади

$$2/A = 4/(a^2 \sqrt{3}) = 7,9 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}.$$

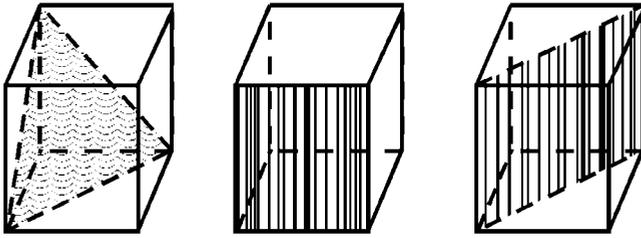


Рис. 3.1. Плоскости (111), (100) и (110)

Аналогично для плоскости (100), если число атомов, приходящихся на квадрат со стороной  $a$ , составляет  $4 \cdot (1/4) + 1 = 2$ , то число атомов, приходящихся на единицу площади, составит  $2/A = 2/a^2 = 6,8 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$ .

Наконец, в плоскости (110) имеется  $4 \cdot (1/4) + 2(1/2) = 2$  атома, относящихся к выделенному прямоугольнику площадью  $A = a^2 \sqrt{2}$ . Из этого следует, что поверхностная плотность размещения атомов составляет  $2/A = 2/(a^2 \sqrt{2}) = 4,8 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$ .

г) Плотность кремния равна массе атомов, содержащихся в элементарной ячейке, деленной на объем этой ячейки. Масса его атома равна молярной массе самого элемента  $P_a$  (г/моль), деленной на число Авогадро  $N_0 = 6,02 \cdot 10^{23}$ . Поэтому плотность кремния

$$\rho = \frac{8(P_a / N_0)}{a^3} = \frac{8 \cdot 28 / (6,02 \cdot 10^{23})}{(0,357 \cdot 10^{-9})^3} = 2330 \text{ кг/м}^3.$$

2. Пусть  $a_1, a_2$  и  $a_3$  являются векторами примитивных трансляций некоторой кристаллической решетки, а  $b_1, b_2$  и  $b_3$  – примитивными векторами трансляций обратной решетки. Покажите, что смешанное произведение описывается равенством

$$[b_1 b_2 b_3] = (2\pi)^3 / [a_1 a_2 a_3]$$

### Решение

Первый способ

$$[b_1 b_2 b_3] = [b_1(b_2 \times b_3)];$$

$$\begin{aligned} b_2 b_3 &= \frac{(2\pi)^2 \cdot (a_3 \times a_1)(a_1 \times a_2)}{[a_1 a_2 a_3]} = \frac{(2\pi)^2 [a_1(a_3 \times a_1)a_2 - a_2(a_3 \times a_1)a_1]}{[a_1 a_2 a_3]} = \\ &= \frac{(2\pi)^2 a_1}{[a_1 a_2 a_3]}, \end{aligned}$$

поскольку  $(a_3 \times a_1)a_1=0$ , то выполняется равенство

$$[b_1 b_2 b_3] = \frac{2\pi \cdot (a_2 \times a_3)}{[a_1 a_2 a_3]} \cdot \frac{(2\pi)^2 \cdot a_1}{[a_1 a_2 a_3]} = \frac{(2\pi)^3 (a_2 \times a_3) a_1}{[a_1 a_2 a_3]^2} = \frac{(2\pi)^3}{[a_1 a_2 a_3]}.$$

Второй способ

$$\begin{aligned} [b_1 b_2 b_3] &= \frac{(2\pi)^3 (a_2 \times a_3) \cdot [(a_3 \times a_1) \times (a_1 \times a_2)]}{[a_1 (a_2 \times a_3)]^3} = \\ &= \frac{8\pi^3}{V_0^3} (a_2 \times a_3) \cdot \{[(a_1 \times a_2) a_3] a_1 - [(a_1 \times a_2) a_1] a_3\} = \\ &= \frac{8\pi^3}{V_0^3} [(a_2 \times a_3) a_1] \cdot [(a_1 \times a_2) a_3] = \frac{8\pi^3}{V_0^3} \cdot V_0 = \frac{8\pi^3}{[a_1 a_2 a_3]}. \end{aligned}$$

3. Некоторая трехмерная решетка, имеющая форму куба со стороной  $L$ , содержит  $N$  атомов, каждый из которых имеет  $Z$  валентных электронов. Пусть электроны свободно перемещаются под действием приложенного электрического поля (приближение свободных электронов). Выведите выражение для оценки радиуса сферы Ферми в обратном пространстве.

### Решение

Уравнение Шрёдингера относительно волновой функции свободного валентного электрона, находящегося внутри кубического объема с длиной ребра  $L$ , имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \nabla^2 \psi(r) = E_k \psi_k(r), \text{ где } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Поскольку волновая функция имеет период  $L$ , то решением этого уравнения является равенство  $\psi_k(r) = \exp(jkr)$ , где  $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ , т.е.

$$k_x = \frac{2\pi m_x}{L} = 0; \pm \frac{2\pi}{L}; \pm \frac{4\pi}{L}; \quad k_y = \frac{2\pi m_y}{L} = 0; \pm \frac{2\pi}{L}; \pm \frac{4\pi}{L};$$

$$k_z = \frac{2\pi m_z}{L} = 0; \pm \frac{2\pi}{L}; \pm \frac{4\pi}{L}.$$

Данному решению отвечает некоторое значение энергии, принадлежащее множеству  $E = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$ .

В основном состоянии системы, состоящей из свободных электронов, уровни энергии в  $k$ -пространстве полностью заполняют так называемую сферу Ферми, имеющую радиус  $k_F$ . Энергию, отвечающую этому значению радиуса, называют энергией Ферми  $E_F = \frac{\hbar^2}{2m} k_F^2$ .

Каждому набору  $k_x, k_y, k_z$  отвечает некоторое квантовое состояние, следовательно, элемент объемом  $(2\pi/L)^3$  находится в  $k$ -пространстве. Поскольку спин может принимать одно из двух возможных состояний, каждую элементарную ячейку могут занимать два электрона с антипараллельными спинами. Таким образом, общее число квантовых уровней внутри сферы объемом  $\frac{4}{3}\pi k_F^3$  для системы из  $NZ$  электронов составит

$$\frac{(2\pi/L)^3}{2} = \frac{(4/3)\pi k_F^3}{NZ} \Rightarrow k_F = \left(\frac{3\pi^2 \cdot NZ}{L^3}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Вводя параметр  $n = N/L^3$  плотности атомов в физическом пространстве, получаем  $k_F = (3nZ\pi^2)^{\frac{1}{3}}$ .

4. Пусть электрон, имеющий полную энергию  $E$ , движется в области пространства с нулевым потенциалом. В точке  $x=0$  электрон попадает в область с постоянным потенциалом  $V_0 < E$ .

а) Изобразите одномерный график распределения энергии вдоль пути электрона.

б) Получите выражения для волновой функции  $\psi$  при  $x < 0$  и при  $x > 0$ , выразив ее через амплитуды  $A_b, A_r$  и  $A_t$  падающей, отраженной и прошедшей волн, соответственно.

в) Пусть энергия электрона равна 10 эВ, а высота потенциального барьера составляет 1 эВ. Найдите отношения амплитуд  $A_r/A_i$  и  $A_t/A_i$ . Вычислите отношения интенсивностей  $A_r A_r^* / A_i A_i^*$  и  $A_t A_t^* / A_i A_i^*$ .

## Решение

а) Электрон движется по некоторому уровню энергии и внезапно получает импульс энергии равный  $eV_0$ , т.е. скачкообразно переходит на другой уровень энергии (рис. 3.2).

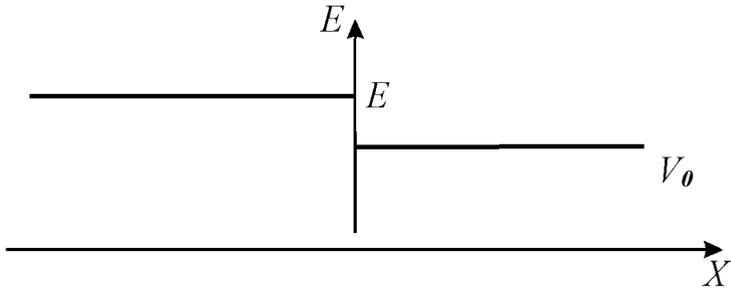


Рис 3.2. Уровень полной энергии и распределение потенциала  $V_0$

б) Уравнение Шрёдингера в области  $x < 0$  имеет вид

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + k_1^2\psi_1 = 0, \text{ где } k_1^2 = \frac{8\pi^2mE}{h^2}.$$

Решение этого уравнения представляет две волны, одна из которых, падающая, распространяется в сторону  $x > 0$  и имеет амплитуду  $A_i$ , а другая, отраженная, распространяется в сторону  $x < 0$ , имея амплитуду  $A_r$ .

При  $x > 0$  поведение электрона описывается уже волновым уравнением

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + k_2^2\psi_2 = 0, k_2^2 = \frac{8\pi^2m}{h^2}(E - V_0),$$

имеющим решение

$$\psi_2 = A_t \cdot \exp(jk_2x),$$

где  $A_t$  – амплитуда прошедшей волны.

в) В соответствии с граничными условиями волновые функции и их производные должны быть непрерывными в точке  $x=0$ :

$$\psi_1 = \psi_2, \quad \frac{d\psi_1}{dx} = \frac{d\psi_2}{dx} \text{ при } x=0.$$

Отсюда следуют равенства

$$A_i + A_r = A_t, \quad k_1(A_i - A_r) = k_2A_t$$

$$A_r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \cdot A_i, \quad A_t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \cdot A_i.$$

Заметим далее, что

$$k_1 = KE^{1/2} = \sqrt{10}K, \text{ а } k_2 = K(E - V_0)^{1/2} = 3K,$$

где  $K$  – постоянное число.

Таким образом, отношения амплитуд:

$$\frac{A_r}{A_i} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{\sqrt{10} - 3}{\sqrt{10} + 3} = 0,0263,$$

$$\frac{A_t}{A_i} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10} + 3} = 1,0263.$$

Соответствующие отношения интенсивностей

$$\frac{A_r \cdot A_r^*}{A_i \cdot A_i^*} = 6,917 \cdot 10^{-4}, \quad \frac{A_t \cdot A_t^*}{A_i \cdot A_i^*} = 1,0534.$$

В квантовой механике показано, что вероятность прохождения электрона через потенциальный барьер численно равна так называемому коэффициенту

прохождения  $T = \frac{A_t^2}{A_i^2} \cdot \frac{k_2}{k_1}$ . В рассматриваемом случае  $T = 0,99934$ , т.е. такое

событие является весьма вероятным.

### 3.2 Физика полупроводников

5. Известно, что поверхность кремния (Si) в качестве легирующей примеси содержит  $10^{-4}$  атомных процента мышьяка (As). Затем он легируется фосфором (P) до  $3 \cdot 10^{16}$  ат/см<sup>3</sup> и после этого равномерно легируется бором (B) до  $10^{18}$  ат/см<sup>3</sup>. Полученная структура проходит термический отжиг, который полностью активирует все примеси.

- а) Какой тип проводимости будет иметь образец кремния?
- б) Чему будет равна концентрация основных носителей заряда?

#### Решение

Мышьяк является элементом V группы таблицы Менделеева, поэтому он является донорной примесью. Структура кремния содержит  $5 \cdot 10^{22}$  см<sup>-3</sup> атомов матрицы и  $10^{-4}$  атомных процента атомов примеси As. Это означает, что концентрация атомов As в Si равна  $5 \cdot 10^{22} \cdot 10^{-6} = 5 \cdot 10^{16}$  см<sup>-3</sup>. Дополнительное леги-

рование Si фосфором ( $3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ ) увеличивает содержание доноров в Si до  $8 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ , а легирование Si бором превращает Si *n*-типа в полупроводник *p*-типа проводимости, т.к. концентрация акцепторов теперь будет превосходить концентрацию доноров. Результирующая концентрация акцепторов будет меньше, чем атомов бора.

Таким образом:

а) Кремний имеет *p*-тип проводимости.

$$\text{б) } p = Na(B) - [Nd(As) + Nd(P)] = 10^{18} - (5 \cdot 10^{16} + 3 \cdot 10^{16}) = 9,2 \cdot 10^{17}.$$

6. Найти положение уровня Ферми и температурную зависимость концентрации электронов в собственном полупроводнике. Как изменится концентрация электронов при изменении температуры от 200 К до 300 К, если  $E_g = (0.785 - \xi T) \text{ эВ}$ .

### Решение

Из условия электронейтральности  $n=p$  в невырожденном полупроводнике имеем:

$$2 \left( \frac{m_n kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{\frac{E_F - E_c}{kT}} = 2 \left( \frac{m_p kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{\frac{E_v - E_F}{kT}}.$$

После переноса скобок налево, а экспоненты – направо и выполнения необходимых сокращений получим

$$\exp\left(\frac{2E_F - E_c + E_v}{kT}\right) = \left(\frac{m_p}{m_n}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

После логарифмирования получим

$$E_F = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{3}{4} kT \ln \frac{m_p}{m_n}.$$

Концентрация электронов равна:

$$n_i = \sqrt{n_p p} = 2 \left[ \frac{(m_n m_p)^{\frac{1}{2}} kT}{2\pi\hbar^2} \right] e^{\frac{E_v - E_c}{2kT}}.$$

Отношение концентраций при 300 К и 200 К равно:

$$\frac{n_{300}}{n_{200}} = \left(\frac{300}{200}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{\Delta}{2k}\left(\frac{1}{300} - \frac{1}{200}\right)\right] = 3.6 \cdot 10^3.$$

7. В исследуемом полупроводнике концентрация электронов при  $T=400$  К составляла  $1,3 \cdot 10^{16}$  см<sup>-3</sup>, а при 350 К -  $6,2 \cdot 10^{15}$  см<sup>-3</sup>. Найти ширину запрещенной зоны материала, считая, что ее температурная зависимость изменяется по линейному закону.

### Решение

Отношение концентраций при температурах  $T_1$  и  $T_2$  равно:

$$\frac{n_1}{n_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{\Delta}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right].$$

Решая полученное равенство относительно  $\Delta$ , получим

$$\Delta = 2k \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \ln \frac{n_1 T_2^{\frac{3}{2}}}{n_2 T_1^{\frac{3}{2}}}.$$

Для заданных условий  $\Delta = 0.26$  эВ.

Ширина запрещенной зоны определяется из равенства при условии  $\xi = 2 \cdot 10^{-4}$ :

$$E_g = (\Delta - \xi T).$$

8. Как изменится концентрация собственных электронов при изменении температуры от 200К до 300К, если  $E_g = (0.785 - \xi T)$  эВ.

### Решение

Полагая  $E_c - E_v = \Delta - \xi T$ , находим, что отношение концентраций при 300 К и 200 К равно:

$$\frac{n_{300}}{n_{200}} = \left(\frac{300}{200}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{\Delta}{2k}\left(\frac{1}{300} - \frac{1}{200}\right)\right] = 3.6 \cdot 10^3.$$

9. Концентрация электронов в собственном полупроводнике при  $T=400$  К оказалась равной  $1.38 \cdot 10^{-5} \text{ см}^{-3}$ . Найти значение произведения эффективных масс электрона и дырки, если известно, что ширина запрещенной зоны изменяется по закону  $E_g=(0.785-4 \cdot 10^{-4}T)$  эВ.

### Решение

С учетом температурного изменения  $E_g$  концентрация электронов в собственном полупроводнике равна:

$$n_i = 2 \left( \frac{\sqrt{m_n m_p} kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{\xi}{2k}\right) \exp\left(-\frac{\Delta}{2kT}\right),$$

где  $\Delta = E_g + \xi T$ . Отсюда:

$$2 \left( \frac{\sqrt{m_n m_p} kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\xi}{2k}\right) = nT^{\frac{-3}{2}} \exp\left(\frac{\Delta}{2kT}\right)$$

и, следовательно,

$$\frac{m_n m_p}{m_0^2} = \left( \frac{2\pi\hbar^2}{kT} \right) \left( \frac{n}{2} \right)^{\frac{4}{3}} \frac{1}{m_0^2} \exp\left(\frac{2\Delta}{3kT} - \frac{2\xi}{3k}\right) = 0.21.$$

10. Концентрация электронов в собственном полупроводнике при  $T=400$  К оказалась равной  $1.38 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ . Определить величину произведения эффективных масс электрона и дырки, если известно, что ширина запрещенной зоны меняется по закону  $E_g = (0.785-4 \cdot 10^{-4}T)$  эВ.

### Решение

С учетом температурного изменения ширины запрещенной зоны концентрация в собственном полупроводнике описывается равенством

$$n_i = \sqrt{np} = 2 \left( \frac{\sqrt{m_n m_p} kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{\xi}{2k}\right) \exp\left(-\frac{\Delta}{2kT}\right),$$

где  $\Delta = E_g + \xi T$ .

Отсюда получаем

$$2 \left( \frac{\sqrt{m_n m_p} kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\xi}{2kT}\right) = nT^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{\Delta}{2kT}\right).$$

Следовательно:

$$\frac{m_n m_p}{m_0^2} = \left( \frac{(2\pi\hbar^2)^2}{(kT)^2 2^3} \right) \frac{1}{m_0^2} n_i^{\frac{4}{3}} \exp\left(\frac{2\Delta}{3kT} - \frac{2\xi}{3kT}\right) = 0.21.$$

**11.** Вычислить собственную концентрацию носителей заряда в кремнии при  $T=300$  К, если ширина его запрещенной зоны  $E_g=1.12$  эВ, а эффективные массы состояний равны  $m_c=1,05m_0$ ,  $m_v=0,56 m_0$ .

### Решение

В собственном полупроводнике вследствие выполнения равенства  $p=n$  достаточно определить концентрацию собственных электронов, характер изменения которых описывается выражением

$$n_i = \sqrt{N_c N_v} \exp\left(\frac{E_g}{2kT}\right).$$

Эффективную плотность квантовых состояний, которые способны занять электроны ( $N_c$ ) и дырки ( $N_v$ ), можно определить, используя выражения:

$$\begin{aligned} N_c &= 2 \left( \frac{2\pi k T m_c}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2(2 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 1.05 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 1.38 \cdot 10^{23} T)^{\frac{3}{2}}}{(6.62 \cdot 10^{-34})^3} = \\ &= 2.69 \cdot 10^{25} \left( \frac{T}{300} \right)^{\frac{3}{2}}, \\ N_v &= \frac{2(2 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 0.56 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 1.38 \cdot 10^{23} \cdot T)^{\frac{3}{2}}}{(6.62 \cdot 10^{-34})^3} = 1.05 \cdot 10^{25} \left( \frac{T}{100} \right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Используя для решения задачи эти значения, получим

$$n_i = 10^{25} \sqrt{2.69 \cdot 1.05} \exp\left(\frac{1.12}{2 \cdot 8.625 \cdot 10^{-5} \cdot 300}\right) \approx 7 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-3}.$$

12. Показать, что при  $E < E_F$  и  $T=0$  функция Ферми-Дирака  $f(E)=1$ , а при  $E > E_F$  и  $T=0$   $f(E)=0$ . В каком случае здесь рассматривается  $p$ -полупроводник, а в каком –  $n$ -полупроводник ?

**Решение**

Функция Ферми-Дирака описывается равенством

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)},$$

следовательно, при  $E < E_F$  числитель при экспоненте будет отрицателен. Это дает право записать функцию Ферми-Дирака в следующем виде:

$$f(E) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)}}.$$

При  $T=0$  выражение в знаменателе  $\frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)} = 0$ , а из этого следует и

выполнение равенства  $f(E)=1$ .

Аналогично выполняется и доказательство равенства  $f(E)=0$  при  $E > E_F$ .

13. Вычислить положение уровня Ферми при  $T=300$  К в кристалле германия, содержащем  $2 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$  атомов мышьяка и  $10^{22} \text{ м}^{-3}$  атомов галлия.

**Решение**

Выполнение неравенства  $N_D > N_A$  означает, что полупроводник проявляет электропроводность  $n$ -типа. При этом избыточная концентрация доноров  $N'_D = N_D - N_A$ . При  $T=300$  К все доноры ионизированы, поэтому можно принять  $n \approx N'_D$ .

Из выражения

$$n = N_E \exp\left(\frac{E_c - E_v}{kT}\right)$$

находим:

$$(E_C - E_F) = kT \ln \frac{N_C}{N_D} = 8.625 \cdot 10^{-5} \cdot 300 \ln \frac{1.02 \cdot 10^{25}}{10^{22}} = 0.179 \text{ эВ}.$$

14. Определить положение середины запрещенной зоны в собственном полупроводнике ( $E_i$ ) и её зависимость от температуры.

### Решение

Условием существования собственного полупроводника является выполнение равенства  $n=p$ . Концентрации электронов и дырок в невырожденном полупроводнике описываются выражениями:

$$n = N_c \exp\left(-\frac{E_C - E_F}{kT}\right),$$

$$p = N_v \exp\left(-\frac{E_F - E_V}{kT}\right).$$

Подставив эти выражения в равенство и решая его относительно уровня Ферми, получим

$$E_F = \frac{1}{2}(E_C + E_V) - kT \ln \frac{N_C}{N_V}.$$

Согласно теории энергетических диаграмм положение энергетического уровня середины запрещенной зоны определяется равенством

$$E_i = \frac{1}{2}(E_c + E_v),$$

следовательно

$$E_i = E_F + kT \ln \frac{N_c}{N_v}.$$

15. Определить положение уровня Ферми в собственном полупроводнике, если

$$n = 2 \left( \frac{m_n kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[ \frac{(E_F - E_c)}{kT} \right];$$

$$p = 2 \left( \frac{m_p kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[ \frac{(E_V - E_F)}{kT} \right].$$

## Решение

Условием существования собственного полупроводника является выполнение равенства  $p=n$ , подставляя в которое функциональные значения  $n$  и  $p$ , получим уравнение вида

$$\exp\left[\frac{(2E_F - E_C + E_V)}{kT}\right] = \left(\frac{m_p}{m_n}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Логарифмируя обе части равенства и решая его относительно уровня Ферми, получим:

$$E_F = \frac{1}{2}(E_C + E_V) + \frac{3}{4}kT \ln\left(\frac{m_p}{m_n}\right).$$

16. Определить дрейфовую скорость электрона ( $g_D$ ) при следующих параметрах: удельное сопротивление образца  $\rho=0,01$  Ом·см, длина образца  $l=5$  см, напряжение, прилагаемое к образцу, равно  $U=80$  В, концентрация электронов  $n = 6,2 \cdot 10^{15}$  см<sup>-3</sup> при  $T=300$  К.

## Решение

Если воспользоваться равенствами

$$g_D = \mu E; \quad E = \frac{U}{l}; \quad j = \sigma E = \frac{E}{\rho}; \quad \frac{1}{\rho} = en\mu; \quad \mu = \frac{\sigma}{en},$$

то выполнив необходимые математические преобразования, можно получить выражение

$$g_D = \frac{\sigma}{en} E = \frac{E}{\rho en}.$$

17. Определить удельную проводимость примесного полупроводника ( $\sigma$ ), если:

$$m_p=0,37m_0, \quad n=1,37 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3} \text{ при } T=400 \text{ К}; \quad n_i=1,38 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3} \text{ при } T=400 \text{ К}; \\ \tau_m=0,25 \cdot 10^{-12} \text{ с}, \quad e=1,6 \cdot 10^{-12} \text{ к}, \quad m_0=9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}, \quad m_n=0,56 m_0.$$

## Решение

Полная проводимость примесного полупроводника определяется из выражения  $\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p)$ . Из закона действующих масс  $np = n_i^2$  находим отношение

$$p = \frac{n_i^2}{n}. \text{ Характер изменения подвижностей электронов и дырок определяется}$$

из выражений  $\mu_n = \frac{e}{m_n} \tau_M$ ;  $\mu_p = \frac{e}{m_p} \tau_M$ . Подставляя полученные равенства

в исходное уравнение, получаем

$$\sigma = e^2 \tau_M \left( \frac{n}{m_n} + \frac{n_i^2}{m_p n} \right).$$

**18.** Образец кремния  $n$ -типа, находящийся в состоянии термодинамического равновесия при температуре 300 К, характеризуется следующими параметрами: удельное сопротивление 5 Ом·см; подвижность электронов  $1600 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ ; подвижность дырок  $600 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ ; собственная концентрация носителей  $1,4 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$  и эффективная плотность уровней в зоне проводимости  $10^{19} \text{ см}^{-3}$ . Определите: а) концентрацию электронов и дырок; б) положение уровня Ферми; в) вероятность событий, состоящих в том, что донорный уровень занят и свободен. Известно, что  $E_c - E_d = 50 \text{ мэВ}$ .

### Решение

а) Запишем уравнения, определяющие удельную объемную проводимость, а также уравнение полупроводника (закон действующих масс):

$$\sigma = q(\mu_n n + \mu_p p); \quad np = n_i^2.$$

Объединяя эти две формулы, получаем  $\sigma = q(\mu_n n + \mu_p \cdot \frac{n_i^2}{n})$ , т.е.

$$0,2 = 1,6 \cdot 10^{-19} \left( 1600 \cdot n + \frac{600 \cdot (1,4 \cdot 10^{10})^2}{n} \right),$$

откуда  $n = 0,8 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ .

Следует иметь в виду, что параметр  $n_i$  - постоянная величина, зависящая для каждого полупроводникового материала только от температуры.

Воспользовавшись уравнением полупроводника, получаем  $p = 2,45 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$ .

б) Известно, что

$$n = N_c \cdot \exp\left(-\frac{E_C - E_F}{kT}\right).$$

Подставляя соответствующие значения, находим

$$0,8 \cdot 10^{15} = 10^{19} \cdot \exp\left(-\frac{E_C - E_F}{kT}\right),$$

откуда  $E_C - E_F = 0,244$  эВ.

в) Вероятность того, что донорный уровень заполнен,

$$f(E_d) = \left[1 + \exp\left(\frac{E_d - E_F}{kT}\right)\right]^{-1}.$$

Так как  $E_C - E_F = 0,244$  эВ,  $E_C - E_d = 0,05$  эВ, то  $E_d - E_F = 0,194$  эВ, откуда

$$f(E_d) = \left[1 + \exp\left(\frac{0,194}{0,026}\right)\right]^{-1} = 5,7 \cdot 10^{-4}.$$

Итак, вероятность того, что донорный уровень занят, составляет 0,057 %, что обозначает относительную долю ионизированных атомов с занятым донорным уровнем. В то же время относительная доля ионизированных атомов с незанятым донорным уровнем равна 99,943 %.

Интересно отметить, что с ростом концентрации донорных атомов  $N_d$  уровень Ферми приближается к границе зоны проводимости. При этом возрастает вероятность того, что он будет занят, и уменьшается относительная доля ионизированных донорных атомов. Аналогичные рассуждения применимы и в случае акцепторной примеси. Если уровень  $E_F$  приближается к границе валентной зоны, то число дырок возрастает, а концентрация электронов уменьшается.

**19.** Найдите положение уровней Ферми в германии, находящемся в состоянии термодинамического равновесия. Материал легирован акцепторными атомами с концентрацией  $10^{15} \text{ см}^{-3}$ . Значения температуры  $T=0, 100, 300$  и  $400$  К. Считайте, что при  $T=100$  К ионизированными оказываются 50%, а при более высоких температурах ионизировано 100% примесных атомов. При комнатной температуре  $T_k$  имеет место равенство

$$n_i^2 = 3,1 \cdot 10^{32} T_k^3 \exp\left(\frac{-9100}{T_k}\right).$$

**Решение**

При  $T=0$  К электропроводность отсутствует и

$$E_F = E_i = (E_c - E_v)/2.$$

При  $T=100$  К

$$n_i^2 = 3,1 \cdot 10^{32} (100)^3 \exp\left(-\frac{9100}{100}\right) \approx 0,093 \text{ см}^{-6},$$

$$n \approx 0,31 \text{ см}^{-3},$$

$$p = \frac{N_a}{2} + \left[ \frac{N_a^2}{4} + 300n_i^2 - 100n_i^2 \right]^{1/2} \approx 5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3},$$

$$n = \frac{n_i^2}{p} \approx 1,9 \cdot 10^{-16} \text{ см}^{-3}.$$

Таким образом, здесь превалирует режим примесной электропроводности:

$$E_F = E_i - kT \ln \frac{5 \cdot 10^{14}}{0,31} = E_i - 0,00861 \ln \frac{5 \cdot 10^{14}}{0,31} = E_i - 0,302 \text{ эВ}.$$

При  $T=300$  К

$$n_i^2 = 3,1 \cdot 10^{32} (300)^3 \exp\left(-\frac{9100}{300}\right) \approx 5,8 \cdot 10^{26} \text{ см}^{-6} \rightarrow n_i \approx 2,4 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3},$$

$$p = 10^{15} \text{ см}^{-3} \rightarrow n \approx 5,6 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3},$$

$$E_F = E_i - 0,026 \ln \frac{10^{15}}{2,4 \cdot 10^{13}} = E_i - 0,097 \text{ эВ}.$$

При  $T=400$  К

$$n_i^2 = 2,63 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-6} \rightarrow n_i \approx 1,62 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3},$$

$$p = \frac{N_a}{2} + \left[ \frac{N_a^2}{4} + 400n_i^2 - 300n_i^2 \right]^{1/2} \approx \frac{10^{15}}{2} + 1,6 \cdot 10^{15} \approx 2,1 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3},$$

$$n = 2,63 \cdot 10^{30} / (2,1 \cdot 10^{15}) \approx 1,25 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}.$$

Следовательно, имеет место режим собственной электропроводности:

$$E_F = E_i + 0,034 \ln \frac{2,1 \cdot 10^{15}}{1,6 \cdot 10^{15}} = E_i + 0,009 \text{ эВ} .$$

20. В эксперименте по изучению эффекта Холла, проведенном с образцом кремния, получены следующие данные:  $l=1,0 \text{ см}$ ;  $d=0,1 \text{ см}$ ;  $a=0,2 \text{ см}$ ;  $I=5 \text{ мА}$ ;  $B=1 \text{ Тл}$ ;  $U=0,245 \text{ В}$  (в направлении тока  $I$ );  $U_H=2,0 \text{ мВ}$ . Считая, что коэффициент Холла  $r_H=1,18$ , определите: а) тип полупроводника, из которого выполнен образец; б) концентрацию основных носителей; в) холловскую подвижность носителей; г) подвижность, связанную с протеканием основного тока; д) коэффициент диффузии.

### Решение

а) Поскольку напряжение  $U_H$  положительно, образец выполнен из полупроводника  $p$ -типа;

$$\text{б) } J = I/(ad); \quad \xi_n = U_H/a; \quad \xi = U/l;$$

$$R_H = \frac{r_H}{qp} = \frac{\xi_H}{JB} = \frac{U_H d}{IB} = \frac{U_H}{aJB};$$

$$p = \frac{r_H IB}{qU_H d} = 1,84 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3};$$

$$\text{в) } \mu_p = \frac{r_H \sigma}{qp} = \sigma |R_H| = \frac{U_H I}{aUB} = 408 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1};$$

$$\text{г) } \frac{\mu_p (\text{эффект Холла})}{\mu_n (\text{электропроводность})} = r_H;$$

$$\mu_n (\text{электропроводность}) = 408/1,18 = 346 \text{ см}^2 \text{В}^{-1} \text{с}^{-1};$$

$$\text{д) } D_p = \frac{kT}{q} \mu_p = 9 \text{ см}^2 \text{с}^{-1}.$$

21. Процесс инжекции носителей приводит к разделению квазиуровней Ферми, относящихся к электронам и дыркам. Покажите, что при нарушении

нии термодинамического равновесия произведение концентраций носителей остается тем же, что и в равновесном состоянии, если вместо ширины запрещенной зоны  $E$  использовать параметр  $E_q = (E_{Fn} - E_{Fp})$ .

### Решение

В состоянии термодинамического равновесия

$$np = N_c N_v \cdot \exp[-E'_g / (kT)],$$

где  $E'_g = E_q - (E_{Fn} - E_{Fp})$  в соответствии с приведенными условиями. Если термодинамическое равновесие нарушается, то

$$n = n_i \exp\left(-\frac{E_{Fn} - E_i}{kT}\right) = N_c \exp\left(-\frac{E_c - E_{Fn}}{kT}\right),$$

$$p = n_i \exp\left(-\frac{E_i - E_{Fp}}{kT}\right) = N_v \exp\left(-\frac{E_{Fp} - E_i}{kT}\right)$$

и поэтому

$$np = N_c N_v \exp\left(-\frac{E_q - (E_{Fn} - E_{Fp})}{kT}\right),$$

где  $E_q = E_c - E_v$ .

Итак, доказано, что произведение концентраций носителей оказывается одинаковым независимо от того, выполняются ли условия термодинамического равновесия, если считать, что ширина запрещенной зоны  $E'_g = E_q - (E_{Fn} - E_{Fp})$ .

**22.** Имеется образец полупроводника, размеры которого достаточно велики для того, чтобы можно было пренебречь влиянием поверхности. При  $x=0$  существует однородный источник, создающий избыточную концентрацию неосновных носителей заряда, которая изменяется лишь вдоль оси  $x$ . Внешнее электрическое поле отсутствует, и система находится в стационарном состоянии. Полупроводник  $n$ -типа невырожден, равномерно легирован атомами примеси с концентрацией  $N_d$ , выполняются условия низкого уровня инжекции и квазинейтральности ( $J_{dp} = J_{ap}$ ).

Принимая во внимание уравнение непрерывности вида

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} = \frac{n_p - n_{p0}}{\tau_n} + \mu_n \cdot \frac{d}{dx}(n_p \cdot \varepsilon) + D_n \cdot \frac{d^2 n_p}{dx^2}, \quad (2.28)$$

найдите:

- а) концентрацию неосновных носителей заряда как функцию переменной  $x$ ;  
 б) плотности токов диффузии неосновных и основных носителей заряда, считая, что  $D_n = 2D_p$   
 в) плотность дрейфового тока основных носителей;  
 г) напряженность внутреннего электрического поля.

**Решение**

а) При заданном уровне инжекции и нейтральности полная скорость рекомбинации

$$V = p'_n / \tau_p, \quad p'_n = p_n - p_0,$$

Кроме того, поскольку система стационарна и одномерна, уравнение непрерывности (2.28) сводится к уравнению диффузии:

$$\frac{d^2 p'_n}{dx^2} = \frac{p'_n}{L_p^2}, \quad L_p = (D_p \tau_p)^{1/2}.$$

Приняв во внимание заданные граничные условия  $p'_n(0) = 0$  и  $p'_n(\infty) = 0$ , запишем решение дифференциального уравнения диффузии в виде  $p'_n = A \cdot \exp(-x/L_p)$ .

При  $x=0 \quad \exp(0) = 1$ , поэтому  $p_n(x) - p_{n0} = p'_n(0) = A$ . Таким образом,

$$p_n(x) = p_{n0} + p'_n(x) = p'_n(0) \exp(-x/L_p).$$

б) Плотность диффузионного тока неосновных носителей

$$J_{dp} = qD_p \cdot \frac{dp_n}{dx} = q \frac{D_p}{L_p} p'_n(0) \exp(-x/L_p).$$

Так как в соответствии с условием квазинейтральности  $n_n - n_{n0} = n'_n \approx p'_n$ , то плотность тока диффузии основных носителей

$$J_{dn} = qD_n \cdot \frac{dn_n}{dx} = qD_n \frac{dp_n}{dx} \approx 2qD_p \frac{dp_n}{dx} = -2J_{dp}.$$

в)  $J = J_{an} + J_{dn} + J_{ap} + J_{dp} \approx J_{an} + J_{dn} + J_{dp}$ ;

$$J \approx J_{an} - J_{dp} = J_{an} - q \frac{D_p}{L_p} p'_n(0) \exp\left(-\frac{x}{L_p}\right);$$

$$J_{an} = J + q \frac{D_p}{L_p} p'_n(0) \exp\left(-\frac{x}{L_p}\right).$$

г) Используя уравнение непрерывности, а также принимая во внимание то, что рассматриваемый режим является невырожденным, низок уровень инжекции и ярко выражен примесный характер электропроводности ( $n'_n \approx p'_n \ll n_{n0} \approx N_d$ ), получаем

$$\xi_i^z = \frac{J_{an}}{q\mu_n n} \approx \frac{1}{q\mu_n N_d} \left[ J + q \frac{D_p}{L_p} p_n'(0) \cdot e^{-x/L_p} \right].$$

#### 4 УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

**Задача 1.** В германиевом кубике длиной 11 мм, находящемся под напряжением 15 мВ, протекает ток силой 7 мА. Напряжение приложено к граням кубика. Задавшись подвижностью электронов равной  $0,4 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ , найти значение концентрации носителей. Чему равно время релаксации, если эффективная масса электрона в германии равна  $0,12m_0$  ( $m_0$  – масса свободного электрона)?

**Задача 2.** Показать, что наиболее вероятная энергия, которую электрон имеет в зоне проводимости, на  $0,5kT$  выше дна зоны проводимости. Считая, что уровень Ферми расположен на несколько единиц  $kT$  ниже дна зоны проводимости, найти среднюю энергию электрона.

**Задача 3.** Учитывая, что в данном полупроводнике  $N_n N_p = N_i^2$ , найти отношение  $N_p/N_n$ , которое обеспечивает минимум проводимости. Пусть времена релаксации для электронов и дырок равны и  $m_n^*/m_p^* = 0,5$ .

**Задача 4.** Для получения кремниевого образца р-типа с удельным сопротивлением 11 Ом·м его необходимо легировать алюминием. Пусть все атомы алюминия ионизированы и принимая подвижность дырок в кремнии равной  $0,05 \text{ м}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ , найти необходимую концентрацию алюминия.

**Задача 5.** Образец кремния легирован индием, акцепторный уровень для которого расположен на  $0,17 \text{ эВ}$  выше границы валентной зоны. Найти при какой концентрации примеси уровень Ферми совпал бы с примесным уровнем при 300 К? Определить долю заполненных в данном случае акцепторных уровней и концентрации основных и неосновных носителей, если  $E_g = 1,1 \text{ эВ}$ ,  $m_n^* = 0,26m_0$ ,  $m_p^* = 0,39m_0$ ,  $\mu_n = 0,15 \text{ м}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ ,  $\mu_p = 0,05 \text{ м}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ .

**Задача 6.** При абсолютной температуре  $T_1$  полупроводник n-типа имеет проводимость  $\sigma$ . Оказалось, что при этой температуре вклад рассеяния на примесях и рассеяния на колебаниях решетки в процессе релаксации одинаков. Считая, что в диапазоне температур от  $T_1$  до  $2T_1$  плотность электронов возрастает с температурой квадратично, определить отношение  $\sigma(2T_1)/\sigma(T_1)$ .

**Задача 7.** В примесном полупроводнике скорость рекомбинации носителей равна скорости их генерации и задается выражением  $r_{\text{прим}} = aN_n N_p$ , где  $a$  – коэффициент пропорциональности. Показать, что в случае если концентрация неосновных носителей в полупроводнике n-типа превысит при  $t=0$  равновесное значение  $(\delta N_p)_0$ , то избыточная концентрация будет стремиться с течением времени к нулю по закону

$$\delta N_p = (\delta N_p)_0 \exp(-t/\tau_p),$$

где  $\tau_p = aN_p$ .

При решении необходимо учесть, что скорость рекомбинации пропорциональна реальной концентрации носителей, в то время как скорость генерации остается постоянной.

**Задача 8.** В чем состоит качественное различие спектров поглощения полупроводников с прямыми и непрямыми переходами электронов?

**Задача 9.** Для образца собственного кремния с параметрами  $E_g=1,1$  эВ,  $m_n^*=0,26m_0$ ;  $m_p^*=0,39m_0$ ;  $\mu_n=0,155$  м<sup>2</sup>/В·с;  $\mu_p=0,0052$  м<sup>2</sup>/В·с рассчитать сопротивление образца при комнатной температуре, при 350 °С. Найти температурный коэффициент сопротивления, определяемый как  $(1/R)(dR/dT)$ . Как его использовать для измерения температуры?

**Задача 10.** Концентрация собственных носителей в некотором полупроводнике равна  $N_i$ . При легировании его донорной примесью с концентрацией  $N_0$  изменяется концентрация как электронов, так и дырок. Изобразить график зависимости относительных концентраций электронов  $N_n/N_i$  и дырок  $N_p/N_i$  от  $N_0/N_i$  в диапазоне  $0 \leq N_0/N_i \leq 10$ . Считать, что все донорные атомы ионизированы.

**Задача 11.** Вывести уравнение непрерывности для неосновных носителей в полупроводнике n-типа. При выводе учесть рекомбинацию избыточных носителей, введя время их жизни  $\tau_p$ .

**Задача 12.** Определить удельную проводимость примесного полупроводника ( $\sigma$ ), если:  $m_p=0,23m_0$ ;  $n=2,7 \cdot 10^{16}$  см<sup>-3</sup> при  $T=390$  К;  $n_i=1,8 \cdot 10^{15}$  см<sup>-3</sup> при  $T=390$  К;  $\tau_n=0,24 \cdot 10^{-12}$  с;  $e=1,6 \cdot 10^{-12}$  к;  $m_0=9,1 \cdot 10^{-31}$  кг,  $m_n=0,53 m_0$ .

**Задача 13.** Образец кремния n-типа, находящийся в состоянии термодинамического равновесия при температуре 300 К, характеризуется следующими параметрами: удельное сопротивление 12 Ом·см; подвижность электронов 1450 см<sup>2</sup>·В<sup>-1</sup>·с<sup>-1</sup>; подвижность дырок 670 см<sup>2</sup>·В<sup>-1</sup>·с<sup>-1</sup>; собственная концентрация носителей  $1,2 \cdot 10^{10}$  см<sup>-3</sup> и эффективная плотность уровней в зоне проводимости  $10^{19}$  см<sup>-3</sup>. Определите: а) концентрацию электронов и дырок; б) положение уровня Ферми; в) вероятность событий, состоящих в том, что донорный уровень занят и свободен. Известно, что  $E_c-E_d=50$  мэВ.

**Задача 14.** Пусть в полупроводнике, легированном акцепторной примесью с концентрацией  $N_a$ , акцепторный уровень примеси располагается при  $E_a = E_g/5$ . При рабочей температуре  $E_g=20$  кТ,  $E_F=5$  кТ. Эффективные массы электронов и дырок  $m_n^*=0,12m_0$ ,  $m_p^*=m_0$ . Найти для концентрации  $N_a=10^{23}$  м<sup>-3</sup>: концентрацию ионизированных акцепторных атомов; концентрации дырок и электронов и их отношение  $N_n/N_p$ ; рабочую температуру; ширину запрещенной области.

**Задача 15.** Образец арсенида галлия был легирован избыточным количеством мышьяка так, чтобы его удельное сопротивление составило 0,049 Ом·м. Однако на самом деле из-за присутствия неизвестной акцепторной примеси удельное сопротивление оказалось равным 0,061 Ом·м, хотя образец остался полупроводником n-типа. Найти значения концентраций атомов донорной и акцепторной примесей в образце. Пусть  $\mu_n=0,86$  м<sup>2</sup>/В·с и все атомы примеси ионизированы.

**Задача 16.** Зависимость удельного сопротивления собственного германия от температуры приведена в следующей таблице:

T, К	385	455	556	714
$\rho$ , Ом·м	0,028	0,0061	0,0013	0,000274

Считая, что приближенно подвижности дырок и электронов меняются при изменении температуры пропорционально  $T^{-3/2}$ , а ширина запрещенной зоны не зависит от температуры, найти величину ширины запрещенной зоны  $E_g$ . При какой длине волны будет наблюдаться начало роста оптического поглощения?

**Задача 17.** Вывести выражение для энергии Ферми в собственном полупроводнике. Насколько близок уровень Ферми к середине запрещенной зоны в GaAs при комнатной температуре? Ширина запрещенной зоны равна 1,4 эВ, а эффективные массы электронов и дырок составляют соответственно 0,067 и 0,065 $m_0$ .

**Задача 18.** В структуре с германиевым *p-n*-переходом удельная проводимость *p*-области  $\sigma_p=10^{14}$  Ом/м, а *n*-области  $\sigma_n=10^2$  Ом/м. Подвижность электронов  $\mu_n=0.39$  м<sup>2</sup>/В·с,  $\mu_p=0.19$  м<sup>2</sup>/В·с. Вычислить:

- плотность обратного тока насыщения;
- отношение дырочной составляющей обратного тока насыщения к электронной, если  $L_n=L_p=10^{-3}$  м;
- напряжение, при котором плотность прямого тока  $j=10^5$  а/м<sup>2</sup>.

**Задача 19.** В образец чистого кремния введены донорные атомы фосфора с концентрацией  $10^{16}$  см<sup>-3</sup>. Предположим, что атомы фосфора распределены в кремнии равномерно. Атомная масса фосфора равна 31.

- Чему равно удельное сопротивление образца при 300 К?
- Какую долю по массе составляют донорные примеси?
- Если в добавление к фосфору введены  $10^{17}$  см<sup>-3</sup> атомов бора, распределенных равномерно, то каковы результирующее удельное сопротивление и тип проводимости (будет ли материал иметь проводимость *p*- или *n*-типа)?
- Изобразить диаграмму энергетических зон для случая в) и указать положение уровня Ферми.

**Задача 20\*.** Найти равновесные концентрации электронов и дырок и положение уровня Ферми в кремнии при 27 °С, если кремний содержит следующие концентрации легирующих примесей, создающих мелкие уровни:

- $1 \cdot 10^{16}$  см<sup>-3</sup> атомов бора,
- $3 \cdot 10^{16}$  см<sup>-3</sup> атомов мышьяка и  $2,9 \cdot 10^{16}$  см<sup>-3</sup> атомов бора.

**Задача 21.** Образец кремния *n*-типа имеет равномерную концентрацию  $N_d=10^{16}$  см<sup>-3</sup> атомов мышьяка, а образец кремния *p*-типа имеет  $N_a=10^{15}$  см<sup>-3</sup> атомов бора. Для каждого полупроводникового материала определить:

а) Температуру, при которой ионизирована половина примесных атомов. Предполагается, что все подвижные электроны и дырки поступают от легирующих примесей.

б) Температуру, при которой собственная концентрация  $n_i$  превосходит концентрацию примесей в 10 раз. Зависимости  $n_i(T)$  взяты из таблиц.

в) Равновесную концентрацию неосновных носителей при 300 К. Предполагается, что примеси полностью ионизированы.

г) Положение уровня Ферми относительно края валентной зоны  $E_v$  в каждом материале при 300 К. Положение уровня Ферми, если оба типа примесей имеются в одном образце.

**Задача 22.** Образец кремния n-типа проводимости имеет при 27°C удельное сопротивление 5 Ом·см. Найти для теплового равновесия концентрацию дырок при 27, 100 и 500 °С (необходимые данные взять из таблиц и рисунков).

**Задача 23.** а) Покажите, что эффективная плотность энергетических уровней в пределах зоны шириной  $1, 2kT$  вблизи края зоны проводимости составляет

$$N_c = \frac{11,14}{h^3} (2mkT)^{3/2}.$$

б) Поясните физический смысл данного результата.

в) Постройте график распределения Ферми-Дирака  $f(E)$  для значений аргумента, близких уровню Ферми  $E_F = 1$  эВ.

г) Дайте физическую интерпретацию данной кривой.

**Задача 24.** Вычислите вероятность нахождения электронов на уровнях  $E_F + 0,1$  эВ и  $E_F - 0,1$  эВ при температурах 0, 150, 300 и 1000 К. Представьте результаты в табличной форме.

**Задача 25.** Вместо распределения Ферми—Дирака  $f(E)$ , определяемого формулой

$$f(E) = [1 + \exp((E - E_F)/(kT))]^{-1}, \quad (3.10)$$

используют распределение Максвелла—Больцмана  $f_{MB}$  [см. формулу  $f_{MB}(E) = C \cdot e^{-E/(kT)}$ ]; уровень  $E$  находится вблизи уровня  $E_F$ . Какова относительная ошибка такой замены при  $E - E_F = kT$  и при  $E - E_F = 4kT$ ?

**Задача 26.** Покажите, что вероятность того, что состояние с энергией, превышающей уровень Ферми  $E_F$  на величину  $\Delta E$ , занято, в точности совпадает с вероятностью иметь свободное состояние, энергия которого меньше значения  $E_F$  на ту же величину  $\Delta E$ .

**Задача 27.** а) Вычислите эффективную плотность уровней  $N_c$  и  $N_v$  для кремния при комнатной температуре. Считайте, что эффективные массы носителей выражаются через массу электрона  $m$  следующим образом:  $m_n = 1,1 m$ ;  $m_p = 0,56 m$ .

б) Определите собственную концентрацию носителей.

**Задача 28.** а) Получите выражение, связывающее положение собственного уровня Ферми  $E_i$  с положением центра запрещенной зоны.

б) Подсчитайте смещение уровня  $E_i$  относительно центра запрещенной зоны для германия при комнатной температуре. Считайте, что эффективные массы носителей выражаются через массу электрона  $m$  следующим образом:  $m_n = 1,1 m$ ;  $m_p = 0,56 m$ .

**Задача 29.** Имеется полупроводник  $p$ -типа. Каким будет положение уровня Ферми относительно энергии акцепторного уровня при  $T=0$  и при некоторой температуре  $T=T_{max}$ ?

а) Используя выражения

$$N_{dn} = \frac{N_d}{1 + 1/2 \exp[(E_d - E_F)/(kT)]},$$

$$n = N_c \exp\left(-\frac{E_c - E_F}{kT}\right),$$

покажите, что относительная доля ионизированных примесей зависит от температуры следующим образом:

$$\frac{n}{N_d} = \frac{-\frac{N_c}{N_d} + \left[\left(\frac{N_c}{N_d}\right)^2 + 8\left(\frac{N_c}{N_d}\right) \exp\left(\frac{E_c - E_d}{kT}\right)\right]^{1/2}}{4 \exp\left(\frac{E_c - E_d}{kT}\right)}.$$

б) Имеется образец кремния, легированный атомами фосфора, причем  $E_c - E_d = 0,044$  эВ. Какова относительная доля ионизированной примеси при  $T=50$  и  $300$  К? При какой температуре ионизированными станут 95% примесных атомов?

**Задача 30.** Образец кремния находится в состоянии термодинамического равновесия и содержит донорные примеси с концентрацией  $N_d = 10^{16} \text{ см}^{-3}$ . Найдите температуру, при которой  $p = 0,1n$ . Покажите, что эта температура превышает 50 К.

**Задача 31.** Имеется равновесный образец германия при температуре 400 К. Вычислите: а) концентрацию дырок и электронов, если образец легирован атомами сурьмы (элемент V группы) с концентрацией  $2,4 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ; б) концентрацию носителей, которая установится после того, как проведено легирование атомами индия (элемент III группы) с концентрацией  $4,8 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ .

**Задача 32.** Полупроводник, в котором концентрации примесей  $N_d$  и  $N_a$  одинаковы, называют компенсированным. В таком материале концентрация дырок

$p$  и  $n$  электронов совпадает с собственной концентрацией  $n_i$ . Будет ли компенсированный материал иметь то же удельное сопротивление, что и легированный собственный полупроводник? Поясните ответ.

**Задача 33.** а) Покажите, что в слаболегированном полупроводнике  $p$ -типа удельное сопротивление максимально, если  $\mu_n/\mu_p > 1$ .

б) Вычислите концентрацию акцепторных атомов акцепторной примеси  $N_a$ , которая потребуется для достижения максимального удельного сопротивления. Примите для кремния  $\mu_n/\mu_p = 2,18$ ;  $n_i = 1,4 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ .

**Задача 34.** В образце кремния электрон массой  $m$  имеет тепловую энергию порядка  $kT$ , которая связана со средней скоростью теплового движения соотношением  $E = 3kT/2$ . Если известно, что  $\mu_n = 1350 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ , покажите, что (при комнатной температуре) скорость дрейфа электронов мала по сравнению со скоростью теплового движения, если напряженность внешнего поля  $10 \text{ В/см}$ . Убедитесь, что при напряженности поля  $1000 \text{ В/см}$  выполняется обратное неравенство.

**Задача 35.** Пластина из германия  $n$ -типа имеет удельное сопротивление  $\rho = 0,1 \text{ Ом} \cdot \text{см}$  и ширину  $d = 10^{-2} \text{ см}$ . К пластине приложена разность потенциалов  $U = 1 \text{ В}$ . Вычислите: а) плотность тока; б) время, которое потребуется для того, чтобы носитель заряда пересек пластину; в) отношение плотностей токов дырок и электронов. Покажите, что

$$\mu_n = 3900 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}; \mu_p = 1900 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}; n_i = 2,4 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}.$$

**Задача 36.** Имеется образец германия с поперечным сечением  $0,1 \times 0,2 \text{ см}$  и концентрацией легирующих примесей  $10^{17} \text{ см}^{-3}$ . Вдоль образца протекает ток  $0,6 \text{ А}$ . Перпендикулярно направлению тока действует магнитное поле с индукцией  $0,5 \text{ Тл}$ . Вычислите напряжение Холла между контактами к узким сторонам боковой поверхности образца.

**Задача 37.** В приборе для исследования эффекта Холла в образце германия при  $l = 2,5 \text{ мм}$ ;  $d = 50 \text{ мкм}$ ;  $a = 0,25 \text{ мм}$ ;  $I = 2 \text{ мА}$ ;  $B = 5 \cdot 10^{-1} \text{ Тл}$  получено  $U = 85 \text{ мВ}$  (в направлении тока  $I$ );  $U_H = -1,25 \text{ мВ}$ . Определите:

а) тип основных носителей; б) их концентрацию; в) коэффициент Холла; г) подвижность основных носителей.

**Задача 38.** В образце кремния  $p$ -типа, находящемся при комнатной температуре, распределение концентрации акцепторов вдоль оси  $x$  описывается функцией

$$N_a(x) = N \cdot \exp(-x/x_0),$$

где  $x_0 = 0,5 \text{ мкм}$ .

Считая, что  $p(x) = N_a(x)$ , вычислите напряженность внутреннего электрического поля, а также плотность токов дрейфа и диффузии для дырок в зависимости от величины  $N_a$ . Исходные данные:  $D_p = 10^{-3} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ ;  $\mu_n = 40 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ .

**Задача 39.** Образец германия, находящийся при комнатной температуре, подвергается непрерывному воздействию фотонов. Такое внешнее возбуждение ионизирует атомы примеси, создавая концентрацию примесей  $N_d = 10^{17} \text{ см}^{-3}$  и обуславливая постоянную генерацию  $10^{18}$  электронно-дырочных пар в секунду.

а) Подсчитайте избыточную концентрацию носителей, а также относительное изменение концентрации носителей вследствие действия фотонов, если  $\tau_n = \tau_p = 2 \text{ мс}$ .

б) Пусть действие потока фотонов прекращается в момент времени  $t = t_0$ . Как изменяется во времени избыточная концентрация дырок при  $t > t_0$ ? За какое время избыточная концентрация снизится до 5% начального значения?

**Задача 40.** Образец арсенида галлия, легированный донорной примесью с концентрацией  $2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ , подвергается действию некоторого внешнего возбуждения, в результате которого каждую секунду в  $1 \text{ см}^3$  генерируется  $10^{20}$  электронно-дырочных пар. Считается, что имеет место низкий уровень инжекции. Вычислите: а) коэффициент рекомбинации, если  $\tau_n = \tau_p = 50 \text{ нс}$ ;

б) избыточную концентрацию в стационарном режиме [см. формулу  $G = r(n_0 + n') \cdot (p_0 + p') - r \cdot n_0 p_0$ ].

**Задача 41.** Определите положение квазиуровней Ферми в полупроводнике, легированном акцепторной примесью с концентрацией  $10^{16} \text{ см}^{-3}$ , при комнатной температуре. Известно, что  $G = 10^{18} \text{ см}^3/\text{с}$ ;  $\tau_n = 10 \text{ мкс}$ ;  $n_i = 10^{10} \text{ см}^{-3}$ .

## 5 ВАРИАНТЫ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

Домашнее задание для заочной формы обучения содержит изучение теоретического курса «Основы физики твердого тела», ответы на вопросы и подробные описания решений задач. Вопросы по теоретической части домашнего задания прилагаются к каждому конкретному варианту, а решения задач строго индивидуальны. Таким образом, домашнее задание считается выполненным, если в нем приведены ответы на теоретические вопросы и решения задач по выбранному варианту.

### 5.1 Вопросы к теоретической части домашнего задания

1. Объясните процесс образования энергетических зон в твердом теле.
2. Что такое энергетическая, разрешенная, валентная, свободная зоны и зона проводимости?
3. От чего зависит ширина запрещенной зоны и число энергетических уровней в ней?
4. Каков физический смысл понятия уровня Ферми?
5. Какова зонная структура изолятора, проводника и полупроводника?
6. Чем вызвана необходимость введения понятия эффективной массы носителей заряда в кристалле и каков физический смысл понятия эффективной массы электрона?
7. Что такое дырка с точки зрения зонной теории?
8. Объясните возникновение локальных энергетических уровней в кристалле и образование примесных зон.
9. Объясните механизм примесной и собственной проводимости полупроводников.
10. Объясните влияние примесей на электропроводность металлов и полупроводников.
11. Поясните возможность управления величиной и знаком электропроводности полупроводников путем введения примесей.
12. Почему измерения удельного сопротивления полупроводников производят в темноте?
13. Назовите причины температурной зависимости ширины запрещенной зоны полупроводника.
14. Объясните зависимость положения уровня Ферми и концентрации свободных носителей заряда в полупроводниках от температуры.
15. Сформулируйте закон действующих масс.
16. Что такое вырожденный и невырожденный полупроводники и где расположен уровень Ферми в них?
17. Объясните температурную зависимость подвижности носителей заряда в полупроводниках.

18. Чем объясняется различный ход температурной зависимости сопротивления у металлов и полупроводников?
19. Объясните физический смысл энергии активации и параметров температурной зависимости сопротивления у металлов и полупроводников.

## 5.2 Варианты задач домашнего задания

### ВАРИАНТ №1

**Задача 1.** Образец кремния легирован индием, акцепторный уровень для которого расположен на 0,17 эВ выше границы валентной зоны. Найти при какой концентрации примеси уровень Ферми совпал бы с примесным уровнем при 300K? Определить долю заполненных в данном случае акцепторных уровней и концентрации основных и неосновных носителей, если  $E_g=1,1$  эВ,  $m_n^*=0,26m_0$ ;  $m_p^*=0,39m_0$ ;  $\mu_n=0,15$  м<sup>2</sup>/В·с;  $\mu_p=0,05$  м<sup>2</sup>/В·с.

**Задача 2.** Для образца собственного кремния с параметрами:  $E_g=1,1$  эВ;  $m_n^*=0,26m_0$ ;  $m_p^*=0,39m_0$ ;  $\mu_n=0,155$  м<sup>2</sup>/В·с;  $\mu_p=0,0052$  м<sup>2</sup>/В·с рассчитать сопротивление образца при комнатной температуре, при 350 °С. Найти температурный коэффициент сопротивления, определяемый как  $(1/R)(dR/dT)$ . Как его использовать для измерения температуры?

**Задача 3.** Образец кремния n-типа, находящийся в состоянии термодинамического равновесия при температуре 300 К, характеризуется следующими параметрами: удельное сопротивление 12 Ом·см; подвижность электронов 1450 см<sup>2</sup>·В<sup>-1</sup>·с<sup>-1</sup>; подвижность дырок 670 см<sup>2</sup>·В<sup>-1</sup>·с<sup>-1</sup>; собственная концентрация носителей  $1,2 \cdot 10^{10}$  см<sup>-3</sup> и эффективная плотность уровней в зоне проводимости  $10^{19}$  см<sup>-3</sup>. Определите: а) концентрацию электронов и дырок; б) положение уровня Ферми; в) вероятность событий, состоящих в том, что донорный уровень занят и свободен. Известно, что  $E_c-E_d=50$  мэВ.

**Задача 4.** Образец кремния n-типа имеет равномерную концентрацию  $N_d=10^{16}$  см<sup>-3</sup> атомов мышьяка, а образец кремния p-типа имеет  $N_a=10^{15}$  см<sup>-3</sup> атомов бора. Предполагается, что все подвижные электроны и дырки поступают от легирующих примесей. Для каждого полупроводникового материала определить температуру, при которой ионизирована половина примесных атомов.

**Задача 5.** Вычислите эффективную плотность уровней  $N_c$  и  $N_v$  для кремния при комнатной температуре. Считайте, что эффективные массы носителей выражаются через массу электрона следующим образом:  $m_n=1,1m$ ;  $m_p=0,56m$ .

**Задача 6.** В образце кремния p-типа, находящемся при комнатной температуре, распределение концентрации акцепторов вдоль оси x описывается функцией  $N_a(x)=N \cdot \exp(-x/x_0)$ , где  $x_0=0,5$  мкм. Считая, что  $p(x)=N_a(x)$ , вычислите напряженность внутреннего электрического поля для дырок в зависимости от величины  $N_a$ . Исходные данные:  $D_p=10^{-3}$  м<sup>2</sup>·с<sup>-1</sup>;  $\mu_n=40$  см<sup>2</sup>·В<sup>-1</sup>·с<sup>-1</sup>.

**Задача 7.** Образец германия, находящийся при комнатной температуре, подвергается непрерывному воздействию фотонов. Такое внешнее возбуждение ионизирует атомы примеси, создавая концентрацию примесей  $N_d=10^{17} \text{ см}^{-3}$  и обуславливая постоянную генерацию  $10^{18}$  электронно-дырочных пар в секунду.

Подсчитайте избыточную концентрацию носителей, если  $\tau_n=\tau_p=2 \text{ мс}$ .

## ВАРИАНТ №2

**Задача 1.** Поверхность кремния (Si) в качестве легирующей примеси содержит  $10^4$  атомов мышьяка (As). Затем он легируется фосфором (P) до  $3 \cdot 10^{16} \text{ ат/см}^3$  и после этого равномерно легируется бором (B) до  $10^{18} \text{ ат/см}^3$ . Полученная структура проходит термический отжиг, который полностью активирует все примеси. Определить концентрацию основных носителей заряда.

**Задача 2.** Концентрация электронов в собственном полупроводнике при  $T=300 \text{ К}$  оказалась равной  $0.5 \cdot 10^{-5} \text{ см}^{-3}$ . Найти значение произведения эффективных масс электрона и дырки, если известно, что ширина запрещенной зоны меняется по закону  $E_g=(0.785-4 \cdot 10^{-3}T) \text{ эВ}$ .

**Задача 3.** Определить зависимость положения середины запрещенной зоны от температуры в собственном полупроводнике ( $E_i$ ).

**Задача 4.** Образец кремния n-типа имеет равномерную концентрацию  $N_d=10^{16} \text{ см}^{-3}$  атомов мышьяка, а образец кремния p-типа имеет  $N_a=10^{15} \text{ см}^{-3}$  атомов бора. Предполагается, что все подвижные электроны и дырки поступают от легирующих примесей. Для каждого полупроводникового материала определить температуру, при которой собственная концентрация  $n_i$  превосходит концентрацию примесей в 10 раз.

**Задача 5.** Определите собственную концентрацию носителей для кремния при комнатной температуре. Считайте, что эффективные массы носителей выражаются через массу электрона следующим образом:  $m_n=1,1m$ ;  $m_p=0,56m$ .

**Задача 6.** В образце кремния p-типа, находящемся при комнатной температуре, распределение концентрации акцепторов вдоль оси  $x$  описывается функцией  $N_a(x)=N \cdot \exp(-x/x_0)$ , где  $x_0=0,5 \text{ мкм}$ . Считая, что  $p(x)=N_a(x)$ , вычислите плотность тока дрейфа для дырок в зависимости от величины  $N_a$ . Исходные данные:  $D_p=10^{-3} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ ;  $\mu_n=40 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ .

**Задача 7.** Образец германия, находящийся при комнатной температуре, подвергается непрерывному воздействию фотонов. Такое внешнее возбуждение ионизирует атомы примеси, создавая концентрацию примесей  $N_d=10^{17} \text{ см}^{-3}$  и обуславливая постоянную генерацию  $10^{18}$  электронно-дырочных пар в секунду.

Подсчитайте относительное изменение концентрации носителей вследствие действия фотонов, если  $\tau_n=\tau_p=2 \text{ мс}$ .

**Задача 1.** Известно, что поверхность германия (Ge) в качестве легирующей примеси содержит  $10^{-3}$  атомных процента мышьяка (As). Затем он легируется фосфором (P) до  $3,45 \cdot 10^{14}$  ат/см<sup>3</sup> и после этого равномерно легируется бором (B) до  $9,7 \cdot 10^{19}$  ат/см<sup>3</sup>. Полученная структура проходит термический отжиг, который полностью активирует все примеси. Какой тип проводимости будет иметь образец германия?

**Задача 2.** Концентрация электронов в собственном полупроводнике при  $T=500$  К оказалась равной  $2 \cdot 10^6$  см<sup>-3</sup>. Найти значение произведения эффективных масс электрона и дырки, если известно, что ширина запрещенной зоны меняется по закону  $E_g=(0,785-4 \cdot 10^{-4}T)$  эВ.

**Задача 3.** Образец арсенида галлия был легирован избыточным количеством мышьяка так, чтобы его удельное сопротивление составило 0,049 Ом·м. Однако на самом деле из-за присутствия неизвестной акцепторной примеси удельное сопротивление оказалось равным 0,061 Ом·м, хотя образец остался полупроводником *n*-типа. Найти значения концентраций атомов донорной и акцепторной примесей в образце. Пусть  $\mu_n=0,86$  м<sup>2</sup>/В·с и все атомы примеси ионизированы.

**Задача 4.** Образец кремния *n*-типа имеет равномерную концентрацию  $N_d=10^{16}$  см<sup>-3</sup> атомов мышьяка, а образец кремния *p*-типа имеет  $N_a=10^{15}$  см<sup>-3</sup> атомов бора. Предполагается, что все подвижные электроны и дырки поступают от легирующих примесей. Для каждого полупроводникового материала определить равновесную концентрацию неосновных носителей при 300 К.

**Задача 5.** Рассчитать величину смещения уровня  $E_i$  относительно центра запрещенной зоны для германия при комнатной температуре. Считайте, что эффективные массы носителей выражаются через массу электрона следующим образом:  $m_n=1,1m$ ;  $m_p=0,56m$ .

**Задача 6.** В образце кремния *p*-типа, находящемся при комнатной температуре, распределение концентрации акцепторов вдоль оси *x* описывается функцией  $N_a(x)=N \cdot \exp(-x/x_0)$ , где  $x_0=0,5$  мкм. Считая, что  $p(x)=N_a(x)$ , вычислите плотность тока диффузии для дырок в зависимости от величины  $N_a$ . Исходные данные:  $D_p=10^{-3}$  м<sup>2</sup>·с<sup>-1</sup>;  $\mu_n=40$  см<sup>2</sup>·В<sup>-1</sup>·с<sup>-1</sup>.

**Задача 7.** Образец германия, находящийся при комнатной температуре, подвергается непрерывному воздействию фотонов. Такое внешнее возбуждение ионизирует атомы примеси, создавая концентрацию примесей  $N_d=10^{17}$  см<sup>-3</sup> и обуславливая постоянную генерацию  $10^{18}$  электронно-дырочных пар в секунду ( $\tau_n=\tau_p=2$  мс). Пусть действие потока фотонов прекращается в момент времени  $t=t_0$ . Как изменяется во времени избыточная концентрация дырок при  $t>t_0$ ?

**Задача 1.** Известно, что поверхность германия (Ge) в качестве легирующей примеси содержит  $10^{-3}$  атомных процента мышьяка (As). Затем он легируется фосфором (P) до  $3 \cdot 10^{14}$  ат/см<sup>3</sup> и после этого равномерно легируется бором (B) до  $10^{19}$  ат/см<sup>3</sup>. Полученная структура проходит термический отжиг, который полностью активирует все примеси. Чему будет равна концентрация основных носителей?

**Задача 2.** В образец чистого кремния введены донорные атомы фосфора с концентрацией  $10^{16}$  см<sup>-3</sup>. Предположим, что атомы фосфора распределены в кремнии равномерно. Атомная масса фосфора равна 31. Чему равно удельное сопротивление образца при 300 К?

**Задача 3.** Определить дрейфовую скорость электрона, если удельное сопротивление образца 0,1 Ом·см, длина образца 20 см, а напряжение, прикладываемое к образцу, равно 20 В,  $n=6,2 \cdot 10^{18}$  см<sup>-3</sup> при  $T=100$  К.

**Задача 4.** Образец кремния *n*-типа имеет равномерную концентрацию  $N_d=10^{16}$  см<sup>-3</sup> атомов мышьяка, а образец кремния *p*-типа имеет  $N_a=10^{15}$  см<sup>-3</sup> атомов бора. Предполагается, что все подвижные электроны и дырки поступают от легирующих примесей. Для каждого полупроводникового материала определить положение уровня Ферми относительно края валентной зоны  $E_v$  в каждом материале при 300 К, положение уровня Ферми, если оба типа примесей имеются в одном образце.

**Задача 5.** Получите выражение, связывающее положение собственного уровня Ферми  $E_i$  с положением центра запрещенной зоны. Считайте, что эффективные массы носителей выражаются через массу электрона следующим образом:

$$m_n=1,1m; m_p=0,56m.$$

**Задача 6.** В образце кремния *p*-типа, находящемся при комнатной температуре, распределение концентрации акцепторов вдоль оси *x* описывается функцией  $N_a(x)=N \cdot \exp(-x/x_0)$ , где  $x_0=0,19$  мкм. Считая, что  $p(x)=N_a(x)$ , вычислите напряженность внутреннего электрического поля для дырок в зависимости от величины  $N_a$ . Исходные данные:

$$D_p=10^{-3} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}; \mu_n=40 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}.$$

**Задача 7.** Образец германия, находящийся при комнатной температуре, подвергается непрерывному воздействию фотонов. Такое внешнее возбуждение ионизирует атомы примеси, создавая концентрацию примесей  $N_d=10^{17}$  см<sup>-3</sup> и обуславливая постоянную генерацию  $10^{18}$  электронно-дырочных пар в секунду ( $\tau_n=\tau_p=2$  мс). Пусть действие потока фотонов прекращается в момент времени  $t=t_0$ . За какое время избыточная концентрация снизится до 5% начального значения?

## ВАРИАНТ №5

**Задача 1.** Известно, что поверхность кремния (Si) в качестве легирующей примеси содержит  $10^{-6}$  атомных процента мышьяка (As). Затем он легируется фосфором (P) до  $3 \cdot 10^{16}$  ат/см<sup>3</sup> и после этого равномерно легируется бором (B) до  $10^{18}$  ат/см<sup>3</sup>. Полученная структура проходит термический отжиг, который полностью активирует все примеси. Какой тип проводимости будет иметь образец кремния?

**Задача 2.** Концентрация электронов в собственном полупроводнике при  $T=100$  К оказалась равной  $1.2 \cdot 10^{13}$  см<sup>-3</sup>. Найти значение произведения эффективных масс электрона и дырки, если известно, что ширина запрещенной зоны меняется по закону  $E_g=(0.785-4 \cdot 10^{-4}T)$  эВ.

**Задача 3.** Определить дрейфовую скорость электрона, если удельное сопротивление образца  $0,007$  Ом·см, длина образца  $2$  см, а напряжение, прилагаемое к образцу, равно  $80$  В,  $n=6,2 \cdot 10^{16}$  см<sup>-3</sup> при  $T=300$  К.

**Задача 4\*.** Образец кремния *n*-типа имеет при  $27$  °С удельное сопротивление  $5$  Ом·см. Найти для теплового равновесия концентрацию дырок при  $27$ °С (необходимые данные взять из таблиц и рисунков).

**Задача 5.** Имеется полупроводник *p*-типа. Каким будет положение уровня Ферми относительно энергии акцепторного уровня при  $T=0$  и при некоторой температуре  $T=T_{max}$ ?

**Задача 6.** В образце кремния *p*-типа, находящемся при комнатной температуре, распределение концентрации акцепторов вдоль оси *x* описывается функцией  $N_a(x)=N \cdot \exp(-x/x_0)$ , где  $x_0=0,15$  мкм. Считая, что  $p(x)=N_a(x)$ , вычислите плотность тока дрейфа для дырок в зависимости от величины  $N_a$ . Исходные данные:

$$D_p=10^{-3} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}; \quad \mu_n=40 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}.$$

**Задача 7.** Образец германия, находящийся при комнатной температуре, подвергается непрерывному воздействию фотонов. Такое внешнее возбуждение ионизирует атомы примеси, создавая концентрацию примесей  $N_d=10^{18}$  см<sup>-3</sup> и обуславливая постоянную генерацию  $5 \cdot 10^{19}$  электронно-дырочных пар в секунду. Подсчитайте избыточную концентрацию носителей, если  $\tau_n=\tau_p=2$  мс.

## ВАРИАНТ №6

**Задача 1.** Известно, что поверхность кремния (Si) в качестве легирующей примеси содержит  $10^{-6}$  атомных процента мышьяка (As). Затем он легируется фосфором (P) до  $5 \cdot 10^{16}$  ат/см<sup>3</sup> и после этого равномерно легируется бором (B) до  $7 \cdot 10^{18}$  ат/см<sup>3</sup>. Полученная структура проходит термический отжиг, который полностью активирует все примеси. Какой тип проводимости будет иметь образец кремния? Чему будет равна концентрация основных носителей?

**Задача 2.** Концентрация электронов в собственном полупроводнике при  $T=400$  К оказалась равной  $1,38 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ . Определить величину произведения эффективных масс электрона и дырки, если известно, что ширина запрещенной зоны меняется по закону  $E_g=(0,785-4 \cdot 10^{-4}T)$  эВ.

**Задача 3.** Определить дрейфовую скорость электрона, если удельное сопротивление образца  $0,05 \text{ Ом}\cdot\text{см}$ , длина образца  $25 \text{ см}$ , а напряжение, прилагаемое к образцу, равно  $180 \text{ В}$ ,  $n=6,2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$  при  $T=350 \text{ К}$ .

**Задача 4.** Образец кремния  $n$ -типа имеет при  $27^\circ\text{C}$  удельное сопротивление  $5 \text{ Ом}\cdot\text{см}$ . Найти для теплового равновесия концентрацию дырок при  $100^\circ\text{C}$  (необходимые данные взять из таблиц и рисунков).

**Задача 5.** Имеется полупроводник  $n$ -типа. Каким будет положение уровня Ферми относительно энергии донорного уровня при  $T=0$  и при некоторой температуре  $T=T_{\text{max}}$ ?

**Задача 6.** В образце кремния  $p$ -типа, находящемся при комнатной температуре, распределение концентрации акцепторов вдоль оси  $x$  описывается функцией  $N_a(x)=N \cdot \exp(-x/x_0)$ , где  $x_0=0,8 \text{ мкм}$ . Считая, что  $p(x)=N_a(x)$ , вычислите напряженность внутреннего электрического поля для дырок в зависимости от величины  $N_a$ . Исходные данные:

$$D_p=10^{-3} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}; \mu_n=40 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}.$$

**Задача 7.** Образец германия, находящийся при комнатной температуре, подвергается непрерывному воздействию фотонов. Такое внешнее возбуждение ионизирует атомы примеси, создавая концентрацию примесей  $N_d=2,2 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$  и обуславливая постоянную генерацию  $2,5 \cdot 10^{19}$  электронно-дырочных пар в секунду. Подсчитайте относительное изменение концентрации носителей вследствие действия фотонов, если  $\tau_n=\tau_p=2 \text{ мс}$ .

#### ВАРИАНТ №7

**Задача 1.** Известно, что поверхность кремния (Si) в качестве легирующей примеси содержит  $5 \cdot 10^3$  атомных процента мышьяка (As). Затем он легируется фосфором (P) до  $3,54 \cdot 10^{16} \text{ ат}/\text{см}^3$  и после этого равномерно легируется бором (B) до  $5,34 \cdot 10^{18} \text{ ат}/\text{см}^3$ . Полученная структура проходит термический отжиг, который полностью активирует все примеси. Какой тип проводимости будет иметь образец кремния? Чему будет равна концентрация основных носителей?

**Задача 2.** Концентрация электронов в собственном полупроводнике при  $T=400 \text{ К}$  оказалась равной  $0,5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ . Определить величину произведения эффективных масс электрона и дырки, если известно, что ширина запрещенной зоны меняется по закону  $E_g=(0,785-4 \cdot 10^{-5}T)$  эВ.

**Задача 3.** Определить удельную проводимость примесного полупроводника ( $\sigma$ ), если:

$m_p=0.37m_0$ ;  $n=1.37 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$  при  $T=400 \text{ К}$ ;  $n_i=1.38 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$  при  $T=400 \text{ К}$ ;  
 $\tau_M=0.25 \cdot 10^{-12} \text{ с}$ ;  $e=1.6 \cdot 10^{-12} \text{ К}$ ;  $m_0=9.1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ ;  $m_n=0.56 m_0$ .

**Задача 4.** Зависимость удельного сопротивления собственного германия от температуры приведена в следующей таблице:

T, К	385	455	556	714
$\rho$ , Ом·м	0,028	0,0061	0,0013	0,000274

Считая, что приближенно подвижности дырок и электронов меняются при изменении температуры пропорционально  $T^{-3/2}$ , а ширина запрещенной зоны не зависит от температуры, найти величину ширины запрещенной зоны  $E_g$ . При какой длине волны будет наблюдаться начало роста оптического поглощения?

**Задача 5.** Используя выражения

$$N_{dn} = \frac{N_d}{1 + 1/2 \exp[(E_d - E_F)/(kT)]}; \quad n = N_c \exp\left(-\frac{E_c - E_F}{kT}\right),$$

покажите, что относительная доля ионизированных примесей зависит от температуры следующим образом:

$$\frac{n}{N_d} = \frac{-\frac{N_c}{N_d} + \left[ \left( \frac{N_c}{N_d} \right)^2 + 8 \left( \frac{N_c}{N_d} \right) \exp\left( \frac{E_c - E_d}{kT} \right) \right]^{1/2}}{4 \exp\left( \frac{E_c - E_d}{kT} \right)}.$$

**Задача 6.** В образце кремния  $p$ -типа, находящемся при комнатной температуре, распределение концентрации акцепторов вдоль оси  $x$  описывается функцией  $N_a(x) = N \cdot \exp(-x/x_0)$ , где  $x_0 = 0,5 \text{ мкм}$ . Считая, что  $p(x) = N_a(x)$ , вычислите плотность тока диффузии для дырок в зависимости от величины  $N_a$ . Исходные данные:

$$D_p = 10^{-3} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}; \quad \mu_n = 40 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}.$$

**Задача 7.** Образец германия, находящийся при комнатной температуре, подвергается непрерывному воздействию фотонов. Такое внешнее возбуждение ионизирует атомы примеси, создавая концентрацию примесей  $N_d = 6 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$  и обуславливая постоянную генерацию  $4,5 \cdot 10^{19}$  электронно-дырочных пар в секунду ( $\tau_n = \tau_p = 2 \text{ мс}$ ). Пусть действие потока фотонов прекращается в момент времени  $t = t_0$ . Как изменяется во времени избыточная концентрация дырок при  $t > t_0$ ?

**Задача 1.** Известно, что поверхность кремния (Si) в качестве легирующей примеси содержит  $3,3 \cdot 10^{-5}$  атомных процента мышьяка (As). Затем он легируется фосфором (P) до  $3,3 \cdot 10^{15}$  ат/см<sup>3</sup> и после этого равномерно легируется бором (B) до  $3,9 \cdot 10^{18}$  ат/см<sup>3</sup>. Полученная структура проходит термический отжиг, который полностью активирует все примеси. Какой тип проводимости будет иметь образец кремния? Чему будет равна концентрация основных носителей?

**Задача 2.** Концентрация электронов в собственном полупроводнике при  $T=400$  К оказалась равной  $3,2 \cdot 10^{14}$  см<sup>-3</sup>. Определить величину произведения эффективных масс электрона и дырки, если известно, что ширина запрещенной зоны меняется по закону  $E_g=(0.785-4 \cdot 10^{-3}T)$  эВ.

**Задача 3.** Определить удельную проводимость примесного полупроводника ( $\sigma$ ), если:  $m_p=0.37m_0$ ;  $n=1.37 \cdot 10^{13}$  см<sup>-3</sup> при  $T=100$  К;  $n_i=0.8 \cdot 10^{14}$  см<sup>-3</sup> при  $T=100$  К;  $\tau_n=0,25 \cdot 10^{-12}$  с;  $e=1.6 \cdot 10^{-12}$  к;  $m_0=9,1 \cdot 10^{-31}$  кг;  $m_n=0.56 m_0$ .

**Задача 4.** Покажите, что эффективная плотность энергетических уровней в пределах зоны шириной  $1,2kT$  вблизи края зоны проводимости составляет

$$N_c = \frac{11,14}{h^3} (2mkT)^{3/2}.$$

**Задача 5.** Имеется образец кремния, легированный атомами фосфора, причем  $E_c - E_d = 0,044$  эВ. Какова относительная доля ионизированной примеси при  $T=50$  и  $300$  К?

**Задача 6.** В образце кремния n-типа, находящемся при комнатной температуре, распределение концентрации доноров вдоль оси  $x$  описывается функцией  $N_d(x) = N \cdot \exp(-x/x_0)$ , где  $x_0 = 0,3$  мкм. Считая, что  $n(x) = N_d(x)$ , вычислите напряженность внутреннего электрического поля для электронов в зависимости от величины  $N_d$ . Исходные данные:

$$D_n = 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}; \quad \mu_n = 80 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}.$$

**Задача 7.** Образец германия, находящийся при комнатной температуре, подвергается непрерывному воздействию фотонов. Такое внешнее возбуждение ионизирует атомы примеси, создавая концентрацию примесей  $N_d = 10^{18}$  см<sup>-3</sup> и обуславливая постоянную генерацию  $5 \cdot 10^{19}$  электронно-дырочных пар в секунду ( $\tau_n = \tau_p = 2$  мс). Пусть действие потока фотонов прекращается в момент времени  $t = t_0$ . За какое время избыточная концентрация снизится до 5% начального значения?

## ВАРИАНТ №9

**Задача 1.** В исследуемом полупроводнике концентрация электронов при  $T=400$  К составляла  $1,3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ , а при  $350$  К -  $6,2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ . Найти ширину запрещенной зоны материала, считая, что она меняется с температурой по линейному закону  $E_g = (0,785 - \xi T)$  эВ, где  $\xi = 4 \cdot 10^{-4}$ .

**Задача 2.** Вычислить собственную концентрацию носителей заряда в кремнии при  $T=300$ К, если ширина его запрещенной зоны  $E_g = 1,12$  эВ, а эффективные массы состояний  $m_c = 1,05 m_0$ ,  $m_v = 0,56 m_0$ .

**Задача 3.** Определить удельную проводимость примесного полупроводника ( $\sigma$ ), если:

$m_p = 0,37 m_0$ ;  $n = 1,37 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$  при  $T=300$  К;  $n_i = 1,38 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$  при  $T=300$  К;  $\tau_n = 0,25 \cdot 10^{-12}$  с;  $e = 1,6 \cdot 10^{-12}$  к;  $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг;  $m_n = 0,56 m_0$ .

**Задача 4.** Эффективная плотность энергетических уровней в пределах зоны шириной  $1,2kT$  вблизи края зоны проводимости составляет

$N_c = \frac{11,14}{h^3} (2mkT)^{3/2}$ . Поясните физический смысл данного результата.

**Задача 5.** Имеется образец кремния, легированный атомами фосфора, причем  $E_c - E_d = 0,044$  эВ. При какой температуре ионизированными станут 95% примесных атомов?

**Задача 6.** В образце кремния n-типа, находящемся при комнатной температуре, распределение концентрации доноров вдоль оси  $x$  описывается функцией  $N_n(x) = N \cdot \exp(-x/x_0)$ , где  $x_0 = 0,33$  мкм. Считая, что  $n(x) = N_d(x)$ , вычислите плотность токов дрейфа для электронов в зависимости от величины  $N_d$ . Исходные данные:

$$D_n = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}; \quad \mu_n = 82 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}.$$

**Задача 7.** Образец кремния, находящийся при температуре  $350$  К, подвергается непрерывному воздействию фотонов. Такое внешнее возбуждение ионизирует атомы примеси, создавая концентрацию примесей  $N_d = 10^{17} \text{ см}^{-3}$  и обуславливая постоянную генерацию  $0,5 \cdot 10^{19}$  электронно-дырочных пар в секунду. Подсчитайте относительное изменение концентрации носителей вследствие действия фотонов, если  $\tau_n = \tau_p = 2 \text{ нс}$ .

## ВАРИАНТ №10

**Задача 1.** В исследуемом полупроводнике концентрация электронов при  $T=500$  К составляла  $1,3 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ , а при  $350$  К -  $6,2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ . Найти ширину запрещенной зоны материала, считая, что она меняется с температурой по линейному закону  $E_g = (0,785 - \xi T)$  эВ, где  $\xi = 4 \cdot 10^{-3}$ .

**Задача 2.** Вычислить собственную концентрацию носителей заряда в германии при  $T=300$  К, если ширина его запрещенной зоны  $E_g=0.7$  эВ, а эффективные массы состояний  $m_c=1,05m_0$ ,  $m_v=0,56 m_0$ .

**Задача 3.** Образец кремния n-типа, находящийся в состоянии термодинамического равновесия при температуре 300 К, характеризуется следующими параметрами: удельное сопротивление  $4,95$  Ом·см; подвижность электронов  $1600$  см<sup>2</sup>·В<sup>-1</sup>·с<sup>-1</sup>; подвижность дырок  $633$  см<sup>2</sup>·В<sup>-1</sup>·с<sup>-1</sup>; собственная концентрация носителей  $1,4 \cdot 10^{10}$  см<sup>-3</sup> и эффективная плотность уровней в зоне проводимости  $10^{19}$  см<sup>-3</sup>. Определить положение уровня Ферми, если известно, что  $E_c - E_d = 50$  мэВ.

**Задача 4.** Постройте график распределения Ферми—Дирака  $f(E)$  для значений аргумента, близких уровню Ферми  $E_F = 1$  эВ.

**Задача 5.** Образец кремния находится в состоянии термодинамического равновесия и содержит донорные примеси с концентрацией  $N_d = 4 \cdot 10^{16}$  см<sup>-3</sup>. Найдите температуру, при которой  $p=0,1n$ . Покажите, что эта температура превышает 50 К.

**Задача 6.** В образце кремния n-типа, находящемся при комнатной температуре, распределение концентрации доноров вдоль оси  $x$  описывается функцией  $N_n(x) = N \cdot \exp(-x/x_0)$ , где  $x_0 = 0,44$  мкм. Считая, что  $n(x) = N_d(x)$ , вычислите плотность тока дрейфа для электронов в зависимости от величины  $N_d$ . Исходные данные:

$$D_n = 3,22 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}; \quad \mu_n = 80,99 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}.$$

**Задача 7.** Образец кремния, находящийся при температуре 350 К, подвергается непрерывному воздействию фотонов. Такое внешнее возбуждение ионизирует атомы примеси, создавая концентрацию примесей  $N_d = 7,7 \cdot 10^{17}$  см<sup>-3</sup> и обуславливая постоянную генерацию  $0,5 \cdot 10^{19}$  электронно-дырочных пар в секунду ( $\tau_n = \tau_p = 5,44$  нс). Пусть действие потока фотонов прекращается в момент времени  $t=t_0$ . Как изменяется во времени избыточная концентрация дырок при  $t > t_0$ ?

#### ВАРИАНТ №11

**Задача 1.** В исследуемом полупроводнике концентрация электронов при  $T=360$  К составляла  $1,31 \cdot 10^{15}$  см<sup>-3</sup>, а при 300 К -  $6,21 \cdot 10^{14}$  см<sup>-3</sup>. Найти ширину запрещенной зоны материала, считая, что она меняется с температурой по линейному закону  $E_g = (0,785 - \xi T)$  эВ, где  $\xi = 4 \cdot 10^{-5}$ .

**Задача 2.** Вычислить собственную концентрацию носителей заряда в кремнии при  $T=200$  К, если ширина его запрещенной зоны  $E_g = 1,12$  эВ, а эффективные массы состояний  $m_c = 1,05m_0$ ,  $m_v = 0,56 m_0$ .

**Задача 3.** Образец кремния n-типа, находящийся в состоянии термодинамического равновесия при температуре 300 К, характеризуется следующими

параметрами: удельное сопротивление  $5 \text{ Ом}\cdot\text{см}$ ; подвижность электронов  $1600 \text{ см}^2\cdot\text{В}^{-1}\cdot\text{с}^{-1}$ ; подвижность дырок  $655 \text{ см}^2\cdot\text{В}^{-1}\cdot\text{с}^{-1}$ ; собственная концентрация носителей  $1,4\cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$  и эффективная плотность уровней в зоне проводимости  $2,33\cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ . Определить вероятность событий, состоящих в том, что донорный уровень занят и свободен, если известно, что  $E_c - E_d = 60 \text{ мЭВ}$ .

**Задача 4.** Дайте физическую интерпретацию данной кривой распределения Ферми-Дирака  $f(E)$  для значений аргумента, близких уровню Ферми  $E_F = 1 \text{ эВ}$ .

**Задача 5.** Образец кремния находится в состоянии термодинамического равновесия и содержит донорные примеси с концентрацией  $N_d = 10^{18} \text{ см}^{-3}$ . Найдите температуру, при которой  $p = 0,2n$ .

**Задача 6.** В образце кремния *n*-типа, находящемся при комнатной температуре, распределение концентрации акцепторов вдоль оси *x* описывается функцией  $N_n(x) = N \cdot \exp(-x/x_0)$ , где  $x_0 = 0,5 \text{ мкм}$ . Считая, что  $n(x) = N_d(x)$ , вычислите напряженность внутреннего электрического поля, а также плотность токов дрейфа и диффузии для дырок в зависимости от величины  $N_d$ . Исходные данные:

$$D_n = 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}; \mu_n = 84,11 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}.$$

**Задача 7.** Образец кремния, находящийся при температуре  $350 \text{ К}$ , подвергается непрерывному воздействию фотонов. Такое внешнее возбуждение ионизирует атомы примеси, создавая концентрацию примесей  $N_d = 3,12 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$  и обуславливая постоянную генерацию  $0,5 \cdot 10^{19}$  электронно-дырочных пар в секунду ( $\tau_n = \tau_p = 5 \text{ нс}$ ). Пусть действие потока фотонов прекращается в момент времени  $t = t_0$ . За какое время избыточная концентрация снизится до 3% начального значения?

## ВАРИАНТ №12

**Задача 1.** В исследуемом полупроводнике концентрация электронов при  $T = 450 \text{ К}$  составляла  $5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ , а при  $300 \text{ К}$  -  $1,2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ . Найти ширину запрещенной зоны материала, считая, что она меняется с температурой по линейному закону.

**Задача 2.** Вычислить собственную концентрацию носителей заряда в германии при  $T = 200 \text{ К}$ , если ширина его запрещенной зоны  $E_g = 0,7 \text{ эВ}$ , а эффективные массы состояний  $m_c = 1,05 m_0$ ,  $m_v = 0,56 m_0$ .

**Задача 3.** Образец кремния *p*-типа, находящийся в состоянии термодинамического равновесия при температуре  $300 \text{ К}$ , характеризуется следующими параметрами: удельное сопротивление  $5 \text{ Ом}\cdot\text{см}$ ; подвижность электронов  $800 \text{ см}^2\cdot\text{В}^{-1}\cdot\text{с}^{-1}$ ; подвижность дырок  $300 \text{ см}^2\cdot\text{В}^{-1}\cdot\text{с}^{-1}$ ; собственная концентрация носителей  $1,4 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$  и эффективная плотность уровней в зоне проводимости

сти  $10^{19} \text{ см}^{-3}$ . Определить концентрацию электронов и дырок, если известно, что  $E_c - E_d = 30 \text{ мэВ}$ .

**Задача 4.** Вычислите вероятность нахождения электронов на уровнях  $E_F + 0,1 \text{ эВ}$  и  $E_F - 0,1 \text{ эВ}$  при температурах 0 и 150 К. Представьте результаты в табличной форме.

**Задача 5.** Образец кремния находится в состоянии термодинамического равновесия и содержит донорные примеси с концентрацией  $N_d = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ . Найдите температуру, при которой  $p = 0,05n$ .

**Задача 6.** В образце кремния n-типа, находящемся при комнатной температуре, распределение концентрации доноров вдоль оси x описывается функцией  $N_n(x) = N \cdot \exp(-x/x_0)$ , где  $x_0 = 0,5 \text{ мкм}$ . Считая, что  $n(x) = N_d(x)$ , вычислите напряженность внутреннего электрического поля для электронов в зависимости от величины  $N_d$ . Исходные данные:

$$D_n = 10^{-7} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}; \mu_n = 180 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}.$$

**Задача 7.** Образец кремния, находящийся при температуре 350 К, подвергается непрерывному воздействию фотонов. Такое внешнее возбуждение ионизирует атомы примеси, создавая концентрацию примесей  $N_d = 10^{17} \text{ см}^{-3}$  и обуславливая постоянную генерацию  $0,5 \cdot 10^{19}$  электронно-дырочных пар в секунду ( $\tau_n = \tau_p = 7 \text{ пс}$ ). Пусть действие потока фотонов прекращается в момент времени  $t = t_0$ . За какое время избыточная концентрация снизится до 3% начального значения?

### ВАРИАНТ №13

**Задача 1.** Найти положение уровня Ферми и температурную зависимость концентрации электронов в собственном полупроводнике. Как изменится концентрация электронов при изменении температуры от 200 К до 300 К, если  $E_g = (0,785 - \xi T) \text{ эВ}$ , где  $\xi = 4 \cdot 10^{-4}$ .

**Задача 2.** Вычислить положение уровня Ферми при  $T = 300 \text{ К}$  в кристаллах германия, содержащих  $5 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$  атомов галлия.

**Задача 3.** Найдите положение уровней Ферми в германии, находящемся в состоянии термодинамического равновесия при температуре 400 К. Материал легирован акцепторными атомами с концентрацией  $10^{18} \text{ см}^{-3}$ , которые ионизированы на 100%. При комнатной температуре  $T_k$  имеет место равенство

$$n_i^2 = 3,1 \cdot 10^{32} T_k^3 \exp\left(\frac{-9100}{T_k}\right).$$

**Задача 4.** Вычислите вероятность нахождения электронов на уровнях  $E_F + 0,1 \text{ эВ}$  и  $E_F - 0,1 \text{ эВ}$  при температурах 300 и 1000 К. Представьте результаты в табличной форме.

**Задача 5.** Имеется равновесный образец германия при температуре 400 К. Вычислить концентрацию дырок и электронов, если образец легирован атомами сурьмы (элемент V группы) с концентрацией  $2,4 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ , после чего проведено легирование атомами индия (элемент III группы) с концентрацией  $4,8 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ .

**Задача 6.** В образце кремния n-типа, находящемся при комнатной температуре, распределение концентрации доноров вдоль оси x описывается функцией  $N_n(x) = N \cdot \exp(-x/x_0)$ , где  $x_0 = 0,5 \text{ мм}$ . Считая, что  $n(x) = N_d(x)$ , вычислите плотность тока дрейфа для электронов в зависимости от величины  $N_d$ . Исходные данные:

$$D_n = 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}; \mu_n = 80 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}.$$

**Задача 7.** Образец кремния, находящийся при температуре 380 К, подвергается непрерывному воздействию фотонов. Такое внешнее возбуждение ионизирует атомы примеси, создавая концентрацию примесей  $N_d = 10^{15} \text{ см}^{-3}$  и обуславливая постоянную генерацию  $0,7 \cdot 10^{16}$  электронно-дырочных пар в секунду. Подсчитайте избыточную концентрацию носителей, если  $\tau_n = \tau_p = 12 \text{ нс}$ .

#### ВАРИАНТ №14

**Задача 1.** Найти положение уровня Ферми и температурную зависимость концентрации электронов в собственном полупроводнике. Как изменится концентрация электронов при изменении температуры от 300 К до 400 К, если  $E_q = (0,785 - \xi T) \text{ эВ}$ , где  $\xi = 4 \cdot 10^{-4}$ .

**Задача 2.** При  $E < E_F$  и  $T = 0$  функция Ферми-Дирака  $f(E) = 1$ , а при  $E > E_F$  и  $T = 0$   $f(E) = 0$ . Определить функцию Ферми-Дирака при  $E = E_F$ . Какую проводимость в этом случае имеет полупроводник?

**Задача 3.** Найдите положение уровней Ферми в германии, находящемся в состоянии термодинамического равновесия при температуре 300 К. Материал легирован акцепторными атомами с концентрацией  $10^{16} \text{ см}^{-3}$ , которые ионизированы 100%. При комнатной температуре  $T_K$  имеет место равенство

$$n_i^2 = 3,1 \cdot 10^{32} T_K^3 \exp\left(\frac{-9100}{T_K}\right).$$

**Задача 4.** Вместо распределения Ферми-Дирака  $f(E)$ , определяемого формулой  $f(E) = [1 + \exp((E - E_F)/(kT))]^{-1}$ , используют распределение Максвелла-Больцмана  $f_{MB}$  [см. формулу  $f_{MB}(E) = C \cdot e^{-E/(kT)}$ ]; уровень E находится вблизи уровня  $E_F$ . Какова относительная ошибка такой замены при  $E - E_F = kT$  и при  $E - E_F = 4kT$ ?

**Задача 5.** Имеется равновесный образец германия, легированный атомами сурьмы (элемент V группы) с концентрацией  $2,4 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$  при температуре 400 К. Вычислить концентрацию носителей заряда, которая установится после того, как проведено легирование атомами индия (элемент III группы) с концентрацией  $4,8 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ .

**Задача 6.** В образце кремния n-типа, находящемся при комнатной температуре, распределение концентрации акцепторов вдоль оси x описывается функцией  $N_d(x) = N \cdot \exp(-x/x_0)$ , где  $x_0 = 0,5 \text{ мкм}$ . Считая, что  $n(x) = N_d(x)$ , вычислите плотность тока диффузии для электронов в зависимости от величины  $N_d$ . Исходные данные:

$$D_n = 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}; \quad \mu_n = 80 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}.$$

**Задача 7.** Образец кремния, находящийся при температуре 380 К, подвергается непрерывному воздействию фотонов. Такое внешнее возбуждение ионизирует атомы примеси, создавая концентрацию примесей  $N_d = 10^{15} \text{ см}^{-3}$  и обуславливая постоянную генерацию  $0,7 \cdot 10^{16}$  электронно-дырочных пар в секунду. Подсчитайте относительное изменение концентрации носителей вследствие действия фотонов, если  $\tau_n = \tau_p = 12 \text{ нс}$ .

#### ВАРИАНТ №15

**Задача 1.** Найти положение уровня Ферми и температурную зависимость концентрации электронов в собственном полупроводнике. Как изменится концентрация электронов при изменении температуры от 400 К до 500 К, если  $E_g = (0,785 - \xi T) \text{ эВ}$ , где  $\xi = 4 \cdot 10^{-2}$ .

**Задача 2.** Показать, что при  $E < E_F$  и  $T = 0$  функция Ферми-Дирака  $f(E) = 1$ , а при  $E > E_F$  и  $T = 0$   $f(E) = 0$ . В каком случае здесь рассматривается n-полупроводник?

**Задача 3.** Найдите положение уровней Ферми в германии, находящемся в состоянии термодинамического равновесия при температуре 100 К. Материал легирован акцепторными атомами с концентрацией  $10^{15} \text{ см}^{-3}$ , которые ионизированы на 50%. При комнатной температуре  $T_K$  справедливо равенство

$$n_i^2 = 3,1 \cdot 10^{32} T_K^3 \exp\left(\frac{-9100}{T_K}\right).$$

**Задача 4.** Вместо распределения Ферми—Дирака  $f(E)$ , определяемого формулой  $f(E) = [1 + \exp((E - E_F)/(kT))]^{-1}$ , используют распределение Максвелла-Больцмана  $f_{MB}$  [см. формулу  $f_{MB}(E) = C \cdot e^{-E/(kT)}$ ]; уровень E находится вблизи уровня  $E_F$ . Какова относительная ошибка такой замены при  $E - E_F = kT$  и при  $E - E_F = 3kT$ ?

**Задача 5.** Имеется равновесный образец кремния, легированный атомами сурьмы (элемент V группы) с концентрацией  $2,4 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$  при температуре

400 К. Вычислить концентрацию носителей, которая установится после того, как проведено легирование атомами индия (элемент III группы) с концентрацией  $4,8 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ .

**Задача 6.** В образце кремния n-типа, находящемся при комнатной температуре, распределение концентрации акцепторов вдоль оси  $x$  описывается функцией  $N_d(x) = N \cdot \exp(-x/x_0)$ , где  $x_0 = 0,5 \text{ мкм}$ . Считая, что  $n(x) = N_d(x)$ , вычислите напряженность внутреннего электрического поля для электронов в зависимости от величины  $N_d$ . Исходные данные:

$$D_n = 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}; \quad \mu_n = 1100 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}.$$

**Задача 7.** Образец кремния, находящийся при температуре 380 К, подвергается непрерывному воздействию фотонов. Такое внешнее возбуждение ионизирует атомы примеси, создавая концентрацию примесей  $N_d = 10^{15} \text{ см}^{-3}$  и обуславливая постоянную генерацию  $0,7 \cdot 10^{16}$  электронно-дырочных пар в секунду. Подсчитайте относительное изменение концентрации носителей вследствие действия фотонов, если  $\tau_n = \tau_p = 12 \text{ нс}$ .

#### ВАРИАНТ №16

**Задача 1.** Как изменится концентрация собственных электронов при изменении температуры от 200 К до 300 К, если  $E_g = (0,785 - \xi T) \text{ эВ}$ , где  $\xi = 4 \cdot 10^{-4}$ .

**Задача 2.** Показать, что при  $E < E_F$  и  $T = 0$  функция Ферми-Дирака  $f(E) = 1$ , а при  $E > E_F$  и  $T = 0$   $f(E) = 0$ . В каком случае здесь рассматривается  $p$ -полупроводник?

**Задача 3.** В образец чистого кремния введены донорные атомы фосфора с концентрацией  $10^{16} \text{ см}^{-3}$ . Предположим, что атомы фосфора распределены в кремнии равномерно. Атомная масса фосфора равна 31. Какую долю по массе составляют донорные примеси?

**Задача 4.** Вместо распределения Ферми-Дирака  $f(E) = [1 + \exp((E - E_F)/(kT))]^{-1}$  используют распределение Максвелла-Больцмана  $f_{MB}(E) = C \cdot e^{-E/(kT)}$ ; уровень  $E$  находится вблизи уровня  $E_F$ . Какова относительная ошибка такой замены при  $E - E_F = 2kT$  и при  $E - E_F = 4kT$ ?

**Задача 5.** Имеется равновесный образец кремния при температуре 400 К. Вычислить концентрацию дырок и электронов, если образец легирован атомами сурьмы (элемент V группы) с концентрацией  $2,4 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ , а затем проведено легирование атомами индия (элемент III группы) с концентрацией  $4,8 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ .

**Задача 6.** В образце кремния n-типа, находящемся при комнатной температуре, распределение концентрации акцепторов вдоль оси  $x$  описывается функцией  $N_d(x) = N \cdot \exp(-x/x_0)$ , где  $x_0 = 0,5 \text{ мкм}$ . Считая, что  $n(x) = N_d(x)$ , вычислите плотность тока дрейфа для электронов в зависимости от величины  $N_d$ . Исходные данные:

$$D_n=10^{-6}\text{ м}^2\text{ с}^{-1}; \mu_n=1100\text{ см}^2\cdot\text{В}^{-1}\cdot\text{с}^{-1}.$$

**Задача 7.** Образец кремния, находящийся при температуре 380 К, подвергается непрерывному воздействию фотонов. Такое внешнее возбуждение ионизирует атомы примеси, создавая концентрацию примесей  $N_d=10^{15}\text{ см}^{-3}$  и обуславливая постоянную генерацию  $0,7\cdot 10^{16}$  электронно-дырочных пар в секунду. Подсчитайте относительное изменение концентрации носителей вследствие действия фотонов, если  $\tau_n=\tau_p=12\text{ мс}$ .

#### ВАРИАНТ №17

**Задача 1.** Как изменится концентрация собственных электронов при изменении температуры от 250 К до 400 К, если  $E_q=(0,785-\xi T)$  эВ, где  $\xi=4\cdot 10^{-3}$ .

**Задача 2.** Вычислить положение уровня Ферми при  $T=300\text{ К}$  в кристаллах германия, содержащих  $2\cdot 10^{22}\text{ м}^{-3}$  атомов мышьяка.

**Задача 3.** В образец чистого кремния введены донорные атомы фосфора с концентрацией  $10^{16}\text{ см}^{-3}$ . Предположим, что атомы фосфора распределены в кремнии равномерно. Атомная масса фосфора равна 31. Если в добавление к фосфору введены  $10^{17}\text{ см}^{-3}$  атомов бора, распределенных равномерно, то каковы результирующее удельное сопротивление и тип проводимости (будет ли материал иметь проводимость  $p$ - или  $n$ -типа)?

**Задача 4.** Вместо распределения Ферми-Дирака  $f(E)=[1+\exp((E-E_F)/(kT))]^{-1}$  используют распределение Максвелла-Больцмана  $f_{\text{МБ}}(E)=C\cdot e^{-E/(kT)}$ ; уровень  $E$  находится вблизи уровня  $E_F$ . Какова относительная ошибка такой замены при  $E-E_F=kT$  и при  $E-E_F=4kT$ ?

**Задача 5.** Полупроводник, в котором концентрации примесей  $N_d$  и  $N_a$  одинаковы, называют компенсированным. В таком материале концентрация дырок  $p$  и  $n$  электронов совпадает с собственной концентрацией  $n_i$ . Будет ли компенсированный материал иметь то же удельное сопротивление, что и нелегированный собственный полупроводник? Поясните ответ.

**Задача 6.** В образце кремния  $n$ -типа, находящемся при комнатной температуре, распределение концентрации акцепторов вдоль оси  $x$  описывается функцией  $N_d(x)=N\cdot \exp(-x/x_0)$ , где  $x_0=0,5\text{ мкм}$ . Считая, что  $n(x)=N_d(x)$ , вычислите плотность тока диффузии для электронов в зависимости от величины  $N_d$ . Исходные данные:

$$D_n=10^{-6}\text{ м}^2\text{ с}^{-1}; \mu_n=1100\text{ см}^2\cdot\text{В}^{-1}\cdot\text{с}^{-1}.$$

**Задача 7.** Образец кремния, находящийся при температуре 380 К, подвергается непрерывному воздействию фотонов. Такое внешнее возбуждение ионизирует атомы примеси, создавая концентрацию примесей  $N_d=10^{15}\text{ см}^{-3}$  и

обуславливая постоянную генерацию  $0,7 \cdot 10^{16}$  электронно-дырочных пар в секунду ( $\tau_n = \tau_p = 12$  мс). Пусть действие потока фотонов прекращается в момент времени  $t = t_0$ . Как изменяется во времени избыточная концентрация дырок при  $t > t_0$ ?

#### ВАРИАНТ №18

**Задача 1.** Как изменится концентрация собственных электронов при изменении температуры от 150 К до 300 К, если  $E_d = (0.785 - \xi T)$  эВ, где  $\xi = 4 \cdot 10^{-4}$ .

**Задача 2.** Вычислить положение уровня Ферми при  $T = 300$  К в кристаллах кремния, содержащих  $5 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$  атомов мышьяка и  $10^{22} \text{ м}^{-3}$  атомов галлия.

**Задача 3.** В образец чистого кремния введены донорные атомы фосфора с концентрацией  $10^{16} \text{ см}^{-3}$ . Предположим, что атомы фосфора распределены в кремнии равномерно. Атомная масса фосфора равна 31. Определить положение уровня Ферми и изобразить диаграмму энергетических зон.

**Задача 4.** Вместо распределения Ферми-Дирака  $f(E) = [1 + \exp((E - E_F)/(kT))]^{-1}$  используют распределение Максвелла-Больцмана  $f_{MB}(E) = C \cdot e^{-E/(kT)}$ ; уровень  $E$  находится вблизи уровня  $E_F$ . Какова относительная ошибка такой замены при  $E - E_F = 2kT$  и при  $E - E_F = 3kT$ ?

**Задача 5.** Покажите, что в слаболегированном полупроводнике  $p$ -типа удельное сопротивление максимально, если  $\mu_n/\mu_p > 1$ .

**Задача 6.** В образце кремния  $n$ -типа, находящемся при комнатной температуре, распределение концентрации акцепторов вдоль оси  $x$  описывается функцией  $N_d(x) = N \cdot \exp(-x/x_0)$ , где  $x_0 = 0,8$  мкм. Считая, что  $n(x) = N_d(x)$ , вычислите напряженность внутреннего электрического поля для электронов в зависимости от величины  $N_d$ . Исходные данные:

$$D_n = 10^{-3} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}; \quad \mu_n = 900 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}.$$

**Задача 7.** Образец кремния, находящийся при температуре 380 К, подвергается непрерывному воздействию фотонов. Такое внешнее возбуждение ионизирует атомы примеси, создавая концентрацию примесей  $N_d = 10^{15} \text{ см}^{-3}$  и обуславливая постоянную генерацию  $0,7 \cdot 10^{16}$  электронно-дырочных пар в секунду ( $\tau_n = \tau_p = 12$  мс). Пусть действие потока фотонов прекращается в момент времени  $t = t_0$ . За какое время избыточная концентрация снизится до 15% начального значения?

#### ВАРИАНТ №19

**Задача 1.** Как изменится концентрация собственных электронов при изменении температуры от 100 К до 200 К, если  $E_d = (0.785 - \xi T)$  эВ, где  $\xi = 4 \cdot 10^{-2}$ .

**Задача 2.** Вычислить положение уровня Ферми при  $T = 300$  К в кристаллах кремния, содержащих  $2 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$  атомов мышьяка и  $10^{22} \text{ м}^{-3}$  атомов галлия.

**Задача 3.** Найти равновесные концентрации электронов и дырок в кремнии при 27°C, если кремний содержит следующие концентрации легирующих примесей, создающих мелкие уровни: а)  $1 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$  атомов бора, б)  $3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$  атомов мышьяка и  $2,9 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$  атомов бора.

**Задача 4.** Покажите, что вероятность того, что состояние с энергией, превышающей уровень Ферми  $E_F$  на величину  $\Delta E$ , занято, в точности совпадает с вероятностью иметь свободное состояние, энергия которого меньше значения  $E_F$  на ту же величину  $\Delta E$ .

**Задача 5.** Вычислите концентрацию акцепторных атомов акцепторной примеси  $N_a$ , которая потребуется для достижения максимального удельного сопротивления. Примите для кремния  $\mu_n/\mu_p=2,18$ ;  $n_i=1,4 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ .

**Задача 6.** В образце кремния n-типа, находящемся при комнатной температуре, распределение концентрации акцепторов вдоль оси  $x$  описывается функцией  $N_d(x)=N \cdot \exp(-x/x_0)$ , где  $x_0=0,8 \text{ мкм}$ . Считая, что  $n(x)=N_d(x)$ , вычислите плотность тока дрейфа для электронов в зависимости от величины  $N_d$ . Исходные данные:

$$D_n=10^{-3} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}; \quad \mu_n=900 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}.$$

**Задача 7.** Образец кремния, находящийся при температуре 180 К, подвергается непрерывному воздействию фотонов. Такое внешнее возбуждение ионизирует атомы примеси, создавая концентрацию примесей  $N_d=10^{19} \text{ см}^{-3}$  и обуславливая постоянную генерацию  $0,1 \cdot 10^{15}$  электронно-дырочных пар в секунду. Подсчитайте относительное изменение концентрации носителей вследствие действия фотонов, если  $\tau_n=\tau_p=7 \text{ нс}$ .

#### ВАРИАНТ №20

**Задача 1.** Как изменится концентрация собственных электронов при изменении температуры от 210 К до 280 К, если  $E_q=(0,785-\xi T) \text{ эВ}$ , где  $\xi=4 \cdot 10^{-4}$ .

**Задача 2.** Вычислить положение уровня Ферми при  $T=200 \text{ К}$  в кристаллах германия, содержащих  $2 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$  атомов мышьяка и  $10^{22} \text{ м}^{-3}$  атомов галлия.

**Задача 3.** Найти положение уровня Ферми в кремнии при 27 °С, если кремний содержит следующие концентрации легирующих примесей, создающих мелкие уровни: а)  $1 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$  атомов бора, б)  $3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$  атомов мышьяка и  $2,9 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$  атомов бора.

**Задача 4.** Покажите, что вероятность того, что состояние с энергией, превышающей уровень Ферми  $E_F$  на величину  $\Delta E$ , занято, в точности совпадает с вероятностью иметь свободное состояние, энергия которого меньше значения  $E_F$  на ту же величину  $\Delta E$ .

**Задача 5.** В образце кремния электрон массой  $m$  имеет тепловую энергию порядка  $kT$ , которая связана со средней скоростью теплового движения соотношением  $E=3kT/2$ . Если известно, что  $\mu_n=1350 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ , покажите, что (при

комнатной температуре) скорость дрейфа электронов мала по сравнению со скоростью теплового движения, если напряженность внешнего поля 10 В/см. Убедитесь, что при напряженности поля 1000 В/см выполняется обратное неравенство.

**Задача 6.** В образце кремния *n*-типа, находящемся при комнатной температуре, распределение концентрации акцепторов вдоль оси *x* описывается функцией  $N_d(x) = N \cdot \exp(-x/x_0)$ , где  $x_0 = 0,8$  мкм. Считая, что  $n(x) = N_d(x)$ , вычислите плотность тока диффузии для электронов в зависимости от величины  $N_d$ . Исходные данные:

$$D_n = 10^{-3} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}; \quad \mu_n = 900 \text{ см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}.$$

**Задача 7.** Образец кремния, находящийся при температуре 280 К, подвергается непрерывному воздействию фотонов. Такое внешнее возбуждение ионизирует атомы примеси, создавая концентрацию примесей  $N_d = 10^{15} \text{ см}^{-3}$  и обуславливая постоянную генерацию  $0,7 \cdot 10^{12}$  электронно-дырочных пар в секунду. Подсчитайте относительное изменение концентрации носителей вследствие действия фотонов, если  $\tau_n = \tau_p = 4$  нс.

Учебное издание

*Колпаков Всеволод Анатольевич  
Колпаков Анатолий Иванович  
Кричевский Сергей Васильевич*

**ОСНОВЫ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА**

*Учебное пособие*

Редактор Т. К. К р е т и н и н а  
Компьютерная верстка Т. Е. П о л о в н е в а

Подписано в печать 26.06.2010. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Печ. л. 6,0.

Тираж 100 экз. Заказ . Арт. С-19/2010

Самарский государственный  
аэрокосмический университет.  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

---

Изд-во Самарского государственного  
аэрокосмического университета.  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.