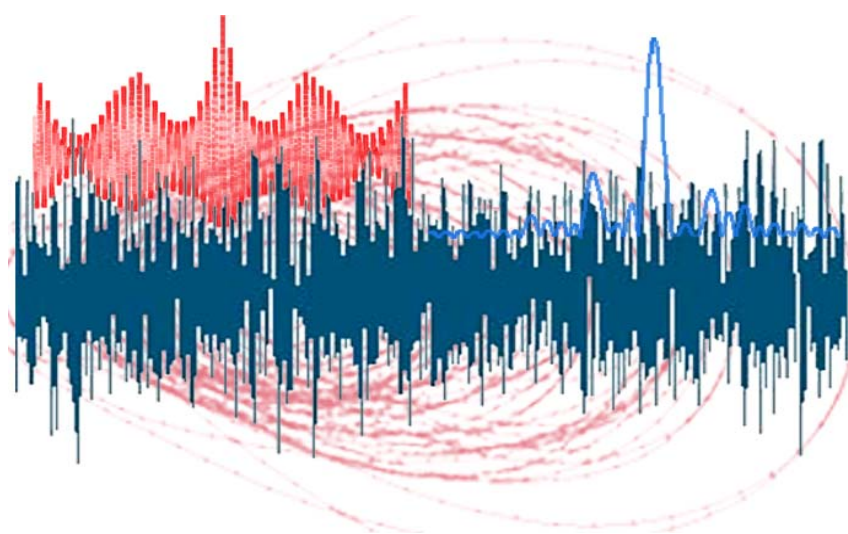


С.А. Прохоров, И.М. Куликовских

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ  
КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ  
ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ  
ПРОЦЕССОВ

Лабораторный практикум



Самара 2008 г.



**Прохоров Сергей Антонович** – доктор технических наук, профессор, академик Международной академии информатизации, член-корреспондент Российской академии естественных наук, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации, лауреат губернской премии в области науки и техники, премии Ленинского комсомола, конкурса на лучшую научную книгу 2005 года среди преподавателей высших учебных заведений, награжден медалями Келдыша М.В., Гагарина Ю.А. федерации космонавтики РФ, изобретателя СССР, «За заслуги перед городом Самара», нагруд-

ным знаком «Ветеран космодрома Плесецк», заведующий кафедрой информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета.

В качестве председателя Головного Совет Минвуза России по автоматизации научных исследований в период 1988-1996 г.г. руководил разработкой и выполнением шести научно-исследовательских программ и подпрограмм АН СССР, Минэлектронпрома СССР, Минвуза России.

Результаты его работы нашли отражение в 276 научных трудах, в том числе 15 монографиях, 12 брошюрах, 40 авторских свидетельствах, 6 работах опубликованных за рубежом, выступлениях более чем на 90 международных, Всесоюзных и республиканских конференциях и симпозиумах.

**Куликовских Илона Марковна** – инженер кафедры информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева.

Результаты её работы нашли отражение в 15 научных трудах, в том числе 2 монографиях, выступлениях на 12 международных и всероссийских конференциях.



**УДК 681.518.3, 514:681.323/043.3/  
ББК 32.965я73**

Рецензенты:

Заслуженный деятель науки РФ, член-корреспондент РАН, д. т. н., профессор  
Сойфер В.А.;

д. ф.-м. н., профессор Жданов А.И.

**П 10 Прохоров С.А., Куликовских И.М.**

Ортогональные модели корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов. Лабораторный практикум/ СНЦ РАН, 2008. 301 с., ил.

**ISBN – 978-5-93424-351-8**

Рассматриваются классические ортогональные полиномы и функции, определяются их основные характеристики, применяемые при построении и исследовании ортогональных моделей функциональных вероятностных характеристик случайных процессов (временных рядов).

Анализируются методы, алгоритмы аппроксимативного анализа вероятностных функциональных характеристик временных рядов в различных ортогональных базисах: корреляционных функций и спектральных плотностей мощности, функций спектра и т.д.

Предназначена для преподавателей, научных сотрудников, инженеров, аспирантов и студентов как руководство по изучению основ аппроксимативного анализа случайных процессов в ортогональных базисах.

**ББК 32.965я73**

Печатается по решению издательского совета Самарского научного центра Российской академии наук.

СОДЕРЖАНИЕ	3
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ	5
ПРЕДИСЛОВИЕ	7
ВВЕДЕНИЕ	9
1. ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ	15
1.1. Теоретические основы лабораторной работы	15
1.2. Задание на самостоятельную работу	24
1.3. Содержание отчёта	25
1.4. Контрольные вопросы	25
2. ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ	26
2.1. Теоретические основы лабораторной работы	26
2.2. Задание на самостоятельную работу	31
2.3. Содержание отчёта	31
2.4. Контрольные вопросы	32
3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ И ИНТЕРВАЛА ДИСКРЕТИЗАЦИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ	33
3.1. Теоретические основы лабораторной работы	33
3.2. Задание на самостоятельную работу	34
3.3. Содержание отчёта	34
3.4. Контрольные вопросы	35
4. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ	36
4.1. Теоретические основы лабораторной работы	36
4.2. Задание на самостоятельную работу	48
4.3. Содержание отчёта	48
4.4. Контрольные вопросы	48
5. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ	49
5.1. Теоретические основы лабораторной работы	49
5.2. Задание на самостоятельную работу	70
5.3. Содержание отчёта	70
5.4. Контрольные вопросы	71
6. АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ С УЧЕТОМ УСЛОВИЯ НОРМИРОВКИ	72
6.1. Теоретические основы лабораторной работы	72
6.2. Задание на самостоятельную работу	80
6.3. Содержание отчёта	81
6.4. Контрольные вопросы	81
7. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ МОЩНОСТИ	82
7.1. Теоретические основы лабораторной работы	82
7.2. Задание на самостоятельную работу	94
7.3. Содержание отчёта	94
7.4. Контрольные вопросы	94
8. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ	95
8.1. Теоретические основы лабораторной работы	95
8.2. Задание на самостоятельную работу	100
8.3. Содержание отчёта	101
8.4. Контрольные вопросы	101
9. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ОБОБЩЕННЫХ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК	102
9.1. Теоретические основы лабораторной работы	102
9.2. Задание на самостоятельную работу	116
9.3. Содержание отчёта	117
9.4. Контрольные вопросы	117
10. ПОСТРОЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК С ПОМОЩЬЮ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ (АИС)	118
10.1. Теоретические основы лабораторной работы	118
10.2. Задание на самостоятельную работу	126

10.3.	Содержание отчёта	126
10.4.	Контрольные вопросы	127
11.	ПОСТРОЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ВЗАИМНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК С ПОМОЩЬЮ АИС	128
11.1.	Теоретические основы лабораторной работы	128
11.2.	Задание на самостоятельную работу	134
11.3.	Содержание отчёта	135
11.4.	Контрольные вопросы	135
12.	АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТЕЙ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ	136
12.1.	Теоретические основы лабораторной работы	136
12.2.	Задание на самостоятельную работу	138
12.3.	Содержание отчёта	138
12.4.	Контрольные вопросы	139
13.	ВЛИЯНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ НА УВЕЛИЧЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ	140
13.1.	Теоретические основы лабораторной работы	140
13.2.	Задание на самостоятельную работу	144
13.3.	Содержание отчёта	144
13.4.	Контрольные вопросы	144
14.	АНАЛИЗ МЕТОДИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ АИС	145
14.1.	Теоретические основы лабораторной работы	145
14.2.	Задание на самостоятельную работу	150
14.3.	Содержание отчёта	151
14.4.	Контрольные вопросы	151
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	152
	СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	153
	ПРИЛОЖЕНИЕ	157
1.	Вид ортогональных полиномов 0 – 5 порядков	157
2.	Лабораторная работа 1	159
3.	Вид ортогональных функций 0 – 5 порядков	165
4.	Правила действий над коэффициентами производящих функций и интегральное представление комбинаторных чисел	167
5.	Лабораторная работа 2	171
6.	Лабораторная работа 3	178
7.	Частотные характеристики ортогональных функций	183
8.	Частотные характеристики ортогональных фильтров	196
9.	Лабораторная работа 4	207
10.	Алгебраические выражения для вычисления коэффициентов разложения	211
11.	Лабораторная работа 5	218
12.	Лабораторная работа 6	228
13.	Лабораторная работа 7	237
14.	Лабораторная работа 8	241
15.	Лабораторная работа 9	243
16.	Алгоритмы рекурсивной фильтрации	247
17.	АИС корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах	249
18.	Руководство пользователя	258
19.	Формат вводимых и выводимых файлов	266
20.	Пример обработки экспериментальных данных	267
21.	Вид центрированных фотоплетизмограмм	275
22.	Лабораторная работа 12	279
23.	Лабораторная работа 13	284
24.	Краткие биографии математиков	288

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

- АСНИ – автоматизированная система научных исследований;  
ВКФ – взаимная корреляционная функция;  
ВНКФ – взаимная нормированная корреляционная функция;  
ВР – временной ряд;  
ИВК – измерительно-вычислительный комплекс;  
ИИС – информационно-измерительная система;  
КФ – корреляционная функция;  
НКФ – нормированная корреляционная функция;  
ПО – процессор обработки;  
ПРИС – процессорно-измерительное средство;  
СП – случайный процесс;  
 $A_{\Theta} \{ \hat{x}(t_k) \}$  – алгоритм оценки вероятностной характеристики  $\Theta$ ;  
 $A_s \{ \hat{x}(t_k) \}$  – алгоритм оценки сигнала;  
 $C_x(J)$  – интервальная корреляционная функция;  
 $d$  – параметр усреднения (время  $T$ , совокупность реализаций  $N$  или время и совокупность реализаций  $TN$ );  
 $\hat{D}_x$  – оценка дисперсии;  
 $ent[ ]$  – операция взятия целой части числа;  
 $F_x(\omega)$  – спектральная функция;  
 $g[ ]$  – оператор, представляющий собой преобразования, лежащие в основе определения вероятностной характеристики  $\Theta$ ;  
 $K_a(\tau)$  – аппроксимирующее выражение корреляционной функции;  
 $K_{axy}(\tau)$  – аппроксимирующее выражение взаимной корреляционной функции;  
 $K_x(\tau)$  – корреляционная функция стационарного случайного процесса;  
 $K_x(t, t')$  – корреляционная функция случайного процесса;  
 $K_{xy}(\tau)$  – взаимная корреляционная функция;  
 $\psi_k(\tau, \alpha / \gamma)$  – ортогональная функция  $k$ -го порядка;  
 $M[ ]$  – оператор математического ожидания;  
 $S_d$  – оператор усреднения;  
 $Sign$  – знаковая функция;  
 $S_{axy}(\omega)$  – аппроксимирующее выражение взаимной спектральной плотности мощности;  
 $S_x(\omega)$  – спектральная плотность мощности процесса  $\overset{\circ}{x}(t)$ ;  
 $S_{xni}(\omega)$  – нормированная спектральная плотность мощности процесса  $\overset{\circ}{x}(t)$ ;  
 $S_{xy}(\omega)$  – взаимная спектральная плотность мощности;  
 $W_k(j\omega)$  – частотная характеристика ортогональных функций  $k$ -го порядка;  
 $x_j(t)$  –  $j$ -ая реализация случайного процесса;  
 $\bar{x}(\vec{\Theta}, t)$  – реализация случайного процесса;  
 $\beta_k$  – коэффициент разложения ортогонального ряда;

$b_k$  – коэффициент разложения ортогонального ряда;  
 $c_k$  – коэффициент разложения ортогонального ряда;  
 $\Delta$  – погрешность аппроксимации;  
 $\delta$  – относительная погрешность аппроксимации;  
 $\Delta t_{ji}$  – интервал дискретизации;  
 $\Delta \omega_\varphi$  – полоса пропускания фильтра;  
 $\Delta \omega_c$  – эквивалентная ширина спектра мощности сигнала;  
 $\gamma_{см}$  – погрешность от смещенности оценки;  
 $\gamma_{см доп}, \gamma_{м доп}$  – допустимые значения погрешностей оценки;  
 $\gamma_m$  – методическая статистическая погрешность;  
 $\mu$  – показатель колебательности;  
 $\hat{\Theta}_j[X(t)]$  –  $j$ -текущая оценка вероятностной характеристики;  
 $\Theta[X(t)], \Theta$  – измеряемая вероятностная характеристика;  
 $\vec{\Theta}$  – вектор информативных параметров случайного процесса;  
 $\hat{\Theta}_{cp}[X(t)]$  – средняя оценка вероятностной характеристики;  
 $\hat{\Theta}[X(t)]$  – оценка измеряемой вероятностной характеристики;  
 $\hat{\Theta}_t[X(t)]$  –  $t$ -текущая оценка вероятностной характеристики;  
 $\rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  – аппроксимирующее выражение нормированной корреляционной функции;  
 $\rho_x(\tau)$  – нормированная корреляционная функция стационарного случайного процесса;  
 $\rho_x(t, t')$  – нормированная корреляционная функция случайного процесса;  
 $\rho_{xy}(\tau)$  – взаимная нормированная корреляционная функция;  
 $r_{xy}$  – коэффициент корреляции;  
 $\tau_k^{(i)}$  – интервал корреляции;  
 $\tau_{k \max}$  – максимальный интервал корреляции;  
 $\vec{\Omega}$  – вектор информативных параметров объекта исследований.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый Вашему вниманию лабораторный практикум, посвященный изучению ортогональных моделей корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов, подготовлен для преподавателей, научных сотрудников, инженеров, аспирантов и студентов как руководство и дополняет следующие монографии:

1. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов./Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 2001. 329 с., ил.
2. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов. – 2-е изд., перераб. и доп./СНЦ РАН, 2001. 380 с., ил.
3. Прохоров С.А. Математическое описание и моделирование случайных процессов/Самарский государственный аэрокосмический университет, 2001. 209 с.: ил.
4. Прохоров С.А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум/Самарский государственный аэрокосмический университет, 2001. 191 с.: ил.
5. Прохоров С.А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум. – 2-е изд., перераб. и доп./ СНЦ РАН, 2002. 277 с., ил.
6. Прохоров С.А., А.В. Иващенко, А.В. Графкин. Автоматизированная система корреляционно-спектрального анализа случайных процессов./ СНЦ РАН, 2003. 286 с., ил.
7. Прохоров С.А., Графкин А.В. Программный комплекс корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах./ СНЦ РАН, 2005. 198 с., ил.
8. Прикладной анализ случайных процессов. Под ред. Прохорова С.А./ СНЦ РАН, 2007. 582 с., ил.

Представленные лабораторные работы можно разбить на три блока:

- 1) изучение свойств ортогональных полиномов и функций с использованием системы Mathcad (1 - 4 лабораторные работы);
- 2) построение ортогональных моделей корреляционно-спектральных характеристик с использованием системы Mathcad и автоматизированной информационной системы (5 - 11 лабораторные работы);
- 3) анализа погрешностей оценки параметров ортогональных моделей корреляционно-спектральных характеристик с использованием системы Mathcad и автоматизированной информационной системы (12 - 14 лабораторные работы).

Материалы, представленные в лабораторном практикуме, получены в результате выполнения научно-исследовательских работ на кафедрах «Информационно-измерительная техника», «Информационная техника» Самарского государственного технического университета (СГТУ), «Информационные системы и технологии» Самарского государственного аэрокосмического университета (СГАУ), Самарском филиале Российского НИИ информационных систем, естественно-математическом факультете Загребского университета и «Центре исследования моря» института «Руджер Бошкович» (г. Загреб, Хорватия), выполненных под руководством и при непосредственном участии Прохорова С.А.

Отдельные разделы лабораторного практикума использовались при чтении лекций по ряду дисциплин при подготовке студентов по специальностям «Информационно-измерительная техника», «Автоматизированные системы обработки информации и управления» в Самарском государственном аэрокосмическом университете,



Самарском государственном техническом университете, Самарском государственном университете, Волгоградском государственном университете, Оренбургском государственном университете, Саратовском государственном техническом университете, Уфимском государственном авиационно-техническом университете, также для научных сотрудников и аспирантов в «Центре исследования моря» института «Руджер Бошкович» (г. Загреб, Хорватия), на естественно-математическом факультете Загребского университета, Международном университете подготовки аспирантов (г. Дубровник, Хорватия), Пекинском техническом университете (Китай).

В полном объеме лабораторный практикум прошел апробацию на кафедре информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета при подготовке специалистов по специальности «Автоматизированные системы обработки информации и управления-230102», Самарском государственном университете, кафедре радиотехники Саратовского государственного технического университета, и, на наш взгляд, может быть рекомендован для подготовки специалистов по смежным специальностям.

Авторы выражают благодарность всем сотрудникам, аспирантам и студентам указанных кафедр за обсуждение материалов лабораторного практикума, критические замечания которых были учтены.

Авторы считают своим долгом выразить глубокую признательность ректору СГАУ член-корреспонденту РАН, профессору Сойферу В.А. за постоянную поддержку и рецензию, а также рецензенту д.ф-м.н., профессору Жданову А.И. за ценные замечания.

Замечания и пожелания по книге просьба направлять по адресу:

Россия, 443086, г. Самара, Московское шоссе, 34, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва, факультет информатики, кафедра «Информационные системы и технологии», заведующему кафедрой Прохорову С.А.

E-mail: INTERNET: sp @ smr. ru

## ВВЕДЕНИЕ

При проведении научных исследований, комплексных испытаний с помощью средств информационно-измерительной техники исследователь получает случайный сигнал  $x(t, \Theta)$ , характеристики которого  $\Theta$  подлежат определению.

Все вероятностные характеристики, определяемые во временной области, можно условно разделить на характеристики положения и формы кривой распределения вероятностей случайного процесса и характеристики взаимосвязи (см. рис. В.1).

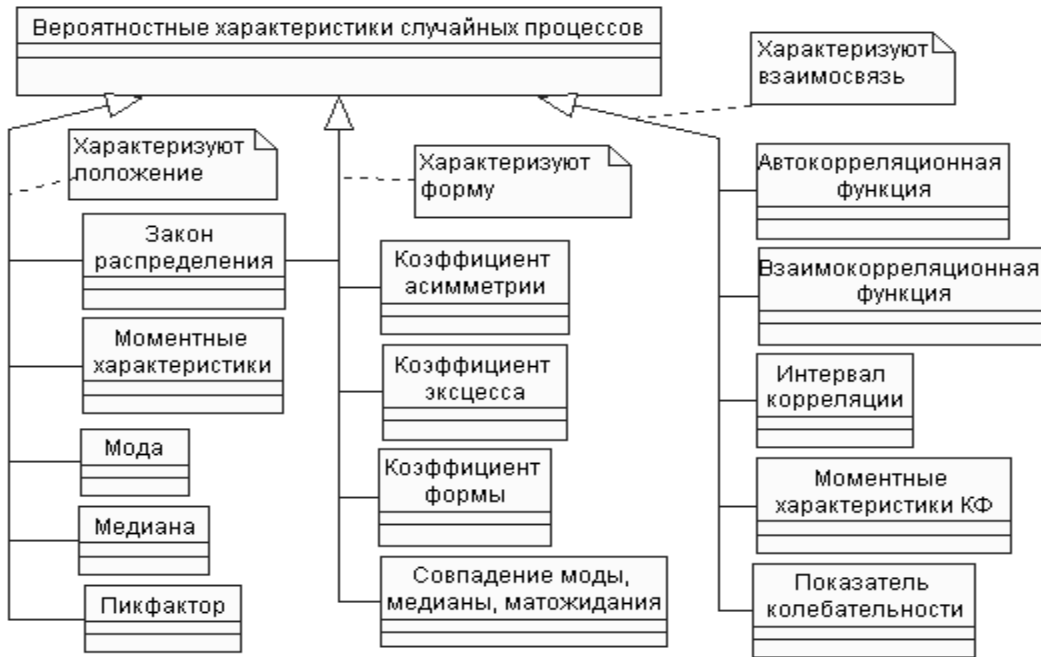


Рисунок В.1 - Классификация вероятностных характеристик случайных процессов

При этом наиболее часто определяются (в порядке возрастания материальных и вычислительных затрат):

- числовые характеристики случайного процесса;
- авто и взаимные корреляционные функции;
- спектральные плотности мощности;
- законы распределения.

На основании общей теории статистических измерений [55] измеряемая вероятностная характеристика определяется как предел выборочного среднего функционально преобразованного случайного процесса:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{d \rightarrow \infty} S_d g[x_j(t)], \quad (\text{В.1})$$

где  $\Theta$  – измеряемая вероятностная характеристика;

$S_d$  – оператор идеального усреднения;

$d$  – параметр усреднения (время  $T$ , совокупность реализаций  $N$  или время и совокупность реализаций  $TN$ );

$g$  – оператор, представляющий собой преобразования, лежащие в основе определения вероятностной характеристики  $\Theta$ ;

$x_j(t)$  –  $j$ -ая реализация случайного процесса.

В зависимости от вида усреднения получаем следующие вероятностные характеристики:

1. При усреднении по совокупности:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t)]. \quad (\text{B.2})$$

2. При усреднении по времени:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (\text{B.3})$$

3. При усреднении по времени и совокупности:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ T \rightarrow \infty}} \frac{1}{NT} \sum_{j=1}^N \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (\text{B.4})$$

На практике исследователь имеет дело с ограниченной совокупностью выборочных данных (результатов измерения). Результат определения значения вероятностной характеристики по ограниченной совокупности выборочных данных носит название **оценки**:

$$\hat{\Theta}[X(t)] = S_d g[x_j(t)] \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (\text{B.5})$$

К основным свойствам оценок относятся **несмещенность**, **состоятельность** и **эффективность**.

Оценка называется **несмещенной**, если ее математическое ожидание равно истинному значению оцениваемой характеристики:

$$M[\hat{\Theta}[X(t)]] = \Theta[X(t)]. \quad (\text{B.6})$$

При невыполнении равенства оценка будет смещенной.

Оценка называется **состоятельной**, если при бесконечном увеличении объема выборочных данных она сходится по вероятности к истинному значению оцениваемой характеристики

$$\lim_{d \rightarrow \infty} P(|\hat{\Theta}[X(t)] - \Theta[X(t)]| < \varepsilon) = 1 \quad (\text{B.7})$$

при любом  $\varepsilon$ .

При невыполнении этого условия оценка будет несостоятельной.

**Эффективными** называются оценки, дисперсия которых минимальна.

Следует подчеркнуть, что свойства оценок, которые описываются несмещенностью, состоятельностью и эффективностью, тесно связаны с характером ошибок, которые определяются методами математической статистики [55].

Таким образом, при ограниченном наборе выборочных данных выражения (B.2) - (B.4) при анализе случайных процессов примут вид:

- при усреднении по совокупности

$$\hat{\Theta}_t[X(t)] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t)]; \quad (\text{B.8})$$

- при усреднении по времени

$$\hat{\Theta}_j[X(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T g[x_j(t)] dt; \quad (\text{B.9})$$

- при усреднении по времени и совокупности

$$\hat{\Theta}_{cp}[X(t)] = \frac{1}{NT} \sum_{j=1}^N \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (\text{B.10})$$

Следует отметить, что этими соотношениями определяются разные вероятностные характеристики. При усреднении только по совокупности реализаций (при фиксированном моменте времени) вероятностная характеристика  $\Theta[X(t)]$  будет зависеть от текущего времени и называется  $t$ -текущей характеристикой  $\hat{\Theta}_t$  [55]. При усреднении только по времени, когда выборочные значения относятся к одной реализации  $j$ , вероятностная характеристика  $\Theta[X(t)]$  будет зависеть от номера реализации и называется  $j$ -текущей характеристикой  $\hat{\Theta}_j$ . При усреднении и по времени, и совокупности значение  $\Theta[X(t)]$  не зависит ни от текущего времени, ни от номера реализации и называется средней характеристикой –  $\hat{\Theta}_{cp}$ .

Наличие или отсутствие зависимости значений вероятностных характеристик от времени или номера реализации определяет такие фундаментальные свойства процесса, как *стационарность* и *эргодичность*.

**Стационарным** называется процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от времени. **Эргодическим** называется процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от номера реализации.

В теории случайных процессов различают стационарность в узком и широком смысле. Данное выше определение относится к случайным процессам, стационарным в узком смысле. Для этих процессов равенство  $\Theta_t = const$  выполняется для любой вероятностной характеристики. Когда от времени не зависят только одно- и двумерные вероятностные характеристики, случайный процесс считается стационарным в широком смысле. Если условие стационарности не выполняется хотя бы для одной вероятностной характеристики, процесс называется **нестационарным** по этой характеристике.

По аналогии, процесс считается эргодическим в узком смысле, если  $\Theta_j = const$ , где  $j$  – номер реализации, для любой вероятностной характеристики, и в широком смысле, если независимость значений вероятностных характеристик от номера реализации имеет место лишь для характеристик первых двух порядков. Если условие эргодичности не выполняется, процесс называется **неэргодическим**.

Таким образом, случайные процессы на основе свойств стационарности и эргодичности можно представить в виде четырех классов (см. рис. В.2): стационарные эргодические; стационарные неэргодические; нестационарные эргодические; нестационарные неэргодические.

Каждый из перечисленных классов имеет своё характерное описание – **математическую модель**, параметры которой подлежат определению как с помощью теоретических, так и экспериментальных методов исследования.

Различные комбинации этих процессов совместно с детерминированными дают возможность построить более сложные модели, используемые как при исследованиях с целью определения их характеристик, так и при генерировании процессов с заданными свойствами, используемых при имитационном моделировании средств измерения и обработки

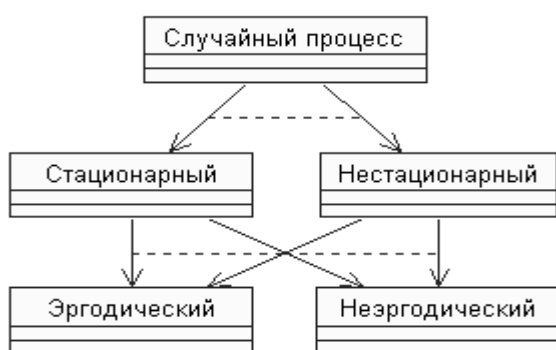


Рисунок В.2 - Классификация случайных процессов

с целью определения их метрологических характеристик.

Ответ на вопрос, какие характеристики определять:  $\Theta_i$ ,  $\Theta_j$ ,  $\Theta_{cp}$ , – во многом определяется свойствами исследуемого процесса и способом формирования выборочных данных.

Таким образом, прежде чем выбрать тип вероятностной характеристики (вид оператора усреднения), необходимо решить вопрос о стационарности и эргодичности случайного процесса. Этот вопрос самостоятельный и выходит за рамки работы.

В [55] показано, что для стационарного эргодического случайного процесса  $\Theta_i = \Theta_j = \Theta_{cp}$ , для стационарного неэргодического процесса –  $\Theta_i = \Theta_{cp}$ , для нестационарного эргодического –  $\Theta_j = \Theta_{cp}$ , а для нестационарного неэргодического процесса все виды вероятностных характеристик различны.

При фиксированном типе  $S_d$  вопросы организации эксперимента и принципы организации массивов выборочных данных о мгновенных значениях исследуемого случайного процесса подробно рассмотрены в [55]. Результаты измерений могут формироваться с использованием:

- различных временных интервалов одной и той же совокупности реализаций;
- одних и тех же временных интервалов различных совокупностей реализаций;
- различных временных интервалов различных совокупностей реализаций.

Причем, от эксперимента к эксперименту возможно изменение  $N$ ,  $M$  и  $T$ , т.е. объема выборочных данных.

Выделим три метода статистических измерений: прямые, косвенные и совокупные.

**Прямым методом** статистических измерений будем называть метод получения оценки вероятностной характеристики в соответствии с выражением (В.1).

**Косвенным методом** статистических измерений будем называть метод получения оценки вероятностной характеристики с использованием функционального преобразования оценок других вероятностных характеристик, полученных с помощью прямых методов статистических измерений:

$$\hat{\Theta}[z(t)] = F\{S_{d1}g_x[x_j(t_i^{(x)})], S_{d2}g_y[y_i(t_i^{(y)})], \dots\}, \quad (\text{В. 11})$$

где  $F\{\}$  представляет собой функциональное преобразование полученных оценок  $\hat{\Theta}[x(t)]$ ,  $\hat{\Theta}[y(t)]$  и т.д. с целью получения оценки  $\hat{\Theta}[z(t)]$ .

Под **совокупными статистическими измерениями** будем понимать метод получения оценок в результате решения системы уравнений, содержащей оценки других вероятностных характеристик, полученных с помощью прямых, косвенных методов статистических измерений или их комбинацией:

$$\mathcal{E}_i \{S_{d1}g^{(l)}[x_j^{(l)}(t_i^{(l)})], \dots, S_{dm}g^{(m)}[x_j^{(m)}(t_i^{(m)})]\} = 0; \quad (\text{В. 12})$$

$$\mathcal{E}_i \{F^{(l)}\{S_{d1}g^{(l)}[x_j^{(l)}(t_i^{(l)})]\}, \dots, F^{(m)}\{S_{dm}g[x_j^{(m)}(t_i^{(m)})]\}\} = 0. \quad (\text{В. 13})$$

Автоматизированные системы научных исследований (АСНИ) дают возможность обрабатывать **временные последовательности случайных процессов – временные ряды**.

В этом случае выражения (В.2) – (В.4) при представлении случайного процесса  $X(t)$  ансамблем последовательностей примут вид:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t_i)]; \quad (\text{B.14})$$

$$\Theta[X(t)] = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)]; \quad (\text{B.15})$$

$$\Theta[X(t)] = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)], \quad (\text{B.16})$$

где  $x_j(t_i)$  –  $i$ -ый отсчёт  $j$ -ой реализации случайного процесса.

При ограниченном наборе данных при анализе последовательностей выражение (B.5) примет вид:

$$\hat{\Theta}[X(t)] = S_d g[x_j(t_i)] \quad (j = 1, 2, \dots, N, i = 1, 2, \dots, M). \quad (\text{B.17})$$

Выражения (B.8) – (B.10) для оценки вероятностных характеристик при анализе последовательностей (временных рядов) запишем в виде:

- при усреднении по совокупности

$$\hat{\Theta}_i[X(t)] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t_i)]; \quad (\text{B.18})$$

- при усреднении по времени

$$\hat{\Theta}_j[X(t)] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)]; \quad (\text{B.19})$$

- при усреднении по времени и совокупности

$$\hat{\Theta}_{cp}[X(t)] = \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)]. \quad (\text{B.20})$$

Следующим шагом является построение математической модели анализируемой вероятностной функциональной характеристики в виде параметрической модели. Следует отметить, что модель должна сохранять основные свойства анализируемой характеристики, особенно условие нормировки [21].

Учитывая большое разнообразие функциональных вероятностных характеристик, наиболее целесообразно искать их модель в виде ряда в том или ином ортогональном базисе  $\psi_k(x, \alpha / \gamma)$  с весом  $\mu(x)$ , где  $\alpha / \gamma$  - параметр масштаба [21].

Представив модель вероятностной функциональной характеристики в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(x, \alpha / \gamma), \quad (\text{B.21})$$

$$\int_a^b \psi_k(x, \alpha / \gamma) \psi_n(x, \alpha / \gamma) \mu(x) dx = \begin{cases} \|\psi_k\|^2, & \text{если } k = n; \\ 0, & \text{если } k \neq n. \end{cases}$$

Для минимизации квадратической погрешности приближения

$$\Delta = \int_a^b \left[ f(x) - \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(x, \alpha / \gamma) \right]^2 \mu(x) dx = \min \quad (\text{B.22})$$

лишь коэффициенты разложения – коэффициенты Фурье с учетом свойств ортогональных функций автоматически определяются выражением

$$\beta_k = \frac{1}{\|\psi_k\|} \int_a^b f(x) \psi_k(x, \alpha / \gamma) \mu(x) dx. \quad (\text{B.23})$$

Для определения же остальных параметров модели необходимо решать дополнительные задачи.

Таким образом, для построения ортогональной модели необходимо:

- 1) выбрать ортогональный базис –  $\psi_k(x, \alpha / \gamma)$ ;
- 2) определить численное значение параметра масштаба  $\alpha / \gamma$ ;
- 3) определить коэффициенты разложения  $\beta_k$ ;
- 4) определить количество членов разложения ряда (В.21);
- 5) определить корректирующие коэффициенты, обеспечивающие выполнение моделью основных свойств вероятностной функциональной характеристики, как правило, условия нормировки [21].

Графическая интерпретация аппроксимативного анализа вероятностных характеристик случайных процессов представлена ниже.

$$\{x_j(t)\}_{j=0..N}^{t \in [0, T]} \Longrightarrow \{x_{ji}, t_{ji} / \Delta t_{ji}\}_{j=0..N}^{i=1..M} \Longrightarrow \hat{\Theta}[X(t)] = S_d g[\{x_{ji}, t_{ji} / \Delta t_{ji}\}_{j=0..N}^{i=1..M}]$$

где  $\{x_{ji}, t_{ji} / \Delta t_{ji}\}_{j=0..N}^{i=1..M}$  - временной ряд;

Аппроксимативный корреляционно-спектральный анализ случайных процессов

$$\begin{array}{ccccc} \hat{\Theta}[X(t)] = \sigma_x^2 \hat{\rho}_x(\tau) & & & & \\ \hat{\rho}_x(\tau) \Longrightarrow \hat{\rho}_{ax}(\tau, \bar{\beta}_m) \Longrightarrow \hat{S}_{ax}(\omega, \bar{\beta}_m) \Longrightarrow \hat{F}_{ax}(\omega, \bar{\beta}_m) & & & & \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \tau_k^{(n)}, \mu_k & & \Delta\omega, \omega, S_x(\omega) & & \hat{P}_a(\omega_1, \omega_2) \end{array}$$

Аппроксимативный анализ взаимных корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов

$$\begin{array}{ccccc} \hat{\Theta}[X(t), Y(t)] = \sigma_{xy}^2 \hat{\rho}_{xy}(\tau) & & & & \\ \hat{\rho}_{xy}(\tau) \Longrightarrow \hat{\rho}_{axy}(\tau, \bar{\beta}_m) \Longrightarrow \hat{S}_a(\omega, \bar{\beta}_m) \Longrightarrow \hat{F}_a(\omega, \bar{\beta}_m) & & & & \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \tau_k^{(n)}, \mu_k & & \Delta\omega, \omega, S_x(\omega) & & \hat{P}_a(\omega_1, \omega_2) \end{array}$$

Изучению особенностей решения задач, связанных с построением ортогональных моделей типовых функциональных вероятностных характеристик и предназначен предлагаемый лабораторный практикум.

# 1. ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

**Цель работы:** изучение основных свойств классических ортогональных полиномов, приобретение навыков работы с ними.

## 1.1. Теоретические основы лабораторной работы

Рассмотрим основные понятия и определения, необходимые для описания и исследования ортогональных полиномов и функций, применяемых для построения функциональных вероятностных характеристик случайных процессов [7, 17, 21 - 28, 51, 53].

**Определение 1.** Функция  $f(x)$ , заданная на отрезке  $[a, b]$ , называется **функцией с суммируемым квадратом**, если

$$\int_a^b f^2(x)dx < \infty. \quad (1.1)$$

Множество всех функций с суммируемым квадратом обозначается обычно символом  $L_2$  -  $f(x) \in L_2$ . Отметим, что и  $c f(x) \in L_2$ , где  $c = const$ .

**Определение 2.** **Нормой** функции  $f(x)$  называется число, определяемое выражением

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}. \quad (1.2)$$

Отметим, что

1.  $\|f\| \geq 0$ , причем  $\|f\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $f(x)$  тождественно равно нулю;
2.  $\|cf\| = |c|\|f\|$  и, в частности  $\|f\| = \|-f\|$ ;
3.  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ .

Введение нормы позволяет рассматривать  $L_2$  как метрическое пространство, в котором можно производить измерения, если принять число

$$\rho(f, g) = \|f - g\|$$

за расстояние между элементами  $f$  и  $g$  класса  $L_2$ .

При этом расстояние  $\rho(f, g)$  обладает следующими свойствами:

1.  $\rho(f, g) \geq 0$ , причем  $\rho(f, g) = 0$  тогда и только тогда, когда  $f = g$ ;
2.  $\rho(f, g) = \rho(g, f)$ ;
3.  $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$ .

Если на некотором множестве  $A$  элементов любой природы задана функция  $\rho(f, g)$ , то множество  $A$  называют метрическим пространством. Следовательно, множество  $L_2$  - метрическое пространство. Впервые эту точку зрения на  $L_2$  развил Д. Гильберт, поэтому  $L_2$  часто называют пространством Гильберта.

**Определение 3.** Элемент  $f$  пространства  $L_2$  называется пределом последовательности  $f_1, f_2, \dots$ , элементов этого же пространства, если всякому  $\varepsilon > 0$  отвечает такое  $N$ , что при всех  $n > N$  будет выполняться  $\|f - f_n\| < \varepsilon$ , т.е.



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx = 0. \quad (1.3)$$

Этот вид сходимости последовательности функций называется *сходимостью в среднем*.

**Определение 4.** Две функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , заданные на отрезке  $[a, b]$ , называются *взаимно ортогональными*, если

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0. \quad (1.4)$$

**Определение 5.** Функция  $f_n(x)$ , заданная на отрезке  $[a, b]$ , называется *нормированной*, если

$$\int_a^b f_n^2(x)dx = 1. \quad (1.5)$$

Отметим, что в общем случае  $\int_a^b f^2(x)dx = \|f\|^2$  и  $f_n(x) = \frac{f(x)}{\|f\|}$ .

**Определение 6.** Система функций  $\psi_0(x), \psi_1(x), \dots$ , заданных на отрезке  $[a, b]$ , называется *ортонормальной* системой, если каждая функция системы нормирована, а любые две функции системы ортогональны. Иначе говоря, система функций  $\{\psi_k(x)\}$  *ортонормальна*, если

$$\int_a^b \psi_{n,k}(x)\psi_{n,n}(x)dx = \begin{cases} 1, & \text{если } k = n; \\ 0, & \text{если } k \neq n. \end{cases} \quad (1.6)$$

**Определение 7.** Система функций  $\psi_0(x), \psi_1(x), \dots$ , заданных на отрезке  $[a, b]$ , называется *ортогональной* системой, если любые две функции системы ортогональны:

$$\int_a^b \psi_k(x)\psi_n(x)dx = \begin{cases} \|\psi_k\|^2, & \text{если } k = n; \\ 0, & \text{если } k \neq n. \end{cases} \quad (1.7)$$

Отметим, что  $\psi_{n,k}(x) = \frac{\psi_k(x)}{\|\psi_k\|}$ .

**Определение 8.** Пусть  $\{\psi_{n,k}(x)\}$  есть ортонормальная система и  $f(x)$  некоторая функция из  $L_2$ . Тогда числа

$$\beta_k = \int_a^b f(x)\psi_{n,k}(x)dx \quad (1.8)$$

называются коэффициентами Фурье функции  $f(x)$  в системе функций  $\{\psi_{n,k}(x)\}$ .

Для ортогональной системы  $\{\psi_k(x)\}$  коэффициенты Фурье функции  $f(x)$  определяются в виде

$$\beta_k = \frac{1}{\|\psi_k\|^2} \int_a^b f(x)\psi_k(x)dx. \quad (1.9)$$

**Определение 9.** Ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \psi_{n,k}(x) \quad (1.10)$$

называется рядом Фурье функции  $f(x)$  в системе  $\{\psi_{n,k}(x)\}$ .

Рассмотрим, насколько близка в пространстве Гильберта частная сумма ряда Фурье функции  $f(x)$

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_{n,k}(x), \quad (1.11)$$

к самой этой функции, т.е. вычислим  $\|f - f_m\|^2$ . С учетом свойств ортогональности (см. определение 6), получим

$$\|f - f_m\|^2 = \int_a^b \left[ f(x) - \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_{n,k}(x) \right]^2 dx = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^m \beta_k^2. \quad (1.12)$$

Это равенство называется **тождеством Бесселя**. Так как его левая часть не отрицательна, то из него следует **неравенство Бесселя**

$$\sum_{k=0}^m \beta_k^2 \leq \|f\|^2. \quad (1.13)$$

Поскольку  $m$  произвольно, то **неравенство Бесселя** можно представить в усиленной форме

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 \leq \|f\|^2. \quad (1.14)$$

Если

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 = \|f\|^2, \quad (1.15)$$

то это равенство носит название **формулы замкнутости или равенства Парсеваля**.

С учетом (1.15) формулу (1.12) представим в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_m\| = 0. \quad (1.16)$$

Иначе говоря, формула замкнутости означает, что частные суммы  $f_m(x)$  ряда Фурье функции  $f(x)$  **сходятся в среднем** к этой функции.

Для ортогональной системы функций выражение (1.12) приведем к виду

$$\|f - f_m\|^2 = \int_a^b \left[ f(x) - \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(x) \right]^2 dx = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2. \quad (1.17)$$

**Определение 10.** Ортонормальная система  $\{\psi_{n,k}(x)\}$  называется **замкнутой**, если формула замкнутости имеет место для любой функции из  $L_2$ .

**Теорема 10.1.** Если система  $\{\psi_{n,k}(x)\}$  замкнута, то для любой пары функций  $f(x)$  и  $g(x)$  из  $L_2$  будет

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k, \quad (1.18)$$

$$\text{где } a_k = \int_a^b f(x) \psi_{n,k}(x) dx, \quad (1.19)$$

$$b_k = \int_a^b g(x) \psi_{n,k}(x) dx. \quad (1.20)$$

Эта формула называется **обобщенной формулой замкнутости**.

**Следствие.** Если система  $\{\psi_{n,k}(x)\}$  замкнута и  $f(x) \in L_2$ , то ряд Фурье  $f(x)$  в системе  $\{\psi_{n,k}(x)\}$  можно почленно интегрировать по любому измеримому множеству  $E \subset [a, b]$ , т.е.

$$\int_E f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \int_E \psi_{n,k}(x) dx. \quad (1.21)$$

**Определение 11.** Система функций  $\{\psi_{n,k}(x)\}$ , заданных на отрезке  $[a, b]$  и принадлежащих  $L_2$  называется **полной**, если в  $L_2$  не существуют отличной от нуля функции, ортогональной ко всем функциям  $\{\psi_{n,k}(x)\}$ .

**Теорема.** Для того, чтобы ортонормальная система  $\{\psi_{n,k}(x)\}$  была полна, необходимо и достаточно, чтобы она была замкнута.

**Определение 12.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана положительная непрерывная функция  $\mu(x)$ . Система функций  $\{\varphi_k(x)\}$ , заданная на отрезке  $[a, b]$  называется **ортogonalной (первое условие ортогональности)** на этом отрезке с весом  $\mu(x)$ , если

$$\int_a^b \varphi_k(x) \varphi_n(x) \mu(x) dx = \begin{cases} \|\varphi_k\|^2, & \text{если } k = n; \\ 0, & \text{если } k \neq n. \end{cases} \quad (1.22)$$

Из ортогональности системы  $\{\varphi_k(x)\}$  с весом  $\mu(x)$  следует ортогональность системы  $\psi_k(x) = \sqrt{\mu(x)} \varphi_k(x)$ . Отметим, что в этом случае  $\|\varphi_k\| = \|\psi_k\|$ .

**Определение 13.** Все нули ортогонального многочлена  $\psi_k(x)$  действительны, различны и расположены в интервале  $(a, b)$  - **второе условие ортогональности**.

**Определение 14.** Система  $\Phi_n = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  называется линейно независимой, если

$$\sum_{j=1}^n C_j \varphi_j = 0, \quad (1.23)$$

только тогда, когда все  $C_j = 0$ .

Важным аппаратом многих исследований является ортогонализация заданной системы элементов гильбертова пространства. Если задана линейно независимая система элементов  $\Phi_n = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ , можно построить ортогональную линейно независимую систему  $\Psi_n = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$  элементов вида

$$\psi_j = \sum_{i=1}^j b_{ji} \varphi_i, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.24)$$

где  $b_{ii} = 1$ .

Совокупность соотношений (1.24) при  $j \leq n$  можно представить в виде

$$\psi_n = B_n \Phi_n, \quad (1.25)$$

где

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b_{21} & 1 & 0 & 0 & \dots \\ b_{31} & b_{32} & 1 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

и  $\Psi_n$ ,  $\Phi_n$  являются вектор-столбцами из соответствующих элементов. В то же время, перенося все  $\psi_i$  из правой части в левую, получим

$$\Phi_n = A_n \Psi_n,$$

где

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{21} & 1 & 0 & 0 & \dots \\ a_{31} & a_{32} & 1 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix}; \quad (1.27)$$

матрицу  $B_n$  иногда называют матрицей ортогонализации. Так как  $\det B_n = 1$ , то преобразование, задаваемое матрицей  $B_n$ , является невырожденным и переводит линейно независимую систему элементов  $\Phi_n$  в линейно независимую систему  $\Psi_n$ .

В силу линейной независимости системы функций  $\Phi_n$  отсюда следует, что  $B_n = A_n^{-1}$ .

При построении ортогональных многочленов в качестве элементов системы функций  $\Phi_j$  берутся функции  $1, x, x^{j-1}$  и производится ортогонализация по описанной выше процедуре. Получаемые многочлены

$$\psi_j(x) = x^{j-1} + \sum_{i=1}^{j-1} b_{ji} x^{i-1} \quad (1.28)$$

называются ортогональными многочленами, соответствующими весу  $\mu(x)$  и отрезку ортогональности  $[a, b]$ . Иногда ортогональными многочленами, соответствующими весу  $\mu(x)$ , называют многочлены  $g_j(x) = \alpha_j \psi_j(x)$ , в которых величины  $\alpha_j$  подбираются из каких-либо дополнительных соображений.

Ответ на вопрос, каким образом определяется весовая функция ортогональных полиномов, дает решение дифференциального уравнения Пирсона [53]:

$$\frac{y'}{y} = \frac{p_0 + p_1 x}{q_0 + q_1 x + q_2 x^2}, \quad (1.29)$$

в правой части которого все коэффициенты действительны.

Вид решения этого уравнения и область существования зависят от многочленов

$$A(x) = p_0 + p_1 x; \quad (1.30)$$

$$B(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2. \quad (1.31)$$

Рассмотрим решения уравнения (1.29) в зависимости от коэффициентов многочленов (1.30) и (1.31) и выделим те из них, которые на всей связной области своего существования могут быть весовой функцией, и, следовательно, могут определять некоторую систему ортогональных многочленов, а именно, те системы, которые будут использоваться при последующем анализе.

Пусть многочлен  $B(x)$  не имеет нулей, т. е.  $q_2 = 0$ ,  $q_1 \neq 0$ . Тогда без нарушения общности можно считать  $q_0 = 0$ , так как это достигается линейным преобразованием независимого переменного, а уравнение (1.29) примет вид:

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x} - \beta, \quad (1.32)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  - некоторые постоянные.

Его решение

$$y = \mu(x) = c_1 x^\alpha e^{-\beta x} \quad (1.33)$$

будет весовой функцией на полусегменте  $[0, \infty)$  при условиях  $c_1 > 0$ ,  $\alpha > -1$ ,  $\beta > 0$ .

Многочлены, ортогональные с весом (1.9) и  $\beta = 1$ , можно рассматривать как обобщенные многочлены Сонина-Лагерра [6, 53].

Пусть многочлен  $B(x)$  имеет два действительных и различных нуля. Тогда уравнение Пирсона можно представить в виде

$$\frac{y'}{y} = \frac{p_0 + p_1 x}{q_2(x-a)(x-b)} = \frac{\beta}{x-a} - \frac{\alpha}{b-x}, \quad (1.34)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  - некоторые постоянные, а  $a < b$ .

Решение уравнения (1.34)

$$y = \mu(x) = c_2 (b-x)^\alpha (x-a)^\beta \quad (1.35)$$

определено на интервале  $(a, b)$  и весовой функцией может быть только при условиях  $c_2 > 0$ ,  $\alpha > -1$ ,  $\beta > -1$ . Линейным преобразованием функция (1.35) сводится к весовой функции многочленов Якоби.

Легко видеть, что при тех же коэффициентах уравнение Пирсона имеет решения и на интервалах  $(-\infty, a)$  и  $(b, \infty)$ , но полученные решения не могут служить весовыми функциями [53].

Ортогональные многочлены полученных весовых функций, а именно Якоби и Сонина-Лагерра, относятся к числу классических ортогональных многочленов.

Заметим, при параметрах  $q_1 = q_2 = 0$ ,  $q_0 \neq 0$  решением уравнения (1.29) является весовая функция многочленов Эрмита, которые также относятся к числу классических.

Для классических ортогональных многочленов имеет место весьма важное представление через весовую функцию, которое называется обобщенной формулой Родрига [6, 53].

Если весовая функция  $h(x)$  на интервале ортогональности удовлетворяет уравнению (1.29), то функция

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\mu(x)} [\mu(x) B^{(n)}(x)]^{(n)} \quad (1.36)$$

есть многочлен степени не выше  $n$ .

В дальнейшем при анализе будут использоваться системы ортогональных многочленов Сонина-Лагерра  $L_k^{(\alpha)}(x)$  (1.33) при  $\beta = 1$  и Якоби  $P_k^{(\alpha, \beta)}(x)$  (1.35) при задании некоторых частных параметров, а именно: Сонина-Лагерра (0) (Лагерра)  $L_k^{(0)}(x) = L_k(x)$ ; Сонина-Лагерра (1)  $L_k^{(1)}(x)$ ; Сонина-Лагерра (2)  $L_k^{(2)}(x)$ ; Якоби  $(-0,5, 0)$   $P_k^{(-0,5,0)}(x)$ ; Якоби  $(0,5, 0)$   $P_k^{(0,5,0)}(x)$ ; Якоби  $(0, 0)$  (Лежандра)  $P_k^{(0,0)}(x) = Leg_k(x)$ ; Яко-

би (1, 0)  $P_k^{(1,0)}(x)$ ; Якоби (2, 0)  $P_k^{(2,0)}(x)$ ; Якоби (0, 1)  $P_k^{(0,1)}(x)$ ; Якоби (0, 2)  $P_k^{(0,2)}(x)$ ; Якоби (-0,5, -0,5) (Чебышева 1-ого рода)  $P_k^{(-0,5,-0,5)}(x) = T_k(x)$ ; Якоби (0,5, 0,5) (Чебышева 2-ого рода)  $P_k^{(0,5,0,5)}(x) = U_k(x)$ , а также широко применяемые в прикладном анализе ортогональные полиномы Дирихле 1  $D_k(x)$  и Дирихле 2  $Dir_k(x)$ . Следует отметить, что ортогональные полиномы Дирихле не относятся к классическим полиномам. Вид ортогональных полиномов представлен в Приложении 1.

Общие представления Родрига для ортогональных базисов Сонина-Лагерра и Якоби соответственно имеют вид:

$$L_k^{(\alpha)}(x) = \frac{I}{k!} x^{-\alpha} e^x (x^{\alpha+k} e^{-x})^{(k)}; \quad (1.37)$$

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-I)^k}{k!2^k} (I-x)^{-\alpha} (I+x)^{-\beta} \left[ (I-x)^\alpha (I+x)^\beta (I-x^2)^k \right]^{(k)}. \quad (1.38)$$

Явные выражения многочленов представлены в таблице 1.1.

При проведении аналитических преобразований с использованием ортогональных многочленов более удобным является представление в виде конечного ряда, получаемого проведением операции дифференцирования с помощью формулы Лейбница [5] к выражению (1.36). В общем случае представления (1.37) и (1.38) в виде конечного ряда имеют вид [53]:

$$L_k^{(\alpha)}(x) = \sum_{s=0}^k C_{k+\alpha}^{k-s} \frac{(-x)^s}{s!}; \quad (1.39)$$

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)\Gamma(\beta+k+1)}{k!2^k} \sum_{s=0}^k \frac{C_k^s (x-I)^{k-s} (x+I)^s}{\Gamma(\alpha+k-s+1)\Gamma(\beta+s+1)}. \quad (1.40)$$

Форма представления ортогональных многочленов в виде конечного ряда является более удобной и наглядной для анализа и проведения различных операций над ними, в частности, операций интегрирования и дифференцирования. Однако такие выражения для ортогональных многочленов обладают существенным недостатком при реализации на ЭВМ: невозможность вычисления многочлена высокого порядка из-за необходимости вычисления комбинаторного числа сочетаний.

Форма представления ортогональных полиномов в виде конечного ряда представлена в таблице 1.1.

Указанный недостаток может быть исправлен использованием рекуррентных соотношений. Общие выражения для рекуррентных соотношений рассматриваемых ортогональных базисов представлены ниже [53]:

$$L_{k+1}^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+2k+1-x)}{(k+1)} L_k^{(\alpha)}(x) - \frac{(\alpha+k)}{(k+1)} L_{k-1}^{(\alpha)}(x); \quad (1.41)$$

$$P_{k+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{[(\alpha+\beta+2k+2)(\alpha+\beta+2k)x + \alpha^2 - \beta^2](\alpha+\beta+2k+1)}{2(k+1)(\alpha+\beta+k+1)(\alpha+\beta+2k)} P_k^{(\alpha,\beta)}(x) - \frac{(\alpha+k)(\beta+k)(\alpha+\beta+2k+2)}{(k+1)(\alpha+\beta+k+1)(\alpha+\beta+2k)} P_{k-1}^{(\alpha,\beta)}(x). \quad (1.42)$$

Применение рекуррентных соотношений (1.41) и (1.42) позволяет резко снизить как временные затраты, так и ресурсные, исследовать ортогональные полиномы высоких порядков и их свойства.

Формы представления ортогональных полиномов

Таблица 1.1

Орт. полиномы	Представление в форме Родрига	Представление в виде конечного ряда
Якоби $P_k^{(-1/2,0)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} (1-x)^{1/2} \left( \frac{1}{(1-x)^{1/2}} (1-x^2)^k \right)^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} \left( \frac{x-1}{2} \right)^s$
Якоби $P_k^{(1/2,0)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \frac{1}{(1-x)^{1/2}} \left( (1-x)^{1/2} (1-x^2)^k \right)^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} \left( \frac{x-1}{2} \right)^s$
Якоби $P_k^{(1,0)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \frac{1}{(1-x)} \left( (1-x)(1-x^2)^k \right)^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} \left( \frac{x-1}{2} \right)^s$
Якоби $P_k^{(2,0)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \frac{1}{(1-x)^2} \left( (1-x)^2 (1-x^2)^k \right)^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} \left( \frac{x-1}{2} \right)^s$
Якоби $P_k^{(0,1)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \frac{1}{(1+x)} \left( (1+x)(1-x^2)^k \right)^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} \left( \frac{x+1}{2} \right)^s$
Якоби $P_k^{(0,2)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \frac{1}{(1+x)^2} \left( (1+x)^2 (1-x^2)^k \right)^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^{k-s} \left( \frac{x+1}{2} \right)^s$
Лежандра $Leg_k(x) = P_k^{(0,0)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \left( (1-x^2)^k \right)^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s \left( \frac{x-1}{2} \right)^s$
Чебышева 1-ого рода $T_k(x) = P_k^{(-1/2,-1/2)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} (1-x^2)^{1/2} \left( (1-x^2)^{k-1/2} \right)^{(k)}$	$\frac{1}{2^k} \sum_{s=0}^k C_{2k}^{2s} (x-1)^{k-s} (x+1)^s$
Чебышева 2-ого рода $U_k(x) = P_k^{(1/2,1/2)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} \left( (1-x^2)^{k+1/2} \right)^{(k)}$	$\frac{1}{2^k(k+1)} \sum_{s=0}^k C_{2k+2}^{2s+1} (x-1)^{k-s} (x+1)^s$
Дирихле 1 $D_k(x)$	отсутствует	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} (1-x)^{s/2}$
Дирихле 2 $Dir_k(x)$	отсутствует	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} \left( \frac{1-x}{2} \right)^{s/2}$
Лагерра $L_k(x) = L_k^{(0)}(x)$	$\frac{1}{k!} e^x (x^k e^{-x})^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s \frac{(-x)^s}{s!}$
Сонина-Лагерра $L_k^{(1)}(x)$	$\frac{1}{k! x} e^x (x^{k+1} e^{-x})^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_{k+1}^{k-s} \frac{(-x)^s}{s!}$
Сонина-Лагерра $L_k^{(2)}(x)$	$\frac{1}{k! x^2} e^x (x^{k+2} e^{-x})^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_{k+2}^{k-s} \frac{(-x)^s}{s!}$

Отметим, что, в общем случае, для построения и исследования ортогональных моделей функциональных вероятностных характеристик необходимо для каждой ортогональной системы определить [21]:

1. интервал ортогональности  $[a, b]$ ;

2. вес;
3. аналитическое выражение ортогонального полинома (функции)  $k$ -го порядка;
4. рекуррентную формулу определения ортогонального полинома (функции)  $k$ -го порядка;
5. норму ортогонального полинома (функции)  $k$ -го порядка;
6. значение ортогонального полинома (функции)  $k$ -го порядка на концах сегмента ортогональности (в «нуле»);
7. длительность ортогонального полинома (функции)  $k$ -го порядка;
8. преобразование Фурье ортогонального полинома (функции)  $k$ -го порядка;
9. выражения для коэффициентов разложения для различных моделей исследуемой функциональной характеристики случайных процессов;
10. выражения для оценки методической погрешности аппроксимации функциональной характеристики;
11. аналитические выражения для оценки параметров ортогональных функций;
12. выражения для оценки методической погрешности коэффициентов разложения функциональной характеристики и её составляющих.

Следует отметить, что задачи 1 – 8 инварианты к виду вероятностной функциональной характеристики, а – 9 – 12 решаются для конкретных случаев.

В предлагаемой лабораторной работе, состоящей из пяти частей, рассматриваются только часть из перечисленных вопросов, характерных для ортогональных полиномов.

Первая часть посвящена представлению ортогональных полиномов различными способами. Одним из важнейших алгебраических свойств ортогональных полиномов является возможность представления через формулу Родрига [53] (см. (1.36)).

Во второй части требуется определить интервал ортогональности ортогональных полиномов  $[a, b]$ , под которым понимается их интервал существования.

Находя значения полиномов на границах сегмента ортогональности, необходимо получить значения выражений  $\psi_k(a)$  и  $\psi_k(b)$ .

В третьей части работы производится расчет нормы ортогональных многочленов, которая определяется выражением (1.22).

С другой стороны, норма ортогональных полиномов  $\|\psi_k\|^2$  рассчитывается по аналитическим выражениям, данным в таблице 1.2. Там же можно найти выражения для соответствующих весовых функций.

В четвертой части необходимо произвести проверку 1 – ого необходимого и достаточного условия ортогональности.

В пятой части необходимо произвести проверку 2 – ого условия ортогональности.

В результате проведенных исследований необходимо оформить отчет и сделать вывод по проделанной работе.



Основные характеристики ортогональных полиномов

Таблица 1.2

Орт. полиномы	$\mu(x)$	$\ \psi_k\ ^2$
Якоби $P_k^{(-1/2,0)}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$	$\frac{2\sqrt{2}}{4k+1}$
Якоби $P_k^{(1/2,0)}(x)$	$\sqrt{1-x}$	$\frac{4\sqrt{2}}{4k+3}$
Якоби $P_k^{(1,0)}(x)$	$1-x$	$\frac{2}{k+1}$
Якоби $P_k^{(2,0)}(x)$	$(1-x)^2$	$\frac{8}{2k+3}$
Якоби $P_k^{(0,1)}(x)$	$1+x$	$\frac{2}{(k+1)}$
Якоби $P_k^{(0,2)}(x)$	$(1+x)^2$	$\frac{8}{(2k+3)}$
Лежандра $Leg_k(x) = P_k^{(0,0)}(x)$	$1$	$\frac{2}{2k+1}$
Чебышева 1-ого рода $T_k(x) = P_k^{(-1/2,-1/2)}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\begin{cases} \pi, k=0 \\ \pi/2, k \neq 0 \end{cases}$
Чебышева 2-ого рода $U_k(x) = P_k^{(1/2,1/2)}(x)$	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{\pi}{2(k+1)^2}$
Дирихле 1 $D_k(x)$	$1$	$\frac{1}{k+1}$
Дирихле 2 $Dir_k(x)$	$1$	$\frac{2}{k+1}$
Лагерра $L_k(x) = L_k^{(0)}(x)$	$e^{-x}$	$1$
Сонина-Лагерра $L_k^{(1)}(x)$	$xe^{-x}$	$k+1$
Сонина-Лагерра $L_k^{(2)}(x)$	$x^2e^{-x}$	$(k+1)(k+2)$

1.2. Задание на самостоятельную работу

1. Представление ортогональных полиномов  $k$ -ого порядка:
  - 1.1. Представить ортогональные полиномы в форме Родрига (если есть) и получить аналитические выражения и графики для первых шести порядков;
  - 1.2. Представить ортогональные полиномы в виде конечного ряда и получить аналитические выражения и графики для первых шести порядков. Сравнить результат с пунктом 1.1.

2. Определить интервал ортогональности  $[a, b]$ . Рассчитать ортогональные полиномы  $k$  - ого порядка на концах интервала ортогональности.
3. Определение нормы ортогональных полиномов:
  - 3.1. Определить значения нормы ортогональных полиномов из выражения (1.22). Результат представить в виде матрицы значений с разрядностью  $(k, m)$ , привести графическую интерпретацию  $(j = \overline{0, k}, i = \overline{0, m})$ .
  - 3.2. Определить значения нормы ортогональных полиномов  $k$  - ого порядка, используя выражения, приведенные в таблице 1.2. Результат представить в виде вектора значений. Сравнить полученный результат с диагональными значениями матрицы  $(k, m)$ , полученной в пункте 3.1.
4. Проверить выполняемость 1 – ого условия ортогональности.
5. Проверить выполняемость 2 – ого условия ортогональности.
6. Оформить отчет.

### 1.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
  2. Задание.
  3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
  4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
  5. Аналитические выражения и графики ортогональных полиномов первых шести порядков заданного ортогонального базиса (пункт 1.1 и пункт 1.2) в полученном интервале ортогональности (пункт 2).
  6. Матрицу значений нормы ортогональных полиномов с разрядностью  $(k, m)$  и соответствующую ей графическую интерпретацию  $(j = \overline{0, k}, i = \overline{0, m})$  (пункт 3.1).
  7. Вектор значений нормы ортогональных полиномов (пункт 3.2).
  8. График, иллюстрирующий проверку 1 – ого условия ортогональности (пункт 4).
  9. График, иллюстрирующий проверку 2 – ого условия ортогональности (пункт 5).
  10. Выводы.
- Пример выполнения лабораторной работы 1 приведен в Приложении 2.

### 1.4. Контрольные вопросы

1. Что называют интервалом ортогональности ортогональных многочленов? От чего зависит его значение?
2. Что такое весовая функция и как она влияет на поведение ортогонального многочлена?
3. Чем ортогональная линейно независимая система функций отличается от линейно независимой системы функций? Что понимают под матрицей ортогонализации?
4. Что такое ортогональный многочлен и каковы его основные характеристики?
5. Сформулируйте 1 – ое и 2 – ое условия ортогональности. О чем говорит их выполняемость?

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

**Цель работы:** исследование свойств ортогональных функций и определение их основных характеристик.

### 2.1. Теоретические основы лабораторной работы

При решении значительного количества прикладных задач наиболее часто применяются ортогональные функции, определенные на интервале  $[0, \infty)$  [6, 21]. Как правило, они получаются из соответствующих ортогональных полиномов путем введения замены:

$$x = 1 - ae^{-c\gamma\tau}, \quad (2.1)$$

где  $\gamma$  – параметр масштаба;  $c$  – целое число, определяемое для каждого ортогонального базиса;  $a$  – параметр, который зависит от заданного сегмента ортогональности (см. таблицу 2.1).

С учетом введенной замены (2.1) выражение для определения квадрата нормы (1.7) примет следующий вид:

$$\int_0^{\infty} \psi_k(1 - ae^{-c\gamma\tau}) \psi_m(1 - ae^{-c\gamma\tau}) \mu(1 - ae^{-c\gamma\tau}) d(1 - ae^{-c\gamma\tau}) = \begin{cases} \|\psi_k\|^2, & k = m; \\ 0, & k \neq m. \end{cases} \quad (2.2)$$

Проделав ряд преобразований, получим:

$$\int_0^{\infty} \psi_k(1 - ae^{-c\gamma\tau}) \psi_m(1 - ae^{-c\gamma\tau}) \mu(1 - ae^{-c\gamma\tau}) e^{-c\gamma\tau} d\tau = \begin{cases} \frac{\|\psi_k\|^2}{ac\gamma}, & k = m; \\ 0, & k \neq m. \end{cases} \quad (2.3)$$

Выражение (2.3) показывает, что ортогональные полиномы  $\psi_k(x)$  преобразуются в ортогональные функции:

$$\psi_{k,f}(\tau, \gamma) = \psi_k(1 - ae^{-c\gamma\tau}) \sqrt{\mu(1 - ae^{-c\gamma\tau})} e^{-\frac{c\gamma\tau}{2}}, \quad (2.4)$$

определенные на интервале  $[0, \infty)$  с весом  $\mu(\tau, \gamma) = 1$  и нормой

$$\|\psi_{k,f}\|^2 = \frac{\|\psi_k\|^2}{ac\gamma}. \quad (2.5)$$

Ортогональные функции  $k$ -ого порядка в различных базисах и их основные характеристики представлены в таблице 2.1, а вид – в Приложении 3. По аналогии с импульсной переходной характеристикой можно ввести понятие длительности ортогональной функции, применяемое в различных приложениях [21]:

$$\tau_{k,u}^{(2)} = \int_0^{\infty} \psi_{k,f}(\tau, \gamma) d\tau; \quad (2.6)$$

$$\tau_{k,u}^{(4)} = \int_0^{\infty} \psi_{k,f}^2(\tau, \gamma) d\tau. \quad (2.7)$$

В дальнейшем при рассмотрении только ортогональных функций индекс  $f$  будет опущен.

Форма представления и характеристики ортогональных функций

Таблица 2.1

Орт. функции	Представление в виде конечного ряда	$(a, c)$	$\ \psi_k\ ^2$	$\psi_k(0, \gamma/\alpha)$
$P_k^{-1/2,0}(\tau, \gamma)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s e^{\frac{(4s+1)\gamma\tau}{2}}$	$(2, 2)$	$\frac{1}{\gamma(4k+1)}$	$(-1)^k$
$P_k^{1/2,0}(\tau, \gamma)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s e^{\frac{(4s+3)\gamma\tau}{2}}$	$(2, 2)$	$\frac{1}{\gamma(4k+3)}$	$(-1)^k$
$P_k^{1,0}(\tau, \gamma)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s e^{-(s+1)\gamma\tau}$	$(2, 1)$	$\frac{1}{2\gamma(k+1)}$	$(-1)^k$
$P_k^{2,0}(\tau, \gamma)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s e^{-(2s+2)\gamma\tau}$	$(2, 2)$	$\frac{1}{2\gamma(2k+3)}$	$(-1)^k$
$P_k^{0,1}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s e^{-(2s+1)\gamma\tau}$	$(2, 2)$	$\frac{1}{4\gamma(k+1)^3}$	$(-1)^k$
$P_k^{0,2}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{(k+1)(k+2)} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s e^{-(2s+1)\gamma\tau}$	$(2, 2)$	$\frac{2}{\gamma(2k+3)(k+1)^2(k+2)^2}$	$(-1)^k$
$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s e^{-(2s+1)\alpha\tau}$	$(2, 2)$	$\frac{1}{2\alpha(2k+1)}$	$(-1)^k$
$T_k(\tau, \gamma)$	$\begin{cases} e^{-\gamma\tau}, k=0 \\ \sum_{s=0}^k \frac{k}{k-s} C_{2k-s}^s (-4)^{k-s} e^{-[2(k-s)+1]\gamma\tau}, k \neq 0 \end{cases}$	$(2, 2)$	$\begin{cases} \frac{\pi}{4\gamma}, k=0 \\ \frac{\pi}{8\gamma}, k \neq 0 \end{cases}$	$(-1)^k$
$U_k(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^k C_{2k-s+1}^s (-4)^{k-s} e^{-[2(k-s)+1]\gamma\tau}$	$(2, 2)$	$\frac{\pi}{8\gamma(k+1)^2}$	$(-1)^k$
$D_k(\tau, \alpha)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} e^{-(s+1)\alpha\tau}$	$(1, 2)$	$\frac{1}{2\alpha(k+1)}$	1
$Dir_k(\tau, \alpha)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} e^{-(s+1)\alpha\tau}$	$(2, 2)$	$\frac{1}{2\alpha(k+1)}$	1
$L_k(\tau, \alpha)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s \frac{(-\alpha\tau)^s}{s!} e^{\frac{\alpha\tau}{2}}$	$\left(1, -\frac{\ln(1-\alpha\tau)}{\gamma\tau}\right)$	$\frac{1}{\alpha}$	1
$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^k C_{k+1}^{k-s} \frac{(-\gamma\tau)^s}{s!} e^{\frac{\gamma\tau}{2}}$	$\left(1, -\frac{\ln(1-\gamma\tau)}{\gamma\tau}\right)$	$\frac{1}{(k+1)\gamma^2}$	1
$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{(k+1)(k+2)} \sum_{s=0}^k C_{k+2}^{k-s} \frac{(-\gamma\tau)^s}{s!} e^{\frac{\gamma\tau}{2}}$	$\left(1, -\frac{\ln(1-\gamma\tau)}{\gamma\tau}\right)$	$\frac{4}{(k+1)(k+2)\gamma^3}$	1

В качестве примера рассмотрим ортогональные полиномы  $D_k(x)$  на интервале  $[0, 1]$  с весом  $\mu(x) = 1$

$$D_k(x) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} (1-x)^{\frac{s}{2}} \quad (2.8)$$

и преобразуем их в ортогональные функции на интервале  $[0, \infty)$ .

Отметим, что значение ортогональных полиномов в «нуле» и норма [21]

$$D_k(0) = 1, \quad (2.9)$$

$$\|D_k\|^2 = \int_0^1 D_k(x) D_m(x) \mu(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{k+1}, & m = k; \\ 0, & m \neq k. \end{cases} \quad (2.10)$$

В соответствии с (2.1) для преобразования интервала  $[0, 1]$  в диапазон  $[0, \infty)$  введем замену переменных  $x = 1 - e^{-2\alpha\tau}$ . С учетом введенной замены выражение (2.10) примет вид:

$$2\alpha \int_0^\infty D_k(1 - e^{-2\alpha\tau}) D_m(1 - e^{-2\alpha\tau}) e^{-2\alpha\tau} \mu(\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{1}{k+1}, & m = k; \\ 0, & m \neq k. \end{cases} \quad (2.11)$$

Соотношение (2.11) показывает, что ортогональные полиномы преобразуются в функции, ортогональные на интервале  $[0, \infty)$  с весом  $\mu(\tau) = 1$ .

$$D_k(\tau, \alpha) = e^{-\alpha\tau} D_k(1 - e^{-2\alpha\tau}) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} e^{-(s+1)\alpha\tau}. \quad (2.12)$$

Квадрат нормы и длительность с учетом (2.5) и (2.10) имеет вид:

$$\int_0^\infty D_k(\tau, \alpha) D_m(\tau, \alpha) \mu(\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha(k+1)}, & m = k; \\ 0, & m \neq k, \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\tau_{k,u}^{(2)} = \int_0^\infty D_k(\tau, \alpha) d\tau = \frac{(-1)^k}{(k+1)\alpha}. \quad (2.14)$$

Способ представления ортогональных полиномов и функций в виде комбинаторных сумм (см. таблицу 1.1 и таблицу 2.1) позволяет использовать унифицированный подход к вычислению конечных и бесконечных сумм путем их сведения к одномерным и кратным интегралам, как правило, контурным.

Одним из таких унифицированных подходов является метод производящих функций, являющийся одним из основных аналитических подходов получения комбинаторных тождеств [11]. Производящие функции, либо производящие интегралы, могут быть использованы для изучения свойств систем многочленов, включая нахождение явных формул, получение и решение рекуррентных соотношений (дифференциальных, интегральных и дифференциально-разностных уравнений), связывающих эти последовательности чисел, получение асимптотических формул для производимых чисел (функций) [11].

Однако при решении задач с определением и изучением свойств ортогональных многочленов, рассматриваемых нами, воспользуемся общим унифицируемым подходом – методом коэффициентов.

Опишем необходимую последовательность действий при реализации данного метода.

На первом этапе вычислений нами в простейшем виде реализуется фундаментальная идея об интегральном представлении решения, удовлетворяющего заданным краевым условиям. На заключительном этапе, в случае представления решения с помощью контурных интегралов, используется теория вычетов одного или нескольких комплексных переменных [11, 52]. Главным отличием данного метода вычисления комбинаторных сумм от известных ранее подходов является создание единой стандартизированной процедуры получения интегральных представлений вычисляемых сумм с полным обоснованием данного метода, как и метода производящих функций, с помощью теории одномерных и кратных вычетов [52]. В случае формальных рядов вводится понятие коэффициентов *Coef*, непосредственно связанное с понятием вычета из теории аналитических функций и пригодное для использования различных функций, включая степенные. Связь с теорией вычетов позволила выписать свойства *Coef*, аналогичные свойствам вычета, и унифицировать схему метода коэффициентов, независимо от того, какие ряды: сходящиеся либо формальные - используются при вычислениях [11].

Для работы с *Coef* и проведения различных операций над ними существует правила, записанные в табличном виде и приведенные в приложении Б. Там же приведены интегральные представления комбинаторных чисел [11].

Результат использования метода коэффициентов можно увидеть на примере получения соотношения для ортогональных функций Якоби:

$$P_k^{(\alpha,0)}(0,\gamma) = (-1)^k, \quad (2.15)$$

где

$$P_k^{(\alpha,0)}(0,\gamma) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+\alpha}^{s+\alpha} (-1)^s. \quad (2.16)$$

Последовательность действий, реализующая метод коэффициентов с использованием правил работы над *Coef* представлена ниже.

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+\alpha}^{s+\alpha} (-1)^s &= \sum_{s=0}^k \underset{u}{Coef} \left( (1+u)^k u^{-s-1} \right) \cdot \underset{v}{Coef} \left( (1+v)^{k+s+\alpha} v^{-s-\alpha-1} \right) \cdot (-1)^s = \\ &= \underset{v}{Coef} (1+v)^{k+\alpha} v^{-\alpha-1} \cdot \left( \sum_{s=0}^k \left( -\frac{(1+v)}{v} \right)^s \underset{u}{Coef} \left( (1+u)^k u^{-s-1} \right) \right) = \\ &= \underset{v}{Coef} (1+v)^{k+\alpha} v^{-\alpha-1} \cdot \left( 1 - \frac{(1+v)}{v} \right)^k = \underset{v}{Coef} (1+v)^{k+\alpha} v^{-\alpha-1} \cdot (-1)^k v^{-k} = \\ &= (-1)^k \underset{v}{Coef} (1+v)^{k+\alpha} v^{-k-\alpha-1} = (-1)^k C_{k+\alpha}^{k+\alpha} = (-1)^k. \end{aligned}$$

В справедливости полученного соотношения несложно убедиться [21, 32, 35, 36]. Для других ортогональных функций подход аналогичен.

Разумеется, с использованием данного подхода можно реализовать аналитические преобразования более сложных комбинаторных сумм и выражений. В качестве демонстрации сказанному представим аналитические преобразования с использованием *Coef* при получении соотношения также для ортогональных функций Якоби для общности:

$$\|P_k^{(\alpha,0)}\|^2 = \frac{1}{(2k + \alpha + 1)c\gamma}, \quad (2.17)$$

где

$$\|P_k^{(\alpha,0)}\|^2 = \int_0^\infty P_k^{(\alpha)}(\tau, \gamma) P_m^{(\alpha)}(\tau, \gamma) d\tau; \quad (2.18)$$

$$P_k^{(\alpha)}(\tau, \gamma) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+\alpha}^{s+\alpha} (-1)^s e^{-c\left(s+\frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma\tau}; \quad (2.19)$$

где  $c$  - параметр замены (2.1).

Заметим, что при проведении аналитических преобразований над равенством цифровым эквивалентом указывается используемое при получении промежуточного результата правило (см. Приложение 4).

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-c(\alpha+1)\gamma\tau} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+\alpha}^{s+\alpha} (-1)^s e^{-cs\gamma\tau} \sum_{s=0}^m C_m^s C_{m+s+\alpha}^{s+\alpha} (-1)^s e^{-cs\gamma\tau} d\tau = \\ & = \int_0^\infty e^{-c(\alpha+1)\gamma\tau} \sum_{s=0}^k \underset{u}{\text{Coef}}(1+u)^k u^{-s-1} \underset{v}{\text{Coef}}(1+v)^{k+s+\alpha} u^{-k+s+\alpha-1} (-1)^s e^{-cs\gamma\tau} \times \\ & \times \sum_{s=0}^m \underset{u}{\text{Coef}}(1+u)^m u^{-s-1} \underset{v}{\text{Coef}}(1+v)^{m+s+\alpha} u^{-m+s+\alpha-1} (-1)^s e^{-cs\gamma\tau} d\tau = \\ & = \int_0^\infty e^{-c(\alpha+1)\gamma\tau} \underset{v}{\text{Coef}} \frac{(1+v)^{k+\alpha}}{v^{k-\alpha+1}} \left( \sum_{s=0}^k \left( -\frac{(1+v)v}{e^{cs\gamma\tau}} \right)^s \underset{u}{\text{Coef}}(1+u)^k u^{-s-1} \right) \times \\ & \times \underset{v}{\text{Coef}} \frac{(1+v)^{m+\alpha}}{v^{m-\alpha+1}} \left( \sum_{s=0}^m \left( -\frac{(1+v)v}{e^{cs\gamma\tau}} \right)^s \underset{u}{\text{Coef}}(1+u)^m u^{-s-1} \right) d\tau = \\ & = \int_0^\infty e^{-c(\alpha+1)\gamma\tau} e^{-(k+m)c\gamma\tau} \underset{v}{\text{Coef}} \frac{(1+v)^{k+\alpha}}{v^{k-\alpha+1}} (e^{-c\gamma\tau} - (1+v)v)^k \times \\ & \times \underset{v}{\text{Coef}} \frac{(1+v)^{k+\alpha}}{v^{k-\alpha+1}} (e^{-c\gamma\tau} - (1+v)v)^k \underset{v}{\text{Coef}} \frac{(1+v)^{m-k}}{v^{m-k}} d\tau = \\ & = \int_0^\infty e^{-c(\alpha+k+m+1)\gamma\tau} \underset{v}{\text{Coef}} \frac{(1+v)^{2k+2\alpha}}{v^{2k-2\alpha+1}} \underset{v}{\text{Coef}} \frac{(e^{-c\gamma\tau} - (1+v)v)^{2k}}{v} \delta_{mk}^{def} d\tau = \end{aligned}$$

$$\stackrel{def}{=} \begin{cases} \frac{1}{(2k + \alpha + 1)c\gamma\tau}, & k = m; \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

Справедливость получаемых соотношений после ряда аналитических преобразований с помощью указанных методов несложно проверить с использованием общих математических пакетов, либо специализированных автоматизированных систем, одной из которых является автоматизированная информационная система исследования ортогональных полиномов и функций семейства Якоби [35]. Данная система позволяет строить ортогональные полиномы и функции высоких порядков, исследовать свойства ортогональных многочленов и

влияние параметров ортогонального базиса друг на друга и на результат исследования.

## 2.2. Задание на самостоятельную работу

1. Получение ортогональных функций  $k$ -ого порядка:

1.1. Получить ортогональные функции из ортогональных полиномов  $k$ -ого порядка путем введения соответствующей замены, приведенной в таблице 2.1, и использования выражения (2.4). Найти аналитические выражения и графики для первых шести порядков.

1.2. Получить ортогональные функции, используя представление, приведенное в таблице 2.1. Найти аналитические выражения и графики для первых шести порядков. Полученный результат сравнить с пунктом 1.1.

2. Рассчитать значения ортогональных функций  $k$ -ого порядка в «нуле».

3. Определение нормы ортогональных функций:

3.1. Определить значение нормы ортогональных функций из выражения (2.5). Результат представить в виде матрицы значений с размерностью  $(k, m)$ , привести графическую интерпретацию  $(j = \overline{0, k}, i = \overline{0, m})$ .

3.2. Определить значения нормы ортогональных функций  $k$ -ого порядка, используя выражения, приведенные в таблице 2.1. Результат представить в виде вектора значений. Сравнить полученный результат с диагональными значениями матрицы  $(k, m)$ , полученной в пункте 3.1.

4. Рассчитать длительности, используя выражения (2.6) и (2.7). Построить графические зависимости  $\tau_{k,u}^{(2)}$  и  $\tau_{k,u}^{(4)}$  ортогональных функций  $k$ -ого порядка от параметра масштаба. Спроектировать двумерную зависимость длительности от порядка и параметра масштаба для каждого из выражений.

5. Оформить отчет.

## 2.3. Содержание отчета

1. Цель работы.

2. Задание.

3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.

4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.

5. Аналитические выражения и графики ортогональных функций первых шести порядков заданного ортогонального базиса (пункт 1.1 и пункт 1.2).

6. Матрицу значений нормы ортогональных функций с размерностью  $(k, m)$  и соответствующую ей графическую интерпретацию  $(j = \overline{0, k}, i = \overline{0, m})$  (пункт 3.1).

7. Вектор значений нормы ортогональных функций (пункт 3.2).

8. Графические зависимости  $\tau_{k,u}^{(2)}(\gamma)$  и  $\tau_{k,u}^{(4)}(\gamma)$  ортогональных функций  $k$ -ого порядка.

9. Двумерные графические зависимости  $\tau_u^{(2)}(k, \gamma)$  и  $\tau_u^{(4)}(k, \gamma)$ .

10. Выводы.

Пример выполнения лабораторной работы 2 приведен в Приложении 5.



## 2.4. Контрольные вопросы

1. Почему при решении ряда прикладных задач ортогональные полиномы предпочитают ортогональным функциям?
2. При решении каких задач целесообразно использовать ортогональные полиномы, ортогональные функции?
3. Что дает получение ортогонального многочлена с единичной весовой функцией?
4. Для каких целей вводят параметр масштаба ортогональных функций? Какие значения он может принимать?
5. Что понимают под длительностью ортогональной функции, и какой смысл она имеет?
6. Чем отличаются два введенных определения длительности? Для чего введено второе определение, и в каких случаях целесообразнее использовать данное определение?
7. О чем говорит полученная двумерная зависимость?

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ И ИНТЕРВАЛА ДИСКРЕТИЗАЦИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

**Цель работы:** изучение методов и приобретение навыков в определении максимальной длительности и интервала дискретизации ортогональных функций.

#### 3.1. Теоретические основы лабораторной работы

Длительность ортогональной функции  $k$ -ого порядка  $\tau_{kmax}$  определяется в результате решения уравнения [15]:

$$|\psi_k(\tau > \tau_{kmax}, \alpha / \gamma)| \leq \Delta, \quad (3.1)$$

где  $\Delta$  – заданная погрешность,

$\alpha / \gamma$  – параметр масштаба ортогональных функций.

Таким образом, под длительностью ортогональной функции понимается временной интервал от начала координат до точки пересечения с линиями  $\Delta$  или  $-\Delta$ , после которой функция не выходит из коридора  $[-\Delta, \Delta]$ . На рисунке 3.1 показан пример определения длительности ортогональной функции  $k$ -ого порядка. Также, с заданной погрешностью можно считать, что вне интервала  $[0, \tau_{kmax}]$  функция тождественно равна нулю.

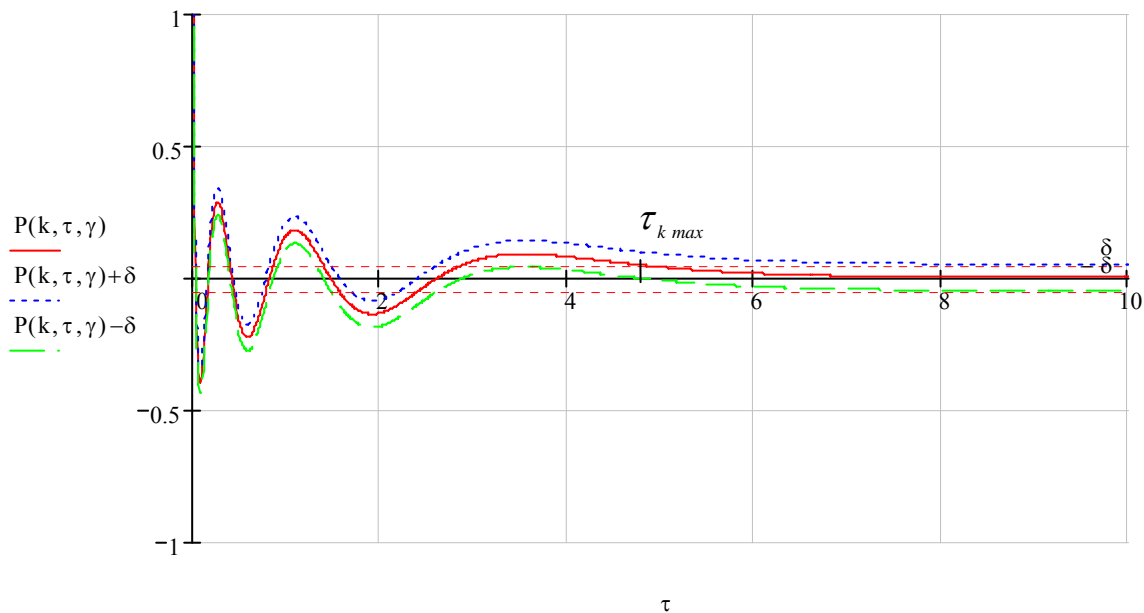


Рисунок 3.1 - Длительность ортогональной функции

Интервал дискретизации при линейной интерполяции с заданной погрешностью можно вычислить по формуле [21]:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{8\delta}{\|\psi_k''\|_{max}}}, \quad (3.2)$$

где  $\delta$  – заданная погрешность восстановления,

$\left\| \psi_k'' \right\|_{\max}$  – максимальное по модулю значение второй производной соответствующей функции.

Число интервалов дискретизации:

$$n = \text{ent} \left[ \frac{\tau_{k \max}}{\Delta t} + 0,5 \right], \quad (3.3)$$

где  $\text{ent} [ ]$  – целая часть от числа,

$\tau_{k \max}$  – максимальная длительность ортогональной функции  $k$ -ого порядка,

$\Delta t$  – интервал дискретизации.

### 3.2. Задание на самостоятельную работу

1. Задать вид ортогональной функции.
2. Задать порядок ортогональной функции.
3. Задать значение параметра масштаба.
4. Задать погрешность приближения  $\delta = 0,02; 0,05; 0,1$ .
5. Построить график ортогональной функции.
6. На основании графика приблизительно определить интервал, внутри которого находится значение  $\tau_{k \max}$  для данной функции и заданном значении погрешности приближения.
7. Получить на основании общей формулы ортогональных функции частные формулы функции, ее первой, второй и третьей производных.
8. Вычислить максимум второй производной.
9. Вычислить интервал дискретизации для ортогональной функции.
10. Определить максимальную длительность ортогональной функции.
11. Вычислить количество интервалов дискретизации.
12. Занести все полученные значения (максимум второй производной, длительность функции, интервал дискретизации, число интервалов дискретизации) в таблицу.
13. Повторить пункты 4-12 для каждого из заданных значений погрешности приближения.
14. Повторить пункты 3-13 для каждого заданного значения параметра масштаба.
15. Повторить пункты 2-14 для каждого заданного порядка ортогональных функций.
16. Построить зависимость  $\tau_{k \max} = f_1(k / \alpha)$ .
17. Построить зависимость  $\tau_{k \max} = f_2(\alpha / k)$ .
18. Построить зависимость  $\Delta t = f_3(k / \alpha)$ .
19. Оформить отчет.

### 3.3. Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.

4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
  5. Метод и алгоритм нахождения интервала дискретизации и длительности функции.
  6. Графики заданных ортогональных функций.
  7. Формулы заданных ортогональных функций и их трех первых производных.
  8. Выводы.
- Пример выполнения лабораторной работы 3 приведен в Приложении 6.

### 3.4. Контрольные вопросы

1. Поясните физический смысл длительности ортогональной функции?
2. Какой информацией необходимо располагать для определения интервала дискретизации ортогональных функций?
3. Как изменяется длительность ортогональной функции с увеличением её порядка?
4. Как изменяется длительность ортогональной функции с увеличением параметра масштаба?
5. Как изменяется число интервалов дискретизации с увеличением погрешности восстановления?

## 4. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

**Цель работы:** исследование частотных характеристик ортогональных функций.

### 4.1. Теоретические основы лабораторной работы

Многие задачи аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа удобнее решать с использованием частотных характеристик ортогональных функций [21, 34, 38, 45 - 47].

Рассмотрим ортогональные базисы, представленные в таблице 2.1.

Найдем преобразование Фурье ортогональных функций (см. таблицу 4.1)

$$W_k(j\omega) = \int_0^{\infty} \psi_k(\tau, \alpha) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (4.1)$$

Из результатов, представленных в таблице 4.1, видно, что преобразование Фурье ортогональных функций 1, 4-10 можно представить в общем виде:

$$W_k(j\omega) = \frac{[\psi_k(0, \alpha)]}{1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{j\omega - 1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2}{j\omega + 1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2}. \quad (4.2)$$

Выражение (4.2) приведем к виду

$$W_k(j\omega) = \frac{2\|\psi_k(\alpha)\|^2 [\psi_k(0, \alpha)]}{1 + j2\|\psi_k(\alpha)\|^2 \omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{j2\|\psi_s(\alpha)\|^2 \omega - 1}{j2\|\psi_s(\alpha)\|^2 \omega + 1}. \quad (4.3)$$

Введем обозначения  $tg\varphi_s = 2\|\psi_s(\alpha)\|^2 \omega$ ,  $\varphi_s = arctg 2\|\psi_s(\alpha)\|^2 \omega$ . Тогда

$$\begin{aligned} W_k(j\omega) &= \frac{2\|\psi_k(\alpha)\|^2 [\psi_k(0, \alpha)]}{1 + jtg\varphi_k} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{jtg\varphi_s - 1}{jtg\varphi_s + 1} = \\ &= 2(-1)^k \|\psi_k(\alpha)\|^2 \psi_k(0, \alpha) \cos\varphi_k \exp\left(-j\left(\varphi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s\right)\right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Отсюда

$$ReW_k(j\omega) = 2(-1)^k \|\psi_k(\alpha)\|^2 \psi_k(0, \alpha) \cos\varphi_k \cos\left[\varphi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s\right]; \quad (4.5)$$

$$ImW_k(j\omega) = 2(-1)^{k+1} \|\psi_k(\alpha)\|^2 \psi_k(0, \alpha) \cos\varphi_k \sin\left[\varphi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s\right]; \quad (4.6)$$

$$|W_k(j\omega)| = 2\|\psi_k(\alpha)\|^2 \cos\varphi_k; \quad (4.7)$$

$$\Phi_k(j\omega) = -\left(\varphi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s\right). \quad (4.8)$$

Частотные характеристики с использованием экспоненциальных и тригонометрических функций, представленные в виде (4.4) – (4.8), удобно применять при корреляционно-спектральном анализе [15].

Примеры частотных характеристик исследуемых ортогональных функций различных порядков, соответствующие таблице 4.1 и формуле (4.4) представлены в Приложении 7.

№	Ортогональные функции	$W_k(j\omega)$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{1}{j\omega + \alpha/2} \left( \frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^k$
2	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\gamma(k+1)} \left( 1 - \left( \frac{j\omega - \gamma/2}{j\omega + \gamma/2} \right)^{k+1} \right)$
3	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\gamma^2(k+1)(k+2)} \left[ \left( \left( \frac{j\omega - \gamma/2}{j\omega + \gamma/2} \right)^{k+1} - 1 \right) (j\omega - \gamma/2) + \gamma(k+1) \right]$
4	$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{1}{(2k+1)\alpha + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(2s+1)\alpha - j\omega}{(2s+1)\alpha + j\omega}$
5	$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{1}{j\omega + (k+1)\alpha} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{j\omega - (s+1)\alpha}{j\omega + (s+1)\alpha}$
6	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{(4k+1)\gamma/2 + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(4s+1)\gamma/2 - j\omega}{(4s+1)\gamma/2 + j\omega}$
7	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{(4k+3)\gamma/2 + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(4s+3)\gamma/2 - j\omega}{(4s+3)\gamma/2 + j\omega}$
8	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{(k+1)\gamma + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(s+1)\gamma - j\omega}{(s+1)\gamma + j\omega}$
9	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{(2k+1)\gamma + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(2s+1)\gamma - j\omega}{(2s+1)\gamma + j\omega}$
10	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{(2k+3)\gamma + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(2s+3)\gamma - j\omega}{(2s+3)\gamma + j\omega}$
11	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \frac{1}{(2s+1)\gamma + j\omega}$
12	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{(k+1)(k+2)} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \frac{1}{(2s+1)\gamma + j\omega}$
13	$T_k(\tau, \gamma)$	$\begin{cases} \frac{1}{\gamma + j\omega}, k=0 \\ \sum_{s=0}^k \frac{k}{2k-s} C_{2k-s}^s (-4)^{k-s} \frac{1}{(2(k-s)+1)\gamma + j\omega}, k \neq 0 \end{cases}$
14	$U_k(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^k C_{2k-s+1}^s (-4)^{k-s} \frac{1}{(2(k-s)+1)\gamma + j\omega}$

Частотные характеристики ортогональных функций Сонина-Лагерра (1) и (2), как видно из таблицы 4.1, не описываются формулой (4.2). Однако, введя обозначение

ния  $tg \varphi = 2\omega / \gamma$ ,  $\varphi = \text{arctg } 2\omega / \gamma$ , также можно получить аналитические выражения частотных характеристик с использованием экспоненциальных и тригонометрических функций.

Так для ортогональных функций Сонина-Лагерра (1):

$$W_k^{(1)}(j\omega) = \frac{1}{\gamma \cdot (k+1)} \left( 1 + (-1)^k \exp[-2(k+1)j\varphi] \right); \quad (4.9)$$

$$\text{Re}W_k^{(1)}(j\omega) = \frac{1}{\gamma \cdot (k+1)} \left( 1 + (-1)^k \cos[2(k+1)\varphi] \right); \quad (4.10)$$

$$\text{Im}W_k^{(1)}(j\omega) = \frac{1}{\gamma \cdot (k+1)} \left( (-1)^{k+1} \sin[2(k+1)\varphi] \right). \quad (4.11)$$

Для ортогональных функций Сонина-Лагерра (2):

$$W_k^{(2)}(j\omega) = \frac{2}{\gamma \cdot (k+1)(k+2)} \left( \frac{\exp(-j\varphi)}{2 \cos \varphi} + \frac{(-1)^k \exp[-(2k+3)j\varphi]}{2 \cos \varphi} + k + 1 \right); \quad (4.12)$$

$$\text{Re}W_k^{(2)}(j\omega) = \frac{2}{\gamma \cdot (k+1)(k+2)} \left( \frac{1}{2} + \frac{(-1)^k \cos[(2k+3)\varphi]}{2 \cos \varphi} + k + 1 \right); \quad (4.13)$$

$$\text{Im}W_k^{(2)}(j\omega) = \frac{2}{\gamma \cdot (k+1)(k+2)} \left( \frac{(-1)^{k+1} \sin[(2k+3)\varphi]}{2 \cos \varphi} - \frac{tg \varphi}{2} \right). \quad (4.14)$$

Частотные характеристики ортогональных функций Якоби (0, 1) и Якоби (0, 2)

с учетом обозначения  $tg \varphi_s = \frac{\omega}{\gamma(2s+1)}$ ,  $\varphi_s = \text{arctg } \frac{\omega}{\gamma(2s+1)}$  равны:

$$W_k^{(0,1)}(j\omega) = \frac{1}{(k+1)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \frac{\cos \varphi_s \exp(-j\varphi_s)}{(2s+1)}; \quad (4.15)$$

$$\text{Re}W_k^{(0,1)}(j\omega) = \frac{1}{(k+1)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \frac{\cos^2 \varphi_s}{(2s+1)}; \quad (4.16)$$

$$\text{Im}W_k^{(0,1)}(j\omega) = -\frac{1}{(k+1)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \frac{\cos \varphi_s \sin \varphi_s}{(2s+1)}; \quad (4.17)$$

$$W_k^{(0,2)}(j\omega) = \frac{2}{(k+1)(k+2)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \frac{\cos \varphi_s \exp(-j\varphi_s)}{(2s+1)}; \quad (4.18)$$

$$\text{Re}W_k^{(0,2)}(j\omega) = \frac{2}{(k+1)(k+2)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \frac{\cos^2 \varphi_s}{(2s+1)}; \quad (4.19)$$

$$\text{Im}W_k^{(0,2)}(j\omega) = -\frac{2}{(k+1)(k+2)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \frac{\cos \varphi_s \sin \varphi_s}{(2s+1)}. \quad (4.20)$$

Модули и фазы частотных характеристик ортогональных функций Сонина-Лагерра (1) и (2), Якоби (0, 1) и Якоби (0, 2) определяются следующими общими выражениями:

$$|W_k(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}W_k^{(i/0,i)}(j\omega)^2 + \text{Im}W_k^{(i/0,i)}(j\omega)^2}; \quad (4.21)$$

$$\Phi_k(j\omega) = \text{arctg} \frac{\text{Im}W_k^{(i/0,i)}(j\omega)}{\text{Re}W_k^{(i/0,i)}(j\omega)}. \quad (4.22)$$

Полученные выражения для преобразования Фурье ортогональных функций позволяют решать разнообразные задачи аппроксимативного анализа случайных процессов. Так, например, из выражения (4.1) можно найти выражение для определения длительности ортогональных функций (см. таблицу 4.2), необходимые для оценки интервала корреляции [21].

$$\tau_{k,u}^{(2)} = \int_0^{\infty} \psi_k(\tau, \alpha) d\tau = W_k(0, \alpha). \quad (4.23)$$

Длительность ортогональных функций

Таблица 4.2

№	Ортогональные функции	$\tau_{k,u}^{(2)}$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{2(-1)^k}{\alpha}$
2	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\gamma} \left[ \frac{(k+1) \bmod 2}{k+1} \right]$
3	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4}{\gamma} \left[ \frac{(k+2) \operatorname{div} 2}{(k+1)(k+2)} \right]$
4	$Leg_k(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\alpha(2k+1)}$
5	$D_k(\tau, \gamma)$	$\frac{(-1)^k}{\alpha(k+1)}$
6	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\gamma(4k+1)}$
7	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\gamma(4k+3)}$
8	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\gamma(k+1)}$
9	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\gamma(2k+1)}$
10	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\gamma(2k+3)}$
11	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(k+1) \bmod 2}{(k+1)^2 \gamma}$
12	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4(-1)^k [(k+2) \operatorname{div} 2]^2}{(k+1)^2 (k+2)^2 \gamma}$

Введем понятие полосы пропускания линейной динамической системы [21]:



$$\Delta\omega_c = \frac{\int_0^{\infty} |W_m^*(j\omega)|^2 d\omega}{|W_m^*(j\omega)|_{max}^2}, \quad (4.24)$$

где  $W_m^*(j\omega) = \frac{I}{\|\psi_m\|^2} \int_0^{\infty} \psi_m(\tau, \alpha) \mu(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$  – частотная характеристика семейства ор-

тогональных фильтров (см. таблицу 4.3);

$|W_m^*(j\omega)|^2 = W_m^*(j\omega) \cdot W_m^*(-j\omega)$  – квадрат модуля частотной характеристики семейства ортогональных фильтров.

Вид частотных характеристик ортогональных фильтров приведен в Приложении 8.

Следует отметить, что для ортогональных функций 1, 4 - 10  $\mu(\tau) = 1$  и

$$W_m^*(j\omega) = \frac{I}{\|\psi_m\|^2} W_m(j\omega). \quad (4.25)$$

Графически полоса пропускания показана на рисунке 4.1.

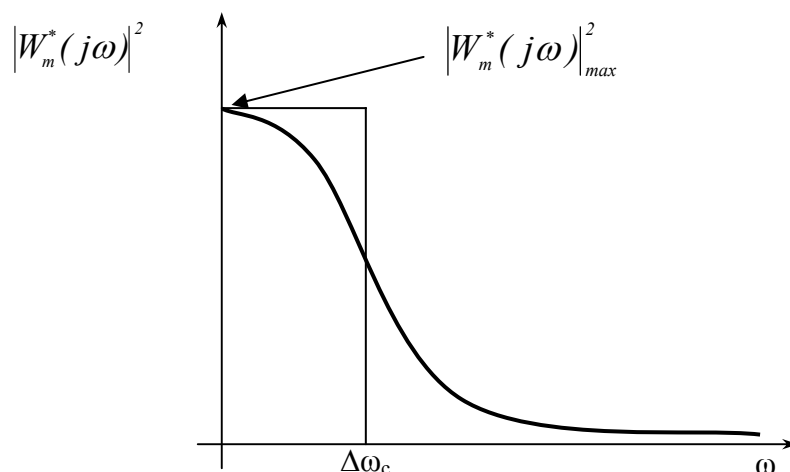


Рисунок 4.1 - Полоса пропускания линейной динамической системы

### Частотные характеристики ортогональных фильтров

Таблица 4.3

№	Ортогональные функции	$W_k^*(j\omega)$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\alpha}{j\omega + \alpha/2} \left( \frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^k$
2	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^2}{(j\omega + \gamma/2)^2} \left( \frac{j\omega - \gamma/2}{j\omega + \gamma/2} \right)^k$
3	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^3}{2(j\omega + \gamma/2)^3} \left( \frac{j\omega - \gamma/2}{j\omega + \gamma/2} \right)^k$

4	$Leg_k(\tau, \gamma)$	$\frac{2\alpha(2k+1)}{(2k+1)\alpha + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(2s+1)\alpha - j\omega}{(2s+1)\alpha + j\omega}$
5	$D_k(\tau, \gamma)$	$\frac{2\alpha(k+1)}{j\omega + (k+1)\alpha} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{j\omega - (s+1)\alpha}{j\omega + (s+1)\alpha}$
6	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(4k+1)\gamma}{(4k+1)\gamma/2 + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(4s+1)\gamma/2 - j\omega}{(4s+1)\gamma/2 + j\omega}$
7	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(4k+3)\gamma}{(4k+3)\gamma/2 + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(4s+3)\gamma/2 - j\omega}{(4s+3)\gamma/2 + j\omega}$
8	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2\gamma(k+1)}{(k+1)\gamma + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(s+1)\gamma - j\omega}{(s+1)\gamma + j\omega}$
9	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2\gamma(2k+1)}{(2k+1)\gamma + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(2s+1)\gamma - j\omega}{(2s+1)\gamma + j\omega}$
10	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2\gamma(2k+3)}{(2k+3)\gamma + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(2s+3)\gamma - j\omega}{(2s+3)\gamma + j\omega}$
11	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{8\gamma^2(k+1)^3}{[(2k+1)\gamma + j\omega][(2k+1)\gamma + j\omega]} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(2s+1)\gamma - j\omega}{(2s+1)\gamma + j\omega}$
12	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4\gamma^3(2k+3)(k+1)^2(k+2)^2}{[(2k+1)\gamma + j\omega][(2k+1)\gamma + j\omega][(2k+5)\gamma + j\omega]} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(2s+1)\gamma - j\omega}{(2s+1)\gamma + j\omega}$

Квадраты модулей частотных характеристик ортогональных фильтров и их максимумы приведены в таблице 4.4.

Квадраты модулей частотных характеристик и их максимумы

Таблица 4.4

№	Ортогональные функции	$ W_m^*(j\omega) ^2$	$ W_m^*(j\omega) _{max}^2$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\alpha^2}{\alpha^2/4 + \omega^2}$	4
2	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^4(m+1)^2}{(\gamma^2/4 + \omega^2)^2}$	$16(m+1)^2$
3	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^6(m+1)^2(m+2)^2}{4(\gamma^2/4 + \omega^2)^3}$	$16(m+1)^2(m+2)^2$
4	$Leg_k(\tau, \gamma)$	$\frac{4(2m+1)^2 \cdot \alpha^2}{(2m+1)^2 \cdot \alpha^2 + \omega^2}$	4
5	$D_k(\tau, \gamma)$	$\frac{4(m+1)^2 \cdot \alpha^2}{(m+1)^2 \cdot \alpha^2 + \omega^2}$	4

6	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(4m+1)^2 \cdot \gamma^2}{(4m+1)^2 \cdot \gamma^2 / 4 + \omega^2}$	4
7	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(4m+3)^2 \cdot \gamma^2}{(4m+3)^2 \cdot \gamma^2 / 4 + \omega^2}$	4
8	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4(m+1)^2 \cdot \gamma^2}{(m+1)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2}$	4
9	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4(2m+1)^2 \cdot \gamma^2}{(2m+1)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2}$	4
10	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4(2m+3)^2 \cdot \gamma^2}{(2m+3)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2}$	4
11	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{64(m+1)^6 \cdot \gamma^4}{[(2m+1)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2][(2m+3)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2]}$	$\frac{64(m+1)^6}{(2m+1)^2(2m+3)^2}$
12	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{16(2m+3)^2(m+1)^4(m+2)^4 \cdot \gamma^6}{[(2m+1)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2][(2m+3)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2][(2m+5)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2]}$	$\frac{16(m+1)^4(m+2)^4}{(2m+1)^2(2m+5)^2}$

Значения полосы пропускания линейной динамической системы для различных ортогональных функций приведены в таблице 4.5.

Значения полосы пропускания линейной динамической системы

Таблица 4.5

№	Ортогональные функции	$\Delta\omega_c$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\pi\alpha}{4}$
2	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\pi\gamma}{8}$
3	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{3\pi\gamma}{32}$
4	$Leg_k(\tau, \gamma)$	$\frac{\pi\alpha(2m+1)}{2}$
5	$D_k(\tau, \gamma)$	$\frac{\pi\alpha(m+1)}{2}$
6	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\pi\gamma(4m+1)}{4}$
7	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\pi\gamma(4m+3)}{4}$
8	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\pi\gamma(m+1)}{2}$

9	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\pi\gamma(2m+1)}{2}$
10	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\pi\gamma(2m+3)}{2}$
11	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\pi\gamma(2m+1)(2m+3)}{8(m+1)}$
12	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{3\pi\gamma(2m+1)(2m+3)(2m+5)}{64(m+1)(m+2)}$

Отметим, что квадраты модуля частотных характеристик ортогональных фильтров  $m$ -ого порядка 1, 4 - 10 соответствуют квадрату модуля  $\theta$ -ого порядка с параметром  $1/2\|\psi_m\|^2$

$$|W_m(j\omega)|^2 = \frac{1}{\|\psi_m\|^4 (1/4\|\psi_m\|^4 + \omega^2)} = \frac{4}{1 + 4\|\psi_m\|^4 \omega^2}, \quad (4.26)$$

а соотношение неопределенности [51]:

$$\Delta\omega_c \tau_{0,u} = \frac{\pi}{2}. \quad (4.27)$$

Заметим, что выражения для частотных характеристик ортогональных функций записаны с учетом некоторых преобразований в более удобной форме для дальнейшего использования и применения. В частности, для ортогонального базиса Сонина-Лагерра с использованием формулы геометрической прогрессии [5], а для ортогонального базиса Якоби с единичной весовой функцией с использованием чисел Стирлинга 1-ого и 2-ого рода.

Ниже, в качестве примера, приведем аналитические преобразования с использованием комбинаторных чисел Стирлинга при получении соотношения для преобразования Фурье ортогональных функций Якоби:

$$W_{k,1}(j\omega) = \frac{1}{c\left(k + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{c\left(s + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma - j\omega}{c\left(s + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma + j\omega}, \quad (4.28)$$

где

$$W_{k,2}(j\omega) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+\alpha}^{s+\alpha} (-1)^s \frac{1}{\left(c\left(s + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma + j\omega\right)}. \quad (4.29)$$

Выражение (4.28) необходимо проверить на сходимость с использованием соотношения:

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n-a_1)(n-a_2)\dots(n-a_k)}{(n-b_1)(n-b_2)\dots(n-b_k)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{a_1}{n}\right)\left(1 - \frac{a_2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{a_k}{n}\right)}{\left(1 - \frac{b_1}{n}\right)\left(1 - \frac{b_2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{b_k}{n}\right)}. \quad (4.30)$$

Необходимым условием сходимости соотношения является следующее [10]:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k - b_1 - b_2 - \dots - b_k = 0. \quad (4.31)$$

Вид суммы ряда  $W_{k,2}(j\omega)$  позволяет перейти к более общей комбинаторной схеме: работе с комбинаторными числами. Под комбинаторными числами понимают перечисления различных множеств комбинаторных объектов. Различные элементы в перечисляемом множестве могут быть неравноценны, что приводит к назначению весов, в общем случае различных, на множестве отображений и вычислению сумм этих весов на каких-либо подмножествах исходного множества. Тогда операцию нахождения таких сумм называют взвешенными перечислениями (перечисления с весами). В частном случае считающих весов, равных единице на каждом элементе - обычное перечисление - имеем дело с биномиальными коэффициентами.

Многие комбинаторные числа – частные случаи элементов обобщенного треугольника. Известно, как строится треугольник Паскаля. Число сочетаний  $C_n^k$  определяют как решение разностного уравнения

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (4.32)$$

Обобщения производят, дополняя различными способами разностное уравнение. По аналогии с построением треугольника Паскаля строят обобщенный треугольник на основании рекуррентного соотношения [10]:

$$V(n, k) = \beta_{n, k-1} V(n-1, k-1) + \alpha_{n, k} V(n-1, k). \quad (4.33)$$

Величины  $\alpha_{n, k}$  и  $\beta_{n, k}$  - весовые коэффициенты.

$$V_n = \sum_{k=0}^n V(n, k) = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{n, k} + \beta_{n, k}) V(n-1, k). \quad (4.34)$$

Однако иногда оказывается полезной и следующая интерпретация элементов обобщенного треугольника Паскаля. Полагая, что  $V(n, n) \neq 0$ ,  $n = \overline{0, \infty}$  зафиксируем значение параметра  $n$  и построим нормированную последовательность элементов  $n$ -ой строки:

$$\frac{V(n, 0)}{V(n, n)}, \frac{V(n, 1)}{V(n, n)}, \dots, \frac{V(n, n)}{V(n, n)}. \quad (4.35)$$

Пусть

$$P_n(x) = \frac{1}{V(n, n)} \sum_{k=0}^n V(n, k) x^k, \quad (4.36)$$

где  $\mu_{n, 0}, \mu_{n, 1}, \dots, \mu_{n, n-1}$  - корни многочлена  $P_n(x)$ , взятые с противоположным знаком.

Тогда

$$\frac{V(n, k)}{V(n, n)} = B_k^n, \quad (4.37)$$

где  $B_k^n$  - обобщенные числа Стирлинга 1-ого рода, строящиеся при каждом фиксированном  $n$  на базе  $\{\mu_{n, m}\}_{m=0}^{n-1}$ .

В свою очередь, биномиальные коэффициенты получаются из (4.33) при значениях  $V_0 = 1$ ,  $\alpha_{n, k} = \beta_{n, k} = 1$ ;  $n = \overline{1, \infty}$ ,  $k = \overline{0, n}$ .

Если же  $V_0 = 1$ ,  $\beta_{n, k} = 1$ , а  $\alpha_{n, k} = \mu_{n-1}$ ;  $n = \overline{1, \infty}$ ,  $k = \overline{0, n}$ , то имеем рекуррентное соотношение для обобщенных чисел Стирлинга 1-ого рода:

$$B_k^n = B_{k-1}^{n-1} + \mu_{n-1} B_k^{n-1}. \quad (4.38)$$

Рассмотрим случай:  $V_0 = 1$ ,  $\alpha_{n,k} = \alpha_n$ ,  $\beta_{n,k} = \beta_k$ ;  $n = \overline{1, \infty}$ ,  $k = \overline{0, n}$ .

В этом случае имеем:

$$V(n, k) = \beta_k V(n-1, k-1) + \alpha_n V(n-1, k). \quad (4.39)$$

Считая, что в последовательности  $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$  все члены отличны от нуля, введем величины:

$$B_0^0 = 1, B_k^n = \frac{V(n, k)}{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k}. \quad (4.40)$$

Тогда

$$B_0^0 = 1, B_k^n = B_{k-1}^{n-1} + \frac{\alpha_n}{\beta_k} B_k^{n-1}.$$

После нормировки элементы каждой строки обобщенного треугольника выражаются при помощи обобщенных чисел Стирлинга 1-ого рода, построенных на базе

$$\left\{ \frac{\alpha_n}{\beta_k} \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Нормировку можно проводить и иными методами в зависимости от условия решаемой задачи.

Введем базу  $\{\alpha_s\}_{s=0}^k$ ,  $\alpha_s = \frac{c\left(s + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma}{j\omega}$  и затем построим на этой базе

обобщенные числа Стирлинга 1-ого рода.

Тогда в соответствии с постановкой задачи, выражениями (4.34) и (4.36), рекуррентным соотношением (4.38) будем иметь:

$$B_s^k = B_{s-1}^{k-1} + \alpha_k B_s^{k-1}; \quad (4.41)$$

$$B_s^k = B_s^{k-1} (\alpha_k - 1) = B_s^{k-1} \left( \frac{c\left(k + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma}{j\omega} - 1 \right); \quad (4.42)$$

$$B_s^k = B_s^{k-1} \frac{\left( c\left(k + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma - j\omega \right)}{j\omega}; \quad (4.43)$$

$$B_s^{k-1} = C_k^{s} C_{k+s+\alpha}^{s+\alpha} \frac{1}{\left( \frac{c\left(k + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma}{j\omega} + 1 \right)}. \quad (4.44)$$

Далее произведем формирование чисел Стирлинга на заданной базе:

$$B_s^k = C_k^s C_{k+s+\alpha}^{s+\alpha} \frac{j\omega}{c\left(s + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma + j\omega} \cdot \frac{\left(c\left(k + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma - j\omega\right)}{j\omega}; \quad (4.45)$$

$$B_s^k = C_k^s C_{k+s+\alpha}^{s+\alpha} \frac{c\left(k + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma - j\omega}{c\left(s + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma + j\omega}. \quad (4.46)$$

Введем следующее обозначение:

$$W_{k,2}'(j\omega) = C_k^s C_{k+s+\alpha}^{s+\alpha} (-1)^s \frac{c\left(k + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma - j\omega}{c\left(s + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma + j\omega} = \sum_{s=0}^k B_s^k x^s, \text{ т. е. } x = -1, \quad (4.47)$$

где

$$W_{k,2}'(j\omega) = \left(c\left(k + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma - j\omega\right) W_{k,2}(j\omega). \quad (4.48)$$

Введем понятия чисел Стирлинга и на их основании рассмотрим свойства этих чисел [10].

$$(x)_n = x(x-1)\dots(x-n+1); \quad (4.49)$$

$$[x]_n = x(x+1)\dots(x+n-1), \quad (4.50)$$

которые называются факториальными степенями и выражаются формулами:

$$(x)_0 = [x]_0 = 1; \quad (4.51)$$

$$(x)_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} b_k^n x^k; \quad (4.52)$$

$$x^k = \sum_{k=0}^n a_k^n (x)_k; \quad (4.53)$$

$$[x]_n = \sum_{k=0}^n b_k^n x^k; \quad (4.54)$$

$$x^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} a_k^n [x]_k, \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (4.55)$$

Коэффициенты  $(-1)^{n-k} b_k^n$  и  $a_k^n$  - числа Стирлинга 1-ого и 2-ого рода соответственно.

Пусть  $A_n = \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $n = \overline{0, \infty}$ . Тогда анализ записанных выше формул позволяет сделать выводы:

1) число  $b_k^n$ ,  $n > k$  - сумма всех различных произведений по  $n-k$  сомножителей, которые выбираются без повторения из множества  $A_{n-1}$ ;

2) число  $a_k^n$ ,  $n > k$  - сумма всех различных произведений по  $n-k$  сомножителей, которые выбираются, допуская многократные повторения, из множества  $A_k$ .

Приведенные правила, по которым из элементов множества  $A_{n-l}$  и  $A_k$  строятся числа Стирлинга, позволяют выполнить аналогичные построения из элементов различных последовательностей (даже не обязательно числовых). Возьмем последовательность элементов некоторого кольца  $\{\mu_i\}_{i=0}^{\infty}$  - базу. С применением членов базы строят разложения:

$$\prod_{i=0}^{k-l} (x + \mu_i) = \sum_{k=0}^n B_k^n x^k, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad (4.56)$$

$$x^k \prod_{i=0}^k \frac{1}{(1 - \mu_i x)} = \sum_{n=k}^{\infty} A_k^n x^n, \quad k = \overline{0, \infty}. \quad (4.57)$$

В свою очередь, коэффициенты в суммах известны:

- 1)  $B_k^n$  - элементарные симметрические функции;
- 2)  $A_k^n$  - суммы однородных произведений.

Иначе обобщенные числа Стирлинга 1-ого и 2-ого рода соответственно.

Воспользуемся выражениями (4.56) и (4.57) для построения производящей функции  $B$ - формы распределения, которой является следующее выражение с нормированными коэффициентами [10]:

$$\prod_{k=0}^{n-l} \frac{(x + \alpha_k)}{(1 + \alpha_k)} = \prod_n^{-l} \sum_{k=0}^n B_k^n x^k, \quad \alpha_k > 0, \quad (4.58)$$

Таким образом

$$\prod_k^{-l} \sum_{s=0}^k B_s^k x^s = \prod_{s=0}^{k-l} \frac{(x + \alpha_s)}{(1 + \alpha_s)}; \quad (4.59)$$

$$\sum_{s=0}^k B_s^k x^s = \prod_k \prod_{s=0}^{k-l} \frac{(x + \alpha_s)}{(1 + \alpha_s)}. \quad (4.60)$$

С учетом выражений (4.47) и (4.48) запишем:

$$\sum_{s=0}^k B_s^k x^s = W_{k,2}'(j\omega) \Big|_{x=-1}; \quad (4.61)$$

$$W_{k,2}'(j\omega) = \prod_k \prod_{s=0}^{k-l} \frac{(\alpha_s - 1)}{(\alpha_s + 1)}. \quad (4.62)$$

Соотношения (4.61) и (4.62) позволяют записать результат в виде:

$$\left( c \left( k + \frac{\alpha+1}{2} \right) \gamma - j\omega \right) \cdot W_{k,2}(j\omega) = \frac{\left( c \left( k + \frac{\alpha+1}{2} \right) \gamma - j\omega \right)}{\left( c \left( k + \frac{\alpha+1}{2} \right) \gamma + j\omega \right)} \prod_{s=0}^{k-l} \frac{\left( \frac{c \left( s + \frac{\alpha+1}{2} \right) \gamma}{j\omega} - 1 \right)}{\left( \frac{c \left( s + \frac{\alpha+1}{2} \right) \gamma}{j\omega} + 1 \right)}; \quad (4.63)$$



$$W_{k,2}(j\omega) = \frac{1}{c \left( k + \frac{\alpha + 1}{2} \right) \gamma + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{\left( c \left( s + \frac{\alpha + 1}{2} \right) \gamma - j\omega \right)}{\left( c \left( s + \frac{\alpha + 1}{2} \right) \gamma + j\omega \right)}. \quad (4.64)$$

## 4.2. Задание на самостоятельную работу

1. Для заданных систем ортогональных функций для  $m = 0 - 4$  и  $\alpha = const$  построить частотные характеристики и их составляющие: вещественную, мнимую, модуль и фазу, например, для моделей 1, 4 - 10 - соответствующие выражениям (4.4) - (4.8).
2. Для заданных систем ортогональных функций и  $\alpha / \gamma = const$  построить  $|W_m^*(j\omega)|^2 = f_1(m / \alpha)$  для  $m = 0 - 4$ .
3. Для заданных систем ортогональных функций и  $m = const$  построить  $|W_m^*(j\omega)|^2 = f_2(/ \alpha / m)$ .
4. Построить зависимость полосы пропускания ортогонального фильтра  $k$ -ого порядка от параметра масштаба.
5. Оформить отчет.

## 4.3. Содержание отчета

1. Цель работы.
  2. Задание.
  3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
  4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
  5. Графические зависимости  $|W_m^*(j\omega)|^2 = f_1(m / \alpha)$  для  $m = 0 - 4$ .
  6. Графические зависимости  $|W_m^*(j\omega)|^2 = f_2(/ \alpha / m)$ .
  7. Графические зависимости полосы пропускания ортогонального фильтра  $k$ -ого порядка от параметра масштаба.
  8. Выводы.
- Пример выполнения лабораторной работы 4 приведен в Приложении 9.

## 4.4. Контрольные вопросы

1. Поясните физический смысл полосы пропускания ортогонального фильтра?
2. Для какой ортогональной системы функций полоса пропускания не зависит от порядка функций?
3. Что такое соотношение неопределенности для ортогонального фильтра?
4. Как определить порядок ортогональной функции по виду вещественной частотной характеристики?
5. Чем различаются частотные характеристики ортогональных функций и ортогонального фильтра? В чем их физический смысл?

## 5. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

**Цель работы:** изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации корреляционных функций случайных процессов ортогональными функциями.

### 5.1. Теоретические основы лабораторной работы

#### 5.1.1. Основные понятия и определения

Важной частью статистического анализа является корреляционный анализ. Знание корреляционных функций позволяет решать задачи идентификации динамических систем, выбирать оптимальный интервал дискретизации исследуемого процесса, оценивать погрешности средств измерений, строить корреляционные приёмники и т.д. [21, 51].

Корреляционная функция представляет собой корреляционный момент ее значений при двух значениях аргумента  $t$  и  $t'$ , рассматриваемый как функция [48, 49]:

$$K_x(t, t') = M \left[ \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{x}(t') \right], \quad (5.1)$$

где  $\overset{\circ}{x}(t) = x(t) - m_x(t)$ , а  $m_x(t)$  – математическое ожидание случайного процесса в сечении  $t$ .

Корреляционная функция характеризует степень **линейной связи** между сечениями процесса.

Часто вместо корреляционной функции для характеристики связи между сечениями процесса используют нормированную корреляционную функцию, которая представляет собой коэффициент корреляции значений процесса при двух значениях аргумента:

$$\rho_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sqrt{D_x(t)} \sqrt{D_x(t')}}. \quad (5.2)$$

Для стационарно связанных (стационарных) случайных процессов корреляционная функция зависит лишь от разности аргументов и является четной функцией [48]:

$$K_x(\tau) = K_x(-\tau), \quad \tau = t - t'. \quad (5.3)$$

Это свойство позволяет **определять одну ветвь** корреляционной функции, т.е. только во временном интервале  $[0, \infty)$ .

Нормированная корреляционная функция для стационарных процессов, в соответствии с выражением (5.2), равна:

$$\rho_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{K_x(0)}. \quad (5.4)$$

Отсюда видно, что

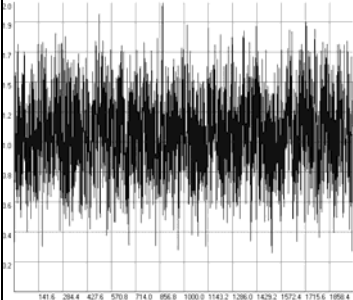
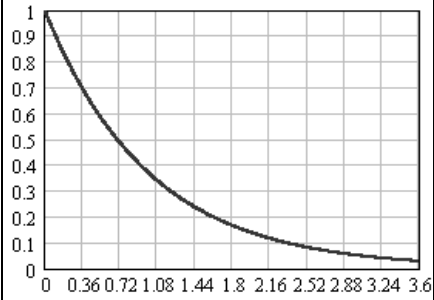
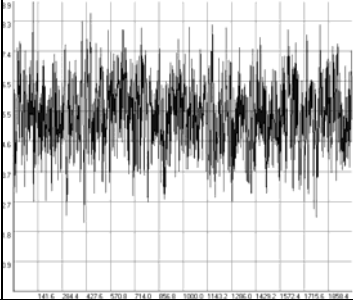
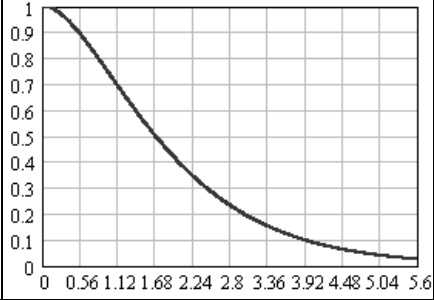
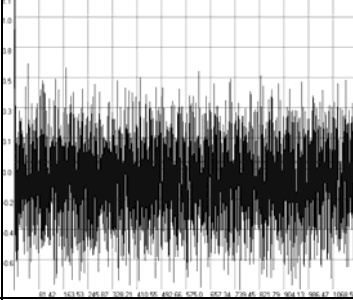
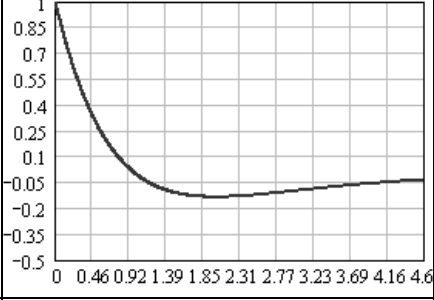
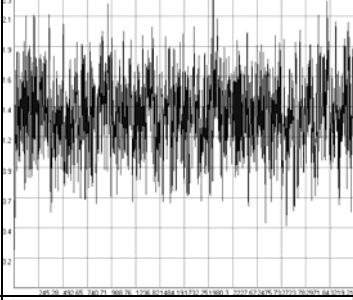
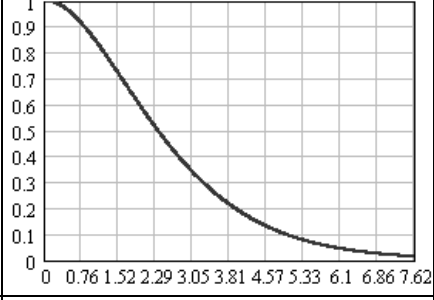
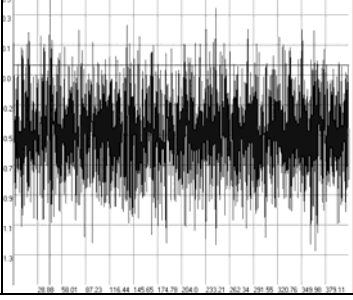
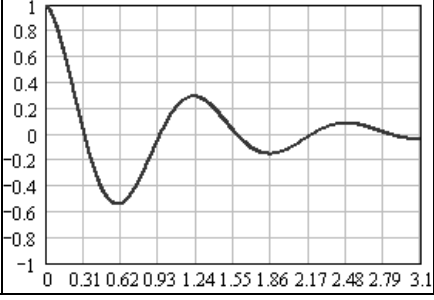
$$|\rho_x(\tau)| \leq 1. \quad (5.5)$$

Типовые модели нормированных корреляционных функций, широко применяемых в приложениях, приведены в таблице 5.1 ( $\lambda_i = 1$  и  $\omega_{0,i} = 5$ ), а их классифика-

ция – на рис. 5.1 [21]. Обратите внимание на разную длительность корреляционных функций при одном и том же значении параметра затухания  $\lambda_i$ .

### Типовые модели корреляционных функций

Таблица 5.1

№	Вид модели $\rho_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$	Случайный процесс	Нормированная корреляционная функция
1	$e^{-\lambda_1 \tau }$		
2	$e^{-\lambda_2 \tau }(1 + \lambda_2 \tau )$		
3	$e^{-\lambda_3 \tau }(1 - \lambda_3 \tau )$		
4	$e^{-\lambda_4 \tau }\left(1 + \lambda_4 \tau  + \frac{\lambda_4^2\tau^2}{3}\right)$		
5	$e^{-\lambda_5 \tau } \cos(\omega_{0,5}\tau)$		

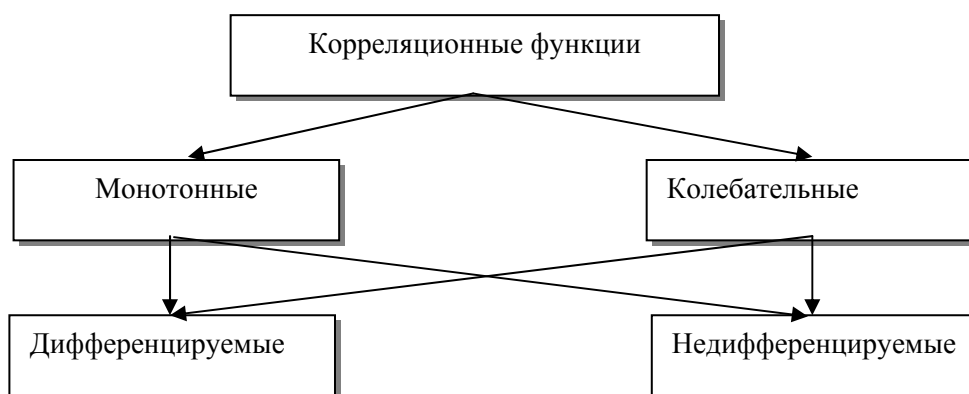
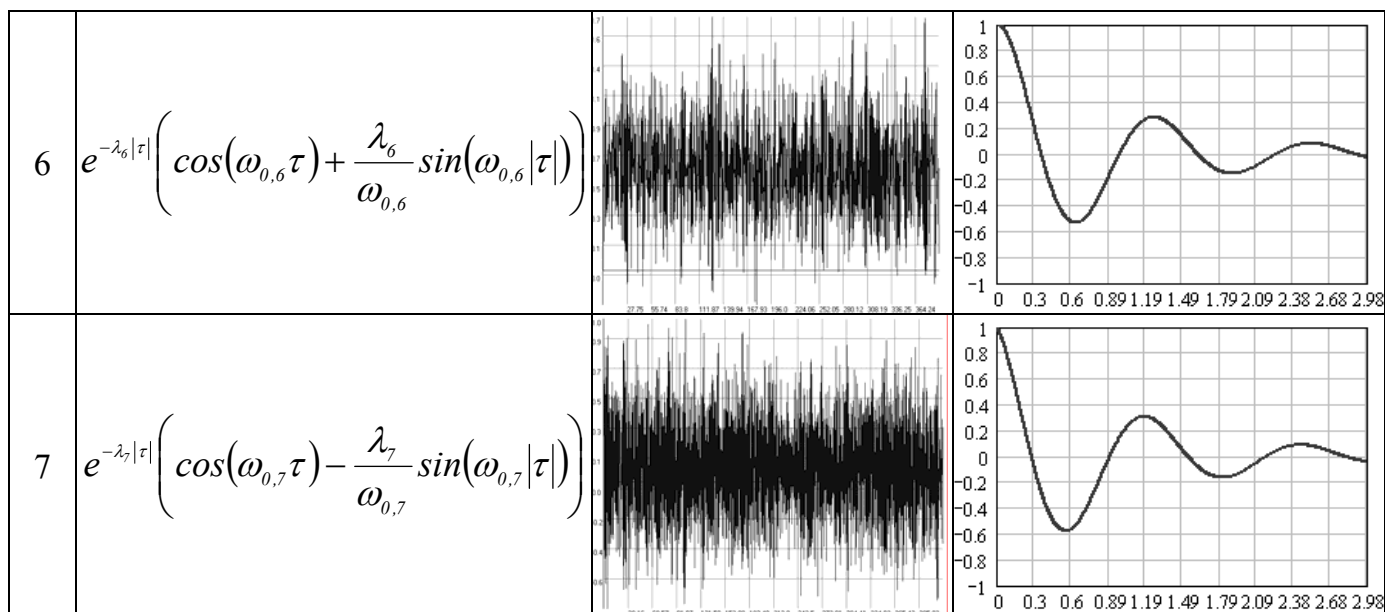


Рисунок 5.1 - Классификация корреляционных функций

Из анализа моделей видно, что все корреляционные функции можно разбить на два класса: монотонные (1-2) и колебательные (3-7).

Из графиков видно, что в ряде случаев (модели 1, 3, 5, 7) в «нуле» производная корреляционных функций при подходе к нулю слева и справа определяется неоднозначно, т. е.  $K'(\tau - 0) \neq K'(\tau + 0)$ . Такие случайные процессы относятся к классу недифференцируемых процессов. Случайный процесс называется дифференцируемым, если производная корреляционной функции в «нуле» непрерывна (см. модели 2, 4, 6).

Отметим, что корреляционная функция  $n$ -ой производной стационарного случайного процесса определяется выражением:

$$K_{x^{(n)}}(\tau) = (-1)^n K_x^{(2n)}(\tau). \quad (5.6)$$

Отсюда видно, что все производные дифференцируемых стационарных случайных процессов являются стационарными случайными процессами [48].

Таким образом, корреляционные функции стационарных случайных процессов можно разделить на четыре класса:

1. монотонные недифференцируемые (модели 1);
2. монотонные дифференцируемые (модели 2, 4);
3. колебательные недифференцируемые (модели 3, 5, 7);
4. колебательные дифференцируемые (модели 6).

Такое разделение стационарных случайных процессов по виду корреляционной функции оказывается полезным при решении самых разнообразных задач, например, аппроксимации корреляционных функций, полученных экспериментально, параметрическими моделями [22, 23].

Взаимной корреляционной функцией двух случайных функций  $x(t)$  и  $y(t)$  называется неслучайная функция двух аргументов  $t$  и  $t'$ , которая при каждой паре значений  $t$  и  $t'$  равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции  $x(t)$  и случайной функции  $y(t)$ :

$$K_{xy}(t, t') = M \left[ \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{y}(t') \right]. \quad (5.7)$$

Если взаимная корреляционная функция не тождественно равна нулю, случайные процессы называются коррелированными, в противном случае они называются некоррелированными.

Следует отметить, что при одновременной перестановке аргументов и индексов взаимная корреляционная функция не изменяется:

$$K_{xy}(t, t') = K_{yx}(t', t). \quad (5.8)$$

Часто вместо корреляционной функции для характеристики связи между сечениями процесса используют нормированную корреляционную функцию, которая представляет собой коэффициент корреляции значений процесса при двух значениях аргумента:

$$\rho_{xy}(t, t') = \frac{K_{xy}(t, t')}{\sqrt{D_x(t)} \sqrt{D_y(t')}}. \quad (5.9)$$

Для стационарно связанных (стационарных) случайных процессов [48] корреляционная функция зависит лишь от разности аргументов  $\tau = t - t'$ .

Нормированная корреляционная функция, в соответствии с выражением (5.25), равна:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{K_{xy}(\tau)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}. \quad (5.10)$$

Отсюда видно, что

$$|\rho_{xy}(\tau)| \leq 1. \quad (5.11)$$

Из свойства взаимной корреляционной функции следует, что две взаимные

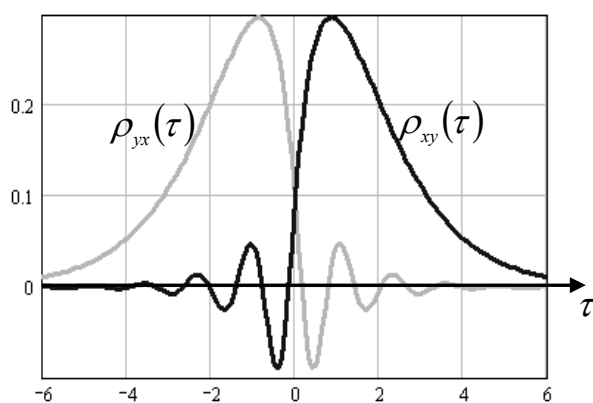


Рисунок 5.2 - Взаимные корреляционные функции

корреляционные функции двух стационарно связанных случайных функций  $x(t)$  и  $y(t)$ , взятых в различных порядках, связаны соотношением

$$\rho_{xy}(\tau) = \rho_{yx}(-\tau). \quad (5.12)$$

Графически это означает, что кривая  $\rho_{yx}(\tau)$  является зеркальным отражением кривой  $\rho_{xy}(\tau)$  относительно оси ординат (рис. 5.2).

Из анализа рис. 5.2 видно, что при взаимном корреляционном анализе необходимо *оценивать две ветви* корреляционной функции.

### 5.1.2. Аппроксимация корреляционных функций

Корреляционные функции, представленные в виде последовательности ординат и предназначенные для дальнейших расчетов, как правило, аппроксимируются теми или иными аналитическими выражениями в соответствии с выбранным критерием приближения. Независимо от метода аппроксимации, как правило, определяются параметры модели, удовлетворяющие выбранному критерию приближения. Знание модели корреляционной функции и численных значений её параметров позволяет легко, используя известные определения, вычислить интервалы корреляции, моменты корреляционных функций, спектральную плотность мощности и т.д. Кроме того, следует отметить, что при проведении большого числа корреляционных измерений аппроксимативный подход позволяет существенно сократить объём хранимой информации, так как вместо большого числа отсчётов корреляционных функций в заданных точках необходимо хранить только вид модели и численные значения её параметров.

Одной из самых сложных и плохо формализуемых задач, от правильного решения которой во многом будет определяться точность, достоверность полученных результатов, простота технической реализации, является выбор модели корреляционной функции.

В качестве моделей корреляционных функций, основываясь на априорной информации о свойствах процесса, наиболее часто принимают:

- линейную комбинацию конечного числа функций (возможна аппроксимация одной функцией) [51];
- бесконечный (конечный) ряд некоторой определенной системы функций (в частности, возможна аппроксимация степенными рядами, рядами по дисперсиям производных, ортогональными полиномами и функциями, асимптотическими рядами) [21, 22, 23, 51].

Выбор той или иной модели корреляционной функции основывается на наличии априорной информации о свойствах процесса. Если ориентировочно известен вид корреляционной функции исследуемого процесса, то наиболее целесообразно выбирать конкретный вид модели, желательно с меньшим числом параметров. От числа неизвестных параметров в значительной степени зависит сложность аппаратуры, удобство полученной модели для исследователя [51].

Если кроме эквивалентной ширины спектра мощности процесса ничего неизвестно, то в качестве модели следует применять разложение корреляционной функции в ряд по какой-либо системе ортогональных функций или полиномов [21, 51].

Впервые этот метод предложил Д. Лампард [57]. Математическим обоснованием этого метода является теорема Мерсера, согласно которой симметричная и положительно определенная функция, которой и является функция корреляции, может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд вида:

$$K_a(\tau) = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \psi_k(\tau, \alpha), \quad (5.13)$$

где  $\beta_k$  - коэффициенты Фурье;

$\psi_k(\tau, \alpha)$  - семейство ортогональных функций в интервале  $[0, \infty)$ ;

$\alpha$  - параметр масштаба.

Это семейство характеризуется интегралом:

$$\int_0^{\infty} \psi_k(\tau, \alpha) \psi_n(\tau, \alpha) \mu(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq n; \\ \|\psi_k(\alpha)\|^2, & \text{если } k = n. \end{cases} \quad (5.14)$$

Так как ряд сходится в интервале  $[0, \infty)$ , то коэффициенты разложения  $\beta_k$  в соответствии с [21] определяются выражением:

$$\beta_k = \frac{1}{\|\psi_k(\alpha)\|^2} \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \psi_k(\tau, \alpha) \mu(\tau) d\tau. \quad (5.15)$$

В качестве системы базисных функций применяются ортогональные функции Лагерра, Дирихле, Лежандра, Якоби и т. д. Выбор системы базисных функций зависит, в основном, от возможности представления корреляционной функции минимальным числом членов разложения для типовых моделей, удобством в работе.

Следует подчеркнуть, что на практике приходится ограничиваться конечным числом ряда (5.13)

$$\hat{K}_a(\tau) = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(\tau, \alpha). \quad (5.16)$$

Это приводит к появлению методической погрешности, значение которой зависит как от свойств процесса, так и способа оценки параметров модели. С учетом свойств ортогональных функций определим относительную методическую погрешность аппроксимации в виде

$$\delta = \sqrt{1 - \frac{\sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k(\alpha)\|^2}{\int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau}}. \quad (5.17)$$

Из (5.17) видно, что значение относительной погрешности аппроксимации  $\delta$  зависит от значений  $\{\beta_k\}_{k=0, \dots, m}$ , т.е. вида корреляционной функции (см. выражение 5.15), значения параметра масштаба  $\alpha$  и числа членов разложения ряда (5.16)  $m$ .

Задавшись видом модели корреляционной функции, в первую очередь необходимо найти аналитические выражения коэффициентов разложения  $\{\beta_k\}_{k=0, \dots, m}$ . Как показали исследования при прочих равных условиях численные значения методических погрешностей больше у колебательных моделей КФ [21]. Для решения этой задачи воспользуемся частотным представлением ортогональных функций (см. лабораторную работу 4).

Так, например, НКФ  $\rho_{5,x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ , воспользовавшись преобразованием Эйлера, представим в виде

$$\rho_{5,x}(\tau) = \frac{1}{2} [e^{-(\lambda - j\omega_0)\tau} + e^{-(\lambda + j\omega_0)\tau}], \quad \tau > 0. \quad (5.18)$$

Подставив выражение (5.18) в выражение (5.15), получим для ортогональных функций, у которых  $\mu(\tau) = 1$ ,

$$\beta_{5,k} = \frac{1}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2} \int_0^{\infty} \psi_k(\tau, \alpha) [e^{-(\lambda - j\omega_0)\tau} + e^{-(\lambda + j\omega_0)\tau}] d\tau. \quad (5.19)$$

С учетом выражения (4.1), выражение (5.19) преобразуем к виду

$$\begin{aligned}
\beta_{5,k} &= \frac{I}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2} [W_k(\lambda - j\omega_0) + W_k(\lambda + j\omega_0)] = \\
&= \frac{[\psi_k(0, \alpha)]}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2} \left\{ \frac{I}{1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + \lambda - j\omega_0} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{\lambda - j\omega_0 - 1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2}{1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2 + \lambda - j\omega_0} + \right. \\
&\left. + \frac{I}{1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + \lambda + j\omega_0} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{\lambda + j\omega_0 - 1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2}{1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2 + \lambda + j\omega_0} \right\}. \quad (5.20)
\end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} \varphi_{1,k} &= \frac{\omega_0}{1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + \lambda}, \quad A_{1,k} = \frac{I}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2} \frac{I}{1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + \lambda}, \\
\operatorname{tg} \varphi_{2,k} &= \frac{\omega_0}{\lambda - 1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2}, \quad A_{2,k} = \frac{I}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2} \frac{I}{\lambda - 1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2}, \\
\varphi_{1,k} &= \operatorname{arctg} \frac{\omega_0}{1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + \lambda}, \quad \varphi_{2,k} = \operatorname{arctg} \frac{\omega_0}{\lambda - 1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2}. \quad (5.21)
\end{aligned}$$

Тогда

$$\beta_k = \frac{A_{1,k} [\psi_k(0, \alpha)]}{1 - j \operatorname{tg} \varphi_{1,k}} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{A_{1,s}}{A_{2,s}} \frac{1 - j \operatorname{tg} \varphi_{2,s}}{1 - j \operatorname{tg} \varphi_{1,s}} + \frac{A_{1,k} [\psi_k(0, \alpha)]}{1 + j \operatorname{tg} \varphi_{1,k}} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{A_{1,s}}{A_{2,s}} \frac{1 + j \operatorname{tg} \varphi_{2,s}}{1 + j \operatorname{tg} \varphi_{1,s}}. \quad (5.22)$$

Или

$$\begin{aligned}
\beta_{5,k} &= \frac{A_{1,k} [\psi_k(0, \alpha)] \cos \varphi_{1,k}}{\cos \varphi_{1,k} - j \sin \varphi_{1,k}} \prod_{s=0}^{k-1} B_s \frac{\cos \varphi_{2,s} - j \sin \varphi_{2,s}}{\cos \varphi_{1,s} - j \sin \varphi_{1,s}} + \\
&+ \frac{A_{1,k} [\psi_k(0, \alpha)] \cos \varphi_{1,k}}{\cos \varphi_{1,k} + j \sin \varphi_{1,k}} \prod_{s=0}^{k-1} B_s \frac{\cos \varphi_{2,s} + j \sin \varphi_{2,s}}{\cos \varphi_{1,s} + j \sin \varphi_{1,s}}, \quad (5.23)
\end{aligned}$$

$$\text{где } B_s = \frac{A_{1,s} \cos \varphi_{1,s}}{A_{2,s} \cos \varphi_{2,s}}.$$

Выполнив преобразования, получим

$$\begin{aligned}
\beta_{5,k} &= A_{1,k} [\psi_k(0, \alpha)] \cos \varphi_{1,k} \exp(j\varphi_{1,k}) \prod_{s=0}^{k-1} B_s \exp[j(\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s})] + \\
&+ A_{1,k} [\psi_k(0, \alpha)] \cos \varphi_{1,k} \exp(-j\varphi_{1,k}) \prod_{s=0}^{k-1} B_s \exp[-j(\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s})] = \\
&= A_{1,k} [\psi_k(0, \alpha)] \cos \varphi_{1,k} \prod_{s=0}^{k-1} B_s \left\{ \exp \left[ j \left( \varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s}) \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \exp \left[ -j \left( \varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s}) \right) \right] \right\} = \\
&= 2A_{1,k} [\psi_k(0, \alpha)] \cos \varphi_{1,k} \cos \left( \varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s}) \right) \prod_{s=0}^{k-1} B_s. \quad (5.24)
\end{aligned}$$

Выражения для коэффициентов разложения модели  $\rho_{5,x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$  для различных ортогональных базисов зависят от принятых обозначений, представленных в таблице 5.2.



Принятые обозначения

Таблица 5.2

№	$\psi_k(\tau, \gamma/\alpha)$	$tg\varphi_{1,k}$	$tg\varphi_{2,k}$	$A_{1,k}$	$A_{2,k}$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\omega_0}{\alpha/2 + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\lambda - \alpha/2}$	$\frac{\alpha/2}{\alpha/2 + \lambda}$	$\frac{\alpha/2}{\lambda - \alpha/2}$
2	$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\omega_0}{\alpha(2k+1) + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\lambda - \alpha(2k+1)}$	$\frac{\alpha(2k+1)}{\alpha(2k+1) + \lambda}$	$\frac{\alpha(2k+1)}{\lambda - \alpha(2k+1)}$
3	$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\omega_0}{\alpha(k+1) + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\lambda - \alpha(k+1)}$	$\frac{\alpha(k+1)}{\alpha(k+1) + \lambda}$	$\frac{\alpha(k+1)}{\lambda - \alpha(k+1)}$
4	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\omega_0}{\gamma(4k+1)/2 + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\lambda - \gamma(4k+1)/2}$	$\frac{\gamma(4k+1)/2}{\gamma(4k+1)/2 + \lambda}$	$\frac{\gamma(4k+1)/2}{\lambda - \gamma(4k+1)/2}$
5	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\omega_0}{\gamma(4k+3)/2 + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\lambda - \gamma(4k+3)/2}$	$\frac{\gamma(4k+3)/2}{\gamma(4k+3)/2 + \lambda}$	$\frac{\gamma(4k+3)/2}{\lambda - \gamma(4k+3)/2}$
6	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\omega_0}{\gamma(k+1) + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\lambda - \gamma(k+1)}$	$\frac{\gamma(k+1)}{\gamma(k+1) + \lambda}$	$\frac{\gamma(k+1)}{\lambda - \gamma(k+1)}$
7	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\omega_0}{\gamma(2k+1) + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\lambda - \gamma(2k+1)}$	$\frac{\gamma(2k+1)}{\gamma(2k+1) + \lambda}$	$\frac{\gamma(2k+1)}{\lambda - \gamma(2k+1)}$
8	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\omega_0}{\gamma(2k+3) + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\lambda - \gamma(2k+3)}$	$\frac{\gamma(2k+3)}{\gamma(2k+3) + \lambda}$	$\frac{\gamma(2k+3)}{\lambda - \gamma(2k+3)}$

В таблице 5.3 представлены выражения коэффициентов разложения модели  $\rho_{5,x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ .

Аналитические выражения коэффициентов разложения для 5 модели

Таблица 5.3

№	$\psi_k(\tau, \gamma/\alpha)$	$\beta_{5,k}$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$2A_{1,k} B_k^k \cos \varphi_{1,k} \cos((k+1)\varphi_{1,k} - k\varphi_{2,s})$
2	$D_k(\tau, \alpha)$	$2A_{1,k} \cos \varphi_{1,k} \cos\left(\varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s})\right) \prod_{s=0}^{k-1} B_s$
3	$Leg_k(\tau, \alpha)$ $P_k^{(\alpha,0)}(\tau, \gamma)$	$2A_{1,k} (-1)^k \cos \varphi_{1,k} \cos\left(\varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s})\right) \prod_{s=0}^{k-1} B_s$

Для определения коэффициентов разложения 6 и 7 моделей

$\rho_{6,7,x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$  необходимо определить

$$J = \frac{\lambda}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2 j\omega_0} \int_0^\infty \psi_k(\tau, \alpha) [e^{-(\lambda-j\omega_0)\tau} - e^{-(\lambda+j\omega_0)\tau}] d\tau. \quad (5.25)$$

Тогда

$$\beta_{6,7,k} = \beta_{5,k} \pm J. \quad (5.26)$$

С учетом (5.20), получим

$$J = \frac{\lambda}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2 j\omega_0} [W_k(\lambda - j\omega_0) - W_k(\lambda + j\omega_0)]. \quad (5.27)$$

С учетом принятых обозначений (5.21)

$$\begin{aligned} J &= \frac{A_{1,k}[\psi_k(0,\alpha)]\lambda}{j\omega_0} \cos \varphi_{1,k} \prod_{s=0}^{k-1} B_s \left\{ \exp \left[ j \left( \varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s}) \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \exp \left[ -j \left( \varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s}) \right) \right] \right\} = \\ &= \frac{2A_{1,k}[\psi_k(0,\alpha)]\lambda}{\omega_0} A_{1,k} \cos \varphi_{1,k} \sin \left( \varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s}) \right) \prod_{s=0}^{k-1} B_s. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Подставив выражение (5.28) в выражение (5.25), окончательно получим

$$\begin{aligned} \beta_{6,7,k} &= 2A_{1,k}[\psi_k(0,\alpha)] \cos \varphi_{1,k} \left[ \cos \left( \varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s}) \right) \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \left( \varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s}) \right) \right] \prod_{s=0}^{k-1} B_s. \end{aligned} \quad (5.29)$$

В таблице 5.4 представлены выражения коэффициентов разложения модели

$$\rho_{6,7,x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right).$$

Аналитические выражения коэффициентов разложения для 6 и 7 моделей

Таблица 5.4

№	$\psi_k(\tau, \gamma/\alpha)$	$\beta_{6,7,k}$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$2A_{1,k} B_k^k \cos \varphi_{1,k} \left[ \cos((k+1)\varphi_{1,k} - k\varphi_{2,s}) \pm \right. \\ \left. \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin((k+1)\varphi_{1,k} - k\varphi_{2,s}) \right]$
2	$D_k(\tau, \alpha)$	$2A_{1,k} \cos \varphi_{1,k} \left[ \cos \left( \varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s}) \right) \pm \right. \\ \left. \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \left( \varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s}) \right) \right] \prod_{s=0}^{k-1} B_s$
3	$Leg_k(\tau, \alpha)$ $P_k^{(\alpha,0)}(\tau, \gamma)$	$2A_{1,k} (-1)^k \cos \varphi_{1,k} \left[ \cos \left( \varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s}) \right) \pm \right. \\ \left. \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \left( \varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s}) \right) \right] \prod_{s=0}^{k-1} B_s$

Воспользовавшись предлагаемым подходом, с учетом принятых обозначений (см. таблицу 5.5), аналитические выражения коэффициентов разложения для типовых колебательных моделей корреляционных функций в ортогональных базисах Сонина-Лагерра и Якоби  $(0, \beta)$  представим в таблицах 5.6 и 5.7.

Принятые обозначения

Таблица 5.5

№	$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$tg \phi_{i,k}$	$A_{i,k}$
1	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma),$ $L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$tg \phi_{1,k} = \frac{\omega_0}{\lambda + \gamma / 2};$ $tg \phi_{2,k} = \frac{\omega_0}{\lambda - \gamma / 2}$	$A_{1,k} = \frac{I}{\lambda + \gamma / 2};$ $A_{2,k} = \frac{I}{\lambda - \gamma / 2}$
2	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$tg \phi_{1,k} = \frac{\omega_0}{\gamma(2k+1) + \lambda};$ $tg \phi_{2,k} = \frac{\omega_0}{\gamma(2k+3) + \lambda};$ $tg \phi_{3,k} = \frac{\omega_0}{\gamma(2k+1) - \lambda}$	$A_{1,k} = \frac{2\gamma(k+1)}{\gamma(2k+1) + \lambda};$ $A_{2,k} = \frac{2\gamma(k+1)}{\gamma(2k+3) + \lambda};$ $A_{3,k} = \frac{2\gamma(k+1)}{\gamma(2k+1) - \lambda}$
		$B_s = \frac{A_{1,s} \cos \phi_{1,s}}{A_{3,s} \cos \phi_{3,s}}; C_k = A_{1,k} A_{2,k} \cos \phi_{1,k} \cos \phi_{2,k}$	
3	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$tg \phi_{1,k} = \frac{\omega_0}{\gamma(2k+1) + \lambda};$ $tg \phi_{2,k} = \frac{\omega_0}{\gamma(2k+3) + \lambda};$ $tg \phi_{3,k} = \frac{\omega_0}{\gamma(2k+5) + \lambda};$ $tg \phi_{4,k} = \frac{\omega_0}{\gamma(2k+1) - \lambda}$	$A_{1,k} = \frac{\gamma(k+1)(k+2)}{\gamma(2k+1) + \lambda};$ $A_{2,k} = \frac{\gamma(k+1)(k+2)}{\gamma(2k+3) + \lambda};$ $A_{3,k} = \frac{\gamma}{\gamma(2k+5) + \lambda};$ $A_{4,k} = \frac{\gamma(k+1)(k+2)}{\gamma(2k+1) - \lambda}$
		$B_s = \frac{A_{1,s} \cos \phi_{1,s}}{A_{4,s} \cos \phi_{4,s}}; C_k = A_{1,k} A_{2,k} A_{3,k} \cos \phi_{1,k} \cos \phi_{2,k} \cos \phi_{3,k}$	

Аналитические выражения коэффициентов разложения для 5 модели

Таблица 5.6

№	$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\beta_{5,k}$
1	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\gamma^2(k+1)A_{1,k}^2 B_k^k \cos^2 \phi_{1,k} \cos[k\phi_{2,k} - (k+2)\phi_{1,k}]$
2	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^3(k+1)(k+2)}{2} A_{1,k}^3 B_k^k \cos^3 \phi_{1,k} \cos[k\phi_{2,k} - (k+3)\phi_{1,k}]$
3	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$2 C_k (k+1) \cos\left(\phi_{1,k} + \phi_{2,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\phi_{1,s} + \phi_{3,s})\right) \prod_{s=0}^{k-1} B_s$
4	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$4 C_k (2k+3) \cos\left(\phi_{1,k} + \phi_{2,k} + \phi_{3,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\phi_{1,s} + \phi_{4,s})\right) \prod_{s=0}^{k-1} B_s$

№	$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\beta_{6,7,k}$
1	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\gamma^2(k+1) \cdot A_{1,k}^2 B_k^k \cos^2 \phi_{1,k} [\cos[k\phi_{2,k} - (k+2)\phi_{1,k}] \mp \mp \frac{\lambda}{\omega_0} \sin[k\phi_{2,k} - (k+2)\phi_{1,k}]]$
2	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^3(k+1)(k+2)}{2} \cdot A_{1,k}^3 B_k^k \cos^3 \phi_{1,k} [\cos[k\phi_{2,k} - (k+3)\phi_{1,k}] \mp \mp \frac{\lambda}{\omega_0} \sin[k\phi_{2,k} - (k+3)\phi_{1,k}]]$
3	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$2 C_k(k+1) \left[ \cos\left(\varphi_{1,k} + \varphi_{2,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} + \varphi_{3,s})\right) \pm \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin\left(\varphi_{1,k} + \varphi_{2,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} + \varphi_{3,s})\right) \right] \prod_{s=0}^{k-1} B_s$
4	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$4 C_k(2k+3) \left[ \cos\left(\varphi_{1,k} + \varphi_{2,k} + \varphi_{3,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} + \varphi_{4,s})\right) \pm \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin\left(\varphi_{1,k} + \varphi_{2,k} + \varphi_{3,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} + \varphi_{4,s})\right) \right] \prod_{s=0}^{k-1} B_s$

Коэффициенты разложения  $\beta_k$  могут быть представлены и в алгебраической форме. В качестве примера в таблице 5.8 представлены коэффициенты разложения в ортогональном базисе Лежандра для типовых моделей корреляционных функций.

Таблица 5.8

№	$\rho_x(\tau)$	$\beta_k$
1	$e^{-\lambda \tau }$	$2\alpha(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{1}{\lambda + \alpha(2s+1)}$
2	$e^{-\lambda \tau } (1 + \lambda \tau )$	$2\alpha(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{2\lambda + \alpha(2s+1)}{[\lambda + \alpha(2s+1)]^2}$
3	$e^{-\lambda \tau } (1 - \lambda \tau )$	$2\alpha(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{\alpha(2s+1)}{[\lambda + \alpha(2s+1)]^2}$
4	$e^{-\lambda \tau } \left(1 + \lambda \tau  + \frac{\lambda^2 \tau^2}{3}\right)$	$2\alpha(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{8\lambda^2 + 9\alpha\lambda(2s+1) + \alpha^2(2s+1)^2}{3[\lambda + \alpha(2s+1)]^3}$
5	$e^{-\lambda \tau } \cos \omega_0 \tau$	$2\alpha(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{\lambda + \alpha(2s+1)}{[\lambda + \alpha(2s+1)]^2 + \omega_0^2}$
6	$e^{-\lambda \tau } \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau \right)$	$2\alpha(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{2\lambda + \alpha(2s+1)}{[\lambda + \alpha(2s+1)]^2 + \omega_0^2}$
7	$e^{-\lambda \tau } \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau \right)$	$2\alpha(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{\alpha(2s+1)}{[\lambda + \alpha(2s+1)]^2 + \omega_0^2}$

Алгебраические выражения для коэффициентов разложения типовых моделей корреляционных и ортогональных функций приведены в Приложении 10.

Воспользовавшись выражениями для оценки коэффициентов разложения, определим погрешности аппроксимации в соответствии с (5.17). На рисунке 5.3 представлены результаты оценки погрешности аппроксимации 5, 6 моделей с параметрами  $\lambda = 1$ ,  $\omega_0$ ,  $\alpha = 0,1961$  ортогональными функциями Лежандра.

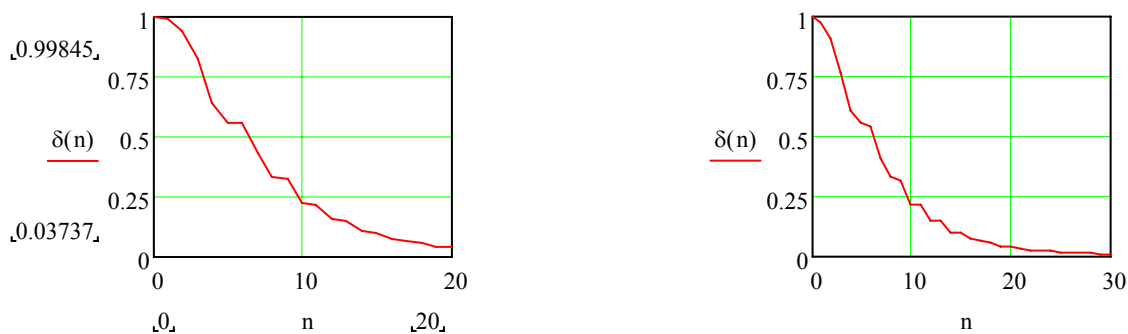


Рисунок 5.3 - Погрешность аппроксимации ортогональными функциями Лежандра

Из анализа рис. 5.3 видно, что при  $n \rightarrow \infty \delta(n) \rightarrow 0$ , т.е. выполняется равенство Парсеваля (см. лабораторную работу 1).

### 5.1.3. Определение параметра масштаба ортогональных функций

Как показали исследования значение погрешности аппроксимации, определяемой выражением (5.17), зависит от параметра масштаба [21].

В таблице 5.9 приведены результаты определения погрешности аппроксимации нормированной корреляционной функции вида  $\rho_x(\tau, \lambda_s, \omega_{0,s}) = e^{-\lambda_s |\tau|} \cos(\omega_{0,s} \tau)$  при разных значениях  $m$ , в зависимости от отношения параметра ортогональных функций к показателю затухания исследуемых корреляционных функций –  $\chi_s = \frac{\gamma}{\lambda_s}$  для ортогональных базисов Якоби  $(\alpha, 0)$ .

Из полученных результатов видно, что при выбранной модели корреляционной функции,  $\mu = const$ ,  $m = const$ , погрешность существенным образом зависит от  $\chi$ , т.е.  $\gamma$ . Кроме того, наблюдаются локальные экстремумы погрешности, количество которых зависит от  $m$  [21]. Следует отметить, что исследователя интересует значение параметра  $\alpha$ , обеспечивающего минимум квадратической погрешности аппроксимации, т.е. определение глобального минимума.

Отметим, что точное решение задачи определения параметра масштаба в силу свойств ортогональных функций возможно лишь для ортогональных функций Лагерра [22, 23].

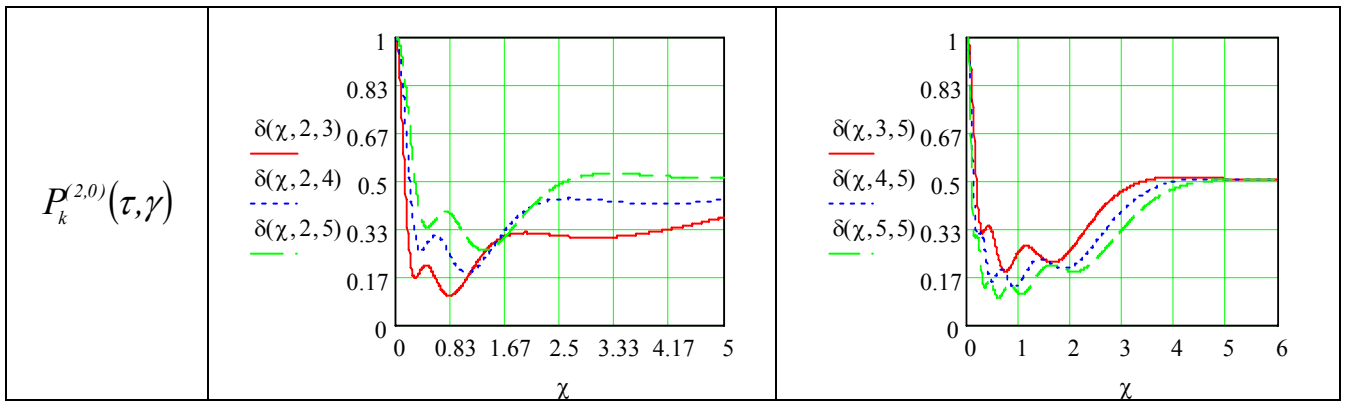
Для этого необходимо решить уравнение относительно  $\alpha$

$$\beta_{m+1} = 0.$$

Относительная методическая погрешность аппроксимации  
 НКФ  $\delta(\chi/m, \mu)$  в ортогональном базисе Якоби  $(\alpha, 0)$

Таблица 5.9

$\psi_k(\tau, \gamma/\alpha)$	График методической погрешности ( $\mu_5 = 3, 4, 5; m = 2$ )	График методической погрешности ( $\mu_5 = 5; m = 3, 4, 5$ )
$P_k^{(-1/2, 0)}(\tau, \gamma)$		
$P_k^{(1/2, 0)}(\tau, \gamma)$		
$P_k^{(1, 0)}(\tau, \gamma)$		
$P_k^{(0, 0)}(\tau, \gamma)$		



Рассмотрим один из эмпирических способов определения параметра масштаба ортогональных функций, у которых  $\mu(\tau) = 1$  [21]. Он основан на применении соотношения неопределенности [51]

$$\Delta\omega_{\vartheta,k} \tau_{k,u}^{(2)} = \frac{\pi}{2}, \quad (5.30)$$

где  $\Delta\omega_{\vartheta,k} = \frac{\int_0^{\infty} |W_k^*(j\omega)|^2 d\omega}{|W_k^*(j\omega)|_{max}^2}$  - эквивалентная частота пропускания ортогонального фильтра  $k$ -ого порядка;

$W_k^*(j\omega) = \int_0^{\infty} \phi_k(\tau, \alpha) e^{-j\omega\tau} d\tau$  - частотная характеристика ортогонального фильтра  $k$ -ого порядка;

$\phi_k(\tau, \alpha) = \frac{1}{\|\psi_k\|^2} \psi_k(\tau, \alpha)$  - импульсная переходная характеристика ортогонального фильтра  $k$ -ого порядка;

$\tau_{k,u}^{(2)} = \frac{\int_0^{\infty} \phi_k(\tau, \alpha) d\tau}{\phi_k(\tau, \alpha)_{max}} = W_k^*(0) / \phi_k(\tau, \alpha)_{max}$  - длительность импульсной переходной характеристики ортогонального фильтра  $k$ -ого порядка;

Отсюда

$$\Delta\omega_{\vartheta,k} = \frac{\pi}{2\tau_{k,u}^{(2)}}. \quad (5.31)$$

Заметим, что квадраты модуля частотных характеристик рассматриваемых ортогональных фильтров соответствуют квадратам модуля апериодического звена первого порядка (см. таблицу 4.2), импульсная характеристика которого определяется выражением

$$h_k(\tau) = \frac{1}{\tau_{k,u}^{(2)}} \exp[-\tau_{k,u}^{(2)}\tau]. \quad (5.32)$$

Следовательно, можно записать, что для погрешности восстановления импульсной переходной характеристики при линейной интерполяции 2% [21]

$$\tau_{k,u}^{(2)} = \frac{0,4}{\Delta\tau_0}, \quad (5.33)$$

где  $\Delta\tau_0 = \Delta\tau$  – интервал дискретизации случайного процесса.

Подставив выражение (5.33) в (5.31), получим

$$\Delta\omega_{\omega,k} = \frac{0,2\pi}{\Delta\tau_0}. \quad (5.34)$$

Отсюда можно определить численное значение параметра масштаба для любого ортогонального базиса при  $m$  членов разложения ряда (5.16).

В таблице 5.10 приведены основные соотношения для определения  $\alpha/\gamma$  для различных ортогональных базисов.

Определения параметра масштаба ортогональных функций  
Лагерра, Лежандра, Дирихле

Таблица 5.10

$\psi_k(\tau, \gamma/\alpha)$	$ W_m(j\omega) ^2$	$\Delta\omega_{\omega,m}$	$\tau_{m,u}^{(2)}$	$\alpha$
$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\alpha^2}{\omega^2 + \alpha^2/4}$	$\frac{\pi\alpha}{4}$	$\frac{2}{\alpha}$	$\frac{0,8}{\Delta\tau_0}$
$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{4(2m+1)^2\alpha^2}{(2m+1)^2\alpha^2 + \omega^2}$	$\frac{\pi(2m+1)\alpha}{2}$	$\frac{1}{(2m+1)\alpha}$	$\frac{0,4}{(2m+1)\Delta\tau_0}$
$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{4(m+1)^2\alpha^2}{(m+1)^2\alpha^2 + \omega^2}$	$\frac{\pi(m+1)\alpha}{2}$	$\frac{1}{(m+1)\alpha}$	$\frac{0,4}{(m+1)\Delta\tau_0}$

В таблице 5.11 приведены основные соотношения для определения параметра масштаба  $\gamma$  для ортогональных функций Якоби  $(\alpha, 0)$  и Сонина-Лагерра.

Определения параметра масштаба ортогональных функций  
Якоби  $(\alpha, 0)$  и Сонина-Лагерра

Таблица 5.11

$\psi_k(\tau, \gamma/\alpha)$	$ W_m(j\omega) ^2$	$\Delta\omega_{\omega,m}$	$\tau_{m,u}^{(2)}$	$\gamma$
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^2(4m+1)^2}{\left(\frac{4m+1}{2}\right)^2\gamma^2 + \omega^2}$	$\frac{\pi(4m+1)\gamma}{4}$	$\frac{2}{(4m+1)\gamma}$	$\frac{0,8}{(4m+1)\Delta\tau_0}$
$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^2(4m+3)^2}{\left(\frac{4m+3}{2}\right)^2\gamma^2 + \omega^2}$	$\frac{\pi(4m+3)\gamma}{4}$	$\frac{2}{(4m+3)\gamma}$	$\frac{0,8}{(4m+3)\Delta\tau_0}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4\gamma^2(m+1)^2}{(m+1)^2\gamma^2 + \omega^2}$	$\frac{\pi(m+1)\gamma}{2}$	$\frac{1}{(m+1)\gamma}$	$\frac{0,4}{(m+1)\Delta\tau_0}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4\gamma^2(2m+1)^2}{(2m+1)^2\gamma^2 + \omega^2}$	$\frac{\pi(2m+1)\gamma}{2}$	$\frac{1}{(2m+1)\gamma}$	$\frac{0,4}{(2m+1)\Delta\tau_0}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4\gamma^2(2m+3)^2}{(2m+3)^2\gamma^2 + \omega^2}$	$\frac{\pi(2m+3)\gamma}{2}$	$\frac{1}{(2m+3)\gamma}$	$\frac{0,4}{(2m+3)\Delta\tau_0}$



$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^4 (m+1)^2}{(\gamma^2 / 4 + \omega^2)^2}$	$\frac{\pi\gamma}{8}$	$\frac{4}{\gamma}$	$\frac{1,6}{\Delta\tau_0}$
$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^6 (m+1)^2 (m+2)^2}{4(\gamma^2 / 4 + \omega^2)^3}$	$\frac{3\pi\gamma}{32}$	$\frac{16}{3\gamma}$	$\frac{6,4}{3\Delta\tau_0}$

В таблице 5.12 приведены основные соотношения для определения параметра масштаба  $\gamma$  для ортогональных функций Якоби  $(0, \beta)$ .

Определения параметра масштаба ортогональных функций Якоби  $(0, \beta)$

Таблица 5.12

$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$ W_m(j\omega) ^2$	$\frac{64(m+1)^6 \cdot \gamma^4}{[(2m+1)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2][(2m+3)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2]}$
	$\Delta\omega_{\vartheta, m}$	$\frac{\pi\gamma(2m+1)(2m+3)}{8(m+1)}$
	$\tau_{m,u}^{(2)}$	$\frac{4(m+1)}{\gamma(2m+1)(2m+3)}$
	$\gamma$	$\frac{1,6(m+1)}{(2m+1)(2m+3)\Delta\tau_0}$
$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$ W_m(j\omega) ^2$	$\frac{16(2m+3)^2(m+1)^4(m+2)^4 \cdot \gamma^6}{[(2m+1)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2][(2m+3)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2][(2m+5)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2]}$
	$\Delta\omega_{\vartheta, m}$	$\frac{3\pi\gamma(2m+1)(2m+3)(2m+5)}{64(m+1)(m+2)}$
	$\tau_{m,u}^{(2)}$	$\frac{32(m+1)(m+2)}{3\gamma(2m+1)(2m+3)(2m+5)}$
	$\gamma$	$\frac{12,8(m+1)(m+2)}{3\Delta\tau_0(2m+1)(2m+3)(2m+5)}$

Так как для колебательных моделей КФ с погрешностью восстановления 2%

$$\Delta\tau_0 = \frac{0,4}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}, \quad (5.35)$$

выражения для определения параметра масштаба для различных ортогональных функций примут вид, представленный в таблице 5.13.

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\alpha / \gamma$
$L_k(\tau, \alpha)$	$2\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}$
$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$4\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}$
$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{16\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{3}$
$Leg_k(\tau, \alpha)$ $P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{(2m+1)}$
$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{(m+1)}$
$P_k^{-  2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{(4m+1)}$
$P_k^{  2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{(4m+3)}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{(m+1)}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{(2m+3)}$
$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4(m+1)\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{(2m+1)(2m+3)}$
$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{32(m+1)(m+2)\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{3(2m+1)(2m+3)(2m+5)}$

В работе [22] показано, что для ортогональных функций Лагерра параметр масштаба  $\alpha$  может быть определен в результате решения уравнения

$$\beta_0 = 1. \tag{5.36}$$

Рассмотрим это же уравнение для ортогональных функций, у которых  $\mu(\tau) = 1$ , в общем виде

$$\frac{1}{\|\psi_k(\alpha)\|^2} \int_0^\infty \rho_x(\tau) \psi_k^*(\tau, \alpha) d\tau - 1 = 0, \tag{5.37}$$

где  $\psi_k^*(\tau, \alpha) = \exp(-\tau / 2\|\psi_k(\alpha)\|^2)$ .

Как видно из выражения (5.37), численное значение параметра масштаба зависит от вида корреляционной функции. Так для  $\rho_{x_s}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$  это уравнение приведем к виду:

$$\frac{I}{\|\psi_k(\alpha)\|^2} \int_0^\infty \cos \omega_0 \tau \exp\left[-\left(I/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + \lambda\right)\tau\right] d\tau - I = 0. \quad (5.38)$$

Разрешив уравнение относительно  $I/\|\psi_k(\alpha)\|^2$ , получим:

$$I/\|\psi_k(\alpha)\|^2 = 2\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}. \quad (5.39)$$

Результаты определения параметра масштаба для различных ортогональных функций представлены в таблице 5.14.

Параметры масштаба ортогональных функций для 5 модели

Таблица 5.14

№	$\{\psi_k(\tau, \alpha / \gamma)\}$	$\alpha_0(\gamma_0)$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$2\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}$
2	$D_k(\tau, \alpha), P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2} / (k+1)$
3	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$2\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2} / (4k+1)$
4	$Leg_k(\tau, \alpha), P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2} / (2k+1)$
5	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$2\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2} / (4k+3)$
6	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2} / (2k+3)$

Решив уравнение (5.37) для корреляционных функций

$$\rho_{x,6,7}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right), \text{ получим:}$$

$$I/\|\psi_k(\alpha)\|^2 = 2\left(\sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda\right). \quad (5.40)$$

Результаты определения параметра масштаба для различных ортогональных функций представлены в таблице 5.15.

Параметры масштаба ортогональных функций для 6,7 моделей

Таблица 5.15

№	$\{\psi_k(\tau, \alpha / \gamma)\}$	$\alpha(\gamma)$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$2\left(\sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda\right)$
2	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$2\left(\sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda\right) / (4m+1)$
3	$D_k(\tau, \alpha), P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\left(\sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda\right) / (m+1)$
4	$Leg_k(\tau, \alpha), P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\left(\sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda\right) / (2m+1)$
5	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$2\left(\sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda\right) / (4m+3)$
6	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\left(\sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda\right) / (2m+3)$

Для ортогональных функций Сонина-Лагерра одно из возможных решений, обеспечивающее допустимую погрешность аппроксимации и лучшую сходимость с наименьшими вычислительными затратами, связано с введением ограничения (5.36) [21].

Решим уравнение

$$\frac{1}{\|L_0^{(\alpha)}\|^2} \int_0^\infty L_0^{(\alpha)}(\tau, \gamma) e^{-\lambda \tau} \left( \cos \omega_0 \tau \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right) \cdot \tau^\alpha d\tau = 1 \quad (5.41)$$

для моделей  $\rho_{x,6,7}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$ .

Проведя ряд преобразований, выражение (5.41) представим в виде:

$$\frac{\alpha!}{2\|L_0^{(\alpha)}\|^2} \left[ K1 \pm \frac{\lambda}{\omega_0} K2 \right] = 1, \quad (5.42)$$

где  $K1 = \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{2} + \lambda + j\omega_0\right)^{\alpha+1}} + \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{2} + \lambda - j\omega_0\right)^{\alpha+1}}$ ;

$$K2 = \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{2} + \lambda + j\omega_0\right)^{\alpha+1}} - \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{2} + \lambda - j\omega_0\right)^{\alpha+1}}.$$

Введем некоторые упрощения, позволяющие представить уравнение (5.42) в форме, удобной для дальнейшего преобразования и применения:

1. с увеличением параметра  $\alpha$   $K2$  принимает ничтожно малые значения, которыми можно пренебречь;

2. наиболее простой вид уравнение принимает при значении  $\alpha = 0$ .

Тогда с учетом принятых упрощений получим уравнение

$$\frac{\gamma}{2} \left[ \frac{\frac{\gamma}{2} + \lambda}{\left(\frac{\gamma}{2} + \lambda\right)^2 + \omega_0^2} \right] = 1. \quad (5.43)$$

Проведя ряд преобразований, и решив получившееся квадратное уравнение с учетом того, что параметр масштаба  $\gamma > 0$ , получим

$$\gamma = 2\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}. \quad (5.44)$$

Следует отметить, параметр масштаба  $\gamma$ , определенный по алгоритму (5.36), находится вблизи оптимального значения  $\gamma_{opt}$ , и обеспечивает погрешности аппроксимации, близкие к минимальным погрешностям. На рис. 5.4 построены двумерные зависимости относительной погрешности аппроксимации при разных значениях  $m$  и рассматриваемых  $\alpha$  от параметра масштаба, где в качестве модели КФ взята модель

$\rho_{x,6}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$  с параметрами  $\lambda = 1$  и  $\omega_0 = 5$ .

На рис. 5.5 представлены проекции двумерных зависимостей (см. рис. 5.4), представляющий относительную погрешность аппроксимации на плоскость  $m = 5$  при заданных значениях  $\alpha$  в одной системе координат. Заметим, что прямая линия на рисунке символизирует найденное решение (5.44).

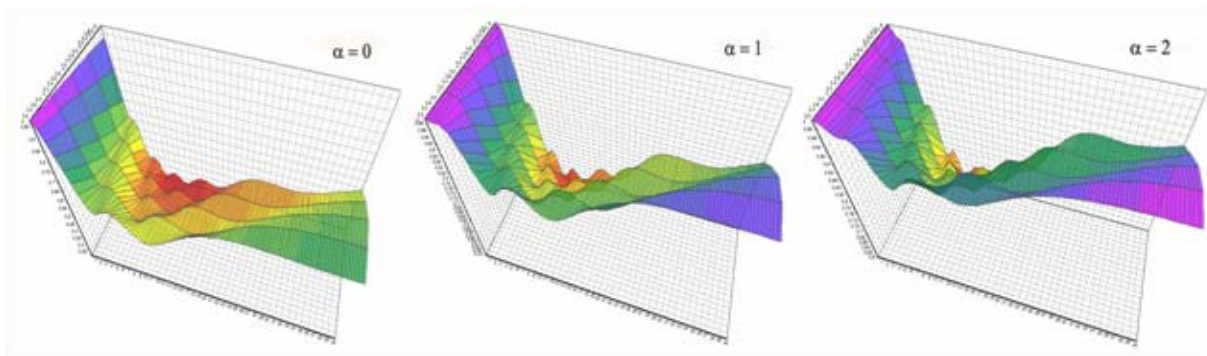


Рисунок 5.4 - Двумерные зависимости относительной погрешности аппроксимации от параметра масштаба  $\gamma \in (0, 40]$  и числа членов  $m \in [2, 6]$  для  $\alpha = 0, 1, 2$

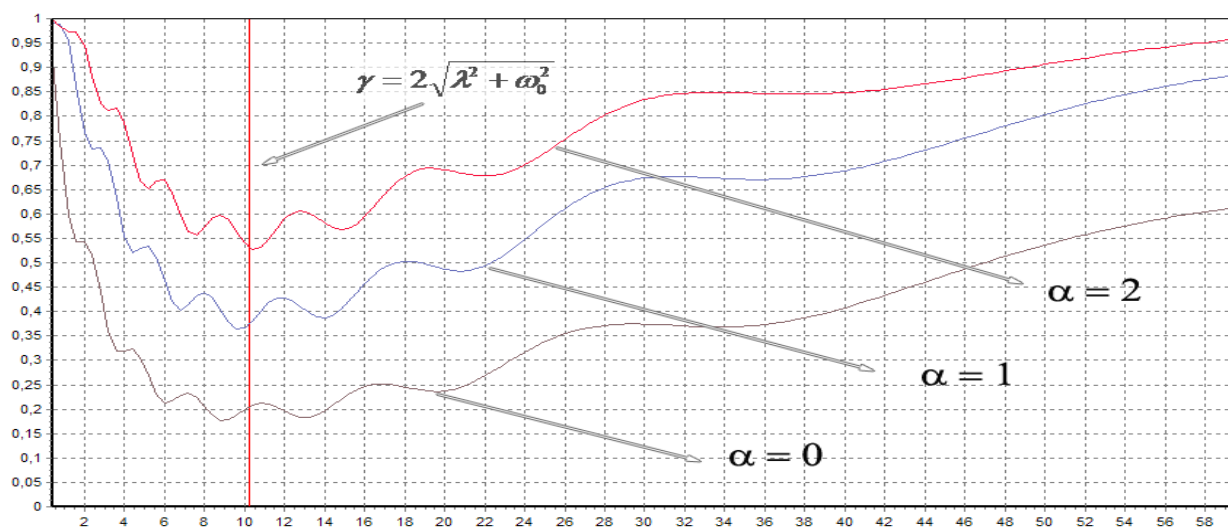


Рисунок 5.5. - Зависимости относительной погрешности аппроксимации от параметра масштаба  $\gamma \in (0, 40]$  при  $m = 5$  для  $\alpha = 0, 1, 2$

Из рис. 5.5 видно, что значение  $\gamma$ , полученное в результате решения уравнения (5.41), при всех исследуемых значениях параметра  $\alpha$  располагается вблизи глобального оптимума, и с увеличением данного параметра решение (5.44) становится более близким, что объясняется правильностью введенных выше упрощений.

Аналогичные результаты можно получить и для ортогональных функций Якоби  $(0, \beta)$ , Чебышева 1 (аналогично Якоби  $(-0,5, 0)$ ), Чебышева 2 (аналогично Якоби  $(0,5, 0)$ ), выполнив преобразования (5.41) - (5.44) [47].

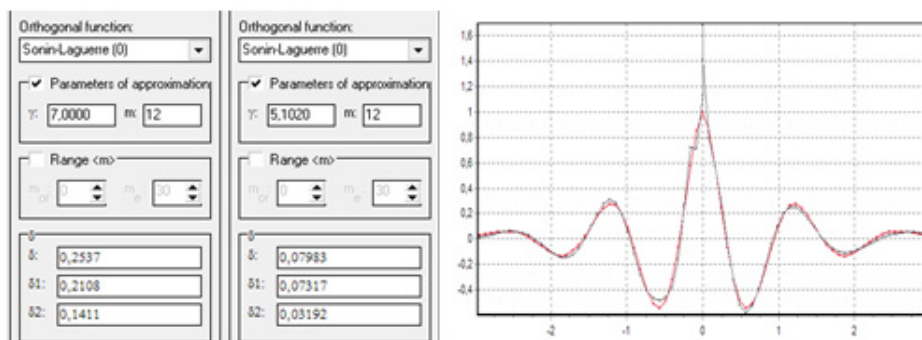


Рисунок 5.6 - Аппроксимация КФ ортогональными функциями Лагерра

Ниже для примера на рис. 5.6 приведены результаты аппроксимации КФ 5 модели при произвольном выборе численного значения  $\alpha = 7,000$ ,  $m = 12$  (левая ветвь).

Полученные результаты можно обобщить на аппроксимацию взаимных корреляционных функций ортогональными функциями. При этом необходимо аппроксимировать как правую, так и левую ветви взаимной корреляционной функции, т. е. необходимо искать модель в виде:

$$K_{xy}(\tau) = A_{max} \left[ \sum_{k=0}^{m1} \beta_{k,n} I(\tau) \psi_k(\tau, \alpha_1) + \sum_k^{m2} \beta_{k,n} I(-\tau) \psi_k(-\tau, \alpha_2) \right], \quad (5.45)$$

где

$$I(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0; \\ \frac{1}{2}, & \tau = 0; \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}; \quad \text{и} \quad I(-\tau) = \begin{cases} 0, & \tau > 0; \\ \frac{1}{2}, & \tau = 0; \\ 1, & \tau < 0, \end{cases} \quad (5.46)$$

$A_{max} = \sigma_x \sigma_y$  - наибольшее значение ВКФ;

$$\beta_{k,n} = \alpha_n \int_0^{\infty} \rho_{xy}(\tau) \psi_n(\tau, \alpha_n) d\tau; \quad (5.47)$$

$$\beta_{k,l} = \alpha_l \int_0^{\infty} \rho_{yx}(\tau) \psi_n(\tau, \alpha_l) d\tau. \quad (5.48)$$

Исследования показали, что это будет справедливо, если максимум взаимной корреляционной функции будет находиться в «нуле». В противном случае в нулевой точке будет наблюдаться выброс (см. рис. 5.7).

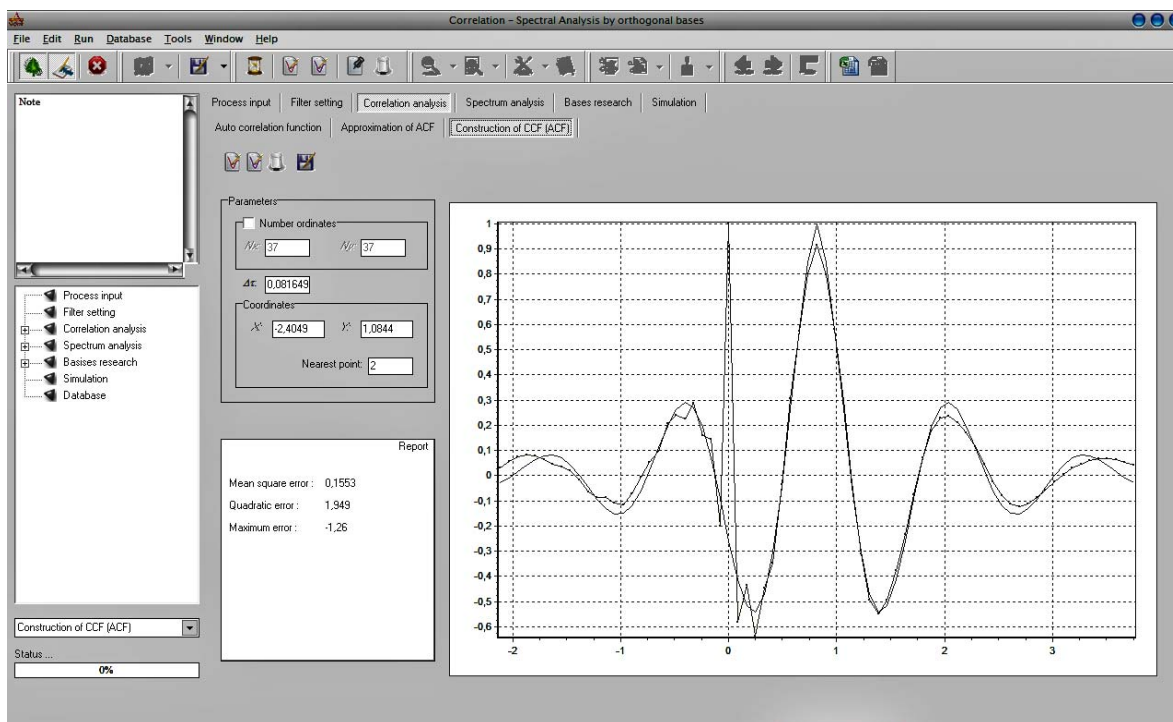


Рисунок 5.7 - Результаты аппроксимации корреляционной функции ортогональными функциями Лагерра

Из анализа результатов видно, что даже при аппроксимации простейших моделей взаимных корреляционных функций ортогональными функциями, например Лагерра, для обеспечения допустимых погрешностей необходимо определять большое

число членов разложения ряда (в рассматриваемом примере  $m = 40$ ). Кроме того, после аппроксимации необходима нормировка, так как значение модели корреляционной функции в нуле не равно 1. Эти обстоятельства без модификации модели затрудняют её применение.

Для устранения этих недостатков необходимо, в первую очередь, определить  $\tau_m$  - значение аргумента, при котором  $K_{axy}(\tau)$  достигает своего максимального значения, и искать модель взаимной корреляционной функции в виде:

$$K_{axy}(\tau) = A_{max} \left[ \sum_{k=0}^{m1} \beta_{k,n} I(\tau - \tau_m) \psi_k(\tau - \tau_m, \alpha_1) + \sum_k^{m2} \beta_{k,l} I(\tau_m - \tau) \psi_k(\tau_m - \tau, \alpha_2) \right], \quad (5.46)$$

$$\text{где } \beta_{k,n} = \alpha_n \int_0^{\infty} \rho_{xy}(\tau + \tau_m) \psi_n(\tau, \alpha_n) d\tau; \quad (5.47)$$

$$\beta_{k,l} = \alpha_l \int_0^{\infty} \rho_{xy}(\tau_m - \tau) \psi_n(\tau_m, \alpha_l) d\tau. \quad (5.48)$$

## 5.2. Задание на самостоятельную работу

1. Для заданного ортогонального базиса, вида корреляционной функции и показателя колебательности  $\mu$  определить коэффициенты разложения  $\{\beta_k\}_{k=0, \dots, m}$ . Построить графическую зависимость  $\{\beta_k\}_{k=0, \dots, m}$ .

2. Построить зависимость  $\delta^{(1)}(m/\chi, \mu) = \frac{\Delta(m/\chi, \mu)}{\sqrt{\int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau}}$ . Значение параметра  $\chi$  выбрать произвольно,  $\mu = 0 \div 5$ . Убедиться в справедливости равенства Парсевяля (см. лаб. работу 1).

3. Построить зависимость  $\delta^{(2)}(\chi/m, \mu)$ ,  $m = 2 \div 6$ ,  $\mu = 0 \div 5$  (Результаты представить аналогично результатам таблицы 5.9). Определить количество локальных минимумов  $\delta(\chi/m, \mu)$ , их численные значения  $\bar{\chi}_{opt}$  и соответствующие им значения погрешностей.

4. Построить зависимость  $\delta_{min}^{(3)}(\mu/m, \chi_{opt})$  и  $\delta_{min}^{(1)}(m/\mu, \chi_{opt})$ .

5. Сравнить результаты оценки  $\delta_1^{(3)}(\mu/m, \chi_1)$ ,  $\delta_2^{(3)}(\mu/m, \chi_2)$ ,  $\delta_1^{(1)}(m/\mu, \chi_1)$ ,  $\delta_2^{(1)}(m/\mu, \chi_2)$  с соответствующими минимальными оценками погрешности. Значение параметра  $\chi_1$  определяется по таблице 5.10-5.13, а  $\chi_2$  - по таблицам 5.13-5.14.

6. Построить модели корреляционной функции, соответствующие выражению 5.16, для  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 5$ ,  $\chi_1, \chi_2, \chi_{opt}$ ,  $m = 5, 10$ .

7. Оформить отчет.

## 5.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.

4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
  5. Ортогональная модель корреляционной функции в заданном ортогональном базисе.
  6. Аналитическое выражение для оценки коэффициентов разложения  $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$ .
  7. Аналитические выражения для оценки  $\chi_1$  и  $\chi_2$ .
  8. Графические зависимости  $\delta^{(1)}(m/\chi, \mu)$  (пункт 2).
  9. Графические зависимости  $\delta^{(2)}(\chi/m, \mu)$  (пункт 3).
  10. Графические зависимости  $\delta_{min}^{(3)}(\mu/m, \chi_{opt})$  и  $\delta_{min}^{(1)}(m/\mu, \chi_{opt})$  (пункт 4).
  11. Графические зависимости  $\delta_1^{(3)}(\mu/m, \chi_1)$ ,  $\delta_2^{(3)}(\mu/m, \chi_2)$ ,  $\delta_1^{(1)}(m/\mu, \chi_1)$ ,  $\delta_2^{(1)}(m/\mu, \chi_2)$  (пункт 5).
  12. Графики моделей корреляционной функции (пункт 6).
  13. Выводы.
- Пример выполнения лабораторной работы 5 приведен в Приложении 11.

#### 5.4. Контрольные вопросы

1. Какие параметры входят в ортогональную модель корреляционной функции?
2. Как параметры ортогональной модели влияют на вид оцениваемой корреляционной функции?
3. Как количество локальных экстремумов погрешности аппроксимации связаны с  $m$  и  $\mu$ ?
4. Какое условие положено в основу приближенного определения параметра масштаба?
5. Каким образом изменится длительность ортогональной функции при увеличении параметра масштаба?
6. Как изменится численное значение параметра масштаба при увеличении числа членов разложения ряда?
7. Как изменится численное значение параметра масштаба при увеличении показателя колебательности корреляционной функции?



## 6. АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ С УЧЕТОМ УСЛОВИЯ НОРМИРОВКИ

**Цель работы:** изучение метода и приобретение практических навыков при аппроксимации корреляционных функций случайных процессов ортогональными функциями с учетом условия нормировки.

### 6.1. Теоретические основы лабораторной работы

Одной из отрицательных черт аппроксимации корреляционной функции ортогональными функциями является то, что её основное свойство

$$\hat{K}_a(\theta) = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(\theta, \alpha) \neq \sigma_x^2 \quad (6.1)$$

при произвольной величине  $\alpha$  не выполняется при конечном  $m$  [21] (см. рис.6.1), т.е. не выполняется условие нормировки.

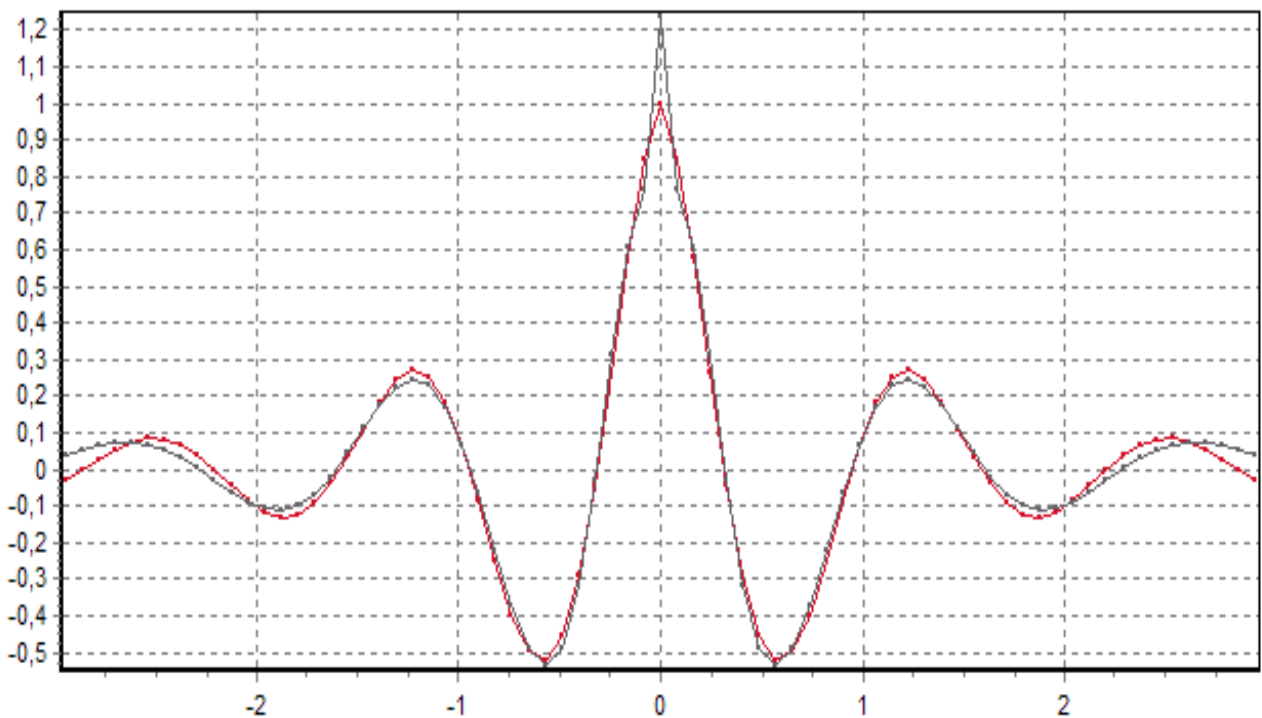


Рисунок 6.1 - Аппроксимация КФ 5 модели с  $\mu = 5$   
ортогональными функциями Лагерра -  $m = 15$ ,  $\alpha = 4,899$

Для обеспечения условия (6.1) аналитическое выражение  $K_x(\tau)$  можно искать в виде:

$$\hat{K}_a(\tau) = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^m \nu_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha)$$

где 
$$v_k = \frac{\beta_k}{\sum_{k=0}^m \beta_k}. \quad (6.2)$$

Легко проверить, что в этом случае  $\hat{\rho}_a(0) = \sum_{k=0}^m v_k \psi_k(0, \alpha) = 1$ . Однако, коэффициенты разложения  $v_k$ , определенные по формуле (6.2), не обеспечивают минимума квадратической погрешности аппроксимации.

Таким образом, общим недостатком известных способов определения коэффициентов разложения является то, что они либо нарушают основное свойство корреляционных функций, либо не обеспечивают минимума квадратической погрешности аппроксимации.

Поставим задачу определить коэффициенты разложения корреляционной функции  $b_k$  для ортогональных функций, у которых  $\mu(\tau) = 1$ ,

$$\hat{\rho}_a(\tau) = \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha) \quad (6.3)$$

так, чтобы квадратическая погрешность аппроксимации была минимальной при дополнительном условии

$$\hat{\rho}_a(0) = \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(0, \alpha) = 1. \quad (6.4)$$

Т.е. для этого необходимо минимизировать  $\Delta_l$  по  $b_k$  [21, 22]:

$$\Delta_l = \int_0^\infty \left[ \rho_x(\tau) - \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau + \lambda \cdot \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(0, \alpha) = \min$$

Найдём частные производные  $\frac{\partial \Delta_l}{\partial b_n}$  и приравняем их нулю:

$$\frac{\partial \Delta_l}{\partial b_n} = -2 \int_0^\infty \left[ \rho_x(\tau) - \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(\tau, \alpha) \right] \psi_n(\tau, \alpha) d\tau + \lambda \psi_n(0, \alpha) = 0. \quad (6.5)$$

Выполнив промежуточные преобразования, определим

$$-2 \beta_n \|\psi_n\|^2 + 2 b_n \|\psi_n\|^2 + \lambda \psi_n(0, \alpha) = 0. \quad (6.6)$$

Отсюда

$$b_n = \beta_n - \frac{\lambda \cdot \psi_n(0, \alpha)}{2 \cdot \|\psi_n\|^2}. \quad (6.7)$$

Подставляя найденное значение  $b_n$  в выражение (6.4), получим:

$$\sum_{k=0}^m \left[ \beta_k - \frac{\lambda \psi_k(0, \alpha)}{2 \|\psi_n\|^2} \right] \cdot \psi_k(0, \alpha) = 1. \quad (6.8)$$

Тогда

$$\frac{\lambda}{2} = - \frac{\left( 1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(0, \alpha) \right)}{\sum_{k=0}^m \frac{\psi_k^2(0, \alpha)}{\|\psi_n\|^2}} \quad (6.9)$$

Отметим, что для рассматриваемых ортогональных базисов  $\psi_k^2(0, \alpha) = 1$ .

Подставив  $\lambda/2$  в выражение для оценки коэффициента разложения  $b_n$ , получим:

$$b_n = \beta_n + \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(0, \alpha)\right) \cdot \psi_n(0, \alpha)}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{\|\psi_k\|^2}} = \beta_n + C_n. \quad (6.10)$$

Выражения для  $C_n$  для различных ортогональных базисов представлены в таблице 6.1.

Значения коэффициентов  $C_n$  при ограничениях на модель корреляционной функции  $\mu(\tau) = 1$

Таблица 6.1

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$C_n$
$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)}{(m+1)}$
$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot (-1)^k\right)}{(m+1)^2} \cdot (-1)^n \cdot (2n+1)$
$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{2(n+1) \left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)}{(m+1)(m+2)}$
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(-1)^n (4n+1) \left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]}{(m+1)(2m+1)}$
$P_k^{1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(-1)^n (4n+3) \left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]}{(m+1)(2m+3)}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(-1)^n (2n+1) \left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]}{(m+1)^2}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(-1)^n 2(n+1) \left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]}{(m+1)(m+2)}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(-1)^n (2n+3) \left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]}{(m+1)(m+3)}$

Заметим, что при произвольном весе ортогональной функции  $\mu(\tau)$  необходимо минимизировать  $\Delta_l^{(1)}$  по  $b_k$ :

$$\Delta_l^{(1)} = \int_0^\infty \left[ \rho_x(\tau) - \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha) \right]^2 \mu(\tau) d\tau + \lambda \cdot \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(0, \alpha) = \min.$$

Выполнив преобразования, аналогичные (6.5) – (6.10), получим аналитические выражения для коэффициентов  $C_n$  (см. таблицу 6.2).

Значения коэффициентов  $C_n$  при ограничениях на модель корреляционной функции  $\mu(\tau) \neq 1$

Таблица 6.2

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$C_n$
$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2 \left( 1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \right)}{(m+1)(m+2)} (n+1)$
$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{3 \left( 1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \right)}{(m+1)(m+2)(m+3)} (n+1)(n+2)$
$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4 \left[ 1 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k \right]}{(m+1)^2 (m+2)^2} (-1)^n (n+1)^3$
$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{3 \left[ 1 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k \right]}{(m+1)^2 (m+2)^2 (m+3)^2} (-1)^n (2n+3)(n+1)^2 (n+2)^2$
$T_k(\tau, \gamma)$	$\frac{\left( 1 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k \right)}{(m+1)} (-1)^n$
$U_k(\tau, \gamma)$	$\frac{6 \left( 1 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k \right)}{(m+1)(m+2)(2m+3)} (-1)^n (n+1)^2$

Определим погрешность аппроксимации  $\Delta_l$  ( $\mu(\tau) = 1$ ).

$$\begin{aligned} \Delta_l &= \int_0^\infty \left[ \rho_x(\tau) - \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau = \\ &= \tau_k^{(4)} - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2 + \sum_{k=0}^m C_k^2 \|\psi_k\|^2. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Представим погрешности аппроксимации КФ в виде:

$$\Delta_l = \Delta_1 + \Delta_2, \quad (6.12)$$

где  $\Delta_2$  составляющая методической погрешности аппроксимации, вызванная дополнительным условием (6.4).

Тогда

$$\begin{cases} \Delta = \tau_k^{(4)} - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2; \\ \Delta_2 = \sum_{k=0}^m C_k^2 \|\psi_k\|^2. \end{cases} \quad (6.13)$$

Вторую составляющую погрешности  $\Delta_2$  удобнее представить в виде:

$$\Delta_2 = \frac{\left[1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(0, \alpha)\right]^2}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{\|\psi_k\|^2}}. \quad (6.14)$$

В таблице 6.3. приведены выражения для оценки  $\Delta$  и  $\Delta_2$  для различных базисов.

Составляющие методической погрешности аппроксимации НКФ ортогональными функциями  $\mu(\tau) = 1$

Таблица 6.3

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\Delta$	$\Delta_2$
$L_k(\tau, \alpha)$	$\tau_k^{(4)} - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2$	$\frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)^2}{\alpha(m+1)}$
$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\tau_k^{(4)} - \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{2k+1}$	$\frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot (-1)^k\right)^2}{2\alpha(m+1)^2}$
$D_k(\tau, \alpha)$	$\tau_k^{(4)} - \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{k+1}$	$\frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)^2}{\alpha(m+1)(m+2)}$
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\tau_k^{(4)} - \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{4k+1}$	$\frac{\left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]^2}{\gamma(m+1)(2m+1)}$
$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\tau_k^{(4)} - \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{4k+3}$	$\frac{\left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]^2}{\gamma(m+1)(2m+3)}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\tau_k^{(4)} - \frac{1}{2\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{k+1}$	$\frac{\left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]^2}{\gamma(m+1)(m+2)}$

$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\tau_k^{(4)} - \frac{1}{2\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{2k+1}$	$\frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot (-1)^k\right)^2}{2\gamma(m+1)^2}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\tau_k^{(4)} - \frac{1}{2\lambda} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{2k+3}$	$\frac{\left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]}{2\gamma(m+1)(m+3)}$

При произвольном весе ортогональной функции  $\mu(\tau) \neq 1$

$$\begin{aligned} \Delta_k^{(1)} &= \int_0^\infty \left[ \rho_x(\tau) - \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha) \right]^2 \mu(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^\infty \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2 + \sum_{k=0}^m C_k^2 \|\psi_k\|^2. \end{aligned}$$

В этом случае

$$\Delta^{(1)} = \int_0^\infty \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2.$$

Составляющие методической погрешности аппроксимации нормированной корреляционной функции ортогональными функциями при  $\mu(\tau) \neq 1$  представлены в таблице 6.4.

Составляющие методической погрешности аппроксимации НКФ ортогональными функциями  $\mu(\tau) \neq 1$

Таблица 6.4

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\Delta^{(1)}$	$\Delta_2$
$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\int_0^\infty \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau - \frac{1}{\gamma^2} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)}$	$\frac{2}{\gamma^2} \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)^2}{(m+1)(m+2)}$
$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\int_0^\infty \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau - \frac{4}{\gamma^3} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)(k+2)}$	$\frac{12}{\gamma^3} \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)^2}{(m+1)(m+2)(m+3)}$
$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\int_0^\infty \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau - \frac{1}{4\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)^3}$	$\frac{1}{\gamma} \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k\right)^2}{(m+1)^2 (m+2)^2}$
$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\int_0^\infty \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau - \frac{2}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(2k+3)(k+1)^2 (k+2)^2}$	$\frac{6}{\gamma} \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k\right)^2}{(m+1)^2 (m+2)^2 (m+3)^2}$

$T_k(\tau, \gamma)$	$\begin{cases} \int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau - \frac{\pi}{4\gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k^2, k=0; \\ \int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau - \frac{\pi}{8\gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k^2, k \neq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\pi \left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k\right)^2}{4\gamma(m+1)}, k=0; \\ \frac{\pi \left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k\right)^2}{8\gamma(m+1)}, k \neq 0 \end{cases}$
$U_k(\tau, \gamma)$	$\int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau - \frac{\pi}{8\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)^2}$	$\frac{3\pi \left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k\right)^2}{4\gamma(m+1)(m+2)(2m+3)}$

В [22] для ортогонального базиса Лагерра было показано, что  $\Delta$  является функцией параметра  $\alpha$ . Можно показать, что и погрешность  $\Delta_2$ , которую с учетом (6.14) приведем к виду:

$$\Delta_2 = \frac{1}{\alpha(m+1)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_n}(\omega_1) S_{x_n}(\omega_2) \left[ \frac{j\omega_1 - \alpha/2}{j\omega_2 - \alpha/2} \right]^{m+1} d\omega_1 d\omega_2, \quad (6.15)$$

также является функцией параметра  $\alpha$ .

Найдём условие определения оптимального значения параметра  $\alpha$ , при котором  $\Delta_1 = \min$ .

Это условие, как следует из (6.12), найдем из уравнения:

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Delta_2}{\partial \alpha} = 0. \quad (6.16)$$

Значение  $\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha}$  определяется выражением

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = & -(m+1) \left\{ \left[ \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \frac{j\omega}{j\omega + \alpha/2} W_m(j\omega) d\omega \right]^2 - \right. \\ & \left. - \left[ \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \frac{\alpha/2}{j\omega + \alpha/2} W_m(j\omega) d\omega \right]^2 \right\}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

а  $\frac{\partial \Delta_2}{\partial \alpha}$  с учётом (6.15) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_2}{\partial \alpha} = & -\frac{1}{\alpha^2(m+1)} \left\{ 2\alpha(m+1) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_n}(\omega) W_m(j\omega) \frac{j\omega}{j\omega + \alpha/2} d\omega \right] \times \right. \\ & \left. \times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_n}(\omega) W_m(j\omega) (j\omega - \alpha/2) d\omega + \left[ \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_n}(\omega) W_m(j\omega) (j\omega - \alpha/2) d\omega \right]^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Подставив в (6.16) выражения (6.17) и (6.18), после промежуточных преобразований получим:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\alpha^2(m+1)} \left\{ \left[ \alpha(m+1) \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_n}(\omega) \frac{j\omega}{j\omega + \alpha/2} W_m(j\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_n}(\omega) W_m(j\omega) (j\omega - \alpha/2) d\omega \right]^2 - \left[ \alpha(m+1) \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_n}(\omega) \frac{\alpha/2}{j\omega + \alpha/2} W_m(j\omega) d\omega \right]^2 \right\}. \quad (6.19)$$

Представляя в выражении (6.19) разность квадратов как произведение суммы оснований на их разность, получим:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\alpha^2(m+1)} \left[ \alpha(m+1) \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_n}(\omega) W_m(j\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_n}(\omega) W_m(j\omega) (j\omega - \alpha/2) d\omega \right] \times \left[ \alpha(m+1) \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_n}(\omega) W_{m+1}(j\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_n}(\omega) W_m(j\omega) (j\omega - \alpha/2) d\omega \right]. \quad (6.20)$$

Выражение (6.20) с учётом (6.11) равно:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = -\frac{m+1}{\alpha^2} b_m b_{m+1}. \quad (6.21)$$

Так как коэффициент  $b_m \neq 0$  и параметр  $\alpha \neq 0$ , условие минимума погрешности  $\Delta$ , примет вид:

$$b_{m+1} = \beta_{m+1} + \frac{1 - \sum_{k=0}^m \beta_k}{m+1} = 0. \quad (6.22)$$

Таким образом, при аппроксимации корреляционной функции для обеспечения минимума квадратической погрешности требуется изменением параметра  $\alpha$  добиться равенства нулю  $\beta_{m+1}$  коэффициента. Значения  $b_0, \dots, b_m$  в этом случае будут оптимальными.

На рис.6.2. представлены результаты аппроксимации КФ 5 модели с  $\mu = 5$ , коэффициенты разложения которой определяются в соответствии с выражением (6.10).

Из анализа полученных результатов можно сделать следующие выводы:

- число корней уравнения (6.22) в общем случае равно  $(m+1)$ ;
- величина минимума погрешности  $\Delta$ , зависит от найденного значения  $\alpha$ ;
- для обеспечения минимума-минимума погрешности необходимо правильно выбирать диапазон изменения  $\alpha$ , т.е. необходима априорная информация о свойствах процесса. Как показали исследования [22],  $\alpha_{opt}$  находится вблизи корня, найденного в результате решения уравнения  $\beta_0 - 1 = 0$ .

Следует отметить, что при изменении числа членов разложения ряда (6.3), необходимо пересчитать в соответствии с (6.10) все параметры  $b_k$ .

К сожалению, для других ортогональных базисов аналитически решить задачу поиска оптимального значения  $\alpha$  не удалось.



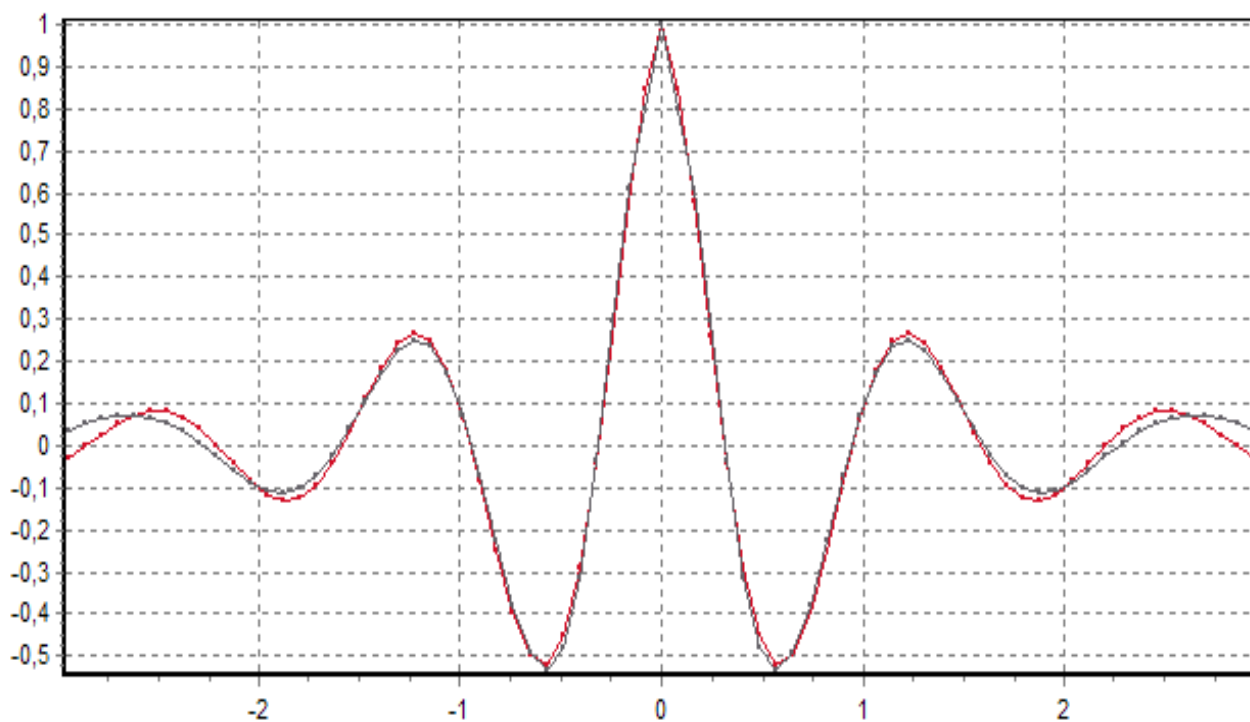


Рисунок 6.2 - Аппроксимация КФ 5 модели с  $\mu = 5$   
ортогональными функциями Лагерра -  $m = 15$ ,  $\alpha = 4,899$

## 6.2. Задание на самостоятельную работу

1. Для заданного ортогонального базиса, вида корреляционной функции и показателя колебательности  $\mu$  и  $m$  определить коэффициенты разложения  $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$  и  $\{b_k\}_{k=0,\dots,m}$ . Параметр  $\alpha$  задать произвольно. Построить графическую зависимость  $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$  и  $\{b_k\}_{k=0,\dots,m}$ .

2. Построить зависимость  $\delta_b^{(2)}(\chi/m, \mu)$ ,  $m = 2 \div 6$ ,  $\mu = 0 \div 5$  (Результаты представить аналогично результатам таблицы 5.6). Определить количество локальных минимумов  $\delta_b^{(2)}(\chi/m, \mu)$ , численные значения параметров  $\bar{\chi}_{opt}$  и соответствующие им значения погрешностей.

3. Построить зависимости  $\delta_{b,min}^{(1)}(\mu/m, \chi_{opt})$  и  $\delta_{b,min}^{(2)}(m/\mu, \chi_{opt})$  и сравнить их с соответствующими зависимостями  $\delta_{\beta,min}^{(1)}(\mu/m, \chi_{opt})$  и  $\delta_{\beta,min}^{(2)}(m/\mu, \chi_{opt})$ .

4. Сравнить результаты оценки  $\delta_{b,1}^{(1)}(\mu/m, \chi_1)$ ,  $\delta_{b,2}^{(1)}(\mu/m, \chi_2)$ ,  $\delta_{b,1}^{(2)}(m/\mu, \chi_1)$ ,  $\delta_{b,2}^{(2)}(m/\mu, \chi_2)$  с соответствующими минимальными оценками погрешности. Значение параметра  $\chi_1$  определяется по таблице 5.10-5.13, а  $\chi_2$  - по таблицам 5.14.

5. Построить модели корреляционной функции, соответствующие выражению 6.3, для  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 5$ ,  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ ,  $\chi_{opt}$ ,  $m = 5, 10$ .

6. Оформить отчет.

### 6.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
  2. Задание.
  3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
  4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
  5. Ортогональная модель корреляционной функции в заданном ортогональном базисе.
  6. Аналитическое выражение для оценки коэффициентов разложения  $\{b_k\}_{k=0,\dots,m}$ ,  $\chi_1$  и  $\chi_2$ .
  7. Графические зависимости  $\delta_b^{(2)}(\chi / t, \mu)$  (пункт 2).
  8. Графические зависимости  $\delta_{b,\min}^{(1)}(\mu / t, \chi_{opt})$ ,  $\delta_{b,\min}^{(2)}(t / \mu, \chi_{opt})$ ,  $\delta_{\beta,\min}^{(1)}(\mu / t, \chi_{opt})$  и  $\delta_{\beta,\min}^{(2)}(t / \mu, \chi_{opt})$  (пункт 3).
  9. Графические зависимости  $\delta_{b,1}^{(1)}(\mu / t, \chi_1)$ ,  $\delta_{b,2}^{(1)}(\mu / t, \chi_2)$ ,  $\delta_{b,1}^{(2)}(t / \mu, \chi_1)$ ,  $\delta_{b,2}^{(2)}(t / \mu, \chi_2)$  (пункт 5).
  10. Графики моделей корреляционной функции (пункт 6).
  11. Выводы.
- Пример выполнения лабораторной работы 6 приведен в Приложении 12.

### 6.4. Контрольные вопросы

1. Поясните физический смысл условия нормировки ортогональной модели корреляционной функции.
2. Какие параметры входят в ортогональную модель корреляционной функции при выполнении условия нормировки?
3. Из каких соображений выбирается значение параметра масштаба ортогональных функций?
4. Для какого ортогонального базиса возможно точное решение определения параметра масштаба? Почему?
5. Как количество локальных экстремумов погрешности аппроксимации связаны с  $t$  и  $\mu$ ?
6. Перечислите недостатки метода построения ортогональной модели с применением корректирующих коэффициентов.

## 7. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ МОЩНОСТИ

**Цель работы:** изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации спектральных плотностей мощности случайных процессов ортогональными функциями.

### 7.1. Теоретические основы лабораторной работы

Спектральные плотности мощности представляют собой частотное распределение энергетических характеристик случайного процесса. Существуют различные способы их определения, например: преобразование Фурье процесса, преобразование Фурье корреляционной функции. Определим спектральную плотность мощности в виде [4, 48]:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (7.1)$$

Воспользовавшись обратным преобразованием Винера-Хинчина, можно установить связь между корреляционной функцией и спектральной плотностью мощности:

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (7.2)$$

Определив параметры ортогональной модели корреляционной функции  $b_0, \dots, b_m, \alpha$

$$K_a(\tau) = \sigma_x^2 \left\{ \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(\tau, \alpha) l(\tau) + \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(-\tau, \alpha) l(-\tau) \right\}, \quad (7.3)$$

оценим спектральную плотность мощности случайного процесса.

Для этого необходимо подставить модель корреляционной функции (7.3) в выражение для определения спектральной плотности мощности. В результате получим.

$$\begin{aligned} S_a(\omega) &= \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(\tau, \alpha) l(\tau) + \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(-\tau, \alpha) l(-\tau) \right] e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left[ \sum_{k=0}^m b_k [W_k(j\omega) + W_k(-j\omega)] \right] = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \operatorname{Re} W_k(j\omega). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Воспользовавшись результатами, представленными в 3 разделе, приведем аналитические модели спектральной плотности для различных базисов (см. табл. 7.1-7.2).

Аналитические выражения спектральной плотности мощности с использованием тригонометрических функций

Таблица 7.1

№	$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\varphi_k$	$S_a(\omega)$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$\arctg \frac{2\omega}{\alpha}$	$\frac{2\sigma_x^2 \cos \varphi}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \cos(2k+1)\varphi$
2	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\arctg \frac{2\omega}{\alpha}$	$\frac{\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)} [1 + (-1)^k \cos(2(k+1)\varphi_k)]$

3	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\operatorname{arctg} \frac{2\omega}{\alpha}$	$\frac{2\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)(k+2)} \left[ \frac{1}{2} + \frac{(-1)^k \cos((2k+3)\varphi_k)}{2\cos\varphi_k} + k + 1 \right]$
4	$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\operatorname{arctg} \frac{\omega}{2(k+1)\alpha}$	$\frac{\sigma_x^2}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{1}{(2k+1)} \cos\varphi_k \cos \left[ \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$
5	$D_k(\tau, \alpha)$	$\operatorname{arctg} \frac{\omega}{(k+1)\alpha}$	$\frac{\sigma_x^2}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{(-1)^k}{(k+1)} \cos\varphi_k \cos \left[ \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$
6	$P_k^{-1(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\operatorname{arctg} \frac{2\omega}{(4k+1)\gamma}$	$\frac{2\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(4k+1)} \cos\varphi_k \cos \left[ \left( \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$
7	$P_k^{1(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\operatorname{arctg} \frac{2\omega}{(4k+3)\gamma}$	$\frac{2\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(4k+3)} \cos\varphi_k \cos \left[ \left( \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$
8	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\operatorname{arctg} \frac{\omega}{(k+1)\gamma}$	$\frac{\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{1}{(k+1)} \cos\varphi_k \cos \left[ \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$
9	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\operatorname{arctg} \frac{\omega}{(2k+1)\gamma}$	$\frac{\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{1}{(2k+1)} \cos\varphi_k \cos \left[ \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$
10	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\operatorname{arctg} \frac{\omega}{(2k+3)\gamma}$	$\frac{\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{1}{(2k+3)} \cos\varphi_k \cos \left[ \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$

Аналитические выражения спектральной плотности мощности с использованием биномиальных коэффициентов для ортогональных функций Якоби  $(0, \beta)$  и Чебышева

Таблица 7.2

№	$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\varphi_k$	$S_a(\omega)$
1	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\operatorname{arctg} \frac{\omega}{(2k+1)\gamma}$	$\frac{\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)} \sum_{s=0}^k C_k^{s} C_{k+s+1}^{s} (-1)^s \frac{\cos^2 \varphi_s}{(2s+1)}$
2	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\operatorname{arctg} \frac{\omega}{(2k+1)\gamma}$	$\frac{2\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)(k+2)} \sum_{s=0}^k C_k^{s} C_{k+s+2}^{s} (-1)^s \frac{\cos^2 \varphi_s}{(2s+1)}$
3	$T_k(\tau, \gamma)$	$\operatorname{arctg} \frac{\omega}{(2(k-s)+1)\gamma}$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi \gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k \cos^2 \varphi_{0,0}, k=0, \\ \frac{1}{\pi \gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k \sum_{s=0}^k \frac{k}{2k-s} C_{2k-s}^{s} (-4)^{k-s} \frac{\cos^2 \varphi_{k,s}}{(2(k-s)+1)}, k \neq 0 \end{array} \right.$
4	$U_k(\tau, \gamma)$		$\frac{1}{\pi \gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{k+1} \sum_{s=0}^k C_{2k-s+1}^{s} (-4)^{k-s} \frac{\cos^2 \varphi_{k,s}}{(2(k-s)+1)}$

На рисунке 7.1 представлены результаты аппроксимации КФ - восстановление СПМ в ортогональном базисе Якоби с параметрами  $(0,0)$  (функции Лежандра) для случайного процесса с  $\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|} \cos 5\tau$ ,  $N = 5000$ ,  $\Delta\tau = 0,078$ .

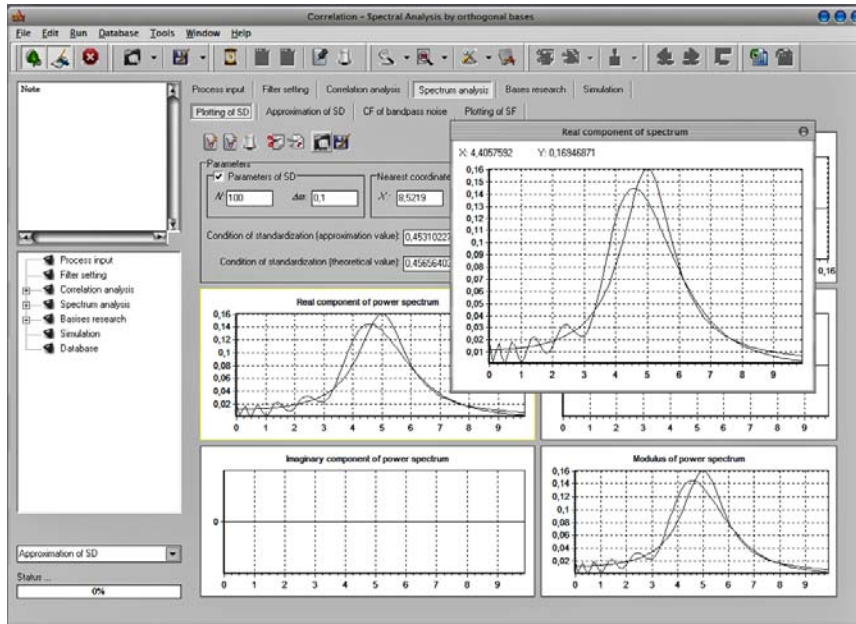


Рисунок 7.1 - Результат восстановления СПМ ортогональными функциями Якоби (функциями Лежандра) с параметрами  $(0, 0)$

Полученные результаты можно обобщить на оценку взаимной спектральной плотности мощности и её составляющих по параметрам ортогональных моделей ВКФ.

Представим модель ВКФ в виде:

$$K_{axy}(\tau) = \sigma_x \sigma_y \left\{ \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} I(\tau - \tau_m) \psi_k(\tau - \tau_m, \alpha_1) + \sum_k^{m2} b_{k,l} I(\tau_m - \tau) \psi_k(\tau_m - \tau, \alpha_2) \right\}. \quad (7.5)$$

где  $\tau_m$  - значение аргумента, соответствующего максимуму ВКФ

Определим взаимную спектральную плотность мощности

$$S_{axy}(j\omega) = \frac{\sigma_x \sigma_y}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} I(\tau - \tau_m) \psi_k(\tau - \tau_m, \alpha_1) + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} I(\tau_m - \tau) \psi_k(\tau_m - \tau, \alpha_2) \right] \exp(-j\omega\tau) d\tau. \quad (7.6)$$

Введем замену переменных  $u = \tau - \tau_m$ . Тогда

$$S_{axy}(j\omega) = \frac{\sigma_x \sigma_y \exp(-j\omega\tau_m)}{2\pi} \left[ \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} \int_0^{\infty} \psi_k(u, \alpha_1) \exp(-j\omega u) du + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} \int_{-\infty}^0 \psi_k(-u, \alpha_2) \exp(-j\omega u) du \right] = \frac{\sigma_x \sigma_y \exp(-j\omega\tau_m)}{2\pi} \left[ \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} W_k(j\omega) + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} W_k(-j\omega) \right]. \quad (7.7)$$

Отсюда

$$ReS_{axy}(j\omega) = \frac{\sigma_x \sigma_y}{2\pi} \left\{ \cos\omega\tau_m \left[ \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} ReW_k(j\omega) + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} ReW_k(j\omega) \right] - \sin\omega\tau_m \left[ \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} ImW_k(j\omega) - \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} ImW_k(j\omega) \right] \right\},$$

$$ImS_{axy}(j\omega) = \frac{\sigma_x \sigma_y}{2\pi} \left\{ -\sin\omega\tau_m \left[ \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} ReW_k(j\omega) + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} ReW_k(j\omega) \right] + \cos\omega\tau_m \left[ \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} ImW_k(j\omega) - \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} ImW_k(j\omega) \right] \right\}.$$

Введем обозначения

$$A(\omega) = \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} ReW_k(j\omega) + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} ReW_k(j\omega); \quad (7.8)$$

$$B(\omega) = \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} ImW_k(j\omega) - \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} ImW_k(j\omega). \quad (7.9)$$

Окончательно получим

$$ReS_{axy}(j\omega) = \frac{\sigma_x \sigma_y}{2\pi} [A(\omega)\cos\omega\tau_m - B(\omega)\sin\omega\tau_m]; \quad (7.10)$$

$$ImS_{axy}(j\omega) = \frac{\sigma_x \sigma_y}{2\pi} [B(\omega)\cos\omega\tau_m - A(\omega)\sin\omega\tau_m]. \quad (7.11)$$

В таблицах 7.4 – 7.5 для различных ортогональных базисов приведены выражения для  $ReW_k(j\omega)$  и  $ImW_k(j\omega)$ .

Вещественные и мнимые части преобразования Фурье ортогональных функций с использованием тригонометрических функций

Таблица 7.4

$\psi_k(\tau, \gamma/\alpha)$	$ReW_k(j\omega)$	$ImW_k(j\omega)$
$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{2}{\alpha}(-1)^k \cos\varphi \cos(2k+1)\varphi$	$-\frac{2}{\alpha}(-1)^k \cos\varphi \sin(2k+1)\varphi$
$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\gamma(k+1)}(1+(-1)^k \cos[2(k+1)\varphi_k])$	$\frac{1}{\gamma(k+1)}((-1)^{k+1} \sin[2(k+1)\varphi_k])$
$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\gamma(k+1)(k+2)}\left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^k \cos[(2k+3)\varphi_k]}{2\cos\varphi_k} + k+1\right)$	$\frac{2}{\gamma(k+1)(k+2)}\left(\frac{(-1)^{k+1} \sin[(2k+3)\varphi_k]}{2\cos\varphi_k} - \frac{tg\varphi_k}{2}\right)$
$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{1}{(2k+1)\alpha} \cos\varphi_k \cos\left[\left(\varphi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s\right)\right]$	$-\frac{1}{(2k+1)\alpha} \cos\varphi_k \sin\left[\left(\varphi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s\right)\right]$
$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{(-1)^k}{(k+1)\alpha} \cos\varphi_k \cos\left[\left(\varphi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s\right)\right]$	$-\frac{(-1)^k}{(k+1)\alpha} \cos\varphi_k \sin\left[\left(\varphi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s\right)\right]$
$P_k^{-1/2,0}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{(4k+1)\gamma} \cos\varphi_k \cos\left[\left(\varphi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s\right)\right]$	$-\frac{2}{(4k+1)\gamma} \cos\varphi_k \sin\left[\left(\varphi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s\right)\right]$
$P_k^{1/2,0}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{(4k+3)\gamma} \cos\varphi_k \cos\left[\left(\varphi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s\right)\right]$	$-\frac{2}{(4k+3)\gamma} \cos\varphi_k \sin\left[\left(\varphi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s\right)\right]$
$P_k^{1,0}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{(k+1)\gamma} \cos\varphi_k \cos\left[\left(\varphi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s\right)\right]$	$-\frac{1}{(k+1)\gamma} \cos\varphi_k \sin\left[\left(\varphi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s\right)\right]$

$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{(2k+3)\gamma} \cos \varphi_k \cos \left[ \left( \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$	$-\frac{1}{(2k+3)\gamma} \cos \varphi_k \sin \left[ \left( \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right) \right]$
-----------------------------	---	--

Вещественные и мнимые части преобразования Фурье ортогональных функций с использованием биномиальных коэффициентов

Таблица 7.5

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$Re W_k(j\omega)$	$Im W_k(j\omega)$
$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{(k+1)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \frac{\cos^2 \varphi_s}{(2s+1)}$	$-\frac{1}{(k+1)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \frac{\cos \varphi_s \sin \varphi_s}{(2s+1)}$
$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{(k+1)(k+2)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \frac{\cos^2 \varphi_s}{(2s+1)}$	$-\frac{2}{(k+1)(k+2)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \frac{\cos \varphi_s \sin \varphi_s}{(2s+1)}$
$T_k(\tau, \gamma)$	$\begin{cases} \frac{\cos^2 \varphi_{0,0}}{\gamma}, k=0, \\ \sum_{s=0}^k \frac{k}{2k-s} C_{2k-s}^s (-4)^{k-s} \frac{\cos^2 \varphi_{k,s}}{(2(k-s)+1)\gamma}, k \neq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} -\frac{\cos \varphi_{0,0} \sin \varphi_{0,0}}{\gamma}, k=0, \\ -\sum_{s=0}^k \frac{k}{2k-s} C_{2k-s}^s (-4)^{k-s} \frac{\cos \varphi_{k,s} \sin \varphi_{k,s}}{(2(k-s)+1)\gamma}, k \neq 0 \end{cases}$
$U_k(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^k C_{2k-s+1}^s (-4)^{k-s} \frac{\cos^2 \varphi_{k,s}}{(2(k-s)+1)\gamma}$	$-\frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^k C_{2k-s+1}^s (-4)^{k-s} \frac{\cos \varphi_{k,s} \sin \varphi_{k,s}}{(2(k-s)+1)\gamma}$

Отметим, что при построении ортогональной модели спектральной плотности мощности по параметрам ортогональной модели корреляционной функции возможно применение различных ортогональных базисов при аппроксимации левой и правой ветвей корреляционной функции.

На рисунках 7.2 – 7.3 приведены результаты построения взаимной спектральной плотности мощности с помощью аппроксимирующих выражений в сравнении с теоретическими кривыми [48, 49].

При построении спектра с большим значением  $\tau_m$ , необходимо правильно выбирать значение интервала дискретизации спектра  $\Delta\omega$ . В противном случае будет проявляться эффект наложения частот. Рекомендуемое значение интервала дискретизации, определяемое для восстановления  $\cos \omega \tau_m$

$$\Delta\omega \leq \frac{0,2 \div 0,4}{\tau_m}. \quad (7.12)$$

Рисунок 7.4 иллюстрирует эту ситуацию.

Другой способ построения ортогональной модели спектральной плотности мощности заключается в аппроксимации спектральной плотности мощности в каком либо базисе  $\{\psi_k(\omega, \alpha)\}_{k=0, \dots, m}$  при  $\mu(\tau) = 1$ . При этом, учитывая четность спектральной плотности мощности, необходимо выбором параметров модели гарантировать выполнения условия нормировки

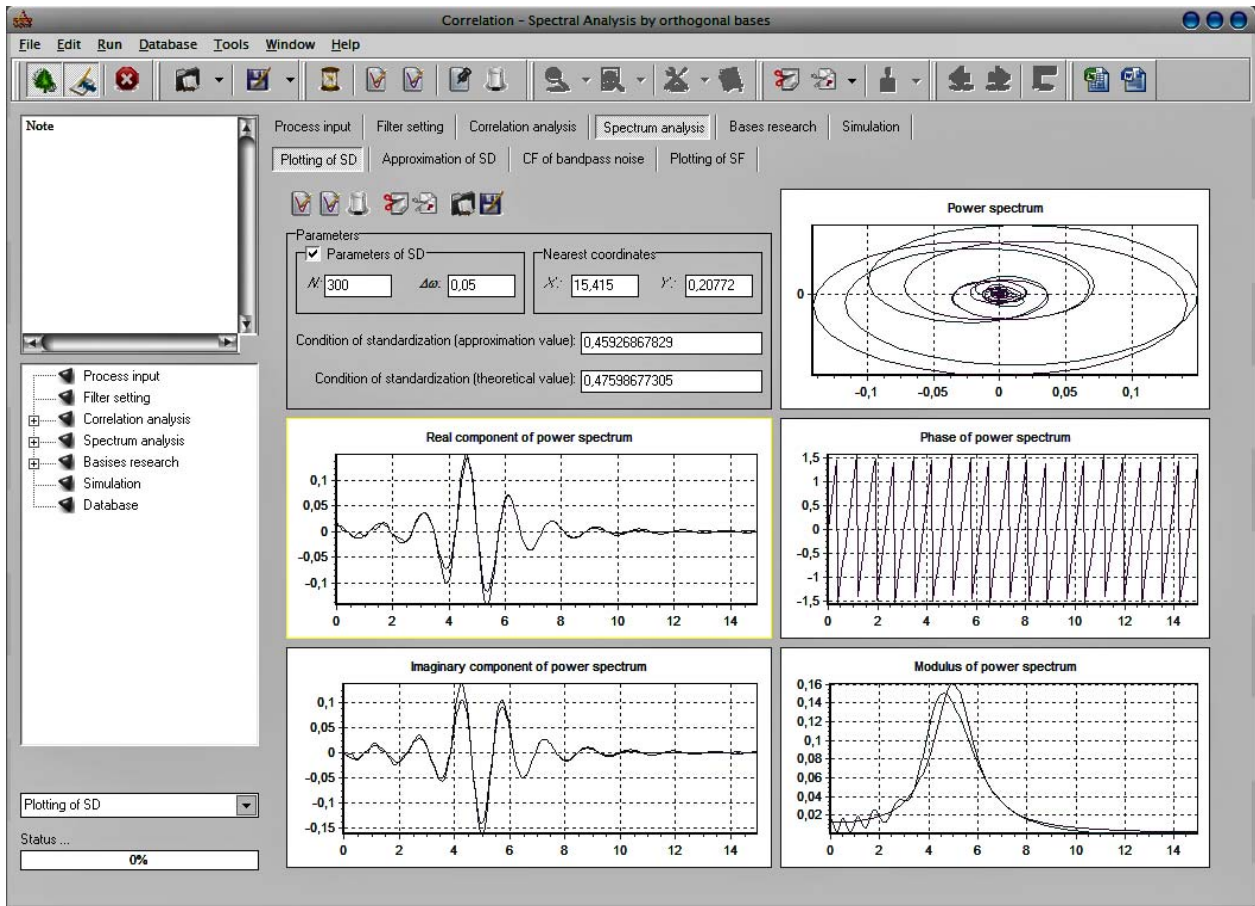


Рисунок 7.2 - Спектральная плотность мощности и ее составляющие

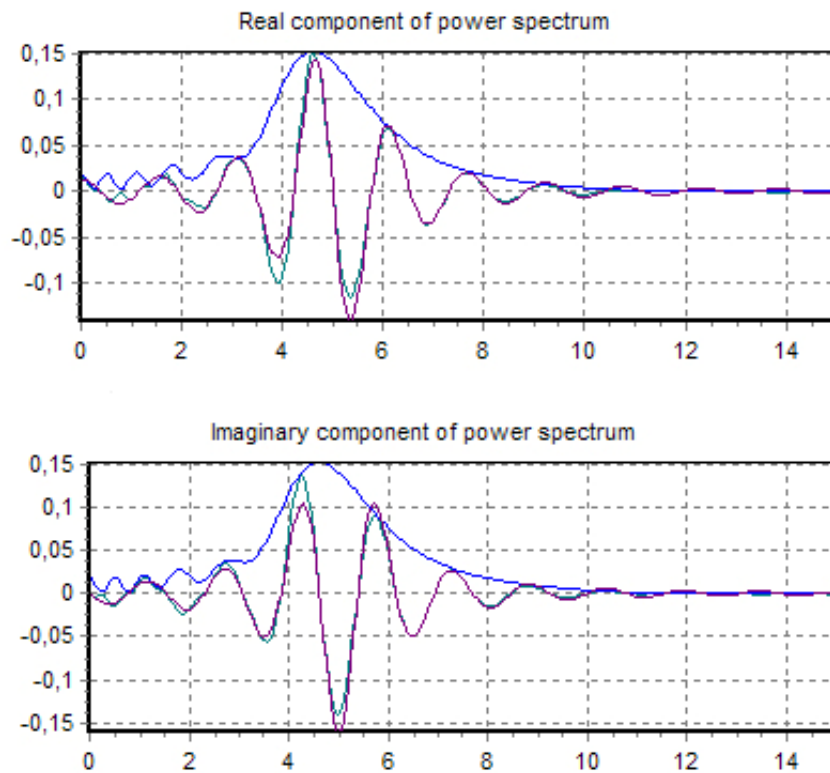


Рисунок 7.3 – Вещественная, мнимая части и модуль спектральной плотности мощности



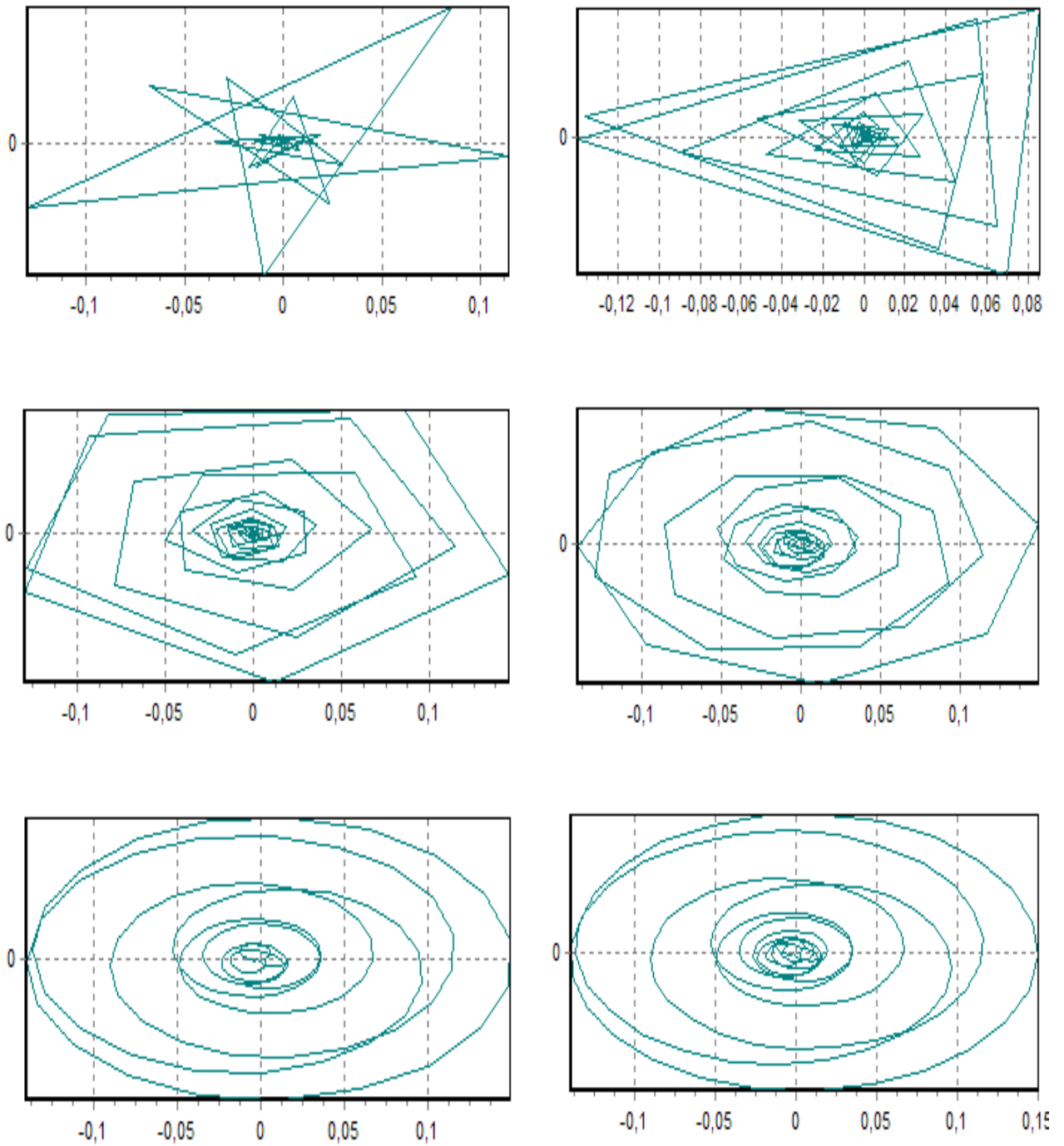


Рисунок 7.4 - Взаимные спектральные плотности мощности при различных значениях интервала дискретизации для  $\rho_{xy}(\tau) = \exp(-|\tau - 100|)\cos 5(\tau - 100)$

$$\int_0^{\infty} S_{a_n}(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(\omega, \alpha) d\omega = \sum_{k=0}^m \beta_k W_k(0) =$$

$$= 2 \sum_{k=0}^m \beta_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k = 1/2. \quad (7.13)$$

Однако, в общем случае условие (7.13) не выполняется.

Для выполнения свойства (7.13), представим модель в виде

$$S_{a_n}(\omega) = \sum_{k=0}^m c_k \psi_k(\omega, \alpha). \quad (7.14)$$

при условии, что

$$2 \sum_{k=0}^m c_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k = 1/2. \quad (7.15)$$

Запишем выражение для оценки погрешности с учетом условия (7.15)

$$\Delta_l = \int_0^{\infty} \left[ S_{x_n}(\omega) - \sum_{k=0}^m c_k \psi_k(\omega, \alpha) \right]^2 d\omega + 2\lambda \sum_{k=0}^m \beta_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k = \min. \quad (7.16)$$

Для определения значения параметров  $c_n$  найдем

$$\frac{\partial \Delta_l}{\partial c_n} = -2 \int_0^{\infty} \left[ S_{x_n}(x) - \sum_{k=0}^m c_k \psi_k(\omega, \alpha) \right] \psi_n(\omega, \alpha) d\omega + 2\lambda \|\psi_n\|^2 [-\psi_n(0, \alpha)]^n = 0. \quad (7.17)$$

С учетом свойств ортогональных функций выражение (7.17) приведем к виду

$$-2\beta_n \|\psi_n\|^2 + 2c_n \|\psi_n\|^2 + 2\lambda \|\psi_n\|^2 [-\psi_n(0, \alpha)]^n = 0. \quad (7.18)$$

Отсюда

$$c_n = \beta_n - \lambda [-\psi_n(0, \alpha)]^n. \quad (7.19)$$

С учетом (7.15) выражение для определения  $\lambda$  равно

$$\lambda = \frac{\sum_{k=0}^m \beta_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k - 1/4}{\sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2}. \quad (7.20)$$

Подставив выражение (7.20) в выражение (7.19), окончательно получим

$$C_n = \beta_n + \left[ \frac{1/4 - \sum_{k=0}^m \beta_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k}{\sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2} \right] [-\psi_n(0, \alpha)]^n =$$

$$= \beta_n + \zeta_n.$$

Рассмотрим несколько частных случаев. Так для ортогональных функций Лагерра с учетом их свойств

$$\lambda = \frac{\sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k - \alpha/4}{m+1}, \quad (7.22)$$

$$C_n = \beta_n + \left[ \frac{\alpha/4 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k}{m+1} \right] (-1)^n. \quad (7.23)$$

Рассмотрим пример уточнения коэффициентов разложения по предлагаемому алгоритму:  $\rho_{x_5}(\tau) = \exp(-\lambda|\tau|)\cos \omega_0\tau$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\omega_0 = 5$  (см. рис. 7.5).

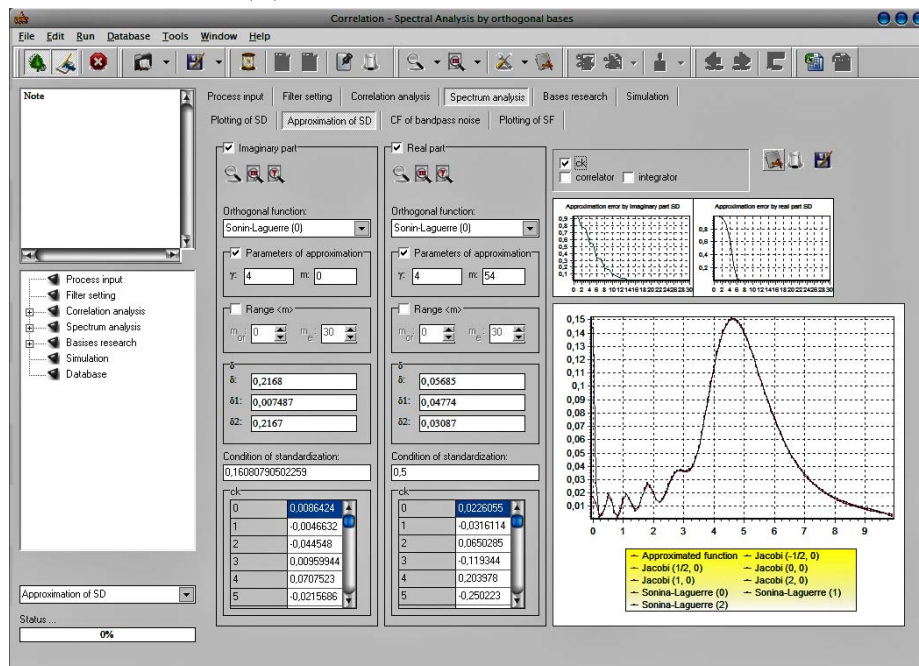


Рисунок 7.5 - Аппроксимация СПМ ортогональными функциями Лагерра,  $\alpha = 4$ ,  $m = 36$

Выражения для оценки коэффициентов разложения  $\zeta_n$  для других ортогональных базисов представлены в таблице 7.6.

Таблица 7.6

№	$\psi_k(\tau, \gamma/\alpha)$	$\zeta_n$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$\left[ \frac{\alpha/4 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k}{m+1} \right] (-1)^n$
2	$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\alpha/2 - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{2k+1}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{2k+1}}$
3	$D_k(\tau, \alpha)$	$\left[ \frac{\alpha/2 - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k (-1)^k}{k+1}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{k+1}} \right] (-1)^n$

В таблице 7.7 приведены аналитические выражения для оценки  $\|P_k^{(\alpha, \beta)}\|^2$  и  $\zeta_n$  для различных функций Якоби  $P_k^{(\alpha, \beta)}(\tau, \gamma)$ . Отметим, что для рассматриваемых ортогональных функций Якоби  $P_k^{(\alpha, \beta)}(0, \gamma) = (-1)^k$ .

Коэффициенты разложения КФ в ортогональных базисах Якоби  $(\alpha, \beta)$

$$C_n = \beta_n + \left[ \frac{1/4 - \sum_{k=0}^m \beta_k \|P_k^{(\alpha, \beta)}\|^2}{\sum_{k=0}^m \|P_k^{(\alpha, \beta)}\|^2} \right] = \quad (7.24)$$

$$= \beta_n + \zeta_n.$$

Корректирующие коэффициенты Якоби  $(\alpha, \beta)$  и Сонина-Лагерра

Таблица 7.7

№	$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\zeta_n$
1	$P_k^{(-1/2, 0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma/4 - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{4k+1}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{4k+1}}$
2	$P_k^{(1/2, 0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma/4 - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{4k+3}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{4k+3}}$
3	$P_k^{(1, 0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma/2 - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{k+1}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{k+1}}$
4	$P_k^{(0, 0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma/2 - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{2k+1}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{2k+1}}$
5	$P_k^{(2, 0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma/2 - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{2k+3}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{2k+3}}$
6	$P_k^{(0, 1)}(\tau, \gamma)$	$\left[ \frac{\frac{\gamma}{2} - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k [(k+1) \bmod 2]}{(k+1)^2}}{\sum_{k=0}^m \frac{[(k+1) \bmod 2]}{(k+1)}} \right] [(n+1) \bmod 2] (n+1)$
7	$P_k^{(0, 2)}(\tau, \gamma)$	$\left[ \frac{\frac{\gamma}{8} - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k (-1)^k [(k+2) \operatorname{div} 2]^2}{(k+1)^2 (k+2)^2}}{\sum_{k=0}^m \frac{[(k+2) \operatorname{div} 2]^4 (2k+3)}{(k+1)^2 (k+2)^2}} \right] [(n+2) \operatorname{div} 2]^2 (2n+3) (-1)^n$

8	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\left[ \frac{\frac{\gamma}{4} - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k [(k+1) \bmod 2]}{(k+1)}}{\sum_{k=0}^m \frac{[(k+1) \bmod 2]}{(k+1)}} \right]^{[(n+1) \bmod 2]}$
9	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\left[ \frac{\frac{\gamma}{8} - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k [(k+2) \operatorname{div} 2]}{(k+1)(k+2)}}{\sum_{k=0}^m \frac{[(k+2) \operatorname{div} 2]^2}{(k+1)(k+2)}} \right]^{[(n+2) \operatorname{div} 2]}$

Определим погрешность аппроксимации  $\Delta_1$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \int_0^\infty \left[ S_{xH}(\omega) - \sum_{k=0}^m c_k \cdot \psi_k(\omega, \alpha) \right]^2 d\omega = \\ &= \int_0^\infty S_{xH}(\omega) - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2 + \sum_{k=0}^m \zeta_k^2 \|\psi_k\|^2. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Представим погрешности аппроксимации КФ в виде:

$$\Delta_1 = \Delta + \Delta_2, \quad (7.26)$$

где  $\Delta_2$  составляющая методической погрешности аппроксимации, вызванная дополнительным условием (7.15).

Тогда

$$\begin{cases} \Delta = \int_0^\infty S_{xH}(\omega) d\omega - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2; \\ \Delta_2 = \sum_{k=0}^m \zeta_k^2 \|\psi_k\|^2. \end{cases} \quad (7.27)$$

Вторую составляющую погрешности  $\Delta_2$  удобнее представить в виде:

$$\Delta_2 = \frac{\left[ 1/4 - \sum_{k=0}^m \beta_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k \right]^2}{\sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2}. \quad (7.28)$$

В таблице 7.8 приведены выражения для оценки  $\Delta_2$  для различных базисов.

Составляющие методической погрешности аппроксимации нормированной спектральной плотности мощности ортогональными функциями

Таблица 7.8

№	$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\Delta_2$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\left[ 1/4 - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k \right]^2}{(m+1)/\alpha}$

2	$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\left[1/4 - \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{1}{(2k+1)}\right]^2}{\frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(2k+1)}}$
3	$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\left[1/4 - \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{(-1)^k}{(k+1)}\right]^2}{\frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(k+1)}}$
4	$P_k^{-1/2,0}(\tau, \gamma)$	$\frac{\left[1/4 - \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{1}{(4k+1)}\right]^2}{\frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(4k+1)}}$
5	$P_k^{1/2,0}(\tau, \gamma)$	$\frac{\left[1/4 - \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{1}{(4k+3)}\right]^2}{\frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(4k+3)}}$
6	$P_k^{1,0}(\tau, \gamma)$	$\frac{\left[1/4 - \frac{1}{2\gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{1}{(k+1)}\right]^2}{\frac{1}{2\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(k+1)}}$
7	$P_k^{2,0}(\tau, \gamma)$	$\frac{\left[1/4 - \frac{1}{2\gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{1}{(2k+3)}\right]^2}{\frac{1}{2\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(2k+3)}}$
8	$P_k^{0,1}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{4\gamma} \frac{\left[\frac{\gamma}{2} - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k [(k+1) \bmod 2]}{(k+1)^2}\right]^2}{\sum_{k=0}^m \frac{[(k+1) \bmod 2]}{(k+1)}}$
9	$P_k^{0,2}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\gamma} \frac{\left[\frac{\gamma}{8} - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k (-1)^k [(k+2) \operatorname{div} 2]^2}{(k+1)^2 (k+2)^2}\right]^2}{\sum_{k=0}^m \frac{[(k+2) \operatorname{div} 2]^4 (2k+3)}{(k+1)^2 (k+2)^2}}$

10	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\gamma^2} \frac{\left[ \frac{\gamma}{4} - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k [(k+1) \bmod 2]}{(k+1)} \right]^2}{\sum_{k=0}^m \frac{[(k+1) \bmod 2]}{(k+1)}}$
11	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4}{\gamma^3} \frac{\left[ \frac{\gamma}{8} - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k [(k+2) \operatorname{div} 2]}{(k+1)(k+2)} \right]^2}{\sum_{k=0}^m \frac{[(k+2) \operatorname{div} 2]^2}{(k+1)(k+2)}}$

## 7.2. Задание на самостоятельную работу

1. Для заданного ортогонального базиса, вида корреляционной функции, показателя колебательности  $\mu$ , воспользовавшись средствами Mathcad найти выражения для оценки  $\alpha$ , коэффициентов разложения  $\{\beta_k\}_{k=0, \dots, m}$  и  $\delta_{\min}(\alpha, m)$  (см. лабораторную работу 5).
2. Найти модель спектральной плотности мощности для определенных параметров нормированной корреляционной функции, проверить условие нормировки.
3. Найти модель спектральной плотности мощности для параметров  $\{b_k\}_{k=0, \dots, m}$  нормированной корреляционной функции, проверить условие нормировки.
4. Для той же модели спектральной модели плотности мощности определить корректирующие коэффициенты  $\zeta_k$  и построить ортогональную модель спектральной плотности мощности. Проверить условие нормировки.
5. Оформить отчет.

## 7.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
5. Основные соотношения.
6. Результаты расчета, представленные в графической форме.
7. Выводы.

Пример выполнения лабораторной работы 7 приведен в Приложении 13.

## 7.4. Контрольные вопросы

1. Что такое условие нормировки для спектральной плотности мощности?
2. Из каких соображений определяются корректирующие коэффициенты?
3. Почему необходимо правильно выбирать интервал дискретизации спектральной плотности мощности? Каким образом?
4. Какие способы аппроксимации спектральной плотности мощности в ортогональных базисах существуют? В чем их суть?

## 8. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

**Цель работы:** изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации спектральных функций случайных процессов ортогональными функциями.

### 8.1. Теоретические основы лабораторной работы

Определим спектральную функцию по аналогии с функцией распределения в виде

$$F_x(\omega) = \int_0^{\omega} S_x(\omega) d\omega. \quad (8.1)$$

Спектральная функция позволяет определить мощность процесса в заданном диапазоне частот  $P(\omega_1, \omega_2) = F_x(\omega_2) - F_x(\omega_1)$ .

Аналитические выражения спектральной плотности мощности для типовых моделей корреляционных функций представлены в таблице 8.1.

Спектральная плотность мощности

Таблица 8.1

$K_x(\tau)$	$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }$	$\frac{\sigma_x^2 \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau )$	$\frac{2\sigma_x^2 \alpha^3}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)^2}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 - \alpha \tau )$	$\frac{2\sigma_x^2 \alpha \omega^2}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)^2}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau  + \alpha^2 \tau^2 / 3)$	$\frac{8\sigma_x^2 \alpha^5}{3\pi(\alpha^2 + \omega^2)^3}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$\frac{\sigma_x^2 \alpha}{2\pi} \left[ \frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau  \right)$	$\frac{2\sigma_x^2 \alpha (\alpha^2 + \omega_0^2)}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau  \right)$	$\frac{2\sigma_x^2 \alpha \omega^2}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + c \sin \omega_0  \tau )$	$\frac{\sigma_x^2 [\alpha(\alpha^2 + \omega^2 + \omega_0^2) + c\omega_0(\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2)]}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$



Более удобные выражения спектральной плотности мощности для нахождения спектральной функции (интегрирования), представлены в таблице 8.2.

### Спектральные плотности мощности

Таблица 8.2

№ модели КФ	$S_x(\omega)$	$\varphi$
1	$\frac{\sigma_x^2}{\lambda\pi} \cos^2 \varphi$	$\arctg \frac{\omega}{\lambda}$
2, 3	$\frac{\sigma_x^2}{\lambda\pi} \cos^2 \varphi (1 \pm \cos 2\varphi)$	
4	$\frac{\sigma_x^2}{\lambda\pi} \left[ \cos^2 \varphi (1 + \cos 2\varphi) + \frac{2}{3} \cos^3 \varphi \cos 3\varphi \right]$	
5	$\frac{\sigma_x^2}{2\lambda\pi} (\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2)$	$\varphi_1 = \arctg \frac{\omega + \omega_0}{\lambda}$
6, 7	$\frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left( \frac{\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2}{\lambda} \pm \frac{\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2}{2\omega_0} \right)$	$\varphi_2 = \arctg \frac{\omega - \omega_0}{\lambda}$

Спектральные функции для типовых моделей КФ с учетом принятых обозначений представлены в таблице 8.3.

### Спектральные функции

Таблица 8.3

№ модели КФ	$F_x(\omega)$
1	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \varphi$
2, 3	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \left( \varphi \pm \frac{\sin 2\varphi}{2} \right)$
4	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \left( \varphi + \frac{2 \sin 2\varphi}{3} + \frac{\sin 4\varphi}{12} \right)$
5	$\frac{\sigma_x^2}{2\pi} (\varphi_1 + \varphi_2)$
6, 7	$\frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left( \varphi_1 + \varphi_2 \mp \frac{\lambda}{\omega_0} (\ln  \cos \varphi_1  - \ln  \cos \varphi_2 ) \right)$

Представив модель спектральной плотности в ортогональном базисе Лагерра в виде [21]

$$S_x(\omega) = \frac{2\sigma_x^2 \cos \varphi}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \cos(2k+1)\varphi, \quad (8.2)$$

где  $\sum_{k=0}^m b_k = 1$ ;

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2\omega}{\alpha}, \quad (8.3)$$

получим

$$F_x(\omega) = \int_0^{\omega} S_x(\omega) d\omega = \frac{2\sigma_x^2}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \int_0^{\omega} \cos \varphi \cos(2k+1)\varphi d\omega. \quad (8.4)$$

Из выражения (8.3), следует, что

$$\omega = \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

Отсюда

$$d\omega = \frac{\alpha}{2 \cos^2 \varphi} d\varphi.$$

Следовательно

$$F_x(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \int_0^{\varphi} \frac{\cos(2k+1)\varphi}{\cos \varphi} d\varphi. \quad (8.5)$$

В соответствии с 2.539.7 [5]

$$J = \int_0^{\varphi} \frac{\cos(2k+1)\varphi}{\cos \varphi} d\varphi = \begin{cases} \varphi, & \text{если } k=0; \\ 2 \sum_{s=1}^k (-1)^{k-s} \frac{\sin 2s\varphi}{2s} + (-1)^k \varphi, & \text{если } k > 0. \end{cases} \quad (8.6)$$

Подставив (8.6) в (8.5), получим

$$F_x(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \left[ \varphi + 2 \sum_{k=1}^m b_k \sum_{s=1}^k (-1)^s \frac{\sin 2s\varphi}{2s} \right]. \quad (8.7)$$

Отметим, что при  $\varphi = 0$   $F_x(\omega) = 0$ , а при  $\varphi = \pi/2$   $F_x(\omega) = \sigma_x^2$ .

Результаты определения функции спектра для различных моделей в ортогональном базисе Лагерра приведены на рис. 8.1 ( $\sigma_x^2 = 1$ ).

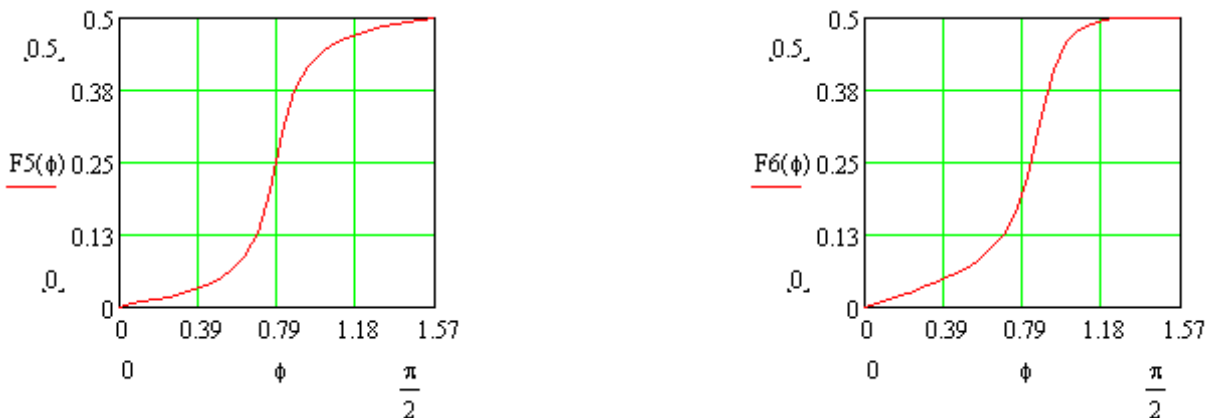


Рисунок 8.1 - Спектральные функции для различных моделей в ортогональном базисе Лагерра

Следует отметить, что спектральную функцию для других ортогональных базисов без биномиальных коэффициентов определить невозможно. Это объясняется тем, что в отличие от ортогональных функций Лагерра у других ортогональных функций экспоненциального типа норма не постоянна, а зависит от порядка функции.

Выражения спектральной плотности мощности в ортогональных базисах Сонина-Лагерра приведены в таблице 8.3, а соответствующие им спектральные функции – в таблице – в таблице 8.4.

Ортогональные модели спектральных плотностей мощности  
в базисе Сонина-Лагерра

Таблица 8.3

№	$\psi_k(\tau, \gamma)$	$S_x(\omega)$	$\varphi$
1	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2\sigma_x^2 \cos \varphi}{\pi \gamma} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)} \sum_{s=0}^k C_{k+1}^{k-s} (-2)^s \cos^s \varphi \cos(s+1)\varphi$	$\arctg \frac{2\omega}{\gamma}$
2	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4\sigma_x^2 \cos \varphi}{\pi \gamma} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)(k+2)} \sum_{s=0}^k C_{k+2}^{k-s} (-2)^s \cos^s \varphi \cos(s+1)\varphi$	

Ортогональные модели спектральных функций в базисе Сонина-Лагерра

Таблица 8.4

№	$\psi_k(\tau, \gamma)$	$F_x(\omega)$	$\varphi$
1	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\pi} \left[ \varphi + \sum_{k=1}^m \frac{b_k}{k+1} \sum_{s=1}^k C_{k+1}^{k-s} \frac{(-2)^s}{s} \cos^s \varphi \sin s \varphi \right]$	$\arctg \frac{2\omega}{\gamma}$
2	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\pi} \left[ \frac{\varphi}{2} + \sum_{k=1}^m \frac{b_k}{(k+1)(k+2)} \sum_{s=1}^k C_{k+2}^{k-s} \frac{(-2)^s}{s} \cos^s \varphi \sin s \varphi \right]$	

Для определения ортогональных моделей спектральной функции в ортогональных базисах Лежандра, Дирихле и Якоби воспользуемся другим представлением спектральной плотности мощности. Так как

$$S_a(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \operatorname{Re} W_k(j\omega),$$

а для ортогональных функций Лежандра, Дирихле и Якоби

$$\operatorname{Re} W_k(j\omega) = \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{1/2 \|\psi_s\|^2}{1/4 \|\psi_s\|^4 + \omega^2},$$

выражения для ортогональных моделей спектральной плотности мощности представим в виде (см. таблицу 8.5). Соответствующие им модели спектральных функций представлены в таблице 8.6.

Ортогональные модели спектральных плотностей мощности  
в базисах Лежандра, Дирихле, Якоби

Таблица 8.5

№	$\psi_k(\tau, \alpha/\gamma)$	$S_x(\omega)$
1	$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{\alpha(2s+1)}{\alpha^2(2s+1)^2 + \omega^2}$
2	$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} \frac{\alpha(s+1)}{\alpha^2(s+1)^2 + \omega^2}$

3	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^s (-1)^s \frac{\gamma(4s+1)/2}{\gamma^2(4s+1)^2/4 + \omega^2}$
4	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^s (-1)^s \frac{\gamma(4s+3)/2}{\gamma^2(4s+3)^2/4 + \omega^2}$
5	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \frac{\gamma(s+1)}{\gamma^2(s+1)^2 + \omega^2}$
6	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{\gamma(2s+1)}{\gamma^2(2s+1)^2 + \omega^2}$
7	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \frac{\gamma(2s+3)}{\gamma^2(2s+3)^2 + \omega^2}$
8	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \frac{\gamma(2s+1)}{\gamma^2(2s+1)^2 + \omega^2}$
9	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)(k+2)} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \frac{\gamma(2s+1)}{\gamma^2(2s+1)^2 + \omega^2}$
10	$T_k(\tau, \gamma)$	$\begin{cases} \frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega^2}, k=0, \\ \frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k \frac{k}{2k-s} C_{2k-s}^s (-4)^{k-s} \frac{(2(k-s)+1)\gamma}{\gamma^2(2(k-s)+1)^2 + \omega^2}, k \neq 0 \end{cases}$
11	$U_k(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{k+1} \sum_{s=0}^k C_{2k-s+1}^s (-4)^{k-s} \frac{(2(k-s)+1)\gamma}{\gamma^2(2(k-s)+1)^2 + \omega^2}$

Ортогональные модели спектральных функций  
в базисах Лежандра, Дирихле и Якоби

Таблица 8.6

№	$\psi_k(\tau, \alpha / \gamma)$	$F_x(\omega)$
1	$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha(2s+1)}$
2	$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^{k-s} \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha(s+1)}$
3	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^s (-1)^s \operatorname{arctg} \frac{2\omega}{\gamma(4s+1)}$
4	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^s (-1)^s \operatorname{arctg} \frac{2\omega}{\gamma(4s+3)}$
5	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\gamma(s+1)}$
6	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\gamma(2s+1)}$

7	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\gamma(2s+3)}$
8	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{k+1} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\gamma(2s+1)}$
9	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)(k+2)} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\gamma(2s+1)}$
10	$T_k(\tau, \gamma)$	$\begin{cases} \frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \operatorname{arctg} \left( \frac{\omega}{\gamma} \right), k=0, \\ \frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k \frac{k}{2k-s} C_{2k-s}^s (-4)^{k-s} \operatorname{arctg} \left( \frac{\omega}{\gamma(2(k-s)+1)} \right), k \neq 0 \end{cases}$
11	$U_k(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{k+1} \sum_{s=0}^k C_{2k-s+1}^s (-4)^{k-s} \operatorname{arctg} \left( \frac{\omega}{\gamma(2(k-s)+1)} \right)$

Недостатком такого представления, является то, что спектральную плотность мощности и спектральные функции нельзя определить для большого числа членов разложения ряда  $m$ .

На рис. 8.2 - приведены результаты определения спектральной функции для  $\rho_{x,5}(\tau)$  в ортогональных базисах Лежандра и Дирихле ( $\sigma_x^2 = 1$ ).

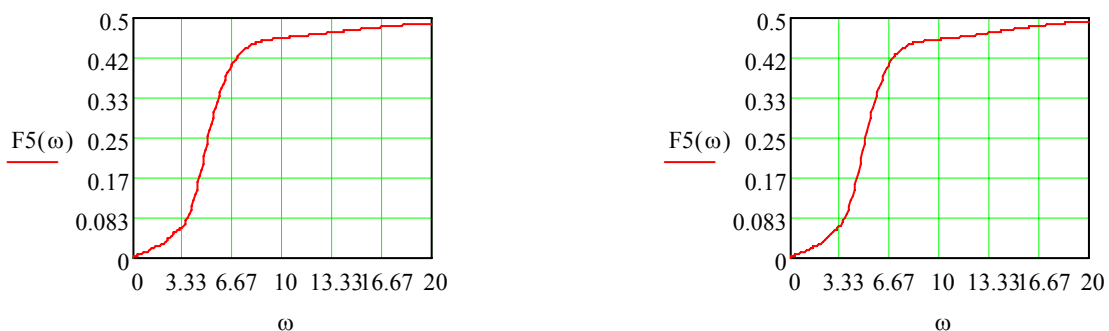


Рисунок 8.2 - Спектральные функции для  $\rho_{x,5}(\tau)$  в ортогональных базисах Лежандра и Дирихле

## 8.2. Задание на самостоятельную работу

1. Для заданного ортогонального базиса, вида корреляционной функции и её параметров, воспользовавшись средствами Mathcad, найти численное значение параметра масштаба  $\alpha$ , коэффициентов разложения  $\{b_k\}_{k=0, \dots, m}$  (см. лабораторную работу 6).
2. Построить спектральную функцию и её ортогональную модель.
3. Найти приведенную погрешность определения спектральной функции её ортогональной моделью, построить график.
4. Оформить отчет.

### 8.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
5. Основные соотношения.
6. Результаты расчета, представленные в графической форме.
7. Выводы.

Пример выполнения лабораторной работы 8 приведен в Приложении 14.

### 8.4. Контрольные вопросы

1. Поясните физический смысл спектральной функции.
2. Чему равно значение спектральной функции при  $\omega \rightarrow \infty$ ?
3. Существует ли условие нормировки для спектральной функции? В чем оно выражается?
4. По аналогии с какой вероятностной характеристикой введено понятие спектральной функции?
5. По какой причине ограничено использование спектральной функции и ее ортогональной модели при решении ряда задач?

## 9. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ОБОБЩЕННЫХ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

**Цель работы:** изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимативном анализе корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов ортогональными функциями.

### 9.1. Теоретические основы лабораторной работы

По найденной корреляционной функции возможно определение обобщенных корреляционных характеристик. К ним относятся [21, 48]:

- показатель колебательности, равный числу пересечений «нуля» корреляционной функцией и используемый при оценке интервала дискретизации случайного процесса, метрологическом анализе результатов оценивания вероятностных характеристик;
- интервалы корреляции, определяющие длительность существования корреляционной функции;
- корреляционные моменты, вводимые по аналогии с начальными моментами законов распределения и используемые, например, для идентификации процесса по виду корреляционной функции.

Обобщенные корреляционные характеристики широко применяются при решении разнообразных прикладных задач, связанных с:

- определением интервала дискретизации исследуемых процессов при цифровых методах анализа;
- идентификацией случайного процесса по виду корреляционной функции;
- метрологическим анализом результатов измерения вероятностных характеристик с целью получения оценок сверху, инвариантных к виду корреляционной функции исследуемого процесса.

Существуют различные способы определения интервалов корреляции, имеющие один и тот же физический смысл – **длительность существования корреляционной функции**.

Максимальный интервал корреляции  $\tau_k^{(l)} = \tau_{kmax}$  определяется в результате решения уравнения (см. таблицу 9.1):

$$|\rho(\tau \geq \tau_{kmax})| \leq \Delta, \quad (9.1)$$

где  $\Delta$  – заданное значение, принимаемое, как правило, равным  $0,01; 0,02; 0,05$ .

То есть под максимальным интервалом корреляции понимается временной интервал от начала координат до точки пересечения с линиями  $\Delta$  или  $-\Delta$ , после которой нормированная корреляционная функция не выходит из коридора  $[-\Delta, \Delta]$ . На рисунке 9.1 поясняется, каким образом определяется максимальный интервал корреляции для колебательной модели корреляционной функции  $\rho_x(\tau, \lambda_5, \omega_{0,5}) = e^{-\lambda_5|\tau|} \cos(\omega_{0,5}\tau)$  при  $\lambda_5 = 1$ ,  $\omega_{0,5} = 5$ ,  $\Delta = 0,05$ .

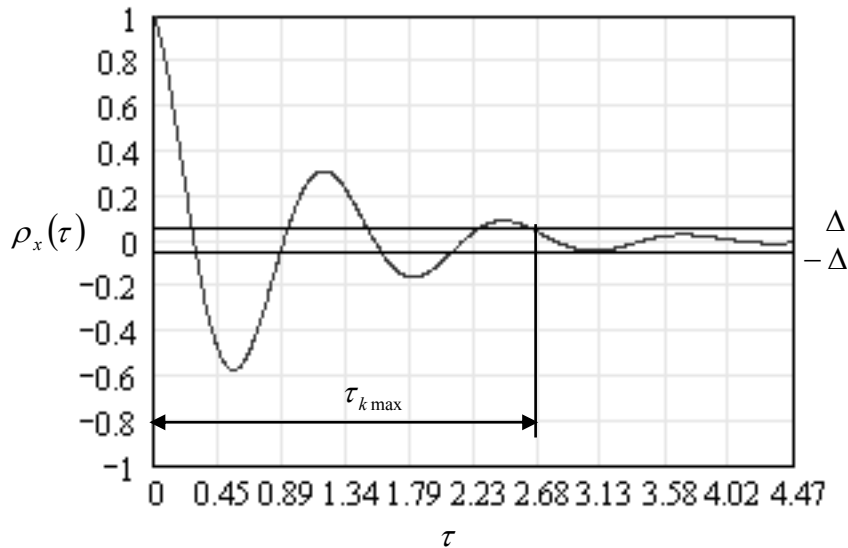


Рисунок 9.1 - Максимальный интервал корреляции

Аналитические выражения  $\tau_{k \max}$  для типовых моделей  $\rho_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$  приведены в таблице 9.1.

Максимальные интервалы корреляции типовых моделей корреляционных функций

Таблица 9.1

№	Вид модели $\rho_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$	$\Delta = 0,01$	$\Delta = 0,02$	$\Delta = 0,05$
1	$e^{-\lambda_1 \tau }$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$
2	$e^{-\lambda_2 \tau } (1 + \lambda_2 \tau )$	$6,64/\alpha$	$5,84/\alpha$	$4,75/\alpha$
3	$e^{-\lambda_3 \tau } (1 - \lambda_3 \tau )$	$6,27/\alpha$	$5,40/\alpha$	$4,14/\alpha$
4	$e^{-\lambda_4 \tau } \left( 1 + \lambda_4 \tau  + \frac{\lambda_4^2 \tau^2}{3} \right)$	$8,03/\alpha$	$7,14/\alpha$	$5,92/\alpha$
5	$e^{-\lambda_5 \tau } \cos(\omega_{0,5}\tau)$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$
6	$e^{-\lambda_6 \tau } \left( \cos(\omega_{0,6}\tau) + \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}} \sin(\omega_{0,6} \tau ) \right)$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$
7	$e^{-\lambda_7 \tau } \left( \cos(\omega_{0,7}\tau) - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}} \sin(\omega_{0,7} \tau ) \right)$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$

Часто под интервалом корреляции понимается основание прямоугольника с высотой, равной единице, площадь которого равновелика площади фигуры, определяемой нормированной КФ [48, 49]:

$$\tau_k^{(2)} = \int_0^{\infty} \rho(\tau) d\tau. \quad (9.2)$$

Графическая интерпретация величины  $\tau_k^{(2)}$  дана на рисунке 9.2.



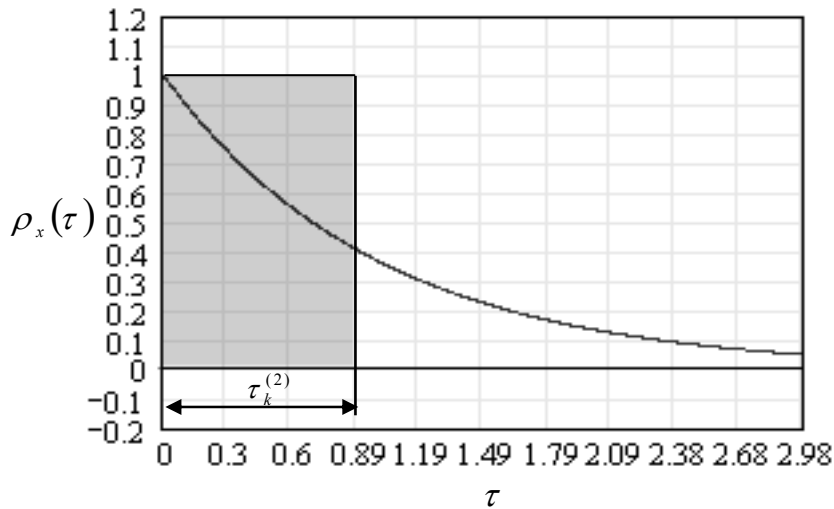


Рисунок 9.2 - Интервал корреляции  $\tau_k^{(2)}$

Отметим, что для некоторого класса процессов  $\tau_k^{(2)} = 0$  (например, для колебательных моделей, площадь положительной и отрицательной части которых равна), что свидетельствует об отсутствии корреляции между сечениями процесса. Однако это не так, корреляция есть, и это подтверждает  $\tau_{k \max} > 0$ . Следовательно, при оценке длительности существования корреляционной функции интервал корреляции  $\tau_k^{(2)}$  целесообразно применять лишь при анализе случайных процессов с монотонными корреляционными функциями.

Для устранения отмеченного недостатка в [48] были предложены следующие определения интервалов корреляции:

$$\tau_k^{(3)} = \int_0^{\infty} |\rho_x(\tau)| d\tau, \quad (9.3)$$

$$\tau_k^{(4)} = \int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) d\tau. \quad (9.4)$$

Графическая интерпретация величины  $\tau_k^{(3)}$  приведена на рисунке 9.3.

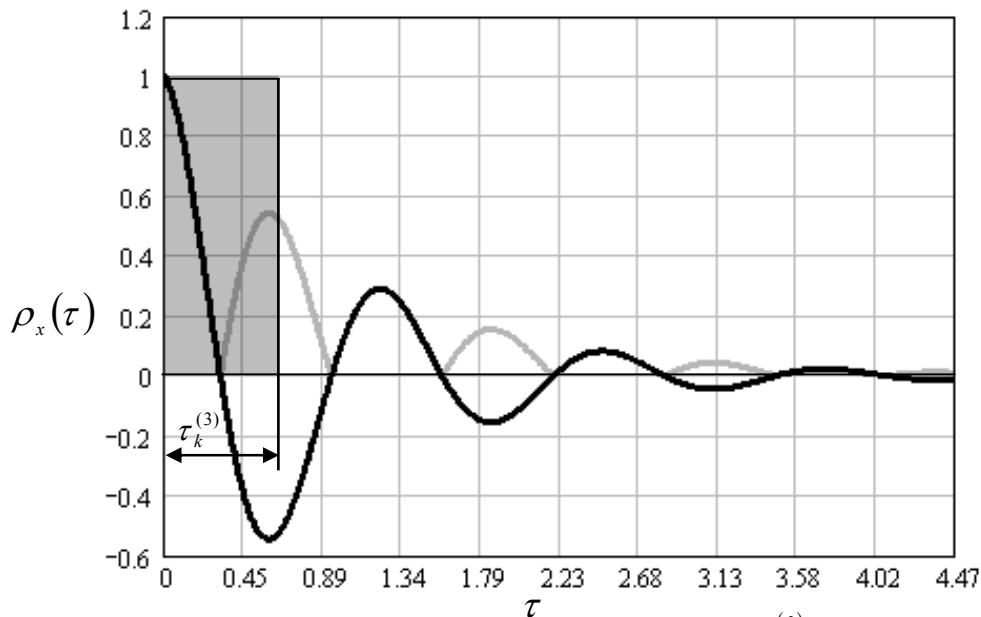


Рисунок 9.3 - Интервал корреляции  $\tau_k^{(3)}$

Анализ выражений (1.131) и (1.133) показывает, что аналитическая оценка длительности существования корреляционной функции затруднена, особенно для колебательных моделей корреляционных функций. От этого недостатка свободно определение  $\tau_k^{(4)}$ . Поэтому, несмотря на то, что  $\tau_k^{(4)}$  дает заниженные результаты, в технических приложениях он применяется значительно чаще, чем  $\tau_k^{(3)}$ . Значения интервалов корреляции  $\tau_k^{(2)}$  и  $\tau_k^{(4)}$  для типовых моделей корреляционных функций приведены в таблице 9.2.

Интервалы корреляции для типовых моделей корреляционных функций

Таблица 9.2

№	Вид модели $\rho_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$	$\tau_k^{(2)}$	$\tau_k^{(4)}$
1	$e^{-\lambda_1 \tau }$	$\frac{1}{\lambda_1}$	$\frac{1}{2\lambda_1}$
2	$e^{-\lambda_2 \tau } (1 + \lambda_2 \tau )$	$\frac{2}{\lambda_2}$	$\frac{5}{4\lambda_2}$
3	$e^{-\lambda_3 \tau } (1 - \lambda_3 \tau )$	0	$\frac{1}{4\lambda_3}$
4	$e^{-\lambda_4 \tau } \left( 1 + \lambda_4 \tau  + \frac{\lambda_4^2\tau^2}{3} \right)$	$\frac{8}{3\lambda_4}$	$\frac{7}{4\lambda_4}$
5	$e^{-\lambda_5 \tau } \cos(\omega_{0,5}\tau)$	$\frac{\lambda_5}{\lambda_5^2 + \omega_{0,5}^2}$	$\frac{2\lambda_5^2 + \omega_{0,5}^2}{4\lambda_5(\lambda_5^2 + \omega_{0,5}^2)}$
6	$e^{-\lambda_6 \tau } \left( \cos(\omega_{0,6}\tau) + \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}} \sin(\omega_{0,6} \tau ) \right)$	$\frac{2\lambda_6}{\lambda_6^2 + \omega_{0,6}^2}$	$\frac{5\lambda_6^2 + \omega_{0,6}^2}{4\lambda_6(\lambda_6^2 + \omega_{0,6}^2)}$
7	$e^{-\lambda_7 \tau } \left( \cos(\omega_{0,7}\tau) - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}} \sin(\omega_{0,7} \tau ) \right)$	0	$\frac{1}{4\lambda_7}$

В таблице 9.3 показано, во сколько раз  $\tau_{kmax}$  больше  $\tau_k^{(2)}$  и  $\tau_k^{(4)}$  ( $\Delta = 0,05$ ).

Таблица 9.3

№	Вид модели $\rho_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$	$\tau_{kmax} / \tau_k^{(2)}$	$\tau_{kmax} / \tau_k^{(4)}$
1	$e^{-\lambda_1 \tau }$	3	6
2	$e^{-\lambda_2 \tau } (1 + \lambda_2 \tau )$	2,375	3,8
3	$e^{-\lambda_3 \tau } (1 - \lambda_3 \tau )$	$\infty$	16,56
4	$e^{-\lambda_4 \tau } \left( 1 + \lambda_4 \tau  + \frac{\lambda_4^2\tau^2}{3} \right)$	2,22	3,38
5	$e^{-\lambda_5 \tau } \cos(\omega_{0,5}\tau)$	$3(1 + \mu_5^2)$	$\frac{2(1 + \mu_5^2)}{2 + \mu_5^2}$

6	$e^{-\lambda_6 \tau } \left( \cos(\omega_{0,6}\tau) + \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}} \sin(\omega_{0,6} \tau ) \right)$	$1,5(1 + \mu_6^2)$	$\frac{12(1 + \mu_6^2)}{(5 + \mu_6^2)}$
7	$e^{-\lambda_7 \tau } \left( \cos(\omega_{0,7}\tau) - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}} \sin(\omega_{0,7} \tau ) \right)$	$\infty$	12

Отсюда видно, что  $\tau_k^{(2)}$  и  $\tau_k^{(4)}$  дают сильно заниженный результат по сравнению с  $\tau_{kmax}$ .

### 9.1.1. Интервалы корреляции

Определив параметры модели корреляционной функции в ортогональном базисе в виде (5.13) и воспользовавшись определением корреляционных характеристик, можно найти их аналитические выражения, содержащие только параметры модели.

Так выражение для оценки  $\hat{\tau}_k^{(2)}$  примет вид:

$$\hat{\tau}_k^{(2)} \approx \sum_{k=0}^m \beta_k \int_0^\infty \psi_k(\tau, \alpha) d\tau = \sum_{k=0}^m \beta_k W_k(0). \quad (9.5)$$

Аналитические выражения  $\tau_k^{(2)}$  для различных ортогональных базисов приведены в таблице 9.4.

Интервалы корреляции в различных ортогональных базисах

Таблица 9.4

№	$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\hat{\tau}_k^{(2)}$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{2}{\alpha} \sum_{k=0}^m (-1)^k b_k$
2	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{k+1} [(k+1) \bmod 2]$
3	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)(k+2)} [(k+2) \text{ div } 2]$
4	$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m b_k \frac{1}{(2k+1)}$
5	$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m b_k \frac{(-1)^k}{(k+1)}$
6	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(4k+1)}$
7	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(4k+3)}$
8	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m b_k \frac{1}{(k+1)}$
9	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m b_k \frac{1}{(2k+3)}$

10	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)^2} [(k+1) \bmod 2]$
11	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{b_k (-1)^k}{(k+1)^2 (k+2)^2} [(k+2) \operatorname{div} 2]^2$

Конечное число членов разложения ряда (5.13)  $m$  приводит к погрешности от смещенности в определении интервала корреляции, которую оценим в соответствии с выражением:

$$\gamma_{см} = \frac{\hat{\tau}_k^{(2)} - \tau_k^{(2)}}{\tau_k^{(2)}}. \quad (9.6)$$

Определим погрешность от смещенности, в качестве примера, для ортогонального базиса Лагерра (частное сообщение Волкова И.И.).

Для НКФ  $\rho_{x1}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}$   $\tau_k^{(2)} = \frac{1}{\lambda}$ , а коэффициенты разложения [22, 23]

$$\beta_k = \frac{\alpha}{\lambda + \alpha/2} \left( \frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right)^k. \quad (9.7)$$

Подставив выражение (9.3) в (9.1), получим

$$\hat{\tau}_k^{(2)} = \frac{2}{\alpha} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{\alpha}{\lambda + \alpha/2} \cdot \left( \frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right)^k (-1)^k = \frac{1 - \left( \frac{\alpha/2 - \lambda}{\alpha/2 + \lambda} \right)^{m+1}}{\lambda}. \quad (9.8)$$

Погрешность от смещенности в соответствии с (9.2) примет вид:

$$\gamma_{см} = - \left( \frac{\alpha/2 - \lambda}{\alpha/2 + \lambda} \right)^{m+1}. \quad (9.9)$$

При произвольном значении  $\alpha$   $\gamma_{см}$  может принимать достаточно большое значение.

Определим  $\alpha$  в результате решения уравнения  $\beta_0 = 1$  [22, 23]. Отсюда

$$\alpha = 2\lambda. \quad (9.10)$$

Погрешность от смещенности в этом случае:  $\gamma_{см} = 0$ .

Таким образом, выбор параметра  $\alpha$  для данной модели дает возможность получить принципиально нулевую погрешность.

Для второй типовой модели  $\rho_{x2}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} (1 + \lambda|\tau|)$   $\tau_k^{(2)} = \frac{2}{\lambda}$ ,

$$\beta_k = \frac{\alpha}{\lambda + \alpha/2} \cdot \left( \frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right)^{k-1} \left\{ \frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \cdot \frac{2\lambda + \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} - k \frac{\alpha\lambda}{(\lambda + \alpha/2)^2} \right\}, \quad (9.11)$$

$$\hat{\tau}_k^{(2)} = \frac{2}{\lambda} - \frac{2}{\lambda} \left( \frac{\alpha/2 - \lambda}{\alpha/2 + \lambda} \right)^{m+1} - \frac{(m+1)\alpha}{(\alpha/2 + \lambda)^2} \left( \frac{\alpha/2 - \lambda}{\alpha/2 + \lambda} \right)^m, \quad (9.12)$$

$$\gamma_{см} = - \frac{1}{\alpha/2 + \lambda} \left( \frac{\alpha/2 - \lambda}{\alpha/2 + \lambda} \right)^m \left[ \alpha/2 - \lambda + \frac{(m+1)\alpha\lambda}{2(\alpha/2 + \lambda)} \right]. \quad (9.13)$$

Найдем  $\alpha$  из условия  $\beta_0 = 1 - \alpha = 2\lambda(\sqrt{2} - 1)$  [22, 23]. Подставив  $\alpha$  в (9.13), получим:

$$\gamma_{cm} = -\frac{(m-1)}{2(\sqrt{2}+1)^{m+1}}(-1)^m. \quad (9.14)$$

Если  $m=1$   $\gamma_{cm}=0$ . При  $m \rightarrow \infty$   $\gamma \rightarrow 0$ .

Погрешность  $\gamma_{cm}$ , как следует из (9.14), достигает минимума при

$$n = 1 + \frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})}, \quad \gamma_{cm \min} = \frac{1}{2e(3+2\sqrt{2})\ln(1+\sqrt{2})} < 1.$$

Для третьей типовой модели  $\rho_{x3}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}(1 - \lambda|\tau|)$   $\tau_k^{(2)} = 0$ ,

$$\beta_k = \frac{\alpha^2/2}{(\lambda + \alpha/2)^2} \left[ \left( \frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right)^k + \frac{2k\lambda}{(\lambda + \alpha/2)} \left( \frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right)^{k-1} \right], \quad (9.15)$$

$$\tau_k^{(2)} = \frac{(m+1)\alpha}{(\lambda + \alpha/2)^2} \cdot \left( \frac{\alpha/2 - \lambda}{\alpha/2 + \lambda} \right)^m. \quad (9.16)$$

Нетрудно видеть, что при произвольном  $\alpha$   $\tau_k^{(2)} \neq 0$ . Найдем  $\alpha$  из условия  $\beta_0 = 1 - \alpha = 2\lambda(1 + \sqrt{2})$  [22, 23].

Величина оценки интервала корреляции в этом случае будет равна:

$$\hat{\tau}_k^{(2)} = \frac{1}{\lambda} \frac{m+1}{(\sqrt{2}+1)^{m+1}} \quad (9.17)$$

Как следует из (9.17) при  $m \rightarrow \infty$   $\hat{\tau} \rightarrow 0$ , то есть оценка стремится к идеальной.

Для типовой модели  $\rho_{x5}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$   $\tau_k^{(2)} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega_0^2}$ ,

$$\beta_k = \frac{\alpha/2}{\lambda + \alpha/2 - j\omega_0} \left( \frac{\lambda - \alpha/2 - j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 + j\omega_0} \right)^k + \frac{\alpha/2}{\lambda + \alpha/2 + j\omega_0} \left( \frac{\lambda - \alpha/2 + j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 + j\omega_0} \right)^k, \quad (9.18)$$

$$\hat{\tau}_k^{(2)} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega_0^2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\lambda - j\omega_0} \left( \frac{\alpha/2 - \lambda + j\omega_0}{\alpha/2 + \lambda - j\omega_0} \right)^{m+1} + \frac{1}{\lambda + j\omega_0} \left( \frac{\alpha/2 - \lambda - j\omega_0}{\alpha/2 + \lambda + j\omega_0} \right)^{m+1} \right] \quad (9.19)$$

Погрешность от смещенности равна:

$$\gamma_{cm} = \frac{1}{2\lambda} \left[ (\lambda + j\omega_0) \left( \frac{\alpha/2 - \lambda + j\omega_0}{\alpha/2 + \lambda - j\omega_0} \right)^{m+1} + (\lambda - j\omega_0) \left( \frac{\alpha/2 - \lambda - j\omega_0}{\alpha/2 + \lambda + j\omega_0} \right)^{m+1} \right] \quad (9.20)$$

Найдем  $\alpha$  из условия  $\beta_0 = 1 - \alpha = 2\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}$  [22,23].

В результате получим:

$$\gamma_{cm} = \frac{jm+1}{2\lambda} \left( \frac{\omega_0}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}} \right)^{m+1} \left[ \lambda + j\omega_0 + (-1)^{m+1} \lambda - (-1)^{m+1} j\omega_0 \right] \quad (9.21)$$

Величина погрешности  $\gamma_{cm}$ , как видно из (9.21), зависит от того, четным или нечетным будет число  $m$ .

При  $m=2n$ , получим:

$$\gamma_{cm} = (-I)^{n+1} \frac{\omega_0}{\lambda} \left( \frac{\omega_0}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}} \right)^{2n+1} = (-I)^{n+1} \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \left( \frac{\xi}{1 + \sqrt{1-\xi^2}} \right)^{2n+1} \quad (9.22)$$

а при нечетном  $m=2n+1$ :

$$\gamma_{cm} = (-I)^{n+1} \left( \frac{\omega_0}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}} \right)^{2(n+1)} = (-I)^{n+1} \left( \frac{\xi}{1 + \sqrt{1-\xi^2}} \right)^{2(n+1)} \quad (9.23)$$

где  $\xi = \frac{\omega_0}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$ .

Формулы (9.22) и (9.23) можно представить в виде:

$$\begin{cases} \gamma_{cm} = (-I)^{n+1} \frac{1-\psi}{\psi} \left( \frac{1-\psi}{1+\psi} \right)^n \\ \gamma_{cm} = (-I)^{n+1} \left( \frac{1-\psi}{1+\psi} \right)^{n+1} \end{cases} \quad (9.24)$$

где  $\psi = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}$ ,  $0 \leq \psi \leq 1$ .

Анализ погрешности от смещенности оценки  $\hat{\tau}_k^{(2)}$  показывает, что при  $n \rightarrow \infty$   $\gamma_{cm} \rightarrow 0$ . Однако при четном  $m$  погрешность от смещенности стремится к бесконечности при  $\lambda \rightarrow 1$  ( $\psi \rightarrow 0$ ), то есть при большом показателе колебательности корреляционной функции. Поэтому, с точки зрения повышения точности необходимо выбирать  $m=2n+1$ . Аналогичные рекомендации можно сделать и для других колебательных моделей корреляционных функций.

Воспользовавшись определением погрешности аппроксимации корреляционной функции ( $\mu(\tau) = 1$ )

$$\Delta = \int_0^\infty K_x^2(\tau) d\tau - A_m^2 \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2 \quad (9.25)$$

и выражением (9.4), в качестве оценки интервала корреляции можно принять выражение:

$$\tau_k^{(4)} \approx \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2. \quad (9.26)$$

Эта оценка будет тем точнее, чем меньше квадратическая погрешность аппроксимации корреляционной функции моделью вида (5.13). Заметим, что анализ этой погрешности и рекомендации по выбору оптимальных значений параметров модели представлен в лабораторной работе 5.

### 9.1.2. Оценка моментов корреляционных функций

Определив начальный момент  $n$ -го порядка в виде

$$\mu_n = \int_0^\infty \tau^n \rho_x(\tau) d\tau, \quad (9.27)$$

можно показать, что при аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра [22, 23]

$$\mu_n = \varphi_n(\alpha) \sum_{k=0}^m (-1)^k c_{nk} \beta_k. \quad (9.28)$$

Рекомендации по выбору параметров модели  $\alpha$ ,  $m$  и  $\beta_k$  аналогичны рекомендациям при определении интервала корреляции  $\hat{\tau}_k^{(2)}$ . Выражения для первых четырёх моментов представлены в таблице 9.5.

К определению моментов корреляционной функции

Таблица 9.5

$\mu_n$	$\varphi_n(\alpha)$	$c_{nk}$
$\mu_0$	$2/\alpha$	$1$
$\mu_1$	$4/\alpha^2$	$1+2k$
$\mu_2$	$16\alpha^3$	$1+2k+2k^2$
$\mu_3$	$32/\alpha^4$	$3+8k+6k^2+4k^3$

С учетом (9.21) выражения для корреляционных моментов в ортогональном базисе Лежандра и Дирихле равны:

$$\mu_n = \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s \frac{(-1)^s}{(2s+1)^{n+1}}, \quad (9.29)$$

$$\mu_n = \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} \frac{(-1)^s}{(s+1)^{n+1}}. \quad (9.30)$$

### 9.1.3. Оценка эквивалентной ширины спектра мощности случайного процесса

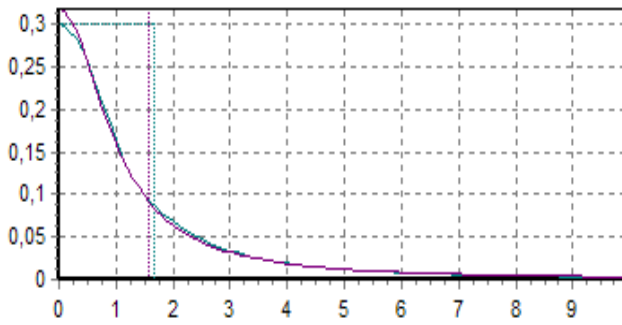
Наиболее часто для процессов, у которых спектральная плотность мощности сосредоточена вблизи нулевой частоты (рис. 9.4 а),  $\Delta\omega$ , определяют в виде:

$$\Delta\omega_s = \frac{\int_0^\infty S_x(\omega) d\omega}{S_x(0)} = \frac{\sigma_x^2}{2S_x(0)}. \quad (9.31)$$

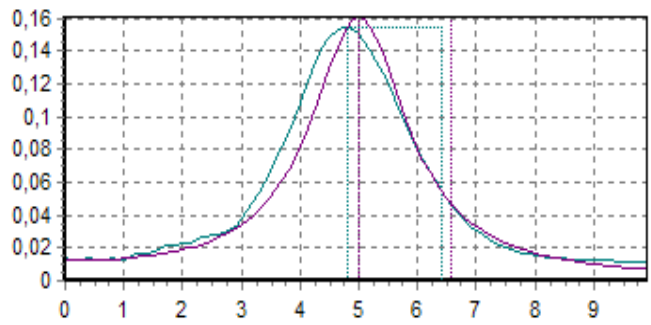
Если основная мощность процесса сосредоточена вблизи экстремальной частоты спектральной плотности мощности  $\omega_s$  (см. рис. 9.4 б), а не в нуле, выражение для оценки эквивалентной ширины примет вид:

$$\Delta\omega'_s = \omega_s + \Delta\omega_s / 2. \quad (9.32)$$

Выражения для экстремальной частоты и эквивалентной ширины спектра мощности для типовых моделей корреляционных функций представлены в таблицах 9.6 и 9.7 соответственно.



а)



б)

Рисунок 9.4 - Эквивалентная ширина спектра мощности

Экстремальные частоты

Таблица 9.6

№	$\rho_x(\tau)$	$\omega_s$
1	$e^{-\lambda \tau }$	0
2	$e^{-\lambda \tau }(1 + \lambda \tau )$	0
3	$e^{-\lambda \tau }(1 - \lambda \tau )$	$\alpha$
4	$e^{-\lambda \tau }(1 + \lambda \tau  + \lambda^2\tau^2/3)$	0
5	$e^{-\lambda \tau } \cos \omega_0 \tau$	$\sqrt{2\omega_0 \sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} - (\omega_0^2 + \alpha^2)}$
6	$e^{-\lambda \tau }(\cos \omega_0 \tau + \lambda/\omega_0 \sin \omega_0  \tau )$	$\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$
7	$e^{-\lambda \tau }(\cos \omega_0 \tau - \lambda/\omega_0 \sin \omega_0  \tau )$	$\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2}$

Эквивалентная ширина спектра мощности

Таблица 9.7

№ КФ	$\Delta\omega'_s = \omega_s + \frac{\Delta\omega'_s}{2}$
1	$\frac{\pi\alpha}{2}$
2	$\frac{\pi\alpha}{4}$
3	$\frac{\alpha(2\sqrt{2} + 9\pi)}{4}$
4	$\frac{3\pi\alpha}{16}$
5	$\omega_s + \frac{\pi[\alpha^2 + (\omega_s - \omega_0)^2][\alpha^2 + (\omega_s + \omega_0)^2]}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_s^2 + \omega_0^2)}$



6	$\frac{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + \frac{\pi \left[ \alpha^2 + \left( \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} - \omega_0 \right)^2 \right] \left[ \alpha^2 + \left( \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + \omega_0 \right)^2 \right]}{8\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}}{8\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$
7	$\frac{\sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} + \frac{\pi \left[ \alpha^2 + \left( \sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} - \omega_0 \right)^2 \right] \left[ \alpha^2 + \left( \sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} + \omega_0 \right)^2 \right]}{8\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}}{8\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$

Более точно эквивалентную ширину спектра мощности исследуемого сигнала для колебательных моделей КФ можно определить в соответствии с выражением

$$\Delta\omega_s = \omega_s + \Delta\omega'_s = \omega_s + \frac{\int_{\omega_s}^{\infty} S_x(\omega) d\omega}{S_x(\omega_s)}. \quad (9.33)$$

С учетом определения спектральной функции формула (9.33) преобразуется к виду:

$$\Delta\omega_s = \omega_s + \frac{F_x(\infty) - F_x(\omega_s)}{S_x(\omega_s)} = \omega_s + \frac{0,5 - F_x(\omega_s)}{S_x(\omega_s)}. \quad (9.34)$$

В таблице 9.8 приведены аналитические выражения эквивалентной ширины спектра  $\Delta\omega'_s$  для колебательных моделей КФ, полученные с использованием формулы (9.33), (9.34).

Аналитические выражения для оценки эквивалентной ширины спектра

Таблица 9.8

№ КФ	$\Delta\omega'_s$
3	$2\lambda \left( 1 + \frac{\pi}{4} \right)$
5	$\omega_s + \frac{\frac{1}{2} \left[ \frac{\arctg\left(\frac{\omega_s - \omega_0}{\lambda}\right) + \arctg\left(\frac{\omega_s + \omega_0}{\lambda}\right) \right]}{2\pi}}{S_x(\omega_s)}$
6	$\omega_s + \frac{\frac{1}{2} \left[ \frac{\lambda \left[ \ln(\lambda^2 + (\omega_s - \omega_0)^2) - \ln(\lambda^2 + (\omega_s + \omega_0)^2) \right] - 2\omega_0 \left[ \arctg\left(\frac{\omega_s - \omega_0}{\lambda}\right) + \arctg\left(\frac{\omega_s + \omega_0}{\lambda}\right) \right]}{4\pi\omega_0}} \right]}{S_x(\omega_s)}$
7	$\omega_s + \frac{\frac{1}{2} \left[ \frac{\lambda \left[ \ln(\lambda^2 + (\omega_s - \omega_0)^2) - \ln(\lambda^2 + (\omega_s + \omega_0)^2) \right] + 2\omega_0 \left[ \arctg\left(\frac{\omega_s - \omega_0}{\lambda}\right) + \arctg\left(\frac{\omega_s + \omega_0}{\lambda}\right) \right]}{4\pi\omega_0}} \right]}{S_x(\omega_s)}$

Определим мощность процесса, сосредоточенную в интервале  $(0; \Delta\omega_0')$

$$K\sigma_x^2 = \int_0^{\Delta\omega_0'} S_x(\omega) d\omega. \quad (9.35)$$

Значения коэффициента  $K$  типовых моделей КФ приведены в таблице 9.9.

Значения коэффициента мощности

Таблица 9.9

Номер модели	$\rho_x(\tau)$	$K$
1	$e^{-\lambda \tau }$	0,32
2	$e^{-\lambda \tau } (1 + \lambda \tau )$	0,367
3	$e^{-\lambda \tau } (1 - \lambda \tau )$	0,33
4	$e^{-\lambda \tau } \left( 1 + \lambda \tau  + \frac{\lambda^2 \tau^2}{3} \right)$	0,378
5	$e^{-\lambda \tau } \cos(\omega\tau)$	0,4
6	$e^{-\lambda \tau } \left( \cos(\omega\tau) + \frac{\lambda}{\omega} \sin(\omega\tau) \right)$	0,436
7	$e^{-\lambda \tau } \left( \cos(\omega\tau) - \frac{\lambda}{\omega} \sin(\omega\tau) \right)$	0,365

Заметим, что коэффициент  $K$  это значение нормированной спектральной функции в точке  $\Delta\omega_0'$ . На рисунке 9.5 представлена нормированная спектральная функция и соответствующий коэффициент мощности для третьей модели ( $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} (1 - \lambda \cdot |\tau|)$ ,  $\lambda = 1$ ). Этому значению  $K = 0,33$  соответствует значение эквивалентной ширины спектра мощности  $\Delta\omega_0' = 3,571$ .

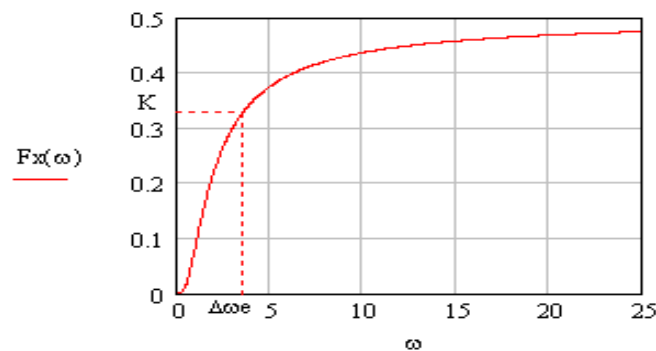


Рисунок 9.5 - Спектральная функция и соответствующий коэффициент мощности для третьей модели ( $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} (1 - \lambda \cdot |\tau|)$ ,  $\lambda = 1$ )

Рассмотрим еще один способ определения эквивалентной ширины спектра мощности случайного процесса, основанной на применении ортогональной модели спектральной плотности мощности.

Представив модель спектральной плотности в ортогональном базисе Лагерра в виде [21]

$$S_x(\omega) = \frac{2\sigma_x^2 \cos \varphi}{\alpha \pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \cos(2k+1)\varphi, \quad (9.36)$$

где  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2\omega}{\alpha}$ , (9.37)

определим эквивалентную ширину спектра мощности в соответствии с определением (9.26). С учетом выражений (9.27) и (9.28) определим

$$J = \int_{\omega_s}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = \frac{2\sigma_x^2}{\alpha \pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \int_{\omega_s}^{\infty} \cos \varphi \cos(2k+1)\varphi d\omega. \quad (9.38)$$

Из выражения (9.37), следует, что

$$\omega = \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

Отсюда

$$d\omega = \frac{\alpha}{2 \cos^2 \varphi} d\varphi.$$

Следовательно,

$$J = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \int_{\varphi_s}^{\pi/2} \frac{\cos(2k+1)\varphi}{\cos \varphi} d\varphi. \quad (9.39)$$

где  $\varphi_s = \operatorname{arctg} \frac{2\omega_s}{\alpha}$ .

В соответствии с 2.539.7 [5]

$$J1_k = \int \frac{\cos(2k+1)\varphi}{\cos \varphi} d\varphi = \begin{cases} \varphi + c, & \text{если } k=0; \\ 2 \sum_{s=1}^k (-1)^{k-s} \frac{\sin 2s\varphi}{2s} + (-1)^k \varphi + c, & \text{если } k > 0. \end{cases} \quad (9.40)$$

Подставив пределы интегрирования, получим

$$J2_k = \int_{\varphi_s}^{\pi/2} \frac{\cos(2k+1)\varphi}{\cos \varphi} d\varphi = \begin{cases} \pi/2 - \varphi_s, & \text{если } k=0; \\ (-1)^k \pi/2 - 2 \sum_{s=1}^k (-1)^{k-s} \frac{\sin 2s\varphi_s}{2s} - (-1)^k \varphi_s, & \text{если } k > 0. \end{cases} \quad (9.41)$$

Подставив  $J2$  в  $J$ , получим

$$J = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \varphi_s - 2 \sum_{k=1}^m b_k \sum_{s=1}^k (-1)^s \frac{\sin 2s\varphi_s}{2s} \right]. \quad (9.42)$$

Тогда выражение для оценки эквивалентной ширины спектра мощности примет вид

$$\Delta \omega_s = \omega_s + \frac{\sigma_x^2}{\pi S_x(\omega_s)} \left[ \frac{\pi}{2} - \varphi_s - 2 \sum_{k=1}^m b_k \sum_{s=1}^k (-1)^s \frac{\sin 2s\varphi_s}{2s} \right]. \quad (9.43)$$

Для других ортогональных базисов, представив модель спектральной плотности мощности в виде (см. таблицу 9.1) и выполнив необходимые преобразования, выражение для оценки эквивалентной ширины спектра мощности представим в виде

$$\hat{\Delta\omega}_\vartheta = \omega_\vartheta + \frac{\sigma_x^2}{S_x(\omega_\vartheta)} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m b_k \left[ \psi_k(0, \alpha/\gamma)^k - \frac{2}{\pi} \sum_{s=0}^k A_{k,s} \arctg 2\omega_\vartheta \|\psi_s\|^2 \right] \right\}. \quad (9.44)$$

Принятые обозначения для выражения (9.43) представлены в таблице 9.10.

Принятые обозначения

Таблица 9.10

№	$\psi_k(\tau, \alpha/\gamma)$	$A_{k,s}$	$\arctg 2\omega_\vartheta \ \psi_s\ ^2$
1	$Leg_k(\tau, \alpha)$	$C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s$	$\arctg \frac{\omega_\vartheta}{\alpha(2s+1)}$
2	$D_k(\tau, \alpha)$	$C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s}$	$\arctg \frac{\omega_\vartheta}{\alpha(s+1)}$
3	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s$	$\arctg \frac{2\omega_\vartheta}{\gamma(4s+1)}$
4	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s$	$\arctg \frac{2\omega_\vartheta}{\gamma(4s+3)}$
5	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s$	$\arctg \frac{\omega_\vartheta}{\gamma(s+1)}$
6	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s$	$\arctg \frac{\omega_\vartheta}{\gamma(2s+1)}$
7	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s$	$\arctg \frac{\omega_\vartheta}{\gamma(2s+3)}$

Выражения для определения эквивалентной ширины спектра мощности случайного процесса в ортогональных базисах Сонина-Лагерра и Якоби  $(0, \beta)$  представлены в таблице 9.11.

Эквивалентная ширина спектра мощности случайного процесса в ортогональных базисах Сонина-Лагерра и Якоби  $(0, \beta)$

Таблица 9.11

№	$\psi_k(\tau, \gamma)$	$\hat{\Delta\omega}_\vartheta' = \hat{\Delta\omega}_\vartheta - \omega_\vartheta$	$\varphi_s$
1	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi S_x(\omega_\vartheta)} \left[ \frac{\pi}{2} - \varphi_s - 2 \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)} \sum_{s=0}^k C_{k+1}^{k-s} \frac{(-1)^s}{s} \cos^s \varphi \sin s\varphi \right]$	$\arctg \frac{2\omega_\vartheta}{\gamma}$
2	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi S_x(\omega_\vartheta)} \left[ \frac{\pi}{2} - \varphi_s - 4 \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)(k+2)} \sum_{s=0}^k C_{k+2}^{k-s} \frac{(-1)^s}{s} \cos^s \varphi \sin s\varphi \right]$	
3	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi S_x(\omega_\vartheta)} \left[ \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \varphi_s \right]$	$\arctg \frac{\omega_\vartheta}{\gamma(2s+1)}$
4	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi S_x(\omega_\vartheta)} \left[ \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)(k+2)} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \varphi_s \right]$	

5	$T_k(\tau, \gamma)$	$\begin{cases} \frac{\sigma_x^2}{\pi S_x(\omega_s)} \left[ \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^m b_k \varphi_{0,0} \right], k=0, \\ \frac{\sigma_x^2}{\pi S_x(\omega_s)} \left[ \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k \frac{k}{2k-s} C_{2k-s}^s (-4)^{k-s} \varphi_{k,s} \right], k \neq 0 \end{cases}$	$\arctg \frac{\omega_s}{\gamma(2(k-s)+1)}$
6	$U_k(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi S_x(\omega_s)} \left[ \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{k+1} \sum_{s=0}^k C_{2k-s+1}^s (-4)^{k-s} \varphi_{k,s} \right]$	

Отметим, что для широкополосных процессов с учетом соотношения неопределенности

$$\Delta\omega_s \tau_k^{(2)} = \frac{\pi}{2} \quad (9.45)$$

и выражения для определения интервала корреляции

$$\tau_k^{(2)} = \sum_{k=0}^m \beta_k W_k(0) \quad (9.46)$$

можно получить более простое выражение для оценки эквивалентной ширины спектра мощности в различных ортогональных базисах

$$\hat{\Delta\omega_s} = \frac{\pi}{2 \sum_{k=0}^m \beta_k W_k(0)}. \quad (9.47)$$

Эквивалентную ширину спектра мощности случайного процесса можно получить, воспользовавшись аппроксимацией спектральной плотности мощности в ортогональных базисах в виде

$$S_x(\tau) = S_x(\omega_s) \left( \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} I(\omega - \omega_s) \psi_k(\omega - \omega_s, \alpha_n) + \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} I(\omega_s - \omega) \psi_k(\omega_s - \omega, \alpha_n) \right), \quad (9.48)$$

где  $\omega_s$  - частота соответствующая последнему максимуму спектральной плотности мощности. По аналогии с определением интервала корреляции  $\tau_k^{(2)}$ , окончательно получим

$$\hat{\Delta\omega_s} = \omega_s + \sum_{k=0}^m \beta_k W_k(0). \quad (9.49)$$

## 9.2. Задание на самостоятельную работу

1. Для заданного ортогонального базиса, вида корреляционной функции, показателя колебательности  $\mu$ , воспользовавшись средствами Mathcad, найти выражения для оценки  $\alpha$ , коэффициентов разложения  $\{\beta_k\}_{k=0, \dots, m}$ ,  $\{b_k\}_{k=0, \dots, m}$  и соответствующие оценки интервалов корреляции  $\hat{\tau}_k^{(2)}$  и  $\hat{\tau}_k^{(4)}$ .

2. Определить относительные погрешности оценки интервалов корреляции  $\hat{\tau}_k^{(2)}$  и  $\hat{\tau}_k^{(4)}$ ,  $\gamma_{см}^{(1)}(m)$ ,  $\gamma_{см}^{(2)}(m)$ .

3. Для заданной модели спектральной плотности мощности с использованием параметров модели корреляционной функции определить  $\Delta\omega'_s$  по аналитиче-

ским выражениям и  $\Delta\omega$ , по параметрам ортогональной модели корреляционной функции.

4. Определить относительные погрешности оценки эквивалентной ширины спектра мощности по параметрам модели корреляционной функции  $\gamma_{см}^{(3)}(m)$ .

5. Найти параметры модели спектральной плотности мощности, корректирующие коэффициенты  $\zeta_k$ . Определить  $\Delta\omega$ , по параметрам модели спектральной плотности мощности.

6. Определить относительные погрешности оценки эквивалентной ширины спектра мощности  $\gamma_{см}^{(4)}(m)$ .

7. Оформить отчет.

### 9.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Основные соотношения.
4. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
5. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
6. Результаты расчета, представленные в графической форме.
7. Выводы.

Пример выполнения лабораторной работы 9 приведен в Приложении 15.

### 9.4. Контрольные вопросы

1. Поясните физический смысл интервалов корреляции.
2. В каких случаях целесообразно использовать каждое из описанных определений интервала корреляции?
3. Поясните физический смысл эквивалентной ширины спектра мощности случайного процесса.
4. Какой из способов определения эквивалентной ширины дает более точный результат? Почему?
5. Для чего необходимы аналитические соотношения для определения эквивалентной ширины спектра мощности?

## 10. ПОСТРОЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК С ПОМОЩЬЮ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ (АИС)

**Цель работы:** изучение методов и приобретение практических навыков построения ортогональных моделей корреляционно-спектральных характеристик временных рядов.

### 10.1 Теоретические основы лабораторной работы

В предлагаемой лабораторной работе решаются основные задачи корреляционно-спектрального анализа временных рядов.

Исследование алгоритмов проводится методом имитационного моделирования на ЭВМ, суть которого заключается в анализе их метрологических характеристик с использованием псевдослучайных последовательностей, сгенерированных с помощью ЭВМ.

Как правило, реализация этого метода включает следующие основные блоки:

- имитации входных процессов и внешних воздействий;
- реальных и идеальных моделей, а также их разности;
- формирования изменения параметров модели:
  - под воздействием внешних факторов;
  - в случае технологического разброса на множестве экземпляров;
  - в случае временной нестабильности;
- первичной статистической обработки для определения статистических характеристик наблюдаемых процессов при данных испытаниях;
- вторичной статистической обработки и управления машинным экспериментом:
  - совокупной обработки множества результатов экспериментов;
  - определения необходимого числа прогонов модели и принятия решений при последовательном планировании о продолжении или окончании эксперимента;
  - управления параметрами модели и значениями внешних факторов;
  - управления системным временем;
- датчик системного времени;
- управляющую программу, синхронизирующую процесс моделирования.

Функциональная схема системного моделирования, поясняющая взаимодействие отдельных блоков, представлена на рис. 10.1.

Сложность имитационной модели и затраты машинного времени при ее исследовании во многом будут зависеть от принципа имитационного моделирования.

Учитывая, что основным принципом проектирования АСНИ, ИИС, процессорных средств измерения является агрегатное проектирование [21], наиболее целесообразно при конструировании модели использовать принцип блочного моделирования, суть которого сводится к следующему:

- на основании декомпозиции АСНИ, ИИС, ПРИС создается библиотека моделей стандартных блоков для моделирования входных воздействий, дестабилизирующих факторов, блоков реальных систем;

- на основании разработанных моделей блоков конструируется модель системы в соответствии с ее структурой, с возможностью контроля промежуточных последовательностей, соответствующих реальным физическим точкам системы.

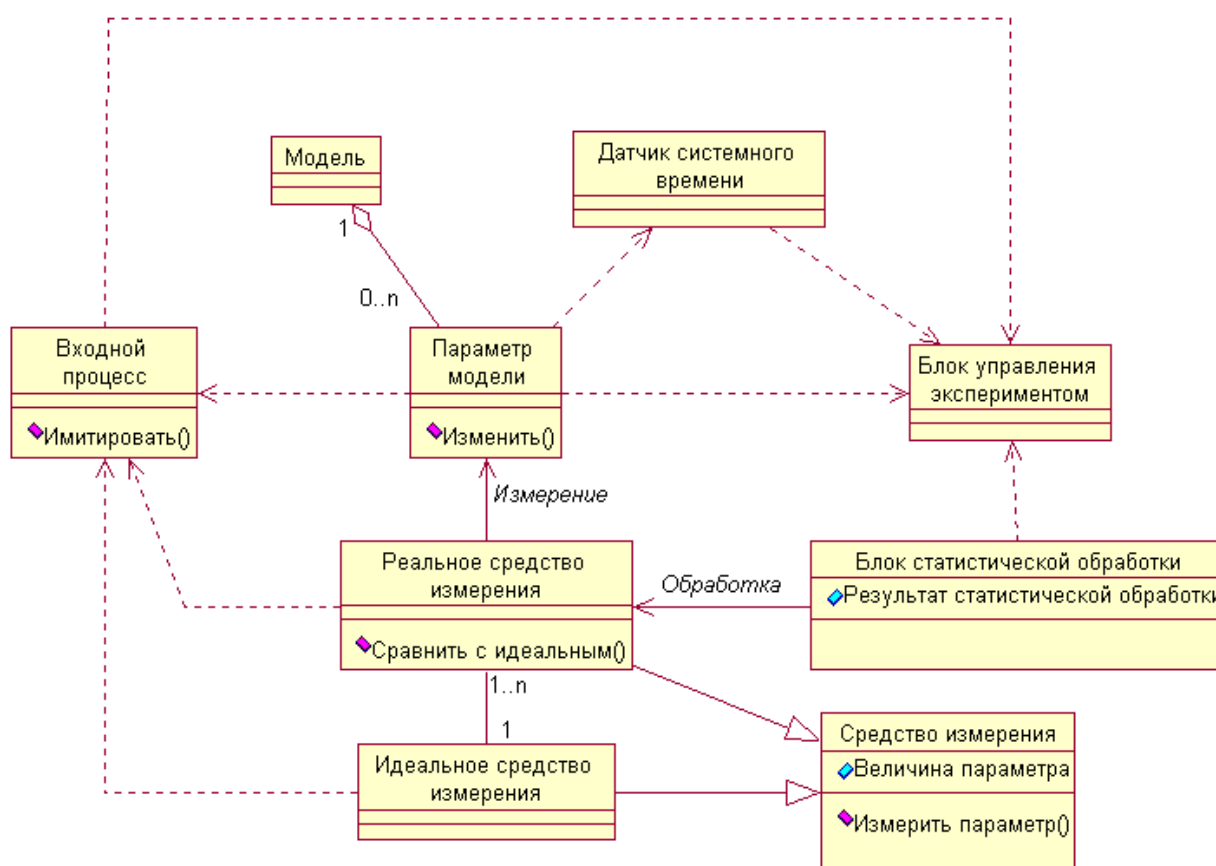


Рисунок 10.1 - Функциональная схема имитационного моделирования

Достоинствами блочных моделей являются:

- гибкость, простота изменения конфигурации модели системы, возможность прослеживания промежуточных результатов; соответствие математической модели;
- возможность унификации процедур моделирования путём создания библиотеки стандартных процедур;
- единообразие и простота построения моделей разнообразных структур;
- возможность автоматизации процедуры построения моделей систем.

К недостаткам блочного моделирования следует отнести:

- увеличение времени моделирования;
- необходимость большого объёма памяти для хранения библиотеки моделей.

Следует подчеркнуть, что затраты на моделирование, достоверность полученных результатов во многом зависят от принятых решений на этапе планирования эксперимента, особенно при определении необходимого числа испытаний, выборе входных воздействий и т.д.

Согласно методике [16], в качестве метрологической характеристики может выбираться максимальное значение модуля погрешностей оценки  $\hat{\Theta}$ :



$$\Delta = \max\{\Delta_j\} | j = 1, \dots, N, \quad (10.1)$$

где  $N$ -число испытаний, зависящее от доверительной информации. Так, если  $P_d = 0,95$ , то число испытаний равно 29 независимо от закона распределения погрешностей.

В общем случае, структура пакета прикладных программ имитационного моделирования алгоритмов оценивания вероятностных характеристик временных рядов, содержащего как обрабатывающие, так и управляющие программы, состоит из следующих основных блоков:

- задания входных воздействий с требуемыми характеристиками;
- первичной статистической обработки информации;
- вторичной статистической обработки информации;
- алгоритмов оценивания вероятностных характеристик;
- сервисных;
- определения методической погрешности и ее составляющих;
- определения инструментальных составляющих погрешности.

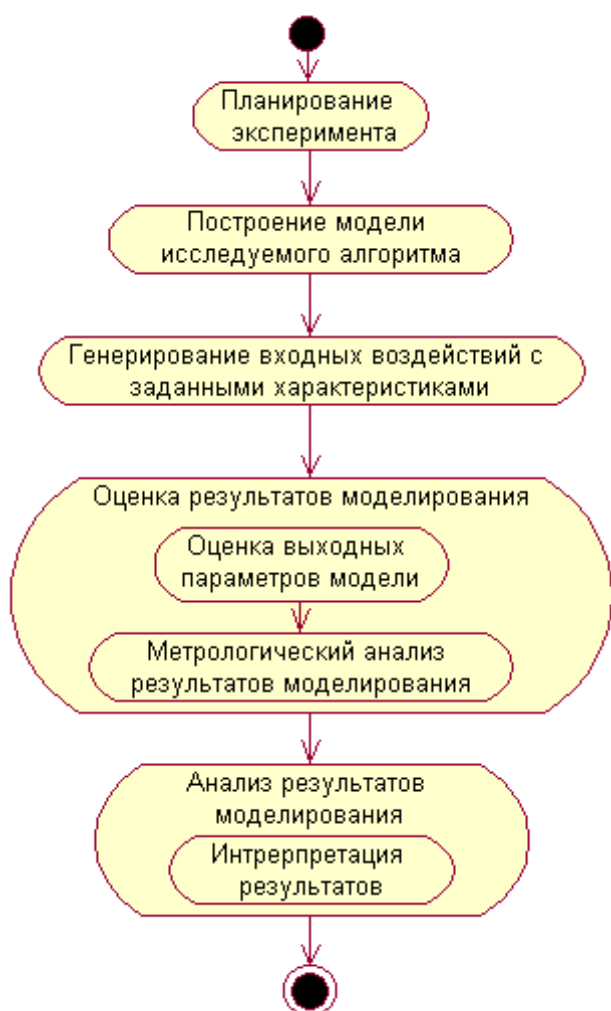


Рисунок 10.2 – Методика моделирования

новых типов средств измерения должно приниматься по результатам лабораторных исследований.

В самом общем виде выбор образцового сигнала осуществляется:

- выбором наилучшего сигнала из множества возможных входных сигналов, для обеспечения гарантированной погрешности результата измерения;
- формированием набора типовых сигналов, то есть наиболее часто встречающихся входных сигналов или сигналов, наиболее интересующих исследователя;
- формированием набора типовых сигналов, включающих в себя наилучший сигнал.

Основными требованиями, предъявляемыми к образцовым сигналам, являются следующие:

- заданный вид вероятностных характеристик;
- принадлежность к классу входных сигналов, для которых предназначено данное средство;
- стабильность во времени;
- отклонение текущих характеристик от расчетных не должно быть более допустимого.

При формировании случайных процессов с заданным видом корреляционной функции (спектральной плотности мощности), как правило, применяется метод фильтрации. При этом необходимо определить характеристики формирующего фильтра при известных характеристиках входного и выходного сигналов [21] (см. рис. 10.3).

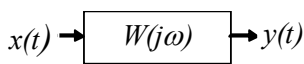


Рисунок 10.3

Известно, что спектральная плотность мощности выходного сигнала фильтра определяется в соответствии с выражением:

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega), \quad (10.2)$$

где  $S_x(\omega)$  - спектральная плотность мощности входного сигнала;

$|W(j\omega)|^2$  - квадрат модуля частотной характеристики формирующего фильтра.

Учитывая, что  $S_x(\omega)$ ,  $S_y(\omega)$  и  $|W(j\omega)|^2$  - чётные функции, их можно представить в виде:

$$\begin{cases} S_x(\omega) = \varphi(j\omega)\varphi(-j\omega); \\ S_y(\omega) = \psi(j\omega)\psi(-j\omega); \\ |W(j\omega)|^2 = W(j\omega)W(-j\omega). \end{cases} \quad (10.3)$$

Отсюда

$$W(j\omega) = \frac{\psi(j\omega)}{\varphi(j\omega)}. \quad (10.4)$$

Сложность частотной характеристики формирующего фильтра  $W(j\omega)$  во многом будет определяться видом  $S_x(\omega)$ . При использовании в качестве входного сигнала «белого» шума с  $S_x(\omega) = S_0$ , получим:

$$W(j\omega) = \frac{\psi(j\omega)}{\sqrt{S_0}}. \quad (10.5)$$

Для моделирования случайного процесса с помощью ЭВМ необходимо найти импульсную характеристику формирующего фильтра:

$$h(\tau) = \frac{1}{2\pi\sqrt{S_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (10.6)$$

Выходной сигнал формирующего фильтра может быть определен различными способами в зависимости от принятого способа преобразования аналогового фильтра в цифровой. Один из самых простых, но не эффективных способов в смысле временных затрат заключается в следующем:

$$y_j = \Delta\tau \sum_{i=0}^{NI} x_{j-i} h_i, \quad (10.7)$$

где  $NI$  - число отсчетов импульсной характеристики, зависящее от вида корреляционной функции;

$\Delta\tau$  - интервал дискретизации исследуемого процесса;

$h_i = h(i\Delta\tau)$  - значение импульсной переходной характеристики формирующего фильтра.

Значение интервала дискретизации зависит от вида корреляционной функции, значения её параметров, требуемой точности вычисления корреляционной функции  $\delta$  и способа интерполяции корреляционной функции между узлами. Минимальное количество требуемых ординат импульсной переходной характеристики при линейной интерполяции и различных погрешностях восстановления корреляционной функции представлено в таблице 10.1.

Поиски более быстродействующих алгоритмов моделирования ПСП с заданным видом корреляционной функции привели исследователей к использованию рекурсивной фильтрации [21]:

$$y_n = \sum_{i=0}^N a_i x_{n-i} - \sum_{i=1}^N b_i y_{n-i}. \quad (10.8)$$

Для нахождения коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$  (т.е. параметров фильтра) применяются, в основном, три класса методов: методы преобразования аналоговых фильтров в цифровые, прямые методы расчёта цифровых фильтров в  $Z$ -плоскости и методы, использующие алгоритмы оптимизации. В общем случае невозможно отдать предпочтение какому-либо одному из них. С учётом применимости этих методов в конкретных условиях и многих других факторов, каждый из них может оказаться наиболее подходящим. Однако большинство цифровых фильтров рассчитываются методом билинейного преобразования стандартных аналоговых фильтров. Это обстоятельство связано с тем, что в задачах статистического моделирования необходимо проектировать фильтры, для которых билинейные преобразования аналоговых фильтров уже известны.

Параметры и вид цифрового рекурсивного фильтра для основных моделей корреляционных функций представлены в Приложении 16.

Рассмотренные в предыдущих разделах алгоритмы для аппроксимации корреляционных функций ортогональными моделями предназначены для работы с **моделями КФ**. Однако часто исследователь имеет дело либо с **цифровыми данными**, полученными в ходе эксперимента с помощью информационно-измерительных систем, автоматизированных систем научных исследований, либо - в ходе **цифрового моделирования** того или иного процесса или явления.

И в первом и во втором случае исследователь имеет дело со случайными последовательностями

$$\{x_{ji}, t_{ji} / \Delta t_{ji}\}_{\substack{i=1, \dots, M \\ j=1, \dots, N}}, \quad (10.9)$$

где  $j$  - номер реализации;  $i$  - номер отсчета в  $j$ -ой реализации;  $t_{ji}$  - время отсчёта;

$$\Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji}. \quad (10.10)$$

При  $\Delta t_{ji} = \Delta t_0 = const$  исследователь имеет дело с **регулярной** временной последовательностью - регулярным временным рядом, примеры реализаций которого приведены на рис. 10.4.



Рисунок 10.4 - Примеры реализации регулярных случайных последовательностей

Выражения для оценки КФ при анализе последовательностей в зависимости от оператора усреднения примут вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{K}_{xyi}(J\Delta\tau) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_{ji} y_{j,i+J}; \\ \hat{K}_{xyj}(J\Delta\tau) &= \frac{1}{M-J-1} \sum_{i=1}^{M-J} x_{ji} y_{j,i+J}; \\ \hat{K}_{xycp}(J\Delta\tau) &= \frac{1}{N(M-J-1)} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-J} x_{ji} y_{j,i+J}. \end{aligned} \right. \quad (10.11)$$

Следует отметить, что при аппроксимации ВКФ с помощью ЭВМ не важно, какая характеристика аппроксимируется -  $t$ -текущая,  $j$  - текущая или средняя, - подход один и тот же.

В тех случаях, когда исследователь располагает только одной реализацией ( $j = const$ ), при проведении корреляционного анализа, как правило, используется мультипликативный алгоритм, инвариантный к закону распределения случайного процесса [55]:

При этом интервал дискретизации корреляционной функции, как правило, выбирают равным  $\Delta\tau = \Delta t_0$ .

Значение интервала дискретизации  $\Delta\tau$  зависит от вида корреляционной функции, значения её параметров, допустимой погрешности  $\delta$  и способа восстановления

корреляционной функции между узлами. Минимальное количество требуемых ординат корреляционной функции  $J_{max}$  при линейной интерполяции и различных погрешностях её восстановления представлено в таблице 10.1 [21].

Количество ординат корреляционной функции и интервалы дискретизации

Таблица 10.1

$\rho_x(\tau) \setminus \delta$	$\Delta\tau$	$\delta = 0,02$		$\delta = 0,05$	
		$\Delta\tau$	$J_{max}$	$\Delta\tau$	$J_{max}$
$e^{-\alpha \tau }$	$\frac{\sqrt{8\delta}}{\alpha}$	$\frac{0,4}{\alpha}$	9	$\frac{0,632}{\alpha}$	6
$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau )$	$\frac{\sqrt{8\delta}}{\alpha}$	$\frac{0,4}{\alpha}$	13	$\frac{0,632}{\alpha}$	9
$e^{-\alpha \tau }(1 - \alpha \tau )$	$\frac{\sqrt{8\delta/3}}{\alpha}$	$\frac{0,23}{\alpha}$	19	$\frac{0,365}{\alpha}$	13
$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau  + \alpha^2\tau^2/3)$	$\frac{\sqrt{24\delta}}{\alpha}$	$\frac{0,693}{\alpha}$	10	$\frac{1,095}{\alpha}$	7
$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0\tau,$ $e^{-\alpha \tau } \left( \cos \omega_0\tau \pm \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0\tau \right)$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{8\delta}{\mu^2 + 1}}$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{0,16}{\mu^2 + 1}}$	$47 \frac{\mu}{2\pi}$	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{0,4}{\mu^2 + 1}}$	$47 \frac{\mu}{2\pi}$

Для проверки качества генерирования ПСП представляется перспективным использование фазовых портретов. Под фазовым портретом будем понимать графическую зависимость, построенную в координатах:  $\rho_x(\tau)$  и  $\rho'_x(\tau)$ :

$$\rho'_x(\tau) = \Phi_x[\rho_x(\tau)]. \quad (10.12)$$

Следует отметить, что каждому типу корреляционных функций соответствует свой, уникальный фазовый портрет (см. рис. 10.5). На практике при построении фазового портрета вместо значения производных корреляционных функций возможно определение её приращений на заданном интервале.

Рассмотрим алгоритм построения КФ по параметрам модели спектральной плотности мощности (см. лабораторную работу 7).

Для этого представим модель СПМ в виде

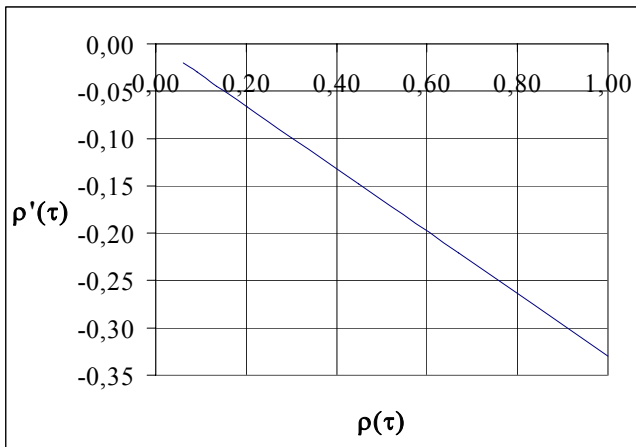
$$S_{ax}(\omega) = \sigma_x^2 \left( \sum_{k=0}^m C_k \cdot \psi_k(\omega, \alpha) I(\omega) + \sum_{k=0}^m C_k \cdot \psi_k(-\omega, \alpha) I(-\omega) \right), \quad (10.13)$$

где коэффициенты разложения  $C_k$  определяются выражением (7.24) (см. таблицы 7.6 – 7.7).

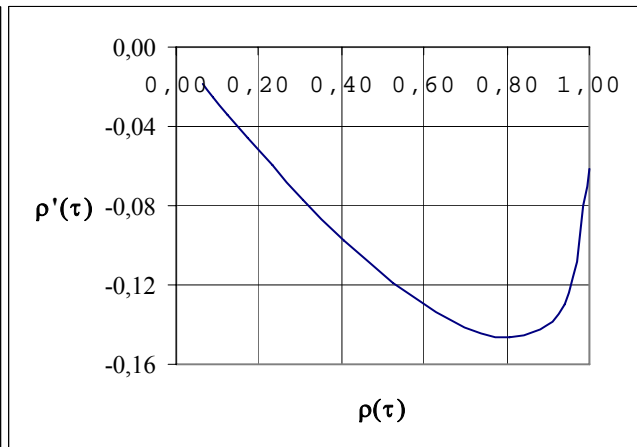
Подставив в выражение (7.2) выражение (10.13), выполнив преобразования, получим:

$$K_{ax}(\tau) = 2\sigma_x^2 \sum_{k=0}^m C_k \cdot \text{Re} W_k(j\tau). \quad (10.14)$$

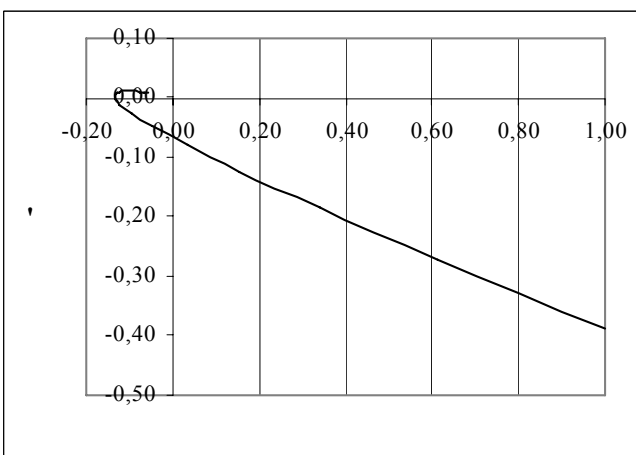
Следует отметить, что в автоматизированной системе для унификации (см. лабораторную работу 11)  $C_k$  являются коэффициентами разложения вещественной части спектра, совпадающей с СПМ.



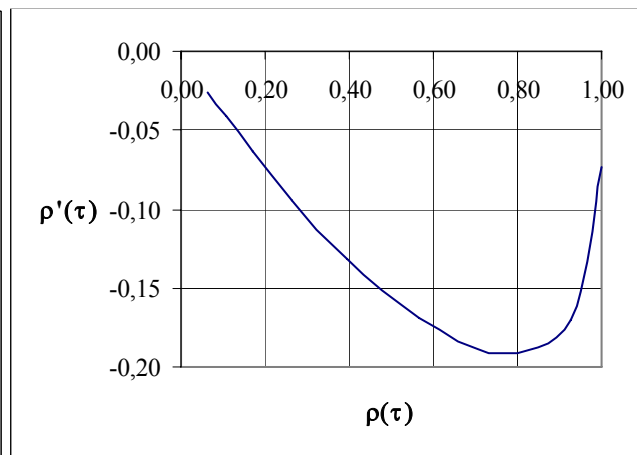
а)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \alpha\tau = 0,4$



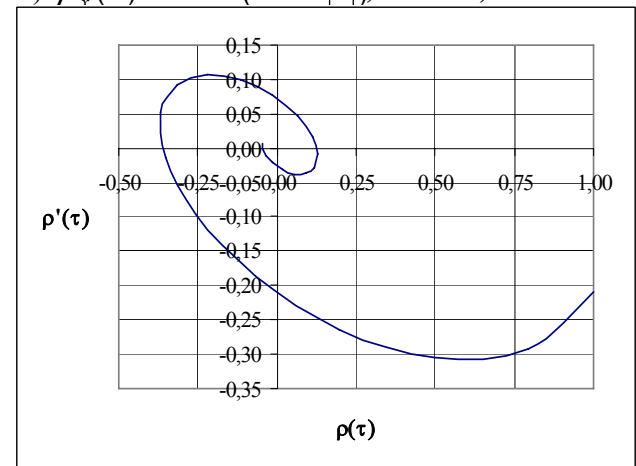
б)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|), \alpha\tau = 0,4$



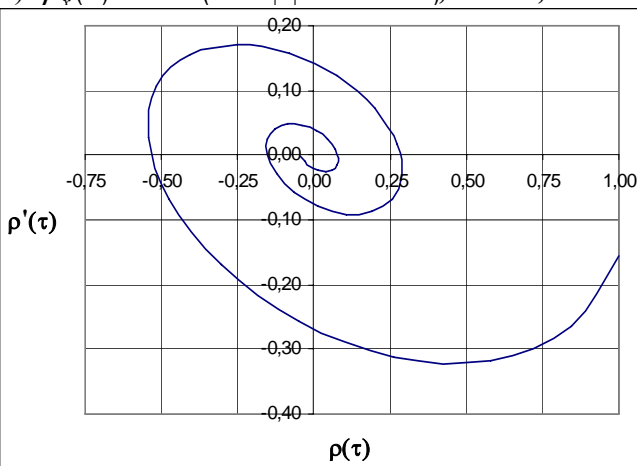
в)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|), \alpha\tau = 0,23$



г)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau| + \alpha^2\tau^2/3), \alpha\tau = 0,693$



д)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \mu = 3$



е)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \mu = 5$

Рисунок 10.5 – Фазовые портреты моделей КФ

Для выполнения лабораторной работы необходимо изучить автоматизированную систему корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах (см.

Приложение 17). Руководство пользователя приведено в Приложении 18, а формат вводимых и выводимых данных – в Приложении 19.

Основные алгоритмы, положенные в основу её работы, подробно описаны в лабораторных работах 2-9.

Следует отметить, что с помощью автоматизированной системы возможен корреляционно-спектральный анализ экспериментальных данных. Для этого необходимо ввести данные в соответствующем формате (см. Приложение 19), используя экранную форму «Filter setting». Пример корреляционно-спектральной обработки экспериментальных данных (см. Приложение 21) приведен в Приложении 20.

## 10.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать временной ряд с заданным видом корреляционной функции и со следующими параметрами -  $M = \text{ent}[\tau_{k_{max}} / \Delta\tau]$ ,  $N=5000$ ,  $\delta = 0,02$ .
2. Построить КФ и её фазовый портрет, сравнить с теоретическими кривыми.
3. Для заданного ортогонального базиса определить параметры модели и погрешность аппроксимации.
4. Определить интервалы корреляции, сравнить с теоретическими интервалами, найти относительную погрешность оценивания интервалов корреляции.
5. Найти корректирующие коэффициенты, обеспечивающие условие нормировки ортогональной модели КФ, и построить модель КФ.
6. Определить интервалы корреляции, сравнить с теоретическими интервалами, найти относительную погрешность оценивания интервалов корреляции.
7. Построить модель спектральной плотности мощности.
8. Определить экстремальную частоту, значение СПМ в точке, соответствующей экстремальной частоте, и эквивалентную ширину спектра мощности. Сравнить полученные результаты с теоретическими характеристиками, найти относительную погрешность оценивания обобщенных характеристик.
9. Передать действительную компоненту СПМ в подсистему аппроксимации составляющих СПМ и построить ортогональную модель действительной части СПМ.
10. Построить КФ и сравнить с теоретической.
11. При исследовании других ортогональных базисов необходимо повторить пункты 3 – 10.
12. Построить КФ «идеального» полосового шума.
13. Построить ортогональную модель КФ.
14. Построить ортогональную модель спектральной плотности мощности.
15. Пункты 13 – 14 повторить и выбрать наилучший базис.

## 10.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Результаты выполнения работы в автоматизированной системе, представленные в виде экранных форм.
4. Выводы.

#### 10.4. Контрольные вопросы

1. Какой метод положен в основу генерации временных рядов с заданным видом корреляционной функции?
2. Из каких соображений выбирают численное значение интервала дискретизации временного ряда?
3. Какой метод фильтрации применен в лабораторной работе?
4. Чем отличается метод имитационного моделирования от обработки экспериментальных данных?
5. С какой целью строятся фазовые портреты моделей?
6. Какая часть фазового портрета наиболее информативна?
7. Как по виду фазового портрета определить характер корреляционной функции: монотонная, колебательная?
8. Что из себя представляет «идеальный полосовой шум»?



## 11. ПОСТРОЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ВЗАИМНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК С ПОМОЩЬЮ АИС

**Цель работы:** изучение методов и приобретение практических навыков построения ортогональных моделей взаимных корреляционно-спектральных характеристик временных рядов.

### 11.1. Теоретические основы лабораторной работы

В предлагаемой лабораторной работе решаются основные задачи взаимного корреляционно-спектрального анализа временных рядов.

Для ее выполнения необходимо изучить автоматизированную систему корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах (см. Приложение 17).

Основные алгоритмы, положенные в основу её работы, подробно описаны в лабораторных работах 2, 3, 5, 6, 9, 10, 11.

Исследование алгоритмов проводится методом имитационного моделирования на ЭВМ с помощью АИС (см. Приложение 17).

Исходными данными для АИС являются коррелированные временные ряды с заданными корреляционными характеристиками.

Самый простой вариант решения этой задачи заключается в генерировании ПСП с заданным видом корреляционной функции и её задержке на заданный временной интервал [21, 22, 23].

В качестве критерия качества генерирования ПСП можно также воспользоваться косвенным методом:

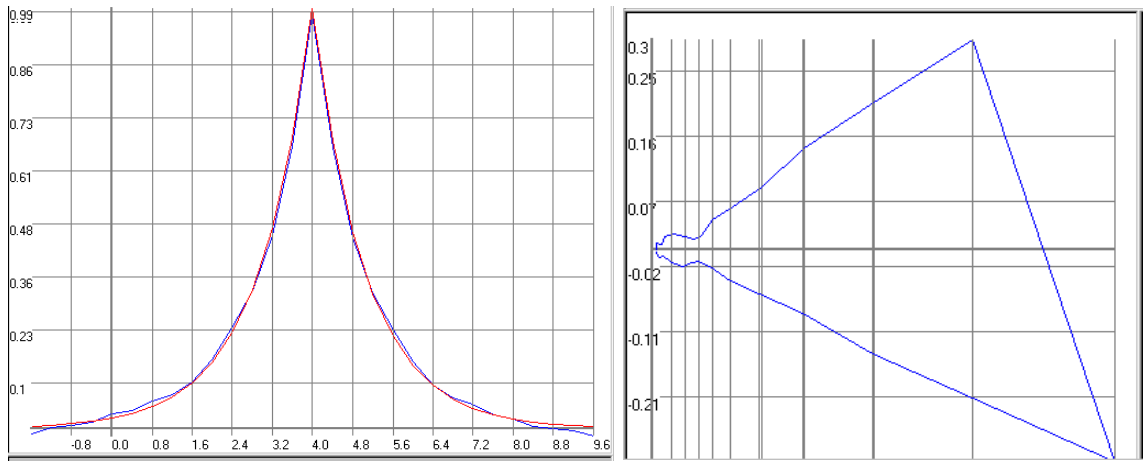
- оценить взаимную корреляционную функцию;
- аппроксимировать её заданным аналитическим выражением с параметрами, удовлетворяющими минимуму квадратической погрешности аппроксимации;
- сравнить найденные параметры модели с требуемыми значениями параметров корреляционной функции [21].

Вторым методом косвенной проверки качества генерирования двух процессов с заданным видом взаимной корреляционной функции является применение фазовых портретов [22, 23]. Методика проверки заключается в выполнении следующих этапов:

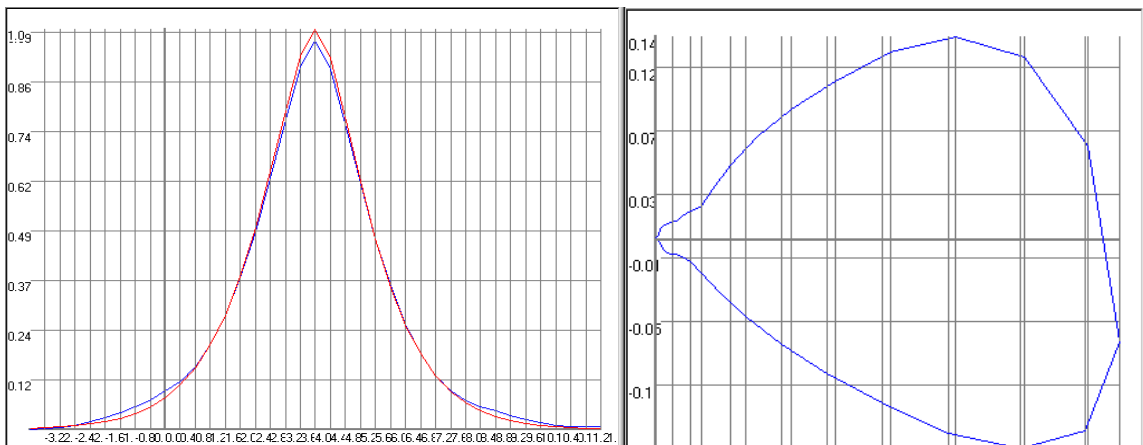
- генерирования ПСП с заданным видом корреляционной и взаимной корреляционной функций;
- построения фазового портрета по взаимной корреляционной функции;
- сравнения полученного фазового портрета с эталонным, определенным по аналитической модели требуемой взаимной корреляционной функции.

Преимущество такого способа проверки качества генерирования заключается в простоте, наглядности и отсутствии необходимости решать аппроксимативную задачу. На рис. 11.1 - 11.2 приведены примеры фазовых портретов типовых моделей взаимных корреляционных функций. Для сравнения приведены результаты аппроксимации взаимных корреляционных функций соответствующими параметрическими моделями.

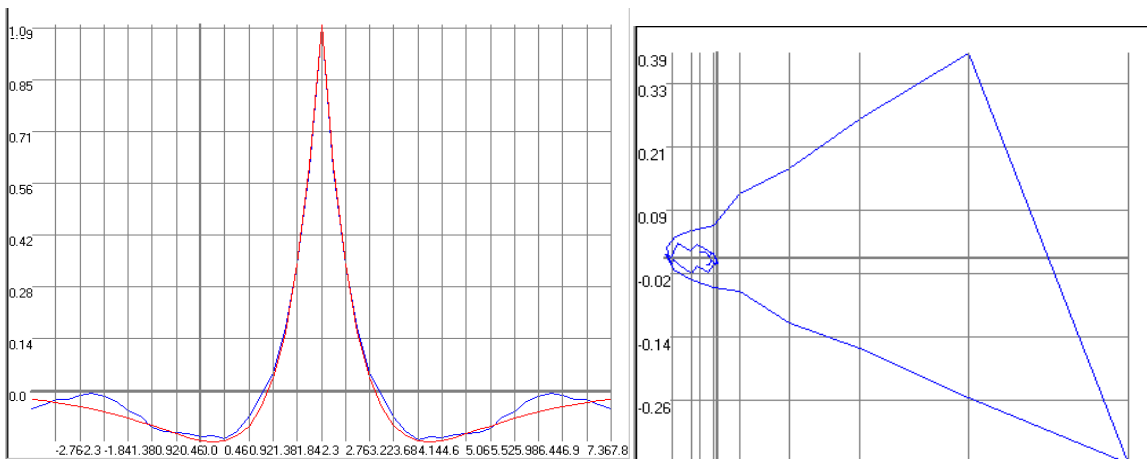
Следует отметить, что задача проверки качества подобным способом требует предварительного определения фазового портрета корреляционной функции для генерируемого процесса.



а)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau-\tau_m|}$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\tau_m = 10$

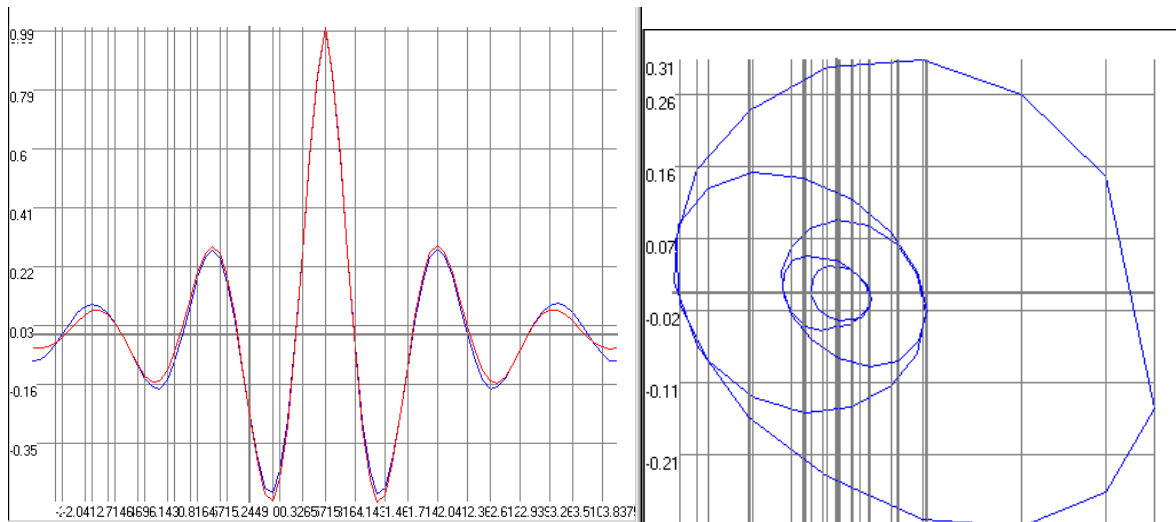


б)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau-\tau_m|}(1+\alpha|\tau-\tau_m|)$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\tau_m = 10$

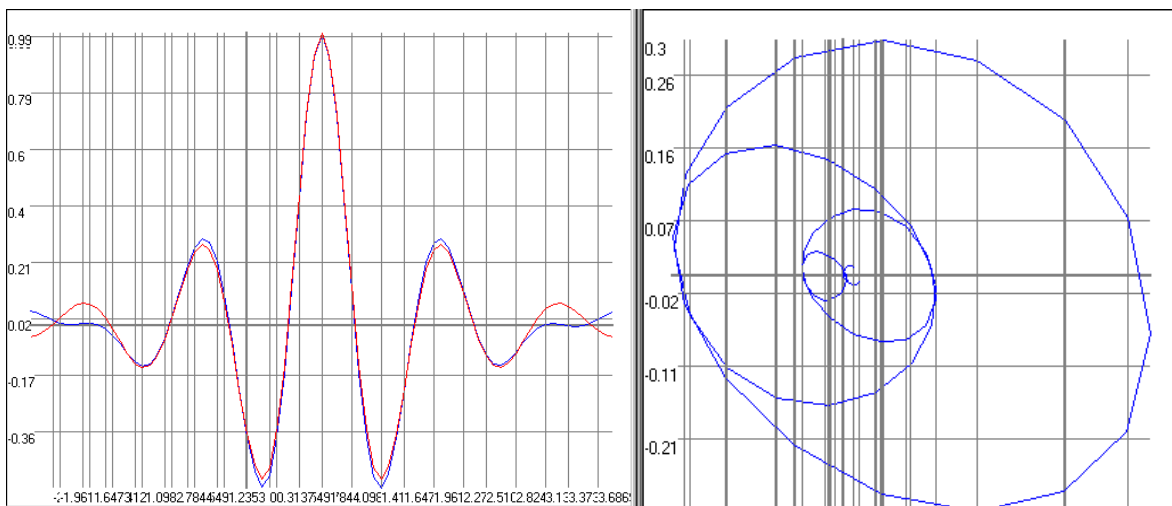


в)  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau-\tau_m|}(1-\alpha|\tau-\tau_m|)$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\tau_m = 10$

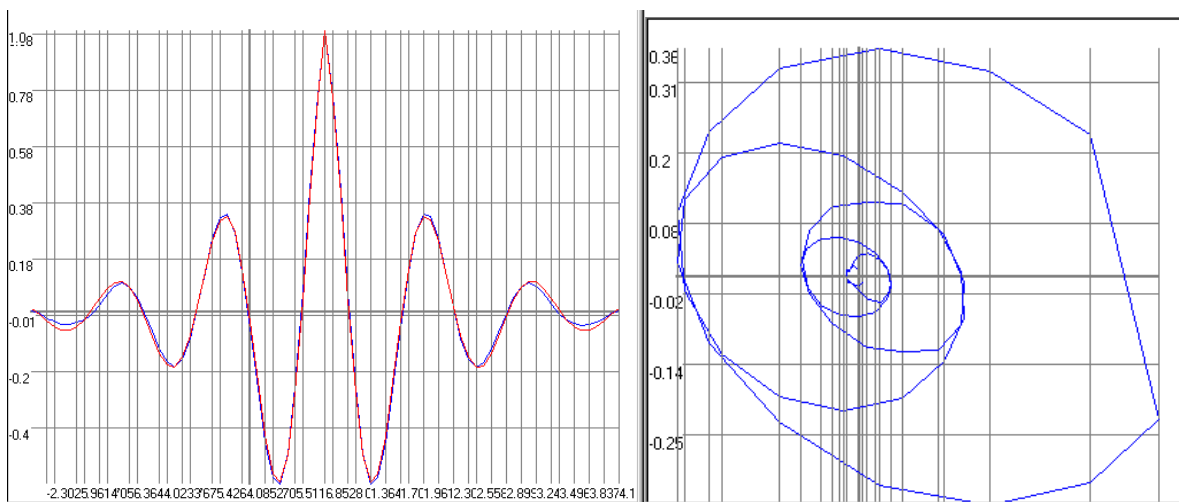
Рисунок 11.1 - Взаимные корреляционные функции и фазовые портреты монотонных моделей



$$a) \rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau-\tau_m|} \cos \omega_0(\tau - \tau_m), \alpha = 1, \omega_0 = 5, \tau_m = 10$$



$$b) \rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau-\tau_m|} (\cos \omega_0(\tau - \tau_m) + \alpha / \omega_0 \sin \omega_0(\tau - \tau_m)), \alpha = 1, \omega_0 = 5, \tau_m = 10$$



$$v) \rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau-\tau_m|} (\cos \omega_0(\tau - \tau_m) - \alpha / \omega_0 \sin \omega_0(\tau - \tau_m)), \alpha = 1, \omega_0 = 5, \tau_m = 10$$

Рисунок 11.2 - Взаимные корреляционные функции и фазовые портреты колебательных моделей

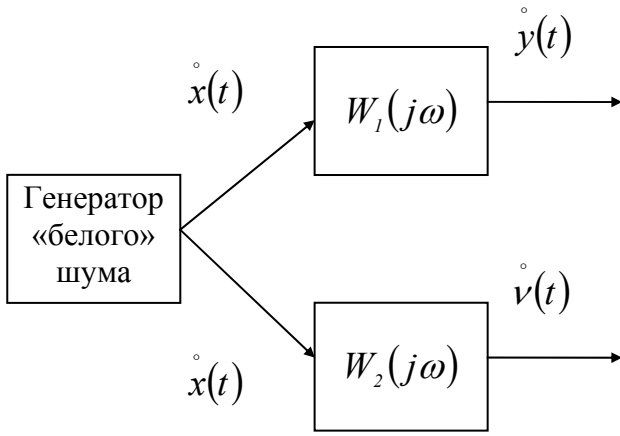


Рисунок 11.3 - Генерирование коррелированных ПСП с заданным видом корреляционных функций

Эта задача также может быть решена и методом фильтрации с использованием единственного источника первичного сигнала (см. рис. 11.3).

Спектральные плотности мощности сигналов  $z(t)$  и  $v(t)$  соответственно равны:

$$\begin{cases} S_z(\omega) = S_0 |W_1(j\omega)|^2; \\ S_v(\omega) = S_0 |W_2(j\omega)|^2; \\ S_{z_v}(\omega) = S_0 W_1(j\omega) W_2(-j\omega); \\ S_{v_z}(\omega) = S_0 W_1(-j\omega) W_2(j\omega), \end{cases} \quad (11.1)$$

где  $W_1(j\omega)$ ,  $W_2(j\omega)$  - частотные характеристики формирующих фильтров.

В работе [44] в Приложении 2 приведены выражения для импульсных переходных характеристик формирующих фильтров, а в Приложении 3 - соответствующие им корреляционные функции.

Рассмотрим алгоритм построения ВКФ по параметрам модели спектральной плотности мощности (см. лабораторную работу 7).

Обозначим

$$S_{xy}(j\omega) = ReS_{xy}(j\omega) - jImS_{xy}(j\omega). \quad (11.2)$$

Отсюда очевидно, что

$$S_{yx}(j\omega) = ReS_{xy}(j\omega) + jImS_{xy}(j\omega). \quad (11.3)$$

Запишем синфазную и квадратурную составляющие спектра:

$$C_{xy}(\omega) = 2ReS(j\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau)] \cos \omega\tau d\tau, \quad (11.4)$$

$$Q_{xy}(\omega) = 2ImS_{xy}(j\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [K_{yx}(\tau) - K_{xy}(\tau)] \sin \omega\tau d\tau. \quad (11.5)$$

Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье, получим:

$$K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau) = 2 \int_0^\infty C_{xy}(\omega) \cos \omega\tau d\omega; \quad (11.6)$$

$$K_{yx}(\tau) - K_{xy}(\tau) = 2 \int_0^\infty Q_{xy}(\omega) \sin \omega\tau d\omega. \quad (11.7)$$

Из (11.6) и (11.7) следует, что

$$K_{xy}(\tau) = \int_0^\infty C_{xy}(\omega) \cos \omega\tau d\omega - \int_0^\infty Q_{xy}(\omega) \sin \omega\tau d\omega, \quad (11.8)$$

$$K_{xy}(\tau) = 2 \int_0^\infty ReS_{xy}(\omega) \cos \omega\tau d\omega - 2 \int_0^\infty ImS_{xy}(\omega) \sin \omega\tau d\omega. \quad (11.9)$$

Учитывая тот факт, что спектральная плотность мощности – функция комплексной переменной, будем аппроксимировать вещественную и мнимую части раздельно. При использовании в качестве аппроксимирующих функций ортогональные функции получим:

$$Re S_{axy}(\omega) = \sum_{k=0}^{m_{Re}} \beta_{k Re} \psi_{k Re}(\omega, \alpha_{Re}); \quad (11.10)$$

$$Im S_{axy}(\omega) = \sum_{k=0}^{m_{Im}} \beta_{k Im} \psi_{k Im}(\omega, \alpha_{Im}), \quad (11.11)$$

где

$$\begin{cases} \beta_{k Re} = \frac{1}{\|\psi_{k Re}\|^2} \int_0^{\infty} Re S_{xy}(u) \psi_{k Re}(u, \alpha_{Re}) du; \\ \beta_{k Im} = \frac{1}{\|\psi_{k Im}\|^2} \int_0^{\infty} Im S_{xy}(u) \psi_{k Im}(u, \alpha_{Im}) du. \end{cases} \quad (11.12)$$

Представим взаимную корреляционную функцию в виде:

$$\begin{aligned} K_{axy}(\tau) = & 2 \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{m_{Re}} \beta_{k Re} \psi_{k Re}(\omega, \alpha_{Re}) \cos \omega \tau d\omega - \\ & - 2 \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{m_{Im}} \beta_{k Im} \psi_{k Im}(\omega, \alpha_{Im}) \sin \omega \tau d\omega. \end{aligned} \quad (11.13)$$

Воспользовавшись формулами Эйлера, выражение (11.13) приведем к виду:

$$K_{axy}(\tau) = \sum_{k=0}^{m_{Re}} \beta_{k Re} (W_{k Re}(-j\tau) + W_{k Re}(j\tau)) - \frac{1}{j} \sum_{k=0}^{m_{Im}} \beta_{k Im} (W_{k Im}(-j\tau) - W_{k Im}(j\tau)). \quad (11.14)$$

где  $W_k(j\tau)$  – преобразование Фурье ортогональных функций (см. таблицу 4.2), в качестве аргумента которых используется  $j\tau$ .

Из выражения (11.14), выполнив преобразования, окончательно получим

$$K_{axy}(\tau) = 2 \left( \sum_{k=0}^{m_{Re}} \beta_{k Re} \cdot Re W_{k Re}(\tau) + \sum_{k=0}^{m_{Im}} \beta_{k Im} \cdot Im W_{k Im}(\tau) \right). \quad (11.15)$$

Выражения для оценки  $Re W_{k Re}(\tau)$  и  $Im W_{k Im}(\tau)$  определяются для ортогональных функций соответственно формулами:

- Лагерра, Лежандра, Дирихле, Якоби  $(\alpha, 0)$  - (4.6), (4.7);
- Сонина-Лагерра (1) - (4.11), (4.12);
- Сонина-Лагерра (2) - (4.14), (4.15);
- Якоби  $(0, 1)$  - (4.17), (4.18);
- Якоби  $(0, 2)$  - (4.29), (4.21).

В указанных формулах необходимо заменить аргументы:  $\omega$  на  $\tau$ .

В таблице 11.1 и 11.2 приведены выражения для определения  $Re W_{k Re}(\tau)$  и  $Im W_{k Im}(\tau)$  в указанных ортогональных базисах.

Выражения для определения  $ReW_{kRe}(\tau)$  и  $ImW_{kIm}(\tau)$

Таблица 11.1

$\psi_k(\tau, \alpha/\gamma)$	$ReW_{kRe}(\tau)$	$ImW_{kIm}(\tau)$
$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{2(-1)^k}{\alpha_{Re}} \cos \varphi_{kRe} \cos(2k+1)\varphi_{kRe}$ $\varphi_{kRe} = \arctg 2\tau / \alpha_{Re}$	$-\frac{2(-1)^k}{\alpha_{Im}} \cos \varphi_{kRe} \sin(2k+1)\varphi_{kRe}$ $\varphi_{kIm} = \arctg 2\tau / \alpha_{Im}$
$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\gamma \cdot (k+1)} (1 + (-1)^k \cos[2(k+1)\varphi_{kRe}])$ $\varphi_{kRe} = \arctg \frac{2\tau}{\alpha_{Re}}$	$\frac{1}{\gamma \cdot (k+1)} ((-1)^{k+1} \sin[2(k+1)\varphi_{kRe}])$ $\varphi_{kRe} = \arctg \frac{2\tau}{\alpha_{Re}}$
$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{1}{\alpha_{Re}(2k+1)} \cos \varphi_{kRe} \cos\left(\varphi_{kRe} + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sRe}\right)$ $\varphi_{kRe} = \arctg \frac{\tau}{(2k+1)\alpha_{Re}}$	$-\frac{1}{\alpha_{Im}(2k+1)} \cos \varphi_{kIm} \sin\left(\varphi_{kIm} + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sIm}\right)$ $\varphi_{kIm} = \arctg \frac{\tau}{(2k+1)\alpha_{Im}}$
$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{(-1)^k}{\alpha_{Re}(k+1)} \cos \varphi_{kRe} \cos\left(\varphi_{kRe} + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sRe}\right)$ $\varphi_{kRe} = \arctg \frac{\tau}{(k+1)\alpha_{Re}}$	$-\frac{(-1)^k}{\alpha_{Im}(k+1)} \cos \varphi_{kIm} \sin\left(\varphi_{kIm} + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sIm}\right)$ $\varphi_{kIm} = \arctg \frac{\tau}{(k+1)\alpha_{Im}}$
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\alpha_{Re}(4k+1)} \cos \varphi_{kRe} \cos\left(\varphi_{kRe} + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sRe}\right)$ $\varphi_{kRe} = \arctg \frac{2\tau}{(4k+1)\gamma_{Re}}$	$-\frac{2}{\alpha_{Im}(4k+1)} \cos \varphi_{kIm} \sin\left(\varphi_{kIm} + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sIm}\right)$ $\varphi_{kIm} = \arctg \frac{2\tau}{(4k+1)\gamma_{Im}}$
$P_k^{1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\alpha_{Re}(4k+3)} \cos \varphi_{kRe} \cos\left(\varphi_{kRe} + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sRe}\right)$ $\varphi_{kRe} = \arctg \frac{2\tau}{(4k+3)\gamma_{Re}}$	$-\frac{2}{\alpha_{Im}(4k+3)} \cos \varphi_{kIm} \sin\left(\varphi_{kIm} + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sIm}\right)$ $\varphi_{kIm} = \arctg \frac{2\tau}{(4k+3)\gamma_{Im}}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\alpha_{Re}(k+1)} \cos \varphi_{kRe} \cos\left(\varphi_{kRe} + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sRe}\right)$ , $\varphi_{kRe} = \arctg \frac{\tau}{(k+1)\gamma_{Re}}$	$-\frac{1}{\alpha_{Im}(k+1)} \cos \varphi_{kIm} \sin\left(\varphi_{kIm} + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sIm}\right)$ $\varphi_{kIm} = \arctg \frac{\tau}{(k+1)\gamma_{Im}}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\alpha_{Re}(2k+1)} \cos \varphi_{kRe} \cos\left(\varphi_{kRe} + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sRe}\right)$ $\varphi_{kRe} = \arctg \frac{\tau}{(2k+1)\gamma_{Re}}$	$-\frac{1}{\alpha_{Im}(2k+1)} \cos \varphi_{kIm} \sin\left(\varphi_{kIm} + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sIm}\right)$ $\varphi_{kIm} = \arctg \frac{\tau}{(2k+1)\gamma_{Im}}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\alpha_{Re}(2k+3)} \cos \varphi_{kRe} \cos\left(\varphi_{kRe} + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sRe}\right)$ $\varphi_{kRe} = \arctg \frac{\tau}{(2k+3)\gamma_{Re}}$	$-\frac{1}{\alpha_{Im}(2k+3)} \cos \varphi_{kIm} \sin\left(\varphi_{kIm} + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sIm}\right)$ $\varphi_{kIm} = \arctg \frac{\tau}{(2k+3)\gamma_{Im}}$

Выражения для определения  $ReW_{kRe}(\tau)$  и  $ImW_{kIm}(\tau)$  Сонина-Лагерра (2) Якоби (0, 1) и Якоби (0, 2) представлены ниже:

- Сонина-Лагерра (2) -  $\varphi_{kRe} = \arctg \frac{2\tau}{\alpha_{Re}}$ ,  $\varphi_{kIm} = \arctg \frac{2\tau}{\alpha_{Im}}$ :

$$ReW_k^{(2)}(j\tau) = \frac{2}{\gamma \cdot (k+1)(k+2)} \left( \frac{1}{2} + \frac{(-1)^k \cos[(2k+3)\varphi_{kRe}]}{2 \cos \varphi_{kRe}} + k+1 \right); \quad (11.16)$$

$$ImW_k^{(2)}(j\tau) = \frac{2}{\gamma \cdot (k+1)(k+2)} \left( \frac{(-1)^{k+1} \sin[(2k+3)\varphi_{kIm}]}{2 \cos \varphi_{kIm}} - \frac{tg \varphi_{kIm}}{2} \right). \quad (11.17)$$

- Якоби (0, 1) и Якоби (0, 2) -  $\varphi_{kRe} = \arctg \frac{\tau}{(2k+1)\alpha_{Re}}$ ,  $\varphi_{kIm} = \arctg \frac{\tau}{(2k+1)\alpha_{Im}}$ :

$$ReW_k^{(0,1)}(j\tau) = \frac{1}{(k+1)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \frac{\cos^2 \varphi_{sRe}}{(2s+1)}; \quad (11.18)$$

$$ImW_k^{(0,1)}(j\tau) = -\frac{1}{(k+1)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \frac{\cos \varphi_{sIm} \sin \varphi_{sIm}}{(2s+1)}; \quad (11.19)$$

$$ReW_k^{(0,2)}(j\tau) = \frac{2}{(k+1)(k+2)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \frac{\cos^2 \varphi_{sRe}}{(2s+1)}; \quad (11.20)$$

$$ImW_k^{(0,2)}(j\tau) = -\frac{2}{(k+1)(k+2)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \frac{\cos \varphi_{sIm} \sin \varphi_{sIm}}{(2s+1)}. \quad (11.21)$$

Основные экранные формы автоматизированной системы для проведения взаимного корреляционно-спектрального анализа приведены в Приложении 18.

Следует отметить, что с помощью автоматизированной системы возможен взаимный корреляционно-спектральный анализ экспериментальных данных. Для этого необходимо ввести данные в соответствующем формате (см. Приложение 19), используя экранную форму «Filter setting».

## 11.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать СП с заданным видом ВКФ.
2. Построить ВКФ и её фазовый портрет, сравнить с теоретическими кривыми.
3. Для заданного ортогонального базиса определить параметры модели ВКФ и погрешность аппроксимации.
4. Определить интервалы корреляции, сравнить с теоретическими интервалами, найти относительную погрешность оценивания интервалов корреляции.
5. Найти корректирующие коэффициенты, обеспечивающие условие нормировки ортогональной модели ВКФ, и построить модель ВКФ.
6. Определить интервалы корреляции, сравнить с теоретическими интервалами, найти относительную погрешность оценивания интервалов корреляции.
7. Построить модель взаимной спектральной плотности мощности.
8. Передать действительную и мнимую компоненты взаимной СПМ в подсистему аппроксимации составляющих СПМ и построить их ортогональные модели.
9. Построить ВКФ и сравнить с теоретической.

### 11.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Результаты выполнения работы в автоматизированной системе, представленные в виде экранных форм.
4. Выводы.

### 11.4. Контрольные вопросы

1. В чём заключается специфика аппроксимации взаимных корреляционных функций по сравнению с аппроксимацией автокорреляционных функций?
2. Какие численные методы применяются при аппроксимации взаимных корреляционных функций?
3. Из каких соображений выбирается начальное приближение при аппроксимации взаимных корреляционных функций параметрическими моделями?
4. Как отличить фазовый портрет колебательной взаимной корреляционной функции от монотонной?
5. Как определяются корректирующие коэффициенты взаимной корреляционной функции, обеспечивающие условие нормировки?
6. Как определяются интервалы корреляции взаимной корреляционной функции?
7. Назовите основное отличие спектральной плотности мощности и взаимной спектральной плотности мощности.



## 12. АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТЕЙ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

**Цель работы:** анализ погрешностей оценки коэффициентов разложения ортогональных моделей корреляционной функции.

### 12.1. Теоретические основы лабораторной работы

На практике вместо определения коэффициента разложения ортогональной модели (5.16) в соответствии с выражением

$$\beta_k = \frac{I}{\|\psi_k(\alpha)\|^2} \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \psi_k(\tau, \alpha) d\tau, \quad (12.1)$$

Как правило, приходится ограничиваться конечным интервалом наблюдения корреляционной функции:

$$\hat{\beta}_k^{(1)} = \frac{I}{\|\psi_k\|^2} \int_0^{\tau_{k \max}} K_x(\tau) \cdot \psi_k(\tau, \alpha) d\tau, \quad (12.2)$$

где  $\tau_{k \max}$  – интервал корреляции;

При этом появляется дополнительная составляющая методической погрешности, вызванная конечным верхним пределом интегрирования:

$$\Delta_{\beta_k}^{(1)} = \hat{\beta}_k^{(1)} - \beta_k = \frac{I}{\|\psi_k\|^2} \int_{\tau_{k \max}}^{\infty} K_x(\tau) \psi_k(\tau, \alpha) d\tau. \quad (12.3)$$

Необходимо отметить, что  $\lim_{\tau_{k \max} \rightarrow \infty} \Delta_{\beta_k}^{(1)} = 0$ .

Специфика проведения аппроксимативного корреляционного анализа с помощью ЭВМ заключается в выборе численного метода для вычисления интеграла в (12.2), «дискретизации» уравнений для оценки параметра масштаба  $\alpha / \gamma$ .

Обозначим оператор численного интегрирования  $\Phi\{ \}$ . Тогда оценка коэффициента разложения, вызванная дискретизацией КФ и необходимостью численного интегрирования выражения (12.2) примет вид:

$$\hat{\beta}_k^{(2)} = \Phi\{ \rho_x(\Delta\tau i) \cdot \psi_k(\Delta\tau i, \alpha / \gamma), J_{\max} \}, \quad (12.4)$$

где  $\Delta\tau$  – шаг дискретизации корреляционной функции;

$$J_{\max} = \text{ent} \left[ \frac{\tau_{k \max}}{\Delta\tau} \right];$$

$$i = 1, \dots, J_{\max}.$$

В этом случае составляющая методической погрешности, вызванная дискретизацией КФ и необходимостью численного интегрирования, равна

$$\Delta_{\beta_k}^{(2)} = \hat{\beta}_k^{(2)} - \hat{\beta}_k^{(1)}. \quad (12.5)$$

В связи с конечностью выборки значений КФ выражение для оценки коэффициента разложения представим в виде

$$\hat{\beta}_k^{(3)} = \Phi\{ \hat{\rho}_x(\Delta\tau i) \cdot \psi_k(\Delta\tau i, \alpha / \gamma), \tau_{k \max}, N \}, \quad (12.6)$$

$N := N, M, NM$  – объем выборки.

С учетом выражений (12.4.) и (12.6), составляющая методической погрешности, вызванная конечностью объема выборки, будет равна:

$$\Delta_{\beta_k}^{(3)} = \hat{\beta}_k^{(3)} - \hat{\beta}_k^{(2)}. \quad (12.7)$$

Отметим, что для получения достоверных оценок (статистическая погрешность 0,02-0,05), как показали исследования, количество отсчетов равно  $N = 5000 - 2000$  соответственно [22, 23].

Следующая составляющая методической погрешности вызвана необходимостью дискретизации уравнения и применения численных методов для оценки параметра масштаба  $\hat{\alpha}/\hat{\gamma}$ . Выражение для оценки коэффициента разложения в этом случае примет вид:

$$\hat{\beta}_k^{(4)} = \Phi \left\{ \hat{\rho}_x(\Delta\tau i) \cdot \psi_k \left( \Delta\tau i, \hat{\alpha}/\hat{\gamma} \right), \tau_{k_{max}}, N \right\}, \quad (12.8)$$

Составляющая методической погрешности, вызванная заменой параметра масштаба  $\alpha/\gamma$  её оценкой  $\hat{\alpha}/\hat{\gamma}$ , будет равна:

$$\Delta_{\alpha}^{(4)} = \hat{\beta}_k^{(4)} - \hat{\beta}_k^{(3)}. \quad (12.9)$$

Составляющие методической погрешности, как следует из выражений (12.3), (12.5), (12.7) и (12.9), образуют полную группу погрешностей. Следовательно, методическая погрешность вычисления коэффициентов разложения  $\beta_k$  определяется выражением:

$$\Delta_{\beta_k} = \Delta_{\beta_k}^{(1)} + \Delta_{\beta_k}^{(2)} + \Delta_{\beta_k}^{(3)} + \Delta_{\alpha}^{(4)} = \hat{\beta}_k^{(4)} - \beta_k. \quad (12.10)$$

Конечность интервала интегрирования (интервала корреляции КФ) и интегрирование выражения (12.2) численными методами будут вносить в результирующую погрешность систематическую составляющую, а ограниченность выборки для определения значений КФ и оценки параметра масштаба  $\hat{\alpha}/\hat{\gamma}$  – случайную составляющую. Поэтому составляющие погрешности  $\Delta_{\beta_k}^{(1)}$  и  $\Delta_{\beta_k}^{(2)}$  можно определить, например, с помощью математического пакета Mathcad, а  $\Delta_{\beta_k}^{(3)}$  и  $\Delta_{\alpha}^{(4)}$  - методом имитационного моделирования.

Отметим, что составляющие методической погрешности  $\Delta_{\beta_k}^{(3)}$  и  $\Delta_{\alpha}^{(4)}$ , и погрешность оценки коэффициента разложения  $\beta_k$   $\Delta_{\beta_k}$  являются случайными величинами, распределенными по нормальному закону. Следовательно, для описания необходимо найти их математическое ожидание и дисперсию (среднеквадратическое отклонение).

На рис. 12.1 приведены результаты оценки  $\hat{\beta}_k$  и  $\Delta_{\beta_k}$  для ряда ортогональных функций методом имитационного моделирования с помощью автоматизированной системы аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах [36, 37, 43] (см. лаб. работу 10). В качестве входного процесса был выбран процесс с корреляционной функцией  $\rho_x(\tau) = \exp(-|\tau|)\cos 5\tau$ ,  $\Delta\tau = 0,0816497$ ,  $J_{max} = 37$ , объем выборки  $N = 5000$ , количество экспериментов – 29 [21].

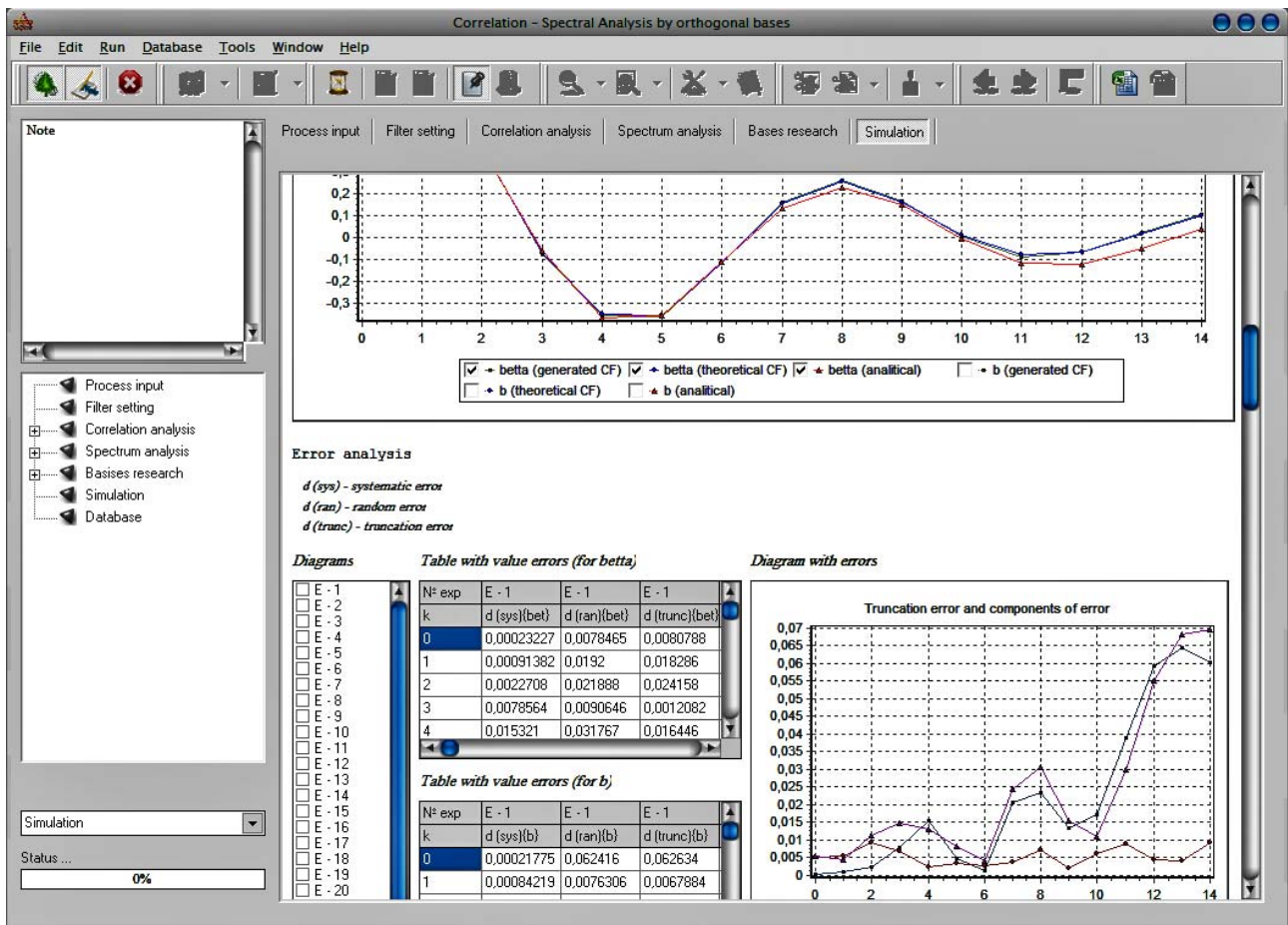


Рисунок 12.1 – Результаты имитационного моделирования

Необходимо отметить, что погрешность определения коэффициентов разложения  $\Delta_{\beta_k}$  возрастает с увеличением порядка  $k$ .

## 12.2. Задание на самостоятельную работу

1. Для заданного ортогонального базиса, вида корреляционной функции и показателя колебательности  $\mu$  определить коэффициенты разложения  $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$  (см. лабораторную работу 5).
2. Найти оценку  $\hat{\beta}_k^{(1)}$  и составляющую методической погрешности  $\Delta_{\beta_k}^{(1)}$ .
3. Выбрать численный метод и найти оценку  $\hat{\beta}_k^{(2)}$  и составляющую методической погрешности  $\Delta_{\beta_k}^{(2)}$ .
4. Найти систематическую составляющую методической погрешности оценки коэффициента разложения.
5. Оформить отчет.

### 12.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
  2. Задание.
  3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
  4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
  5. Выражения для оценки составляющих методической погрешности и их численные значения.
  6. Выводы.
- Пример выполнения лабораторной работы 12 приведен в Приложении 22.

### 12.4. Контрольные вопросы

1. Какие составляющие погрешности образуют полную группу погрешностей?
2. Из каких соображений выбирается интервал дискретизации корреляционной функции?
3. Какие составляющие методической погрешности относятся к систематическим?
4. Какие составляющие методической погрешности относятся к случайным?
5. Зависят ли численные значения составляющих методической погрешности от вида корреляционной функции и значения её параметров?

### 13. ВЛИЯНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ НА УВЕЛИЧЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

**Цель работы:** изучение погрешностей аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями.

#### 13.1. Теоретические основы лабораторной работы

Запишем погрешность аппроксимации КФ в виде ( $\mu(\tau) = I$ ):

$$\Delta = \int_0^{\infty} \left[ K_x(\tau) - \sigma_x^2 \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k \psi_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau = \min, \quad (13.1)$$

где  $\hat{\beta}_k$  – оценка коэффициента  $\beta_k$ .

С учетом свойств ортогональных функций [21, 22, 23]

$$\Delta = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - 2\sigma_x^4 \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k \beta_k \|\psi_k\|^2 + \sigma_x^4 \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k^2 \|\psi_k\|^2. \quad (13.2)$$

Выражение (13.2) является функцией случайных оценок коэффициентов разложения  $\hat{\beta}_k$ . Считая отклонения оценок от коэффициентов разложения малыми, разложим выражение (13.2) в ряд Тейлора относительно  $\hat{\beta}_k$  в окрестности  $\beta_k$ , ограничившись квадратичными членами

$$\Delta = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \sigma_x^4 \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2 + \sigma_x^4 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 \left( \hat{\beta}_k - \beta_k \right)^2. \quad (13.3)$$

В общем случае оценка коэффициентов разложения  $\hat{\beta}_k$  смещена, поэтому

$$\hat{\beta}_k = \beta_k + \overset{\circ}{\beta}_k + \Delta_{см,k}. \quad (13.4)$$

С учетом того, что

$$\Delta_{\min} = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \sigma_x^4 \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2, \quad (13.5)$$

выражение (13.3) приведем к виду

$$\Delta = \Delta_{\min} + \Delta_m, \quad (13.6)$$

где  $\Delta_m = \sigma_x^4 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 \left( \overset{\circ}{\beta}_k + \Delta_{см,k} \right)^2$ .

Математическое ожидание погрешности аппроксимации равно

$$M[\Delta] = \Delta_{\min} + M[\Delta_m] = \Delta_{\min} + \sigma_x^4 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 (\sigma_k^2 + \Delta_{см,k}^2). \quad (13.7)$$

Из выражения (13.7) видно, что математическое ожидание погрешности аппроксимации, кроме минимальной погрешности, содержит вторую составляющую, численное значение которой линейно зависит от погрешности оценки коэффициентов разложения и увеличивается с увеличением числа членов разложения ряда  $m$ . Следует отметить, что в общем случае с увеличением числа членов разложения ряда  $\Delta_{\min}$  уменьшается. Следовательно, существует минимум погрешности по  $m$  (см. рис. 13.1).

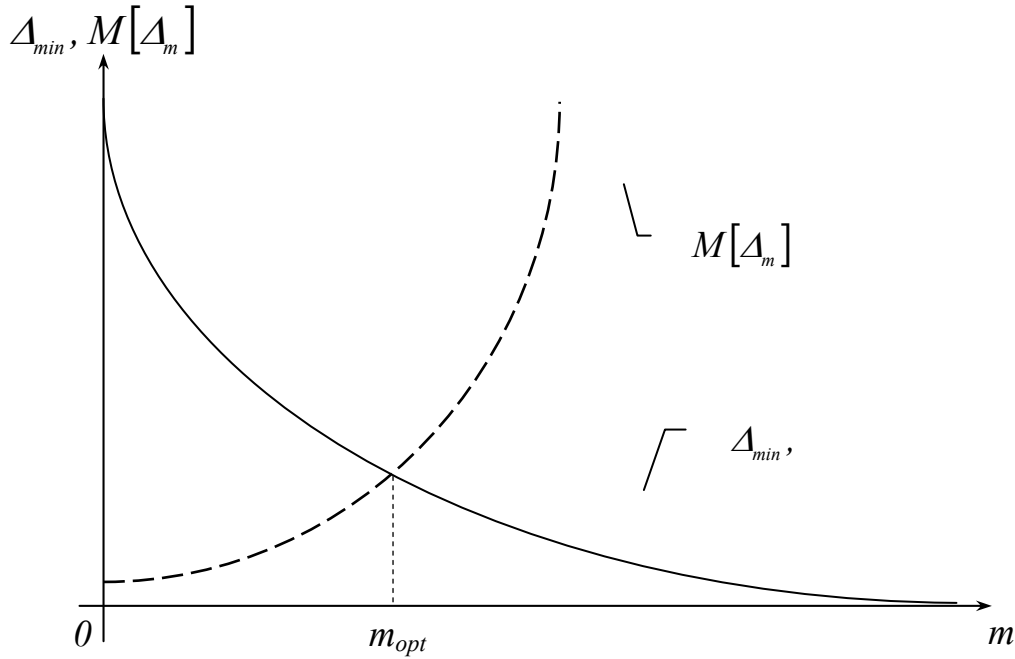


Рисунок 13.1 - Составляющие погрешности аппроксимации

Выполнив все необходимые преобразования, получим дисперсию погрешности аппроксимации:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta}^2 &= \sigma_x^{\delta} \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 M \left[ \overset{\circ}{\gamma}_k \overset{\circ}{\gamma}_n \right] = \\ &= \sigma_x^{\delta} \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^4 \sigma_{\gamma k}^2 + 2\sigma_x^{\delta} \sum_{k \neq n}^m \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 K_{\gamma, k, n}, \end{aligned} \quad (13.8)$$

где  $\overset{\circ}{\gamma}_k = \left( \overset{\circ}{\beta}_k + \Delta_{cm, k} \right)^2 - \left( \sigma_k^2 + \Delta_{cm, k}^2 \right)$ , а  $\sigma_{\gamma k}^2$  и  $K_{\gamma, k, n}$  - дисперсия и корреляционный момент случайной величины  $\gamma$ .

При условии некоррелированности  $\gamma_k, \gamma_n$  ( $K_{\gamma, k, n} = 0$ ), получим:

$$\sigma_{\Delta}^2 = \sigma_x^{\delta} \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^4 \sigma_{\gamma k}^2. \quad (13.9)$$

Оценим  $\sigma_{\gamma k}^2$ . Закон распределения  $\overset{\circ}{\beta}_k$ , так как выполняются условия теоремы Ляпунова, можно считать нормальным. Тогда

$$\sigma_{\gamma k}^2 = M \left\{ \left[ \left( \overset{\circ}{\beta}_k + \Delta_{cm, k} \right)^2 - \left( \sigma_k^2 + \Delta_{cm, k}^2 \right) \right]^2 \right\} = 2\sigma_k^4 + 4\sigma_k^2 \Delta_{cm, k}^2. \quad (13.10)$$

Подставив в (13.9) выражение (13.10) и выполнив преобразования, окончательно получим:

$$\sigma_{\Delta}^2 = 2\sigma_x^{\delta} \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^4 \sigma_k^2 (\sigma_k^2 + 2\Delta_{cm, k}^2). \quad (13.11)$$

Из выражения (13.11) следует, что дисперсия погрешности аппроксимации растет с увеличением числа членов разложения ряда  $m$ , а её численное значение зависит от вида ортогональных функций, дисперсии и погрешности от смещенности оценки коэффициентов разложения ряда (5.16).

Приведем выражения для оценки математического ожидания и дисперсии погрешности для различных систем ортогональных функций.

Так как для ортогональных функций Лагерра  $\|L_k\|^2 = 1/\alpha$ , выражения (13.7) и (13.11) примут вид:

$$M[\Delta] = \Delta_{min} + \frac{\sigma_x^4}{\alpha} \sum_{k=0}^m (\sigma_k^2 + \Delta_{см,k}^2), \quad (13.12)$$

$$\sigma_{\Delta}^2 = \frac{2\sigma_x^8}{\alpha^2} \sum_{k=0}^m \sigma_k^2 (\sigma_k^2 + 2\Delta_{см,k}^2). \quad (13.13)$$

Норма для ортогональных функций Лежандра равна  $\|Leg_k\|^2 = 1/2\alpha(2k+1)$ . Тогда выражения (13.7), (13.11) равны:

$$M[\Delta] = \Delta_{min} + \frac{\sigma_x^4}{2\alpha} \sum_{k=0}^m (\sigma_k^2 + \Delta_{см,k}^2)/(2k+1), \quad (13.14)$$

$$\sigma_{\Delta}^2 = \frac{\sigma_x^8}{2\alpha^2} \sum_{k=0}^m \sigma_k^2 (\sigma_k^2 + 2\Delta_{см,k}^2)/(2k+1)^2. \quad (13.15)$$

Норма ортогональных функций Дирихле равна  $\|D_k\|^2 = 1/2\alpha(k+1)$ . Следовательно

$$M[\Delta] = \Delta_{min} + \frac{\sigma_x^4}{2\alpha} \sum_{k=0}^m (\sigma_k^2 + \Delta_{см,k}^2)/(k+1), \quad (13.16)$$

$$\sigma_{\Delta}^2 = \frac{\sigma_x^8}{2\alpha^2} \sum_{k=0}^m \sigma_k^2 (\sigma_k^2 + 2\Delta_{см,k}^2)/(k+1)^2. \quad (13.17)$$

Так как на практике, как правило, оценивают относительную погрешность аппроксимации, выражения (13.6) и (13.11) приведем к виду

$$\delta = \frac{\Delta}{\int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau} = \delta_{min} + \delta_m, \quad (13.18)$$

где  $\delta_m = \frac{1}{\tau_k^{(4)}} \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 \left( \beta_k + \Delta_{см,k} \right)^2$ .

$$\sigma_{\delta}^2 = \frac{\sigma_{\Delta}^2}{\left[ \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau \right]^2} = \frac{2}{\tau_k^{(4)2}} \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^4 \sigma_k^2 (\sigma_k^2 + 2\Delta_{см,k}^2). \quad (13.19)$$

Тогда выражения для оценки относительных математических ожиданий для рассматриваемых ортогональных функций примут вид:

- ортогональные функции Лагерра:

$$M[\delta] = \delta_{min} + \frac{1}{\alpha \tau_k^{(4)}} \sum_{k=0}^m (\sigma_k^2 + \Delta_{см,k}^2); \quad (13.20)$$

$$\sigma_{\delta}^2 = \frac{2}{\alpha^2 \tau_k^{(4)2}} \sum_{k=0}^m \sigma_k^2 (\sigma_k^2 + 2\Delta_{см,k}^2); \quad (13.21)$$

- ортогональные функции Лежандра:

$$M[\delta] = \delta_{min} + \frac{I}{2\alpha\tau_k^{(4)}} \sum_{k=0}^m (\sigma_k^2 + \Delta_{см,k}^2) / (2k + 1); \quad (13.22)$$

$$\sigma_\delta^2 = \frac{I}{2\alpha^2\tau_k^{(4)2}} \sum_{k=0}^m \sigma_k^2 (\sigma_k^2 + 2\Delta_{см,k}^2) / (2k + 1)^2; \quad (13.23)$$

- ортогональные функции Дирихле:

$$M[\delta] = \delta_{min} + \frac{I}{2\alpha\tau_k^{(4)}} \sum_{k=0}^m (\sigma_k^2 + \Delta_{см,k}^2) / (k + 1); \quad (13.24)$$

$$\sigma_\delta^2 = \frac{I}{2\alpha^2\tau_k^{(4)2}} \sum_{k=0}^m \sigma_k^2 (\sigma_k^2 + 2\Delta_{см,k}^2) / (k + 1)^2. \quad (13.25)$$

На рис. 13.2 представлены результаты определения второго слагаемого в выражениях (13.20) – ряд 1, (13.22) – ряд 2 и (13.24) – ряд 3 для различных значений погрешности оценки коэффициентов разложения ( $\gamma_k = \sigma_k^2 + \Delta_{см,k}^2$ ). Отсюда видно, что наименьший вклад в увеличении методической погрешности аппроксимации при одинаковой погрешности оценки коэффициентов разложения наблюдается у ортогональных функций Лагерра.

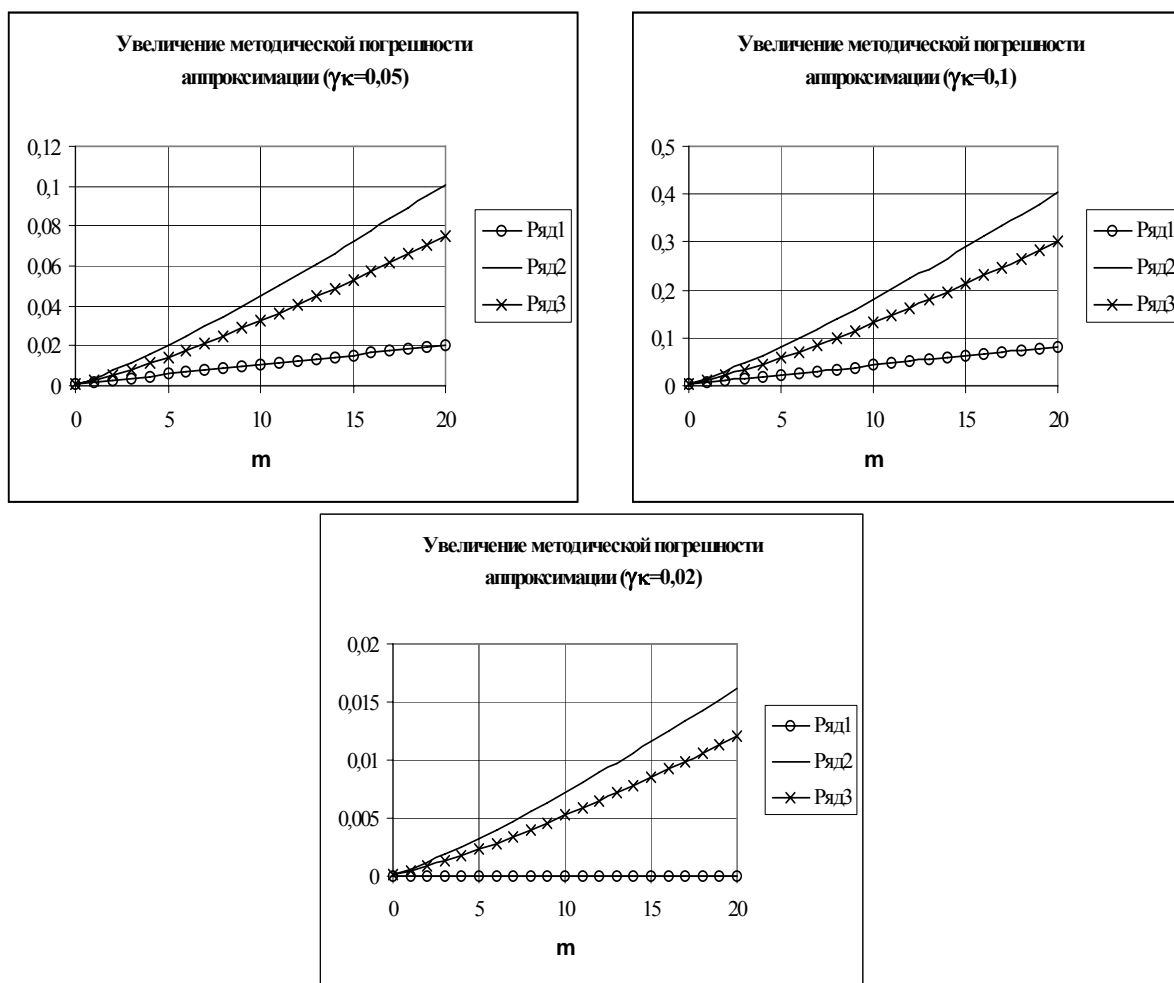


Рисунок 13.2 - Увеличение методической погрешности аппроксимации



### 13.2. Задание на самостоятельную работу

1. Для заданного ортогонального базиса, вида корреляционной функции, показателя колебательности  $\mu$ , воспользовавшись средствами Mathcad найти выражения для оценки  $\alpha$ , коэффициентов разложения  $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$  и  $\delta_{min}(\alpha, m)$  (см. лабораторную работу 5).

2. Построить зависимость  $\delta_{min}(m / \rho_x(\tau), \alpha)$ .

3. Задав значениями  $\gamma_k$  построить зависимость  $M[\delta_m] = f_1(m / \gamma_k)$ .

4. Построить зависимость  $M[\delta] = f_2(m / \gamma_k)$ .

5. Построить зависимость  $m_{opt} = f_3(\gamma_k / \mu)$ .

6. Оформить отчет.

### 13.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.

2. Задание.

3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.

4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.

5. Основные соотношения.

6. Результаты расчета, представленные в графической форме.

7. Выводы.

Пример выполнения лабораторной работы 13 приведен в Приложении 23.

### 13.4. Контрольные вопросы

1. От чего зависит значение  $m_{opt}$  при аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями?

2. Как изменится значение  $m_{opt}$  при уменьшении значения параметра масштаба  $\alpha(\gamma)$ ?

3. Как изменится значение  $m_{opt}$  при увеличении значения показателя колебательности  $\mu$ ?

4. Изменится ли значение  $m_{opt}$  при смене ортогонального базиса?

## 14. АНАЛИЗ МЕТОДИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ АИС

**Цель работы:** изучение методики и приобретение практических навыков анализа методических погрешностей оценки параметров ортогональных моделей корреляционно-спектральных функций и их характеристик методом имитационного моделирования.

### 14.1. Теоретические основы лабораторной работы

Сопоставляя методы исследования погрешностей и характеристик погрешностей результатов измерений, следует подчеркнуть особую роль имитационного моделирования в определении характеристик погрешностей [54]. Это обусловлено тем, что составляющие погрешности, входящие в полную группу, хотя и обусловлены разными факторами, в общем случае могут быть коррелированными. Это должно учитываться при их исследовании с целью сопоставления, что делает использование аналитического подхода чрезвычайно затруднительным, а применение экспериментальных методов практически невозможным.

С использованием АИС решены следующие задачи имитационного моделирования:

1. Оценка коэффициентов разложения корреляционной функции.
2. Оценка погрешностей оценки коэффициентов разложения.
3. Оценка погрешностей аппроксимации корреляционных функций.
4. Оценка обобщенных корреляционных характеристик.
5. Оценка обобщенных спектральных характеристик.
6. Составление отчета по результатам имитационного моделирования.

Математическое описание алгоритмов (см. лабораторные работы 12 - 13), реализованных при проведении имитационного моделирования, включающее условные обозначения исследуемых характеристик, введенных при программной реализации, приведено ниже.

1. Оценка коэффициентов разложения корреляционной функции.

Обозначение в АИС	Математическое обозначение	Алгоритм
$\beta_k(a)$	$\beta_k$	$\beta_k = \frac{1}{\ \psi_k\ ^2} \int_0^\infty \rho(\tau) \psi_k(\tau, \gamma) \mu(\tau) d\tau$
$b_k(a)$	$b_k$	$b_k = \beta_k + c_k$

$\beta_k(t)$	$\hat{\beta}_k^{(2)}$	$\hat{\beta}_k^{(2)} = \frac{I}{\ \psi_k\ ^2} \int_0^{\tau_k \max} \rho(\tau) \psi_k(\tau, \gamma) \mu(\tau) d\tau$
$b(t)$	$\hat{b}_k^{(2)}$	$\hat{b}_k = \hat{\beta}_k + c_k$
$\beta_k(g)$	$\hat{\beta}_k^{(3)}$	$\hat{\beta}_k^{(3)} = \frac{I}{\ \psi_k\ ^2} \int_0^{\tau_k \max} \rho_x(\tau) \psi_k(\tau, \gamma) \mu(\tau) d\tau$
$b(g)$	$\hat{b}_k^{(3)}$	$\hat{b}_k = \hat{\beta}_k + c_k$

## 2. Оценка погрешностей оценки коэффициентов разложения.

Обозначение в АИС	Математическое обозначение	Алгоритм
$d(sys)$	$\Delta_{суст}$	$\Delta_{суст} = \Delta_{\beta_k^{(1)}} + \Delta_{\beta_k^{(2)}} = \hat{\beta}_k^{(2)} - \beta_k$
$d(ran)$	$\Delta_{случ}$	$\Delta_{случ} = \Delta_{\beta_k^{(3)}} = \hat{\beta}_k^{(3)} - \hat{\beta}_k^{(2)}$
$d(trunc)$	$\Delta_{мет}$	$\Delta_{мет} = \Delta_{суст} + \Delta_{случ} = \hat{\beta}_k^{(3)} - \beta_k$

## 3. Оценка погрешностей аппроксимации корреляционных функций.

Обозначение в АИС	Математическое обозначение	Алгоритм
$d_{ap1}$	$\delta_1$	$\delta_1 = \sqrt{I - \frac{\sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k^{(2)} \ \psi_k\ ^2}{\int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau}}$
$d_{ap2}$	$\delta_2$	$\delta_2 = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^m c_k^2 \ \psi_k\ ^2}{\int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau}}$
$d_{ap}$	$\delta$	$\delta = \delta_1 + \delta_2$

4. Составление таблицы по результатам имитационного моделирования.

Обозначение в АИС	Математическое обозначение	Алгоритм
$n_{exp}$	$n$	$n = 1..10000$
$basis$	$\psi_k(\tau, \gamma)$	$P_k^{(-0,5,0)}(\tau, \gamma)$ $P_k^{(0,5,0)}(\tau, \gamma)$ $P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$ $P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$ $P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$ $L_k^{(0)}(\tau, \gamma)$ $L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$ $L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$
$CF$	$\rho(\tau)$	$e^{-\lambda \tau }$ $e^{-\lambda \tau }(1 + \lambda \tau )$ $e^{-\lambda \tau }(1 - \lambda \tau )$ $e^{-\lambda \tau }\left(1 + \lambda \tau  + \frac{\lambda^2\tau^2}{3}\right)$ $e^{-\lambda \tau } \cos \omega_0\tau$ $e^{-\lambda \tau }\left(\cos \omega_0\tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$ $e^{-\lambda \tau }\left(\cos \omega_0\tau - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$
$\omega_0 / lambda$	$\omega_0 / \lambda$	$\lambda > 0, \omega_0 > 0$
$delta$	$\delta$	$0,2; 0,1; 0,05; 0,02$

$N$	$N$	$N = 1..1000000$
$M[d_{ap}]$	$M[\delta]$	
$MSE[d_{ap}]$	$\sigma[\delta]$	
$ \max(d_{ap}) $	$\max\{\delta_j\}$	$j = 1..n_{exp}$

5. Оценка обобщенных корреляционных характеристик.

Обозначение в АИС	Математическое обозначение	Алгоритм
$\tau_2$	$\hat{\tau}_k^{(2)}$	$\hat{\tau}_k^{(2)} = \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k^{(3)} \tau_{k,u}^{(2)}$
$\tau_2(t)$	$\tau_k^{(2)}$	
$\tau_4$	$\hat{\tau}_k^{(4)}$	$\hat{\tau}_k^{(4)} = \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k^{(3)} \tau_{k,u}^{(4)}$
$\tau_4(t)$	$\tau_k^{(4)}$	
$error(\tau_2)$	$\delta_{\tau_k^{(2)}}$	$\delta_{\tau_k^{(2)}} = \frac{\hat{\tau}_k^{(2)} - \tau_k^{(2)}}{\tau_k^{(2)}}$
$error(\tau_4)$	$\delta_{\tau_k^{(4)}}$	$\delta_{\tau_k^{(4)}} = \frac{\hat{\tau}_k^{(4)} - \tau_k^{(4)}}{\tau_k^{(4)}}$

6. Оценка обобщенных спектральных характеристик.

Обозначение в АИС	Математическое обозначение	Алгоритм
$we(l)$	$\hat{\omega}_s^{(l)}$	
$S_{max}(l)$	$\hat{S}_x^{(l)}(\hat{\omega}_s)_{max}$	

$dwe(1)$	$\hat{\Delta\omega}_3^{(1)}$	$\begin{cases} \hat{\Delta\omega}'_3^{(1)} = \frac{I}{2S_x(\omega_3)_{max}^{(1)}} \\ \hat{\Delta\omega}_3^{(1)} = \omega_3^{(1)} + \frac{\hat{\Delta\omega}'_3^{(1)}}{2} \end{cases}$
$we(1)(t)$	$\omega_3^{(1)}$	
$Smax(1)(t)$	$S_x(\omega_3)_{max}^{(1)}$	
$dwe(1)(t)$	$\hat{\Delta\omega}_3^{(1)}$	$\begin{cases} \Delta\omega'_3^{(1)} = \frac{I}{2S_x(\omega_3)_{max}^{(1)}} \\ \Delta\omega_3^{(1)} = \omega_3^{(1)} + \frac{\Delta\omega'_3^{(1)}}{2} \end{cases}$
$we(2)$	$\hat{\omega}_3^{(2)}$	$\hat{\omega}_3^{(2)} = \hat{\omega}_3^{(1)}$
$Smax(2)$	$\hat{S}_x(\omega_3)_{max}^{(2)}$	
$dwe(2)$	$\hat{\Delta\omega}_3^{(2)}$	$\hat{\Delta\omega}_3^{(2)} = \hat{\omega}_3^{(2)} + \frac{\int_{\hat{\omega}_3^{(2)}}^{\infty} S_x(\omega) d\omega}{\hat{S}_x(\omega_3)_{max}^{(2)}}$
$we(2)(t)$	$\omega_3^{(2)}$	$\omega_3^{(2)} = \omega_3^{(1)}$
$Smax(2)(t)$	$S_x(\omega_3)_{max}^{(2)}$	
$dwe(2)(t)$	$\Delta\omega_3^{(2)}$	$\Delta\omega_3^{(2)} = \omega_3^{(2)} + \frac{\int_{\omega_3^{(2)}}^{\infty} S_x(\omega) d\omega}{S_x(\omega_3)_{max}^{(2)}}$
$error(we(1))$	$\delta_{\omega_3}^{(1)}$	$\delta_{\omega_3}^{(1)} = \frac{\hat{\omega}_3^{(1)} - \omega_3^{(1)}}{\omega_3^{(1)}}$

$error(S_{max}(1))$	$\delta_{S_x(\omega_3)_{max}}^{(1)}$	$\delta_{S_x(\omega_3)_{max}}^{(1)} = \frac{\hat{S}_x^{(1)}(\omega_3)_{max} - S_x^{(1)}(\omega_3)_{max}}{S_x^{(1)}(\omega_3)_{max}}$
$error(dwe(1))$	$\delta_{\Delta\omega_3}^{(1)}$	$\delta_{\omega_3}^{(1)} = \frac{\hat{\Delta\omega_3}^{(1)} - \Delta\omega_3^{(1)}}{\Delta\omega_3^{(1)}}$
$error(we(2))$	$\delta_{\omega_3}^{(2)}$	$\delta_{\omega_3}^{(2)} = \frac{\hat{\omega_3}^{(2)} - \omega_3^{(2)}}{\omega_3^{(2)}}$
$error(S_{max}(2))$	$\delta_{S_x(\omega_3)_{max}}^{(2)}$	$\delta_{S_x(\omega_3)_{max}}^{(2)} = \frac{\hat{S}_x^{(2)}(\omega_3)_{max} - S_x^{(2)}(\omega_3)_{max}}{S_x^{(2)}(\omega_3)_{max}}$
$error(dwe(2))$	$\delta_{\Delta\omega_3}^{(2)}$	$\delta_{\omega_3}^{(2)} = \frac{\hat{\Delta\omega_3}^{(2)} - \Delta\omega_3^{(2)}}{\Delta\omega_3^{(2)}}$

## 14.2. Задание на самостоятельную работу

1. Задать параметры имитационного моделирования в соответствующих подсистемах автоматизированной системы:

1.1. Вид корреляционной функции  $\rho_x(\tau, \omega_0/\lambda)$  с параметрами -  $M = ent[\tau_{k_{max}} / \Delta\tau]$ ,  $\mu = \omega_0/\lambda$ ,  $\delta = 0,05; 0,02; 0,1; 0,2$ .

1.2. Вид ортогональной функции  $\psi_k(\tau, \gamma)$ .

1.3. Настройка параметров аппроксимации (выполняемость основного свойства, инвертирование, установка максимума в «нуль», диапазон поиска числа членов разложения).

1.4. Объем выборки  $N$ .

1.5. Число проводимых экспериментов  $n_{exp}$ .

2. Провести имитационное моделирование и выгрузить результаты моделирования в MS Excel.

3. Построить следующие зависимости с помощью MS Excel:

3.1. Графические зависимости  $M[\delta](N/\mu, n_{exp})$ ,  $\sigma[\delta](N/\mu, n_{exp})$ ,  $\max\{\delta_j\}(N/\mu, n_{exp})$ ,  $\delta_{\tau_k^{(2)}}(N/\mu, n_{exp})$ ,  $\delta_{\tau_k^{(4)}}(N/\mu, n_{exp})$ ,  $\delta_{\omega_3}^{(1)}(N/\mu, n_{exp})$ ,  $\delta_{\omega_3}^{(2)}(N/\mu, n_{exp})$ ,  $\delta_{S_x(\omega_3)_{max}}^{(1)}(N/\mu, n_{exp})$ ,  $\delta_{S_x(\omega_3)_{max}}^{(2)}(N/\mu, n_{exp})$ ,  $\delta_{\Delta\omega_3}^{(1)}(N/\mu, n_{exp})$ ,  $\delta_{\Delta\omega_3}^{(2)}(N/\mu, n_{exp})$ .

3.2. Графические зависимости  $M[\delta](\mu/N, n_{exp})$ ,  $\sigma[\delta](\mu/N, n_{exp})$ ,  $\max\{\delta_j\}(\mu/N, n_{exp})$ ,  $\delta_{\tau_k^{(2)}}(\mu/N, n_{exp})$ ,  $\delta_{\tau_k^{(4)}}(\mu/N, n_{exp})$ ,  $\delta_{\omega_s^{(1)}}(\mu/N, n_{exp})$ ,  $\delta_{\omega_s^{(2)}}(\mu/N, n_{exp})$ ,  $\delta_{S_x(\omega_s)_{max}^{(1)}}(\mu/N, n_{exp})$ ,  $\delta_{S_x(\omega_s)_{max}^{(2)}}(\mu/N, n_{exp})$ ,  $\delta_{\Delta\omega_s^{(1)}}(\mu/N, n_{exp})$ ,  $\delta_{\Delta\omega_s^{(2)}}(\mu/N, n_{exp})$ .

3.3. Графические зависимости  $M[\delta](n_{exp}/N, \mu)$ ,  $\sigma[\delta](n_{exp}/N, \mu)$ ,  $\max\{\delta_j\}(n_{exp}/N, \mu)$ ,  $\delta_{\tau_k^{(2)}}(n_{exp}/N, \mu)$ ,  $\delta_{\tau_k^{(4)}}(n_{exp}/N, \mu)$ ,  $\delta_{\omega_s^{(1)}}(n_{exp}/N, \mu)$ ,  $\delta_{\omega_s^{(2)}}(n_{exp}/N, \mu)$ ,  $\delta_{S_x(\omega_s)_{max}^{(1)}}(n_{exp}/N, \mu)$ ,  $\delta_{S_x(\omega_s)_{max}^{(2)}}(n_{exp}/N, \mu)$ ,  $\delta_{\Delta\omega_s^{(1)}}(n_{exp}/N, \mu)$ ,  $\delta_{\Delta\omega_s^{(2)}}(n_{exp}/N, \mu)$ .

4. Изменить пункты 1.4 и 1.5.

5. Изменить пункт 1.1.

6. Изменить пункт 1.2, повторить пункты 1 - 5 и выбрать наилучший базис.

### 14.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Результаты проведения имитационного моделирования в автоматизированной системе, представленные в виде экранных форм.
4. Результаты проведения имитационного моделирования в виде документа MS Excel.
5. Результаты построения требуемых графических зависимостей в виде документа MS Excel.
6. Выводы.

### 14.4. Контрольные вопросы

1. Каким образом влияет изменение объема выборки на погрешность аппроксимации? Погрешности оценки обобщенных корреляционно-спектральных характеристик?
2. Каким образом влияет изменение показателя колебательности на погрешность аппроксимации? Погрешности оценки обобщенных корреляционно-спектральных характеристик?
3. Влияет ли на результаты проведенных экспериментов пересчет коэффициентов разложения с учетом выполнения основного свойства?
4. Какое число экспериментов рекомендуется проводить? Почему?
5. Какой из способов оценки интервалов корреляции дает худший результат? Почему?
6. Какой из способов оценки эквивалентной ширины спектральной плотности мощности дает лучший результат? В каких случаях и почему?



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предлагаемом лабораторном практикуме рассмотрены вопросы:

- 1) математического описания ортогональных полиномов и функций, исследования их свойств;
- 2) построения ортогональных моделей корреляционно-спектральных функций и их обобщенных характеристик;
- 3) анализа погрешностей оценки параметров ортогональных моделей корреляционно-спектральных характеристик.

Лабораторные работы выполняются как с помощью математического пакета Mathcad, так и с помощью разработанной автоматизированной информационной системы.

Учитывая разнообразие вероятностных характеристик случайных процессов, естественно, работу в этой области нельзя считать решенной в полной мере. Однако, авторы полагают, что предлагаемый базовый вариант лабораторных работ предоставляет возможность для обучения научных сотрудников, аспирантов и студентов методам построения ортогональных моделей вероятностных характеристик случайных процессов, имитационного моделирования и обработки случайных процессов. Кроме этого, разработанная автоматизированная информационная система может применяться для решения разнообразных задач науки и техники методом имитационного моделирования, а так же обработки результатов экспериментальных исследований объектов различной природы. Т.е. предлагаемая система может использоваться в качестве вспомогательной системы при выполнении лабораторных работ по другим курсам, например, связанным с испытаниями объектов авиационно-космической техники. Полученные результаты моделирования и обработки результатов экспериментальных исследований с помощью автоматизированной информационной системы могут экспортироваться в MS Excel и MS Word, что существенно облегчает их дальнейшее использование.

Отметим, что предлагаемый перечень лабораторных работ отражает лишь опыт и точку зрения автора и может быть существенно расширен как по номенклатуре работ, так и по количеству пунктов исследований в каждой работе.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

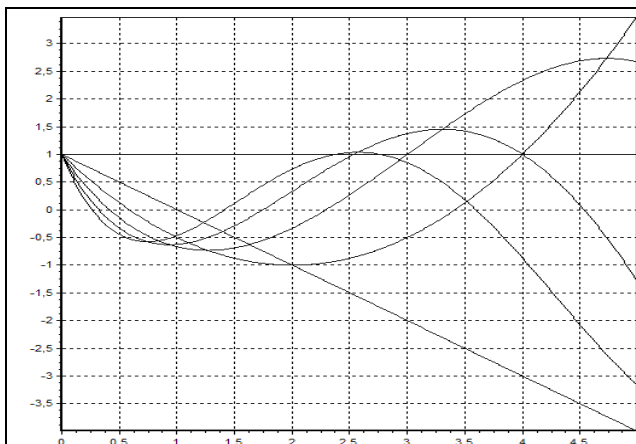
1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы: Учеб. пособие. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 600 с.
2. Бобнев М.П. Генерирование случайных сигналов. Изд. 2-е перераб. и доп. М.: «Энергия», 1971. – 239 с.
3. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1971.
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1969. – 576 с.
5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
6. Дедус Ф.Ф., Махортых С.А., Устинин М.Н. и др. Обобщенный спектрально-аналитический метод обработки информационных массивов. Задачи анализа изображений и распознавания образов. – М.: Машиностроение, 1999. – 357 с.
7. Джексон Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. - М.: Главное издательство иностранной литературы, 1974. – 260 с.
8. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Ч.1. - М.: Мир, 1971. – 320 с.
9. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Ч.2. - М.: Мир, 1972. – 288 с.
10. Докин В.Н., Жуков В.Д., Колокольникова Н.А. и др. Комбинаторные числа и полиномы в моделях дискретных распределений. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 1990. – 208 с.
11. Егорычев Г.П. Интегральное представление комбинаторных сумм. – Новосибирск: Наука, 1977. – 286 с.
12. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. – М.: Наука, 1971. – 327 с.
13. Куликовских И.М. Многомерная параметрическая модель артериальной пульсовой волны //Биотехнические, медицинские, экологические системы и комплексы (БИО-МЕДСИСТЕМЫ - 2007): Материалы XX Юбилейной Всероссийской научно-технической конференции студентов, молодых ученых и специалистов. - Рязань, 2007. – С. 112-113.
14. Лебедев П.А., Калакутский Л.И., Власова С.П. и др. Диагностика функции сосудистого эндотелия у больных с сердечно-сосудистыми заболеваниями. Методические указания. – СГАУ. – Самара, 2004. – 18 с.
15. Леоненков А.В. Самоучитель UML – СПб.: БХВ - Петербург, 2001. – 304 с., ил.
16. Методы нормирования метрологических характеристик, оценки и контроля характеристик погрешностей средств статистических измерений. РТМ 25 139-74 //Минприбор. – 1974. – 76 с.
17. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. - М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1974. – 480 с.
18. Никифоров А.Ф., Суслов С.К., Уваров В.Б. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. – М.: Наука, 1985.
19. Полляк Ю.Г. Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах. – М.: Сов. радио, 1971. – 400 с.
20. Попов Ю.П., Самарский А.А. Вычислительный эксперимент. - Новое в жизни, науке и технике. Сер. Мат-ка, киб., 1983, №11, М.: Знание. – 64 с.
21. Прикладной анализ случайных процессов/Под ред. С.А. Прохорова. – Самара: СНЦ РАН, 2007. – 582 с.
22. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов. – 2-е изд., перераб. и доп./СНЦ РАН, 2001. – 380 с., ил.
23. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов. – Самара, СНЦ РАН, 2001. – 329 с.

24. Прохоров С.А. Математическое описание и моделирование случайных процессов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001. – 209 с.: ил.
25. Прохоров С.А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум./Самар. гос. аэрокосм. ун-т, Уральск, 2001. – 191 с.: ил.
26. Прохоров С.А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум. – 2-е изд., перераб. и доп./СНЦ РАН, 2001. – 277 с., ил.
27. Прохоров С.А. Прикладной анализ неэквидистантных временных рядов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001. – 374 с.: ил.
28. Прохоров С.А., Иващенко А.В., Графкин А.В.; Под ред. Прохорова С.А. Автоматизированная система корреляционно-спектрального анализа случайных процессов. - СНЦ РАН, 2003. – 286 с., ил.
29. Прохоров С.А., Графкин А.В., Графкин В.В. Автоматизированный комплекс корреляционно-спектрального анализа методом аппроксимации ортогональными функциями/ Вестник Самарского государственного технического университета. Выпуск 33. Серия «Технические науки». 2005. – С. 329-324.
30. Прохоров С.А., Кудрина М.А., Кудрин К.А. Автоматизированная система аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа/ Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета № 1 (5), 2004. – С. 117-123.
31. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Автоматизированная система аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах Якоби/ Труды 5 Всероссийской межвузовской научно-практической конференции «Компьютерные технологии в науке, практике и образовании», СГТУ, Самара, 2006. – С. 50-53.
32. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Корреляционно-спектральный анализ в ортогональных базисах Якоби/ Труды Всероссийской межвузовской научно-практической конференции «Компьютерные технологии в науке, практике и образовании», СГТУ, Самара, 2005. – С. 54-59.
33. Прохоров С.А. Лабораторный практикум по моделированию и анализу случайных процессов/ Материалы XIV научно-технической конференции с участием зарубежных специалистов «Датчики и преобразователи информации систем измерения, контроля и управления «Датчик-2002»». – С. 305-306.
34. Прохоров С.А. Частотные свойства ортогональных функций экспоненциального типа/ Труды научно-технической конференции с международным участием «Перспективные информационные технологии в научных исследованиях, проектировании и обучении (ПИТ-2006)». Том 2. – Самара, 2006. – С. 55- 62.
35. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Автоматизированная информационная система исследования ортогональных полиномов и функций семейства Якоби //Проблемы автоматизации и управления в технических системах: Материалы международной научно-технической конференции. – ИИЦ ПГУ. – Пенза, 2007. – С. 149-152.
36. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Автоматизированная система аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах Якоби //Компьютерные технологии в науке, практике и образовании: Труды Всероссийской межвузовской научно-практической конференции. – СГТУ. – Самара, 2006. – С. 50-53.
37. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Автоматизированная система корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах //Современные проблемы информатизации в анализе и синтезе технологических и программно-телекоммуникационных систем (СПИ-2008): Сборник трудов XIII Международной открытой конференции. – Воронеж, 2008. –Выпуск 13. – С. 313-317.
38. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Корреляционно-спектральный анализ в ортогональных базисах Чебышева// Радиотехника и связь: Материалы четвертой международной научно-технической конференции. - Саратов, 2007. – С. 12-17.
39. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Корреляционно-спектральный анализ в ортогональных базисах Якоби //Компьютерные технологии в науке, практике и образовании:

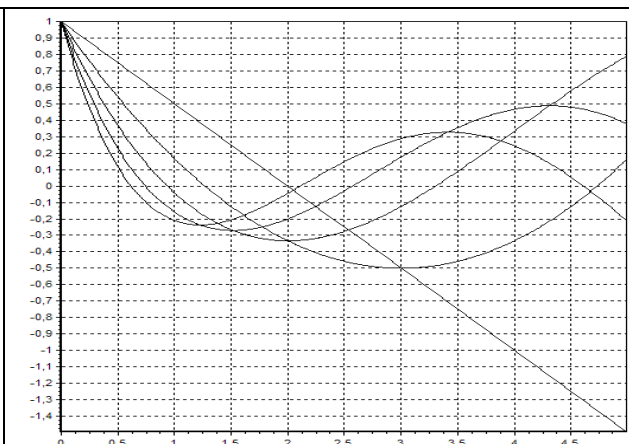
- Труды Всероссийской межвузовской научно-практической конференции. – СГТУ. – Самара, 2005. – С. 54-59.
40. Прохоров С.А., Куликовских И.М., Москаленко И.С. Лабораторный практикум по корреляционно-спектральному анализу случайных процессов в ортогональных базисах //Перспективные информационные технологии в научных исследованиях, проектировании и обучении (ПИТ - 2006): Труды научно-технической конференции с международным участием. – Самара, 2006. – Т.3. – С. 117-120.
41. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Об одном подходе к уточнению параметра масштаба ортогональных функций в задачах аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа //Компьютерные технологии в науке, практике и образовании: Труды Всероссийской межвузовской научно-практической конференции. – СГТУ. – Самара, 2007. – С. 42-45.
42. Прохоров С.А., Иващенко А.В. Автоматизированная система для аппроксимативного анализа взаимных корреляционно-спектральных характеристик временных рядов / Труды международного симпозиума "Надежность и качество" / Под ред. Н.К. Юрьева. Пенза: Информационно-издательский центр Пензенского гос. университета, 2002. – С. 146-149.
43. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Программный комплекс аппроксимативного анализа корреляционных и спектральных характеристик случайных процессов в классических ортогональных базисах Якоби и Сонина-Лагерра //Инновационные технологии в управлении, образовании, промышленности (АСТИНТЕХ-2007): Материалы Всероссийской научной конференции. – Издательский дом «Астраханский университет». – Астрахань, 2007. – С. 130-134.
44. Прохоров С.А., Графкин А.В. Программный комплекс корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах. – Самара: СНЦ РАН, 2005. – 241 с.
45. Прохоров С.А. Частотные свойства ортогональных функций экспоненциального типа //Перспективные информационные технологии в научных исследованиях, проектировании и обучении (ПИТ - 2006): Труды научно-технической конференции с международным участием. – Самара, 2006. – Т.2. – С. 55-62.
46. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Частотные свойства ортогональных функций Якоби //Информационные технологии в высшем профессиональном образовании: сборник докладов второй межрегиональной научно-технической конференции. – Тольятти, 2007. – С. 125-128.
47. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Частотные характеристики ортогональных функций Сонина-Лагерра //Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». -2007. - №15. – С. 123-127.
48. Пугачёв В.С. Введение в теорию вероятностей. - М.: Наука, 1968. – 368 с.
49. Пугачёв В.С. Теория случайных функций. - М.: Физматиздат., 1962. – 884 с.
50. Романенко А.Ф., Сергеев Г.А. Аппроксимативные методы анализа случайных процессов. - М.: Энергия, 1974. – 176 с., ил.
51. Романенко А.Ф., Сергеев Г.А. Вопросы прикладного анализа случайных процессов. - М.: Сов. радио, 1968. – 256 с.
52. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Физматлит, 2001. – 336 с.
53. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. - М.: Наука, 1976. – 328 с.
54. Цветков Э.И. Методические погрешности статистических измерений - Л.: Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. отделение, 1984. – 144 с., ил.
55. Цветков Э.И. Основы теории статистических измерений. - 2-е изд., перераб. и доп. - Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. отделение, 1982. – 256 с.
56. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука. – М.: Мир, 1972.

57. Lampard D.G. A new Method of determining Correlation Function Stationary Time Series. "Proceedings of the Institution of Electrical Engineers", vol. 102, part. C. March, 1955, London, № 1.
58. <http://millionreferatov.ru/text/18/610.htm>
59. <http://www.univer.omsk.su/omsk/Edu/Math/ddirihle.html>
60. <http://be.sci-lib.com/article058261.html>
61. <http://l-polindrom.com.ru>
62. <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Rodrigues.html>
63. [http://en.wikipedia.org/wiki/Olinde\\_Rodrigues](http://en.wikipedia.org/wiki/Olinde_Rodrigues)
64. <http://www.math.ru/history/people/Rodrigues>
65. [http://www.biografija.ru/show\\_bio.aspx?id=120313](http://www.biografija.ru/show_bio.aspx?id=120313)
66. <http://ru.wikipedia.org/wiki>
67. <http://www.oval.ru/enc/81859.html>
68. <http://www.cultinfo.ru/fulltext/1/001/008/121/648.html>
69. <http://www.krugosvet.ru/articles/106/1010637/1010637a1.htm>
70. <http://www.c-cafe.ru/days/bio/5/084.php>
71. <http://www.krugosvet.ru/articles/39/1003936/1003936a1.html>
72. <http://www.univer.omsk.su/omsk/Edu/Math/jajakobi.html>

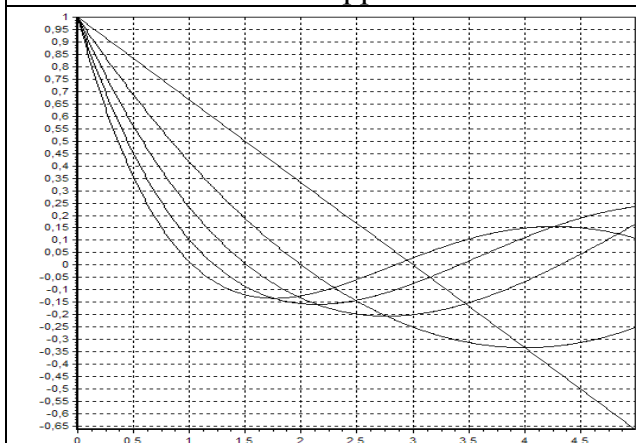
ВИД ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ  $\theta$  – 5 ПОРЯДКОВ



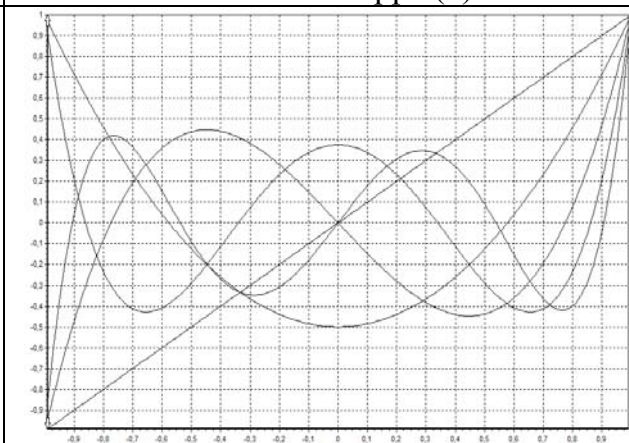
Лагерра



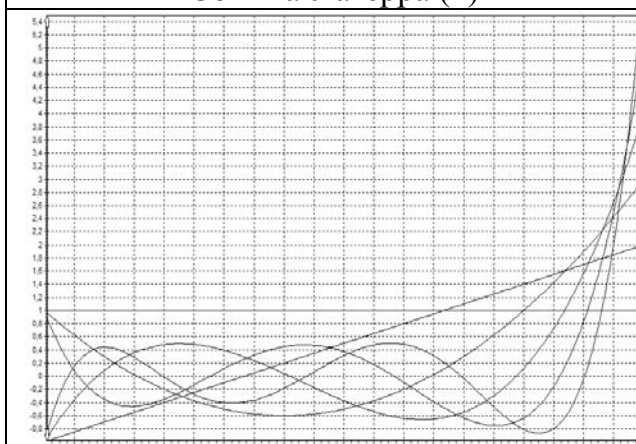
Сонина-Лагерра (1)



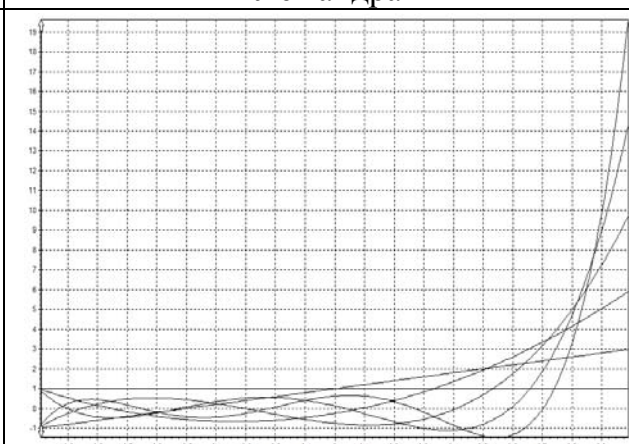
Сонина-Лагерра (2)



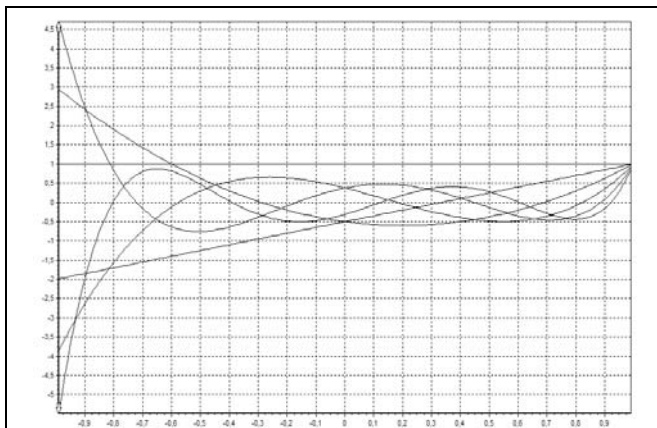
Лежандра



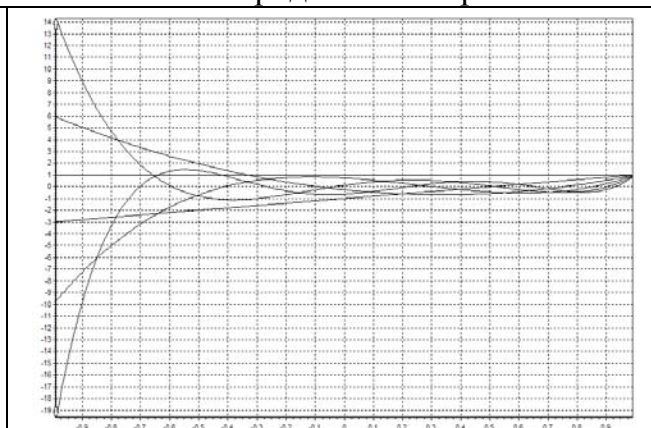
Якоби (1, 0)



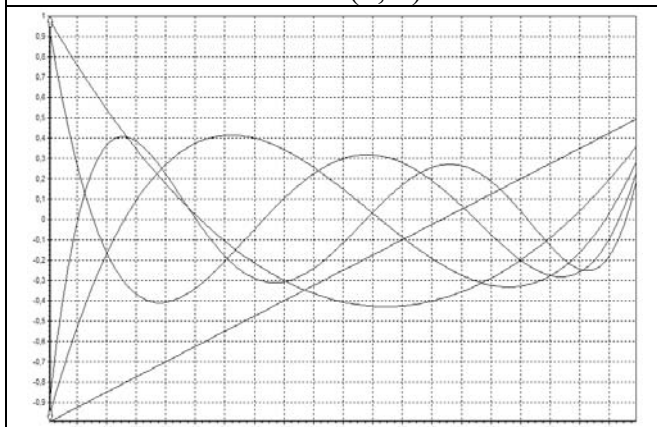
Якоби (2, 0)



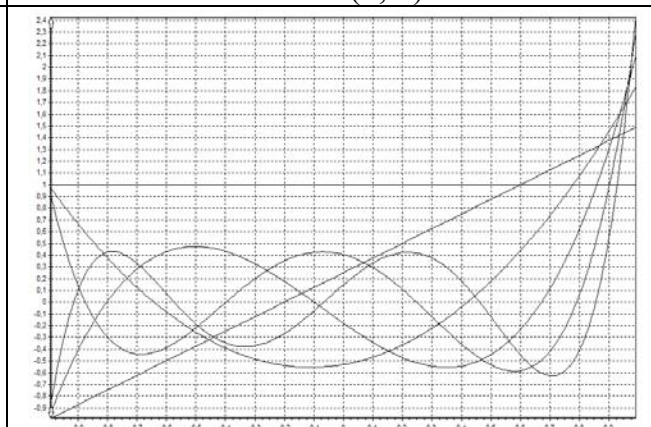
Якоби (0, 1)



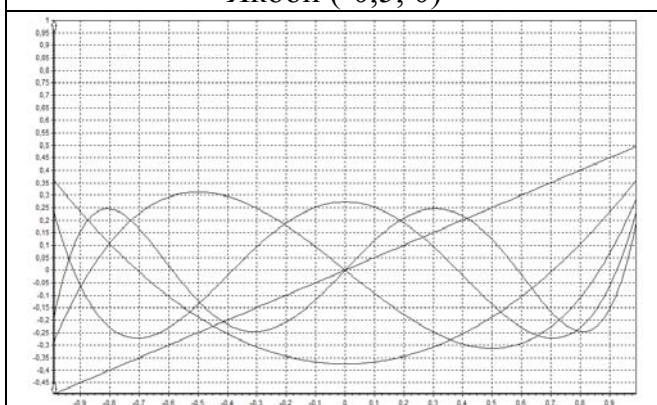
Якоби (0, 2)



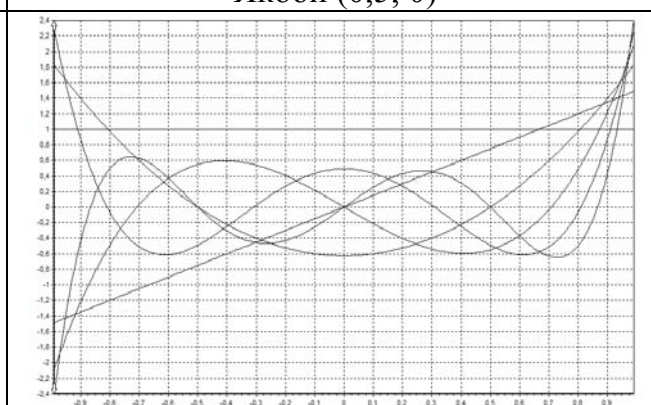
Якоби (-0,5, 0)



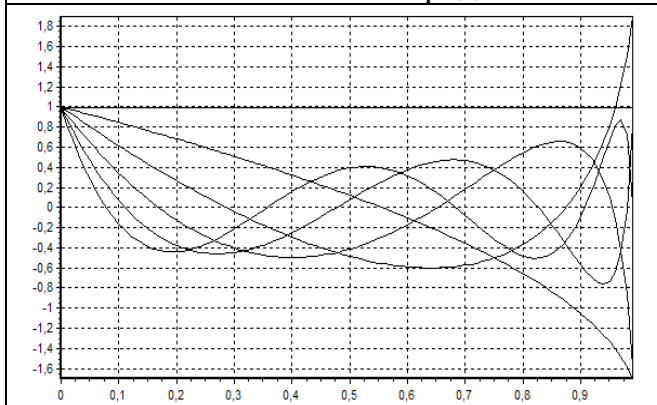
Якоби (0,5, 0)



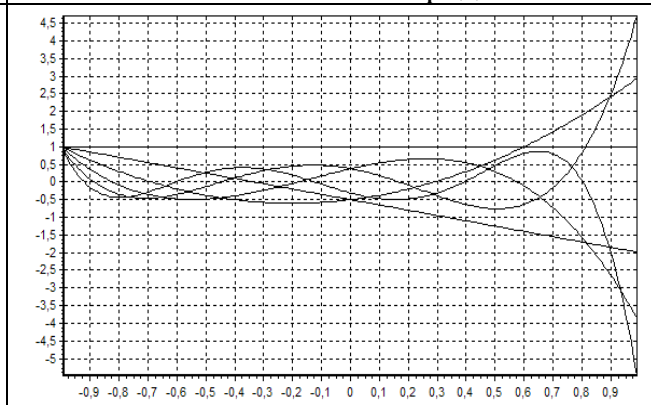
Чебышева 1-ого рода



Чебышева 2-ого рода



Дирихле 1



Дирихле 2

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1. «ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ»

**Цель работы:** изучение основных свойств классических ортогональных полиномов, приобретение навыков работы с ними.

### 1. Представление ортогональных полиномов $k$ -ого порядка

1.1. Представить ортогональные полиномы в форме Родрига и получить аналитические выражения и графики для первых шести порядков.

$$P_1(k, x) := \begin{cases} 1 & \text{if } k = 0 \\ \frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \cdot \frac{1}{(1-x)} \cdot \left[ \frac{d^k}{dx^k} (1-x)^{k+1} \cdot (1+x)^k \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$P_1(0, x) \text{ simplify} \rightarrow 1$$

$$P_1(1, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot x$$

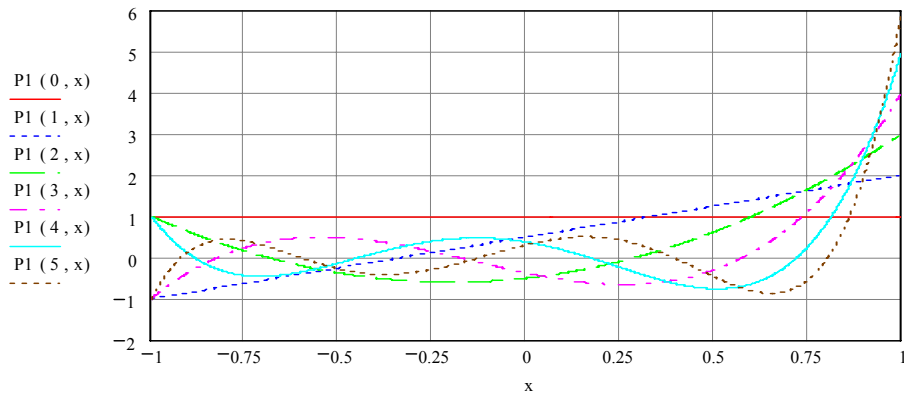
$$P_1(2, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{-1}{2} + x + \frac{5}{2} \cdot x^2$$

$$P_1(3, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{-3}{8} - \frac{15}{8} \cdot x + \frac{15}{8} \cdot x^2 + \frac{35}{8} \cdot x^3$$

$$P_1(4, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{3}{8} - \frac{3}{2} \cdot x - \frac{21}{4} \cdot x^2 + \frac{7}{2} \cdot x^3 + \frac{63}{8} \cdot x^4$$

$$P_1(5, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{35}{16} \cdot x + \frac{105}{16} \cdot x^4 - \frac{105}{8} \cdot x^3 - \frac{35}{8} \cdot x^2 + \frac{5}{16} + \frac{231}{16} \cdot x^5$$





1.2. Представить ортогональные полиномы в виде конечного ряда и получить аналитические выражения и графики для первых шести порядков.

$$P(k, x) := \sum_{s=0}^k \frac{k!}{s!(k-s)!} \cdot \frac{(k+s+1)!}{k!(s+1)!} \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right)^s$$

$$P(0, x) \text{ simplify} \rightarrow 1$$

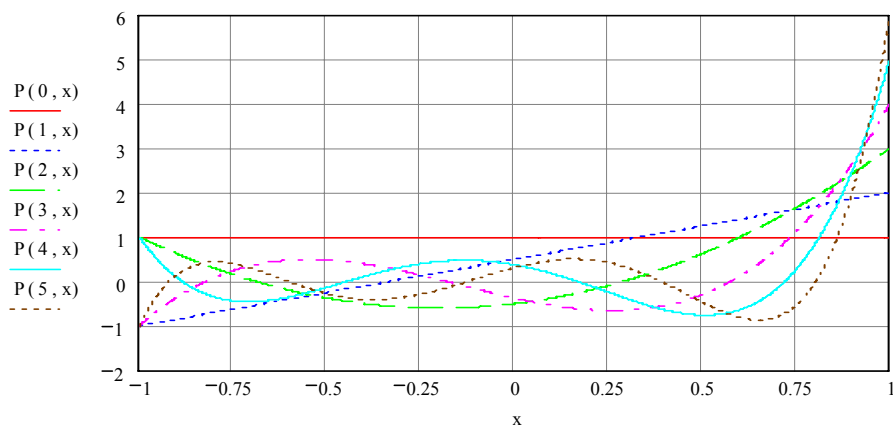
$$P(1, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot x$$

$$P(2, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{-1}{2} + x + \frac{5}{2} \cdot x^2$$

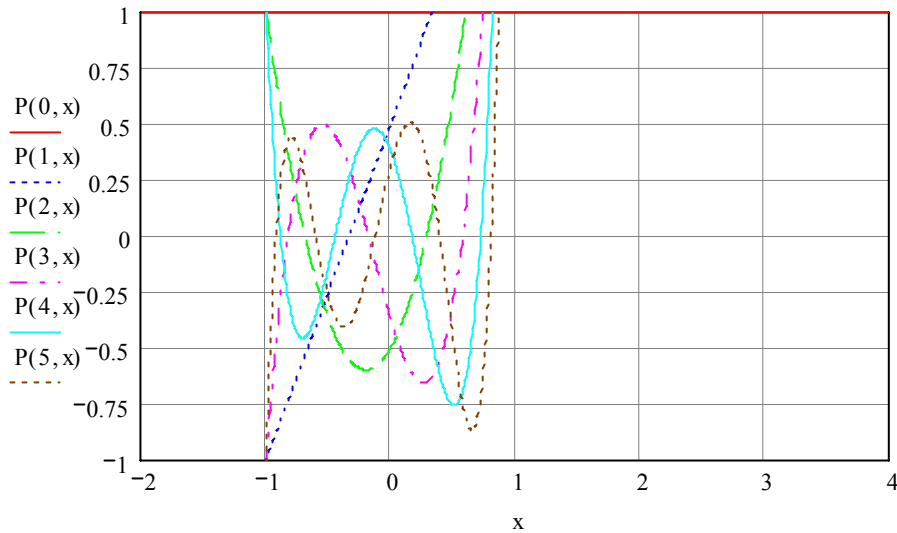
$$P(3, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{-3}{8} - \frac{15}{8} \cdot x + \frac{15}{8} \cdot x^2 + \frac{35}{8} \cdot x^3$$

$$P(4, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{3}{8} - \frac{3}{2} \cdot x - \frac{21}{4} \cdot x^2 + \frac{7}{2} \cdot x^3 + \frac{63}{8} \cdot x^4$$

$$P(5, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{35}{16} \cdot x + \frac{105}{16} \cdot x^2 - \frac{105}{8} \cdot x^3 - \frac{35}{8} \cdot x^4 + \frac{5}{16} + \frac{231}{16} \cdot x^5$$



2. Определить интервал ортогональности  $[a, b]$ . Рассчитать ортогональные полиномы  $k$ -ого порядка на концах интервала ортогональности.



$a := -1$

$k := 0..5$

$b := 1$

$P(k, -1) =$

$P(k, 1) =$

1
-1
1
-1
1
-1

1
2
3
4
5
6

3. Определение нормы ортогональных полиномов.

3.1. Определить значения нормы ортогональных полиномов из выражения (1. 7). Результат - в виде матрицы значений размерностью  $(k, m)$ , привести графическую интерпретацию.

$k := 6$

$\mu(x) := 1 - x$

$i := 0..k - 1$

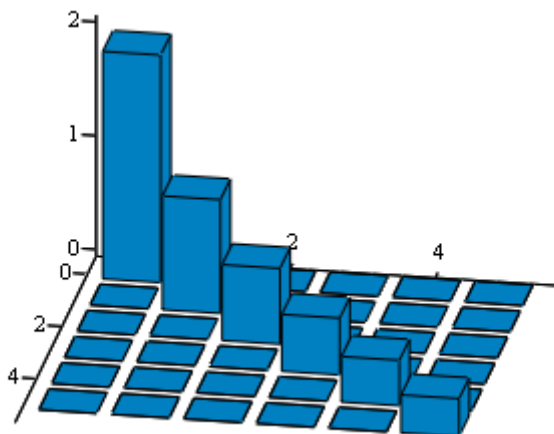
$m := k$

$j := 0..m - 1$

$$\text{NormP}(i, j) := \int_a^b P(i, x) \cdot P(j, x) \cdot \mu(x) dx$$

$$\text{NormMP} := \text{matrix}(k, m, \text{NormP})$$

$$\text{NormMP} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1.235 \times 10^{-15} & -4.607 \times 10^{-15} & 2.326 \times 10^{-14} \\ 0 & 1 & 0 & 1.436 \times 10^{-15} & 5.079 \times 10^{-15} & -1.073 \times 10^{-14} \\ 0 & 0 & 0.667 & 0 & -4.215 \times 10^{-15} & 3.962 \times 10^{-15} \\ -1.235 \times 10^{-15} & 1.436 \times 10^{-15} & 0 & 0.5 & 2.359 \times 10^{-15} & -2.033 \times 10^{-15} \\ -4.607 \times 10^{-15} & 5.079 \times 10^{-15} & -4.215 \times 10^{-15} & 2.359 \times 10^{-15} & 0.4 & -1.138 \times 10^{-15} \\ 2.326 \times 10^{-14} & -1.073 \times 10^{-14} & 3.962 \times 10^{-15} & -2.033 \times 10^{-15} & -1.138 \times 10^{-15} & 0.333 \end{pmatrix}$$



NormMP

3.2. Определить значение нормы ортогональных полиномов  $k$ -ого порядка, используя выражение, приведенное в таблице 1.2. Результат представить в виде вектора значений.

$$\text{NormPT}(i) := \frac{2}{i+1}$$

NormPT(i) =

2
1
0.667
0.5
0.4
0.333

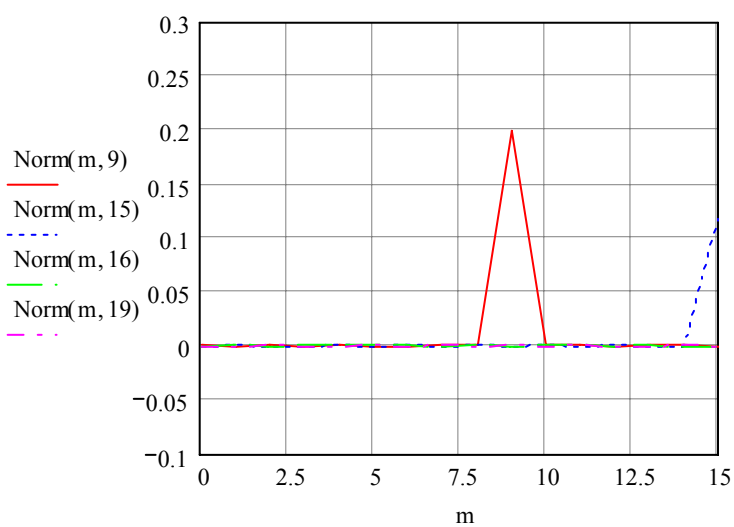
4. Проверить выполняемость 1 - ого условия ортогональности.

m := 0..15

$$\text{Norm}(m, n) := \int_a^b P(m, x) \cdot P(n, x) \cdot \mu(x) dx$$

Norm(m, 16) =

-3.617·10 <sup>-6</sup>
2.929·10 <sup>-6</sup>
-1.916·10 <sup>-6</sup>
7.979·10 <sup>-7</sup>
1.688·10 <sup>-7</sup>
1.555·10 <sup>-7</sup>
2.069·10 <sup>-7</sup>
-3.706·10 <sup>-7</sup>
3.599·10 <sup>-7</sup>
-2.356·10 <sup>-7</sup>
6.802·10 <sup>-8</sup>
8.129·10 <sup>-8</sup>
-1.688·10 <sup>-7</sup>
1.754·10 <sup>-7</sup>
-1.595·10 <sup>-8</sup>
-2.392·10 <sup>-8</sup>



1 - ое условие ортогональности выполнено

5. Проверить выполняемость 2 - ого условия ортогональности.

x := 0

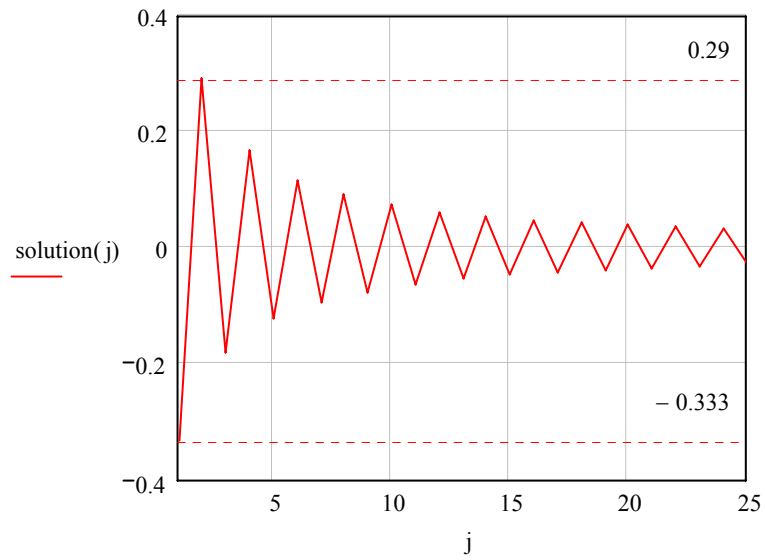
j := 1..25

$$f(j, x) := P(j, x)$$

$$\text{solution}(j) := \text{root}(f(j, x), x)$$

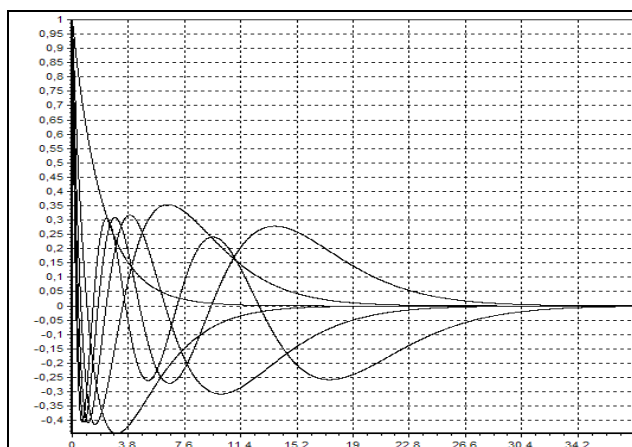
solution(j) =

-0.333
0.29
-0.181
0.167
-0.124
0.117
-0.094
0.09
-0.076
0.073
-0.064
0.062
-0.055
0.053
-0.048
0.047

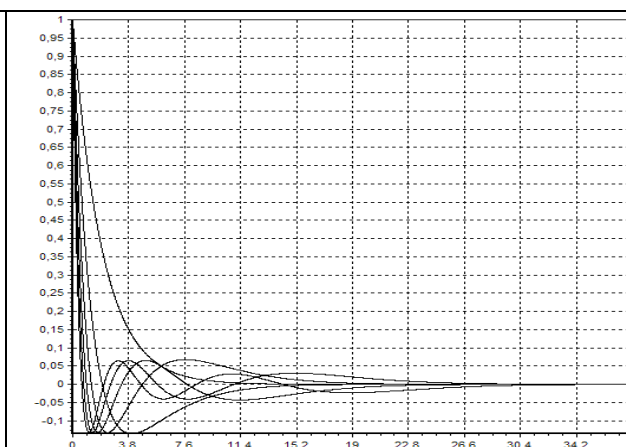


2 - ое условие ортогональности выполнено

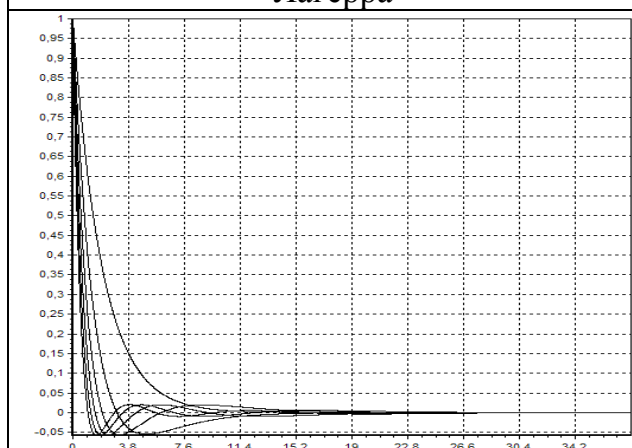
ВИД ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ 0 – 5 ПОРЯДКОВ



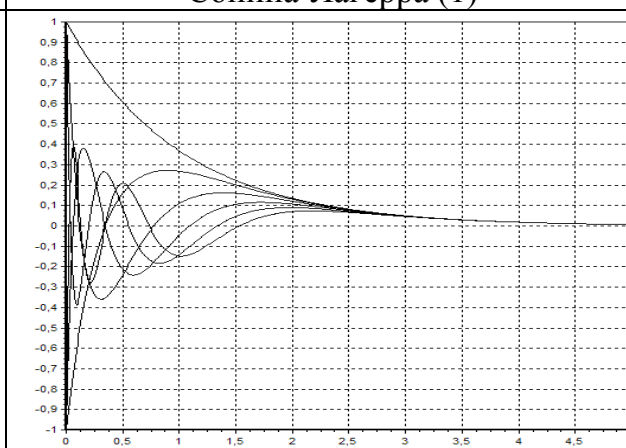
Лагерра



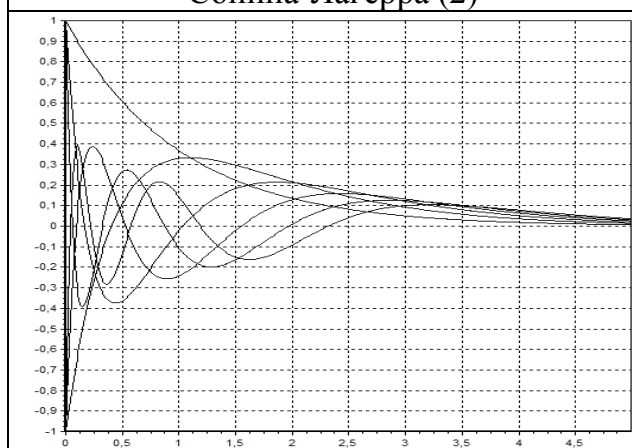
Сонина-Лагерра (1)



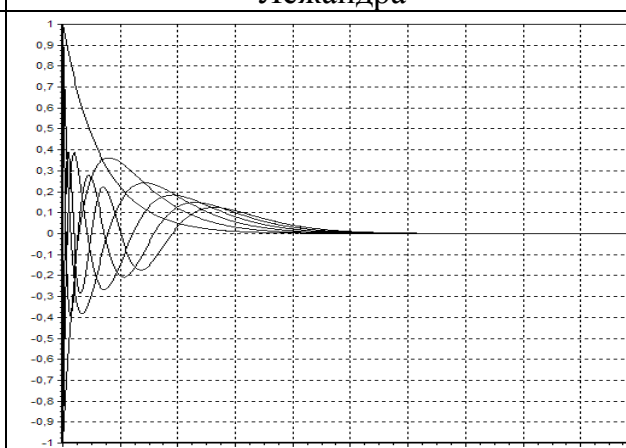
Сонина-Лагерра (2)



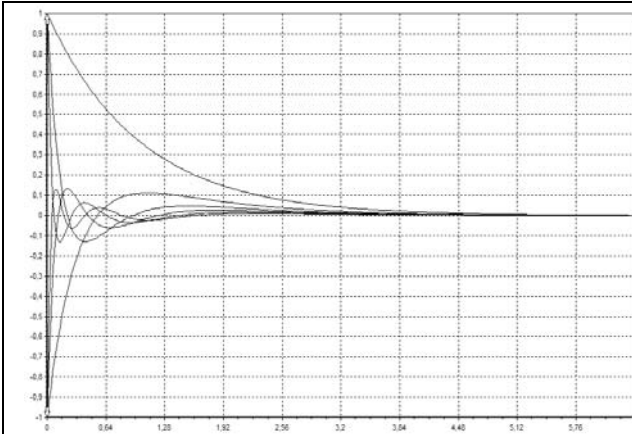
Лежандра



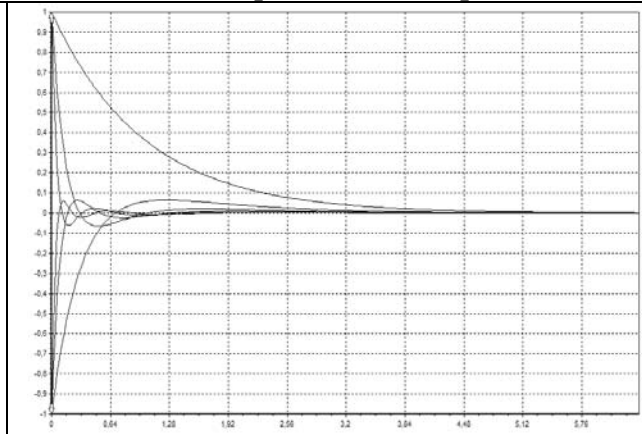
Якоби (1, 0)



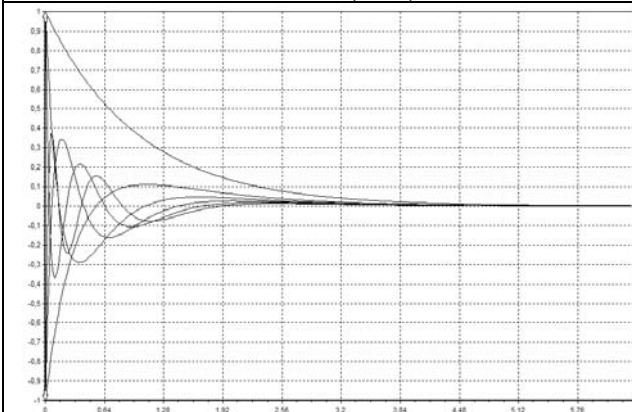
Якоби (2, 0)



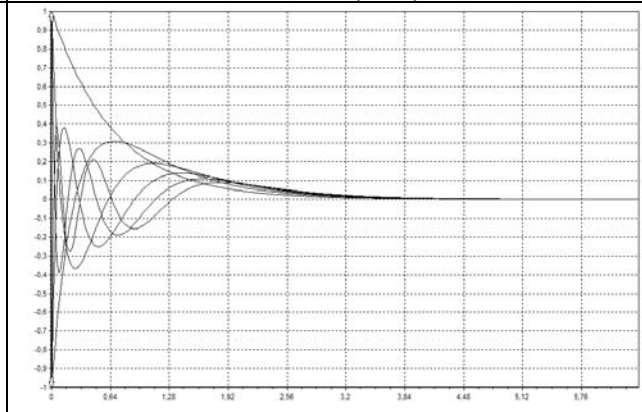
Якоби (0, 1)



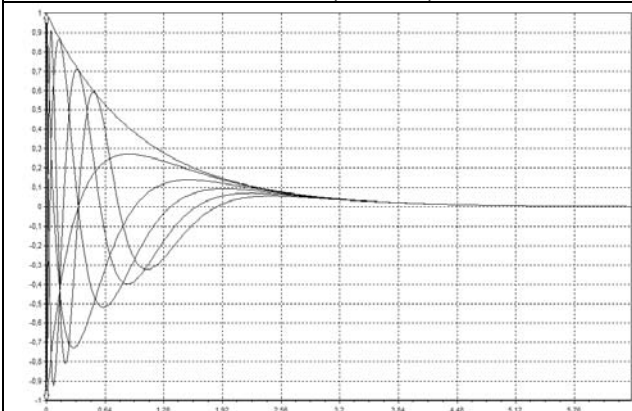
Якоби (0, 2)



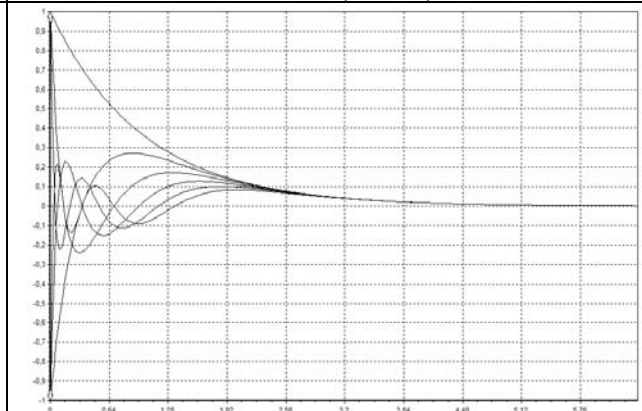
Якоби (-0,5, 0)



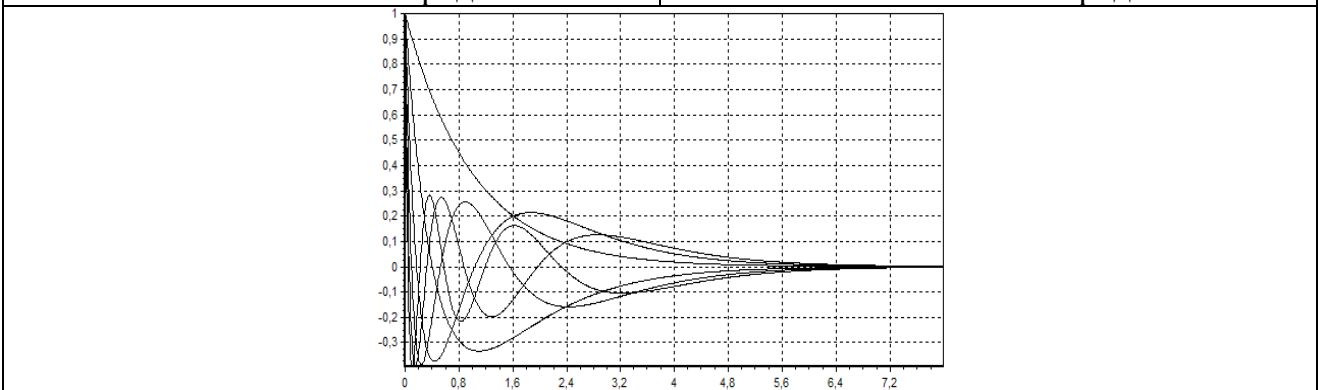
Якоби (0,5, 0)



Чебышева 1-ого рода



Чебышева 2-ого рода



Дирихле

**ПРАВИЛА ДЕЙСТВИЙ НАД КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПРОИЗВОДЯЩИХ  
ФУНКЦИЙ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ  
КОМБИНАТОРНЫХ ЧИСЕЛ**

**Правила действий над коэффициентами**

Таблица П 4.1

Правило 1 (снятия коэффициента)
$\underset{w}{\text{Coef}} A(w)w^{-k-1} = \underset{w}{\text{Coef}} B(w)w^{-k-1}, k = 0, 1, \dots,$ <p>тогда и только тогда, когда</p> $A(w) = B(w)$
Правило 2 (линейности)
$\alpha \cdot \underset{w}{\text{Coef}} A(w)w^{-k-1} + \beta \cdot \underset{w}{\text{Coef}} B(w)w^{-k-1} = \underset{w}{\text{Coef}} (\alpha \cdot A(w) + \beta \cdot B(w))w^{-k-1}$
Правило 3 (замены переменных)
<p>Если <math>z \in R</math>, то</p> $\sum_{k=0}^{\infty} z^k \underset{w}{\text{Coef}} A(w)w^{-k-1} = A(z)$ <p>Соотношение остается справедливым и в случае, когда <math>A(w)</math> - полином, а <math>z = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k w^k, a_m \neq 0</math>, где <math>m</math> - натуральное число.</p>
Правило 4 (обращения)
<p>Если <math>f(w) \in R_0</math>, то</p> $\sum_{k=0}^{\infty} z^k \underset{w}{\text{Coef}} A(w) f^k(w) w^{-k-1} = \left[ A(w) (f(w) h'(w))^{-1} \right] \Big _{w=g(z)},$ <p>где <math>h(w) = wf^{-1}(w)</math>, а <math>g(z) \in R</math> - обратный элемент в кольце <math>R</math> к ряду <math>z = h(w) \in R</math>.</p>
Правило 5 (замены переменных под знаком <i>Coef</i> )
<p>Если <math>f(z) \in R_0</math>, то</p> $\underset{w}{\text{Coef}} (A(w) f^k(w) w^{-k-1}) = \underset{z}{\text{Coef}} \left[ A(w) (f(w) h'(w))^{-1} \right] \Big _{w=g(z)} z^{-k-1}, k = 0, 1, \dots,$ <p>где <math>h(w) = wf^{-1}(w)</math>, а <math>g(z) \in R</math> - обратный элемент в кольце <math>R</math> к ряду <math>z = h(w) \in R</math>.</p>
Правило 6 (разложения в ряд Бюрмана-Лагранжа)
<p>Если <math>g(w) \in R, h(z) = zf^{-1}(z) \in R</math> - обратный элемент в кольце <math>R</math> к ряду <math>g(w)</math>, то</p> $B(z) \Big _{z=g(w)} = \sum_{k=0}^{\infty} w^k \underset{w}{\text{Coef}} B(w) h'(w) f^{k+1}(w) w^{-k-1}$
Правило 7 (дифференцирования)
$k \underset{w}{\text{Coef}} A(w) w^{-k-1} = \underset{w}{\text{Coef}} A'(w) w^{-k}, k = 0, 1, \dots$



Правило 8 (интегрирования)
$\frac{1}{k+1} \underset{w}{\text{Coef}} A(w) w^{-k-1} = \underset{w}{\text{Coef}} \left( \int_0^w A(w) dw \right) w^{-k-2}, k = 0, 1, \dots$

## Таблица М интегральных представлений чисел

Таблица П 4.2

1. Биномиальный коэффициент
<p><i>Определение и интегральное представление - <math>M_1 = M_1(w)</math></i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li> <math display="block">C_\alpha^n = \begin{cases} 1, &amp; n = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}, &amp; n = 1, 2, 3, \dots \\ 0, &amp; n = -1, -2, -3, \dots \end{cases}</math> </li> <li> <math display="block">C_\alpha^n = \underset{w}{\text{Coef}} (1+w)^\alpha w^{-n-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} (1+w)^\alpha w^{-n-1} dw \quad 0 &lt; \rho &lt; 1</math> </li> <li> <math display="block">C_m^n = \begin{cases} 1, &amp; n = 0 \\ \frac{m!}{n!(m-n)!}, &amp; n = 1, 2, 3, \dots, m \\ 0, &amp; n = -1, -2, -3, \dots, n &gt; m \end{cases}</math> </li> <li> <math display="block">C_m^n = \underset{w}{\text{Coef}} (1+w)^m w^{-n-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} (1+w)^m w^{-n-1} dw \quad 0 &lt; \rho &lt; \infty</math> </li> <li> <p>Зная, что <math>C_m^n = C_m^{m-n}</math> используют представление вида</p> <math display="block">C_m^n = \underset{w}{\text{Coef}} (1+w)^m w^{-m+n-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} (1+w)^m w^{-m+n-1} dw \quad 0 &lt; \rho &lt; \infty</math> </li> <li> <math display="block">C_{-m}^n = (-1)^n C_{m+n-1}^n \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots</math> </li> <li> <math display="block">C_{m+n-1}^n = \underset{w}{\text{Coef}} (1-w)^m w^{-n-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} (1-w)^m w^{-n-1} dw \quad 0 &lt; \rho &lt; 1</math> </li> <li> <p>Зная, что <math>C_{m+n-1}^n = C_{m+n-1}^{m-1}</math> используют представление вида</p> <math display="block">C_{m+n-1}^n = \underset{w}{\text{Coef}} (1-w)^{-n-1} w^{-m} = \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} (1-w)^{-n-1} w^{-m} dw \quad 0 &lt; \rho &lt; 1</math> </li> <li> <math display="block">C_{-1/2}^n = 4^{-n} C_{2n}^n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}</math> </li> <li> <math display="block">C_{2n}^n = \underset{w}{\text{Coef}} (1-4w)^{-1/2} w^{-n-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} (1-4w)^{-1/2} w^{-n-1} dw \quad 0 &lt; \rho &lt; 1</math> </li> </ul>

2. Коэффициенты разложения логарифмической функции - $\ln(1-w)$	
Определение и интегральное представление - $M_2 = M_2(w)$	
$\left. \begin{array}{l} 0, \quad n=0, \\ \frac{1}{n}, \quad n=1,2,3,\dots \end{array} \right\} = \underset{w}{\text{Coef}}(-\ln(1-w))w^{-n-1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} \ln(1-w)w^{-n-1} dw \quad 0 < \rho < 1$	
3. Коэффициенты разложения экспоненциальной функции - $e^{\alpha w}$	
Определение и интегральное представление - $M_3 = M_3(w)$	
$\frac{\alpha^n}{n!} = \underset{w}{\text{Coef}}(e^{\alpha w} w^{-n-1}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} e^{\alpha w} w^{-n-1} dw \quad 0 < \rho < \infty, \quad n = 0,1,2,\dots$	
4. Числа Эйлера - $E_n$ (обычные), $n = 0,1,2,\dots$	
Определение и интегральное представление - $M_4 = M_4(w)$	
$E_n = n! \underset{w}{\text{Coef}} ch^{-1}(w)w^{-n-1} = n! \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} ch^{-1}(w)w^{-n-1} dw \quad 0 < \rho < \infty \quad n = 0,1,2,\dots$	
5. Числа Бернулли - $B_n$ , $n = 0,1,2,\dots$	
Определение и интегральное представление - $M_5 = M_5(w)$	
$B_n = n! \underset{w}{\text{Coef}}(e^w - 1)^{-1} w^{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} (e^w - 1)^{-1} w^{-n} dw \quad 0 < \rho < \infty \quad n = 0,1,2,\dots$	
6. Числа Стирлинга 1-ого рода - $s_1(m, n)$ , $n = 0,1,2,\dots$	
Определение и интегральное представление - $M_6 = M_6(w)$	
$(w)_m = \sum_{n=0}^{\infty} s_1(m, n)w^n, \quad s_1(0,0) = 1$	
$s_1(m, n) = \underset{w}{\text{Coef}}(w)_m w^{-n-1} = \frac{m!}{n!} \underset{w}{\text{Coef}}(\ln(1+w))^n w^{-m-1} = \frac{m!}{n!} \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} (\ln(1+w))^n w^{-m-1} dw \quad 0 < \rho < 1$	
7. Числа Стирлинга 2-ого рода - $s_2(m, n)$ , $n = 0,1,2,\dots$	
Определение и интегральное представление - $M_7 = M_7(w)$	
$w^m = \sum_{n=0}^{\infty} s_2(m, n)(w)_n, \quad s_2(0,0) = 1$	
$s_2(m, n) = \frac{m!}{n!} \underset{w}{\text{Coef}}(e^w - 1)^n w^{-m-1} = \frac{m!}{n!} \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} (e^w - 1)^n w^{-m-1} dw \quad 0 < \rho < \infty \quad m = 0,1,2,\dots$	
8. Гамма – функция - $\Gamma(z)$	
Определение и интегральное представление - $M_8 = M_8(s)$	
$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-s} s^{z-1} ds, \quad \text{Re } z > 0$	
Частный случай	
$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-s} s^n ds \quad n = 0,1,2,\dots$	

<p>9. Бета – функция - <math>B(u, v)</math></p>
<p><i>Определение и интегральное представление - <math>M_8 = M_9 = M_9(t)</math></i></p> $B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} = \int_0^1 t^{u-1} (1-t)^{v-1} dt, \quad \operatorname{Re} u > 0, \operatorname{Re} v > 0$ <p>Частный случай</p> $\frac{n!m!}{(n+m+1)!} = B(n+1, m+1) = \int_0^1 t^n (1-t)^m dt \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$
<p>10. Обобщенные числа Стирлинга 2-ого рода - <math>s_2^{(\alpha)}(m, n, k), n = 0, 1, 2, \dots, k</math></p>
<p><i>Определение и интегральное представление - <math>M_{10} = M_{10}(w)</math></i></p> $s_2^{(\alpha)}(m, n, k) = \frac{m!}{n!} \operatorname{Coef}_w e^{\alpha w} \frac{(e^{kw} - 1)^n}{w^{m+1}} = \frac{m!}{n!} \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} e^{\alpha w} (e^{kw} - 1)^n w^{-m-1} dw \quad 0 < \rho < \infty$
<p>11. Обобщенные числа Бернулли - <math>B_n^{(m)}, n = 0, 1, 2, \dots</math></p>
<p><i>Определение и интегральное представление - <math>M_{11} = M_{11}(w)</math></i></p> $B_n^{(m)} = n! \operatorname{Coef}_w (e^w - 1)^{-m} w^{-n+m-1} = n! \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} (e^w - 1)^{-m} w^{-n+m-1} dw \quad 0 < \rho < \infty \quad n = 0, 1, 2, \dots$
<p>12. Числа Эйлера - <math>E_n^{(m)}</math> <math>m</math> – ого порядка, <math>n = 0, 1, 2, \dots</math></p>
<p><i>Определение и интегральное представление - <math>M_{12} = M_{12}(w)</math></i></p> $E_n^{(m)} = n! \operatorname{Coef}_w (chw)^{-m} w^{-n-1} = n! \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} (chw)^{-m} w^{-n-1} dw \quad 0 < \rho < \infty \quad n = 0, 1, 2, \dots$
<p>13. Обобщенные числа Эйлера - <math>A(n, k), n = 0, 1, 2, \dots</math></p>
<p><i>Определение и интегральное представление - <math>M_{13} = M_{13}(w, z)</math></i></p> $A(n, k) = n! \operatorname{Coef}_{w, z} \frac{(z-1)^{n+1} dw \wedge dz}{(ze^{-w} - 1)w^{n+1} z^{k+1}} \quad 0 < \rho_1 < \infty, 0 < \rho_2 < 1 \quad n, k = 0, 1, 2, \dots$

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2. «ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ  
ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ»**

**Цель работы:** исследование свойств ортогональных функций и определение их основных характеристик.

1. Получение ортогональных функций  $k$ -ого порядка:

1.1. Получить ортогональные функции из ортогональных полиномов  $k$ -ого порядка путем введения соответствующей замены. Найти аналитические выражения и графики для первых шести порядков:

$$P1(k, x) := \sum_{s=0}^k \frac{k!}{(k-s)! \cdot s!} \cdot \frac{(k+s+1)!}{k! \cdot (s+1)!} \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right)^s \quad \mu(x) := 1-x$$

$$x(\tau, \gamma) := 1 - 2e^{-\gamma \cdot \tau}$$

$$\frac{d}{d\tau} x(\tau, \gamma) \rightarrow 2 \cdot \gamma \cdot \exp(-\gamma \cdot \tau) \quad \mu(\tau, \gamma) := 1 - x(\tau, \gamma)$$

$$P1(k, \tau, \gamma) := \sum_{s=0}^k \frac{k!}{(k-s)! \cdot s!} \cdot \frac{(k+s+1)!}{k! \cdot (s+1)!} \cdot \left(\frac{x(\tau, \gamma) - 1}{2}\right)^s \cdot \sqrt{\frac{\frac{d}{d\tau} x(\tau, \gamma)}{2\gamma}} \cdot \sqrt{\frac{\mu(\tau, \gamma)}{2}}$$

$$\gamma := 1$$

$$P1(0, \tau, \gamma) \text{ simplify } \rightarrow \exp(-\tau)$$

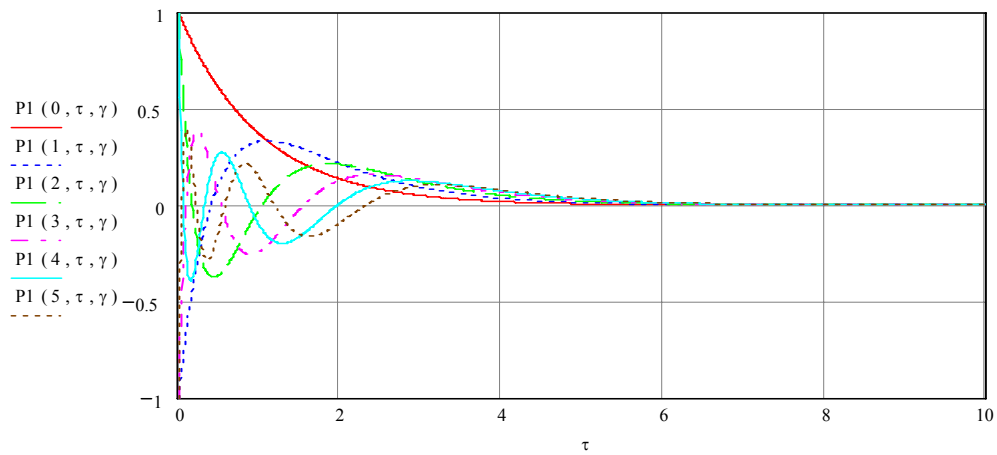
$$P1(1, \tau, \gamma) \text{ simplify } \rightarrow 2 \cdot \exp(-\tau) - 3 \cdot \exp(-2 \cdot \tau)$$

$$P_1(2, \tau, \gamma) \text{ simplify } \rightarrow 3 \cdot \exp(-\tau) - 12 \cdot \exp(-2 \cdot \tau) + 10 \cdot \exp(-3 \cdot \tau)$$

$$P_1(3, \tau, \gamma) \text{ simplify } \rightarrow 4 \cdot \exp(-\tau) - 30 \cdot \exp(-2 \cdot \tau) + 60 \cdot \exp(-3 \cdot \tau) - 35 \cdot \exp(-4 \cdot \tau)$$

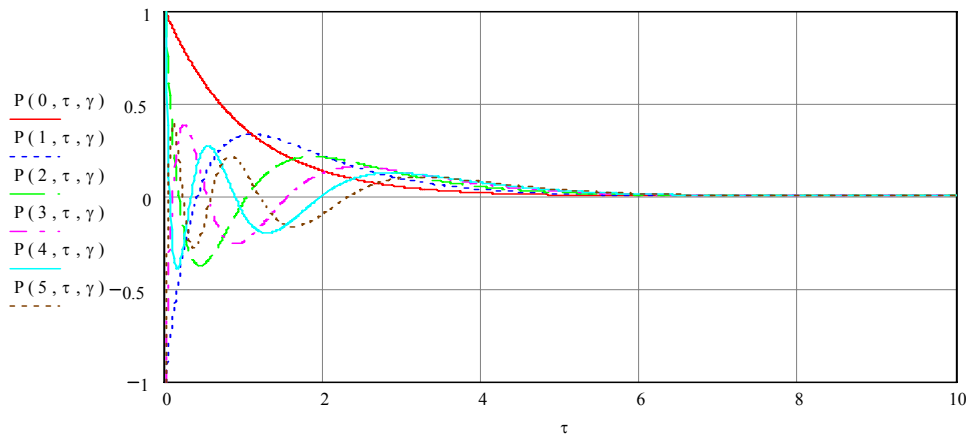
$$P_1(4, \tau, \gamma) \text{ simplify } \rightarrow 5 \cdot \exp(-\tau) - 60 \cdot \exp(-2 \cdot \tau) + 210 \cdot \exp(-3 \cdot \tau) - 280 \cdot \exp(-4 \cdot \tau) + 126 \cdot \exp(-5 \cdot \tau)$$

$$P_1(5, \tau, \gamma) \text{ simplify } \rightarrow 6 \cdot \exp(-\tau) - 105 \cdot \exp(-2 \cdot \tau) + 560 \cdot \exp(-3 \cdot \tau) - 1260 \cdot \exp(-4 \cdot \tau) + 1260 \cdot \exp(-5 \cdot \tau) - 462 \cdot \exp(-6 \cdot \tau)$$



1.2. Получить ортогональные функции, используя представление, приведенное в таблице. Найти аналитические выражения и построить графики для первых шести порядков:

$$P(k, \tau, \gamma) := \sum_{s=0}^k \frac{k!}{(k-s)! \cdot s!} \cdot \frac{(k+s+1)!}{k! \cdot (s+1)!} \cdot (-1)^s \cdot e^{-(s+1)\gamma \cdot \tau}$$



2. Рассчитать значения ортогональных функций k-ого порядка в "нуле".

$$k := 0..5$$

$$P(k, 0, \gamma) =$$

1
-1
1
-1
1
-1

3. Определение нормы ортогональных функций:

3.1. Определить значение нормы ортогональных функций из выражения (2.3) (см. содержание лабораторной работы). Результат представить в виде матрицы значений с размерностью (k, m), Привести графическую интерпретацию.

$$k := 6$$

$$i := 0..k - 1$$

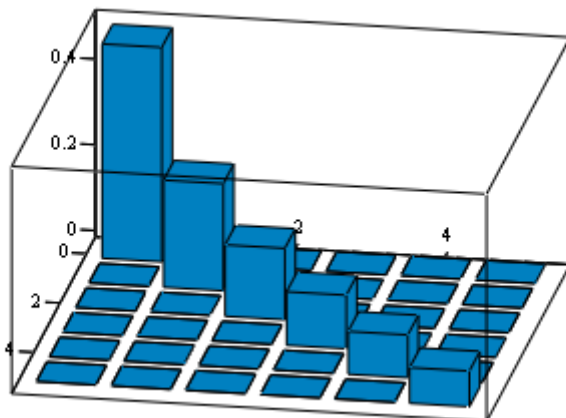
$$m := k \quad \mu(\tau, \gamma) := 1$$

$$j := 0..m - 1$$

$$\text{NormP}(i, j) := \int_0^\infty P(i, \tau, \gamma) P(j, \tau, \gamma) \cdot \mu(\tau, \gamma) d\tau$$

$$\text{NormMP} := \text{matrix}(k, m, \text{NormP})$$

$$\text{NormMP} = \begin{pmatrix} 0.5 & -7.449 \times 10^{-10} & -9.777 \times 10^{-10} & -2.372 \times 10^{-12} & -2.805 \times 10^{-12} & -3.167 \times 10^{-12} \\ -7.449 \times 10^{-10} & 0.25 & -3.653 \times 10^{-12} & -4.662 \times 10^{-12} & -5.526 \times 10^{-12} & -6.258 \times 10^{-12} \\ -9.777 \times 10^{-10} & -3.653 \times 10^{-12} & 0.167 & -6.804 \times 10^{-12} & -8.106 \times 10^{-12} & -9.252 \times 10^{-12} \\ -2.372 \times 10^{-12} & -4.662 \times 10^{-12} & -6.804 \times 10^{-12} & 0.125 & -1.052 \times 10^{-11} & -1.218 \times 10^{-11} \\ -2.805 \times 10^{-12} & -5.526 \times 10^{-12} & -8.106 \times 10^{-12} & -1.052 \times 10^{-11} & 0.1 & -1.515 \times 10^{-11} \\ -3.167 \times 10^{-12} & -6.258 \times 10^{-12} & -9.252 \times 10^{-12} & -1.218 \times 10^{-11} & -1.515 \times 10^{-11} & 0.083 \end{pmatrix}$$



NormMP

3.2. Определить значения нормы ортогональных функций  $k$ -ого порядка, используя выражение, приведенное в таблице 2.1 (см. содержание лабораторной работы). Результат представить в виде вектора значений.

$$\text{NormPT}(i) := \frac{1}{2\gamma(i+1)}$$

NormPT(i) =

0.5
0.25
0.167
0.125
0.1
0.083

4. Рассчитать длительность, используя выражения (2.5) и (2.6) (см. содержание лабораторной работы). Построить графическую зависимость длительности ортогональной функции  $k$ -ого порядка от параметра масштаба.

$k := 0..5$

$$\text{tau2}(k, \gamma) := \int_0^{\infty} P(k, \tau, \gamma) d\tau$$

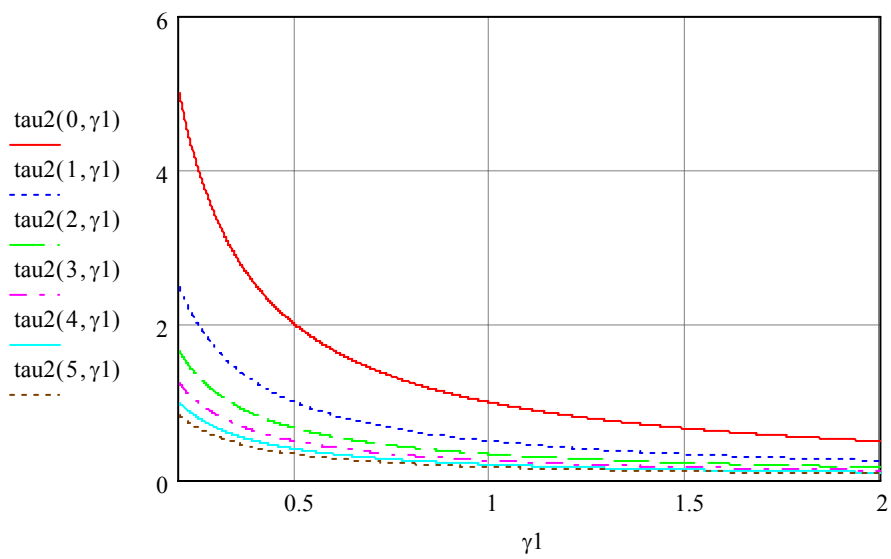
$$\text{tau4}(k, \gamma) := \int_0^{\infty} P(k, \tau, \gamma)^2 d\tau$$

$\tau_2(k, \gamma) =$

1
0.5
0.333
0.25
0.2
0.167

$\tau_4(k, \gamma) =$

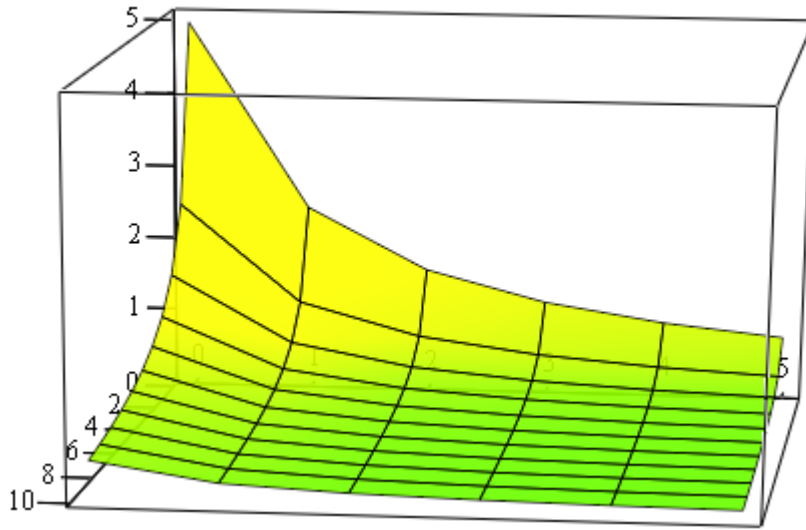
0.5
0.25
0.167
0.125
0.1
0.083



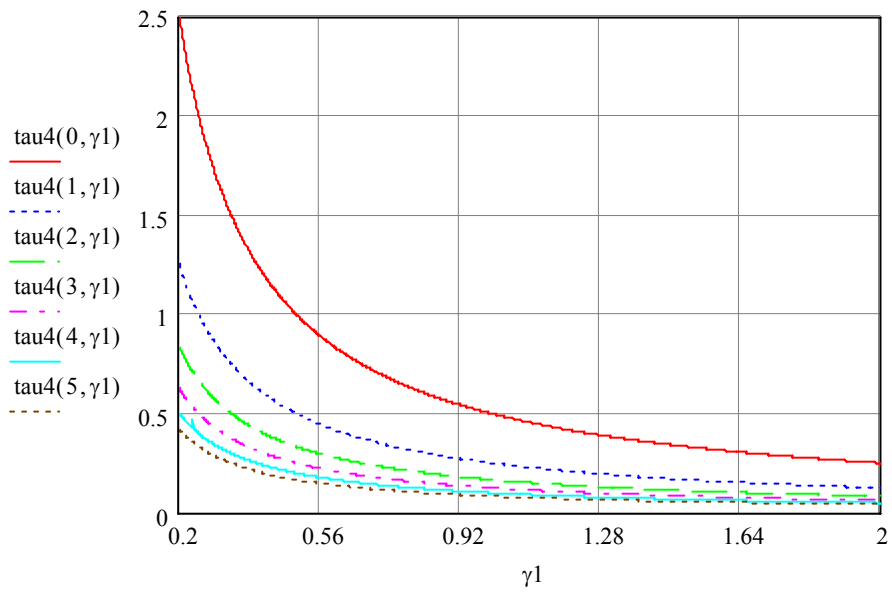
$\gamma := 0.2, 0.2 + 0.18..2$

$\tau_{2M} :=$	5	2.5	1.667	1.25	1	0.833
	2.632	1.316	0.877	0.658	0.526	0.439
	1.786	0.893	0.595	0.446	0.357	0.298
	1.351	0.676	0.45	0.338	0.27	0.225
	1.087	0.543	0.362	0.272	0.217	0.181
	0.909	0.455	0.303	0.227	0.182	0.152
	0.781	0.391	0.26	0.195	0.156	0.13
	0.685	0.342	0.228	0.171	0.137	0.114
	0.61	0.305	0.203	0.152	0.122	0.102
	0.549	0.275	0.183	0.137	0.11	0.092
	0.5	0.25	0.167	0.125	0.1	0.083





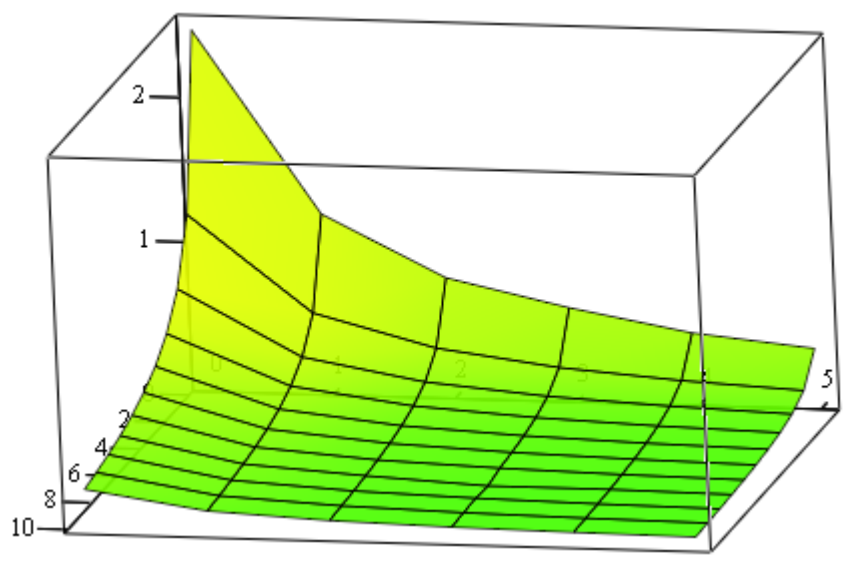
tau2M



```

tau4M := ( 2.5  1.25  0.833  0.65  0.5  0.417)
          ( 1.316 0.658 0.439 0.329 0.263 0.219)
          ( 0.893 0.446 0.298 0.223 0.179 0.149)
          ( 0.676 0.338 0.225 0.169 0.135 0.113)
          ( 0.543 0.272 0.181 0.136 0.109 0.091)
          ( 0.455 0.227 0.152 0.114 0.091 0.076)
          ( 0.391 0.195 0.13  0.098 0.078 0.065)
          ( 0.342 0.171 0.114 0.068 0.068 0.057)
          ( 0.305 0.152 0.102 0.076 0.061 0.051)
          ( 0.275 0.137 0.092 0.069 0.055 0.046)
          ( 0.25  0.125 0.083 0.062 0.05  0.042)

```



tau4M

### ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 3. «ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ И ИНТЕРВАЛА ДИСКРЕТИЗАЦИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ»

**Цель работы:** изучение методов и приобретение навыков в определении максимальной длительности и интервала дискретизации ортогональных функций.

1. Задать вид ортогональных функций.

$$P(k, \tau, \gamma) := \sum_{s=0}^k \frac{k!}{(k-s)! \cdot s!} \cdot \frac{(k+s+1)!}{k! \cdot (s+1)!} \cdot (-1)^s \cdot e^{-(s+1)\gamma \cdot \tau}$$

2. Задать порядок ортогональных функций.

k :=

3. Задать значение параметра масштаба.

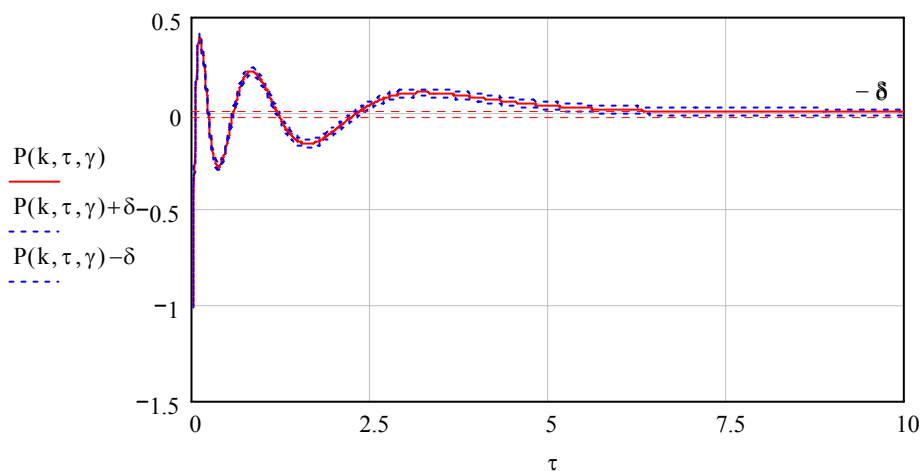
$$\gamma := 1$$

4. Задать погрешность приближения.

$\delta_n :=$

$$\delta := \begin{cases} 0.02 & \text{if } \delta_n = 1 \\ 0.05 & \text{if } \delta_n = 2 \\ 0.1 & \text{if } \delta_n = 3 \end{cases}$$

5. Построить график ортогональной функции.



6. Определить максимальный интервал корреляции на основании графика.

$$\tau_1 := 10$$

Given

$$P(k, \tau_1, \gamma) = \delta$$

$$\text{Find}(\tau_1) = 5.641$$

7. Получить на основании общей формулы частные формулы ортогональной функции, ее первой, второй и третьей производной.

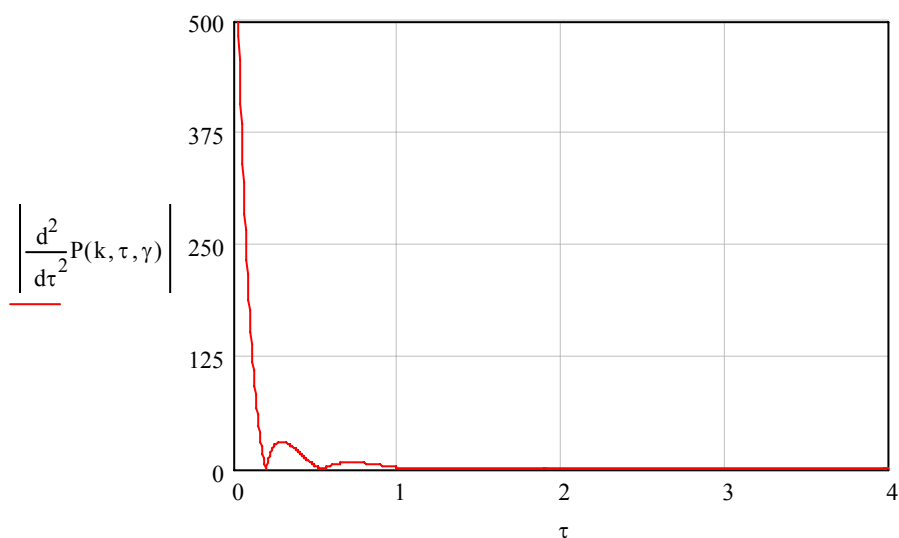
$$P(k, \tau, \gamma) \rightarrow 6 \cdot \exp(-\tau) - 105 \exp(-2 \cdot \tau) + 560 \exp(-3 \cdot \tau) - 1260 \exp(-4 \cdot \tau) + 1260 \exp(-5 \cdot \tau) - 462 \exp(-6 \cdot \tau)$$

$$\frac{d}{d\tau} P(k, \tau, \gamma) \rightarrow -6 \cdot \exp(-\tau) + 210 \exp(-2 \cdot \tau) - 1680 \exp(-3 \cdot \tau) + 5040 \exp(-4 \cdot \tau) - 6300 \exp(-5 \cdot \tau) + 2772 \exp(-6 \cdot \tau)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} P(k, \tau, \gamma) \rightarrow 6 \cdot \exp(-\tau) - 420 \exp(-2 \cdot \tau) + 5040 \exp(-3 \cdot \tau) - 20160 \exp(-4 \cdot \tau) + 31500 \exp(-5 \cdot \tau) - 16632 \exp(-6 \cdot \tau)$$

$$\frac{d^3}{d\tau^3} P(k, \tau, \gamma) \rightarrow -6 \cdot \exp(-\tau) + 840 \exp(-2 \cdot \tau) - 15120 \exp(-3 \cdot \tau) + 80640 \exp(-4 \cdot \tau) - 157500 \exp(-5 \cdot \tau) + 99792 \exp(-6 \cdot \tau)$$

8. Вычислить максимум второй производной.



$$\text{fder}(\tau) := \left| \frac{d^2}{d\tau^2} P(k, \tau, \gamma) \right|$$

$$\tau := 25$$

$$\text{Maximize}(\text{fder}, \tau) = 0$$

$$\text{fder}(\text{Maximize}(\text{fder}, \tau)) = 666$$

9. Вычислить интервал дискретизации для ортогональной функции.

$$\Delta t := \sqrt{\frac{8 \cdot \delta}{|\text{fder}(\text{Maximize}(\text{fder}, \tau))|}}$$

$$\Delta t = 0.015$$

10. Определить максимальную длительность ортогональной функции.

$$\tau_{\max} := 5.641$$

11. Вычислить количество интервалов дискретизации.

$$n := \text{trunc}\left(\frac{\tau_{\max}}{\Delta t} + 0.5\right)$$

$$n = 364$$

12. Занести полученные значения в таблицу (Microsoft Word, Microsoft Excel).

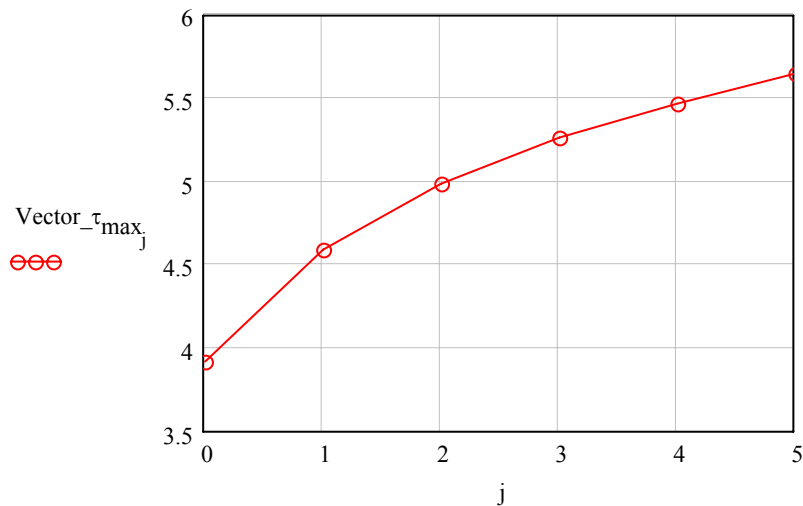
13 - 15. Выполнить аналогично 1-12.

16. Построить зависимость максимального интервала корреляции от порядка при заданном параметре масштаба.

При параметре масштаба  $\gamma = 1$ ,  $k = 0..5$ .

$j := 0..5$

Vector\_τ<sub>max</sub> :=  $\begin{pmatrix} 3.912 \\ 4.59 \\ 4.983 \\ 5.259 \\ 5.47 \\ 5.641 \end{pmatrix}$

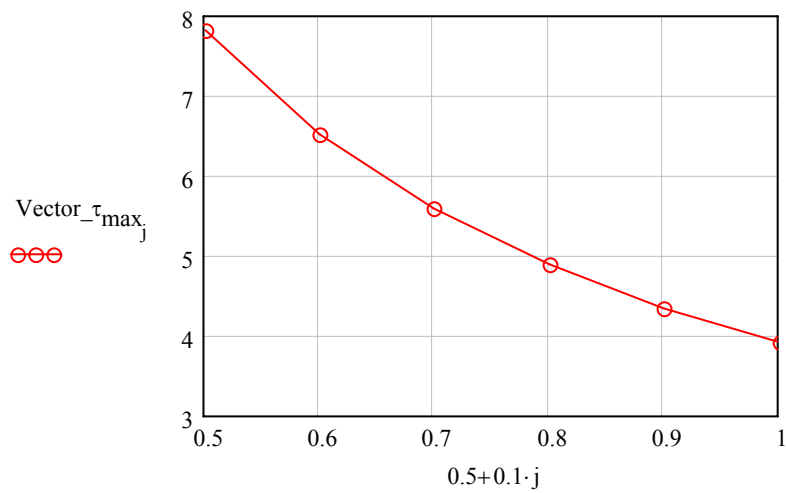


17. Построить зависимость максимального интервала корреляции от параметра масштаба при заданном порядке ортогональной функции.

При заданном порядке  $k = 0$ ,  $\gamma = 0.5, 0.5+0.1..1$ .

$\varepsilon := 0.5, 0.5 + 0.1..1$

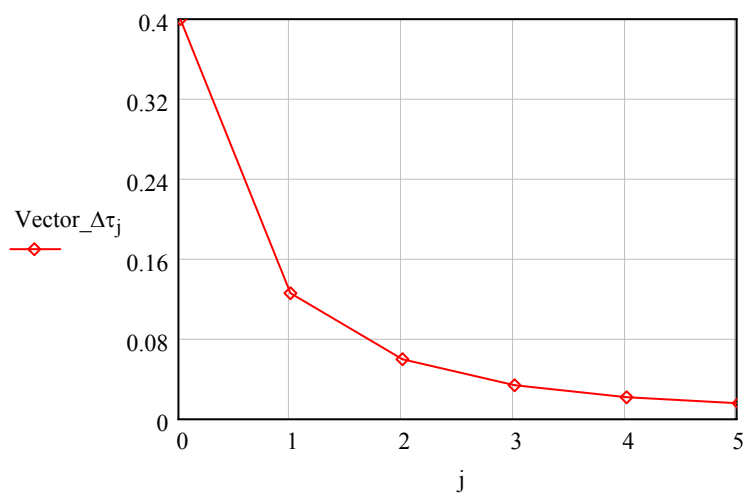
Vector\_τ<sub>max</sub> :=  $\begin{pmatrix} 7.824 \\ 6.52 \\ 5.589 \\ 4.89 \\ 4.347 \\ 3.912 \end{pmatrix}$



18. Построить зависимость интервала дискретизации от порядка функции при заданном параметре масштаба.

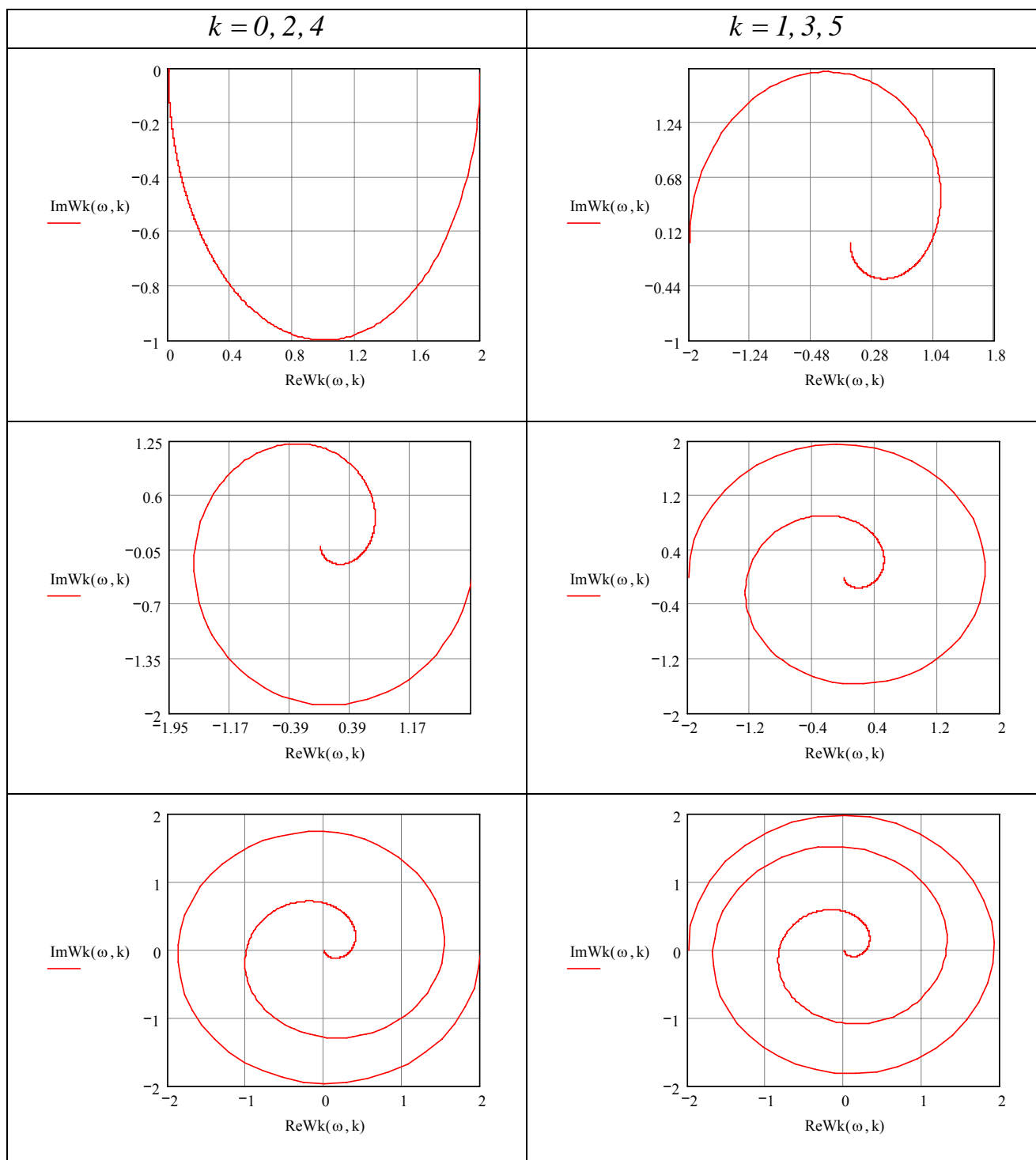
При параметре масштаба  $\gamma = 1$ ,  $k = 0..5$ .

$$\text{Vector}_{\Delta\tau} := \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.126 \\ 0.06 \\ 0.034 \\ 0.022 \\ 0.015 \end{pmatrix}$$



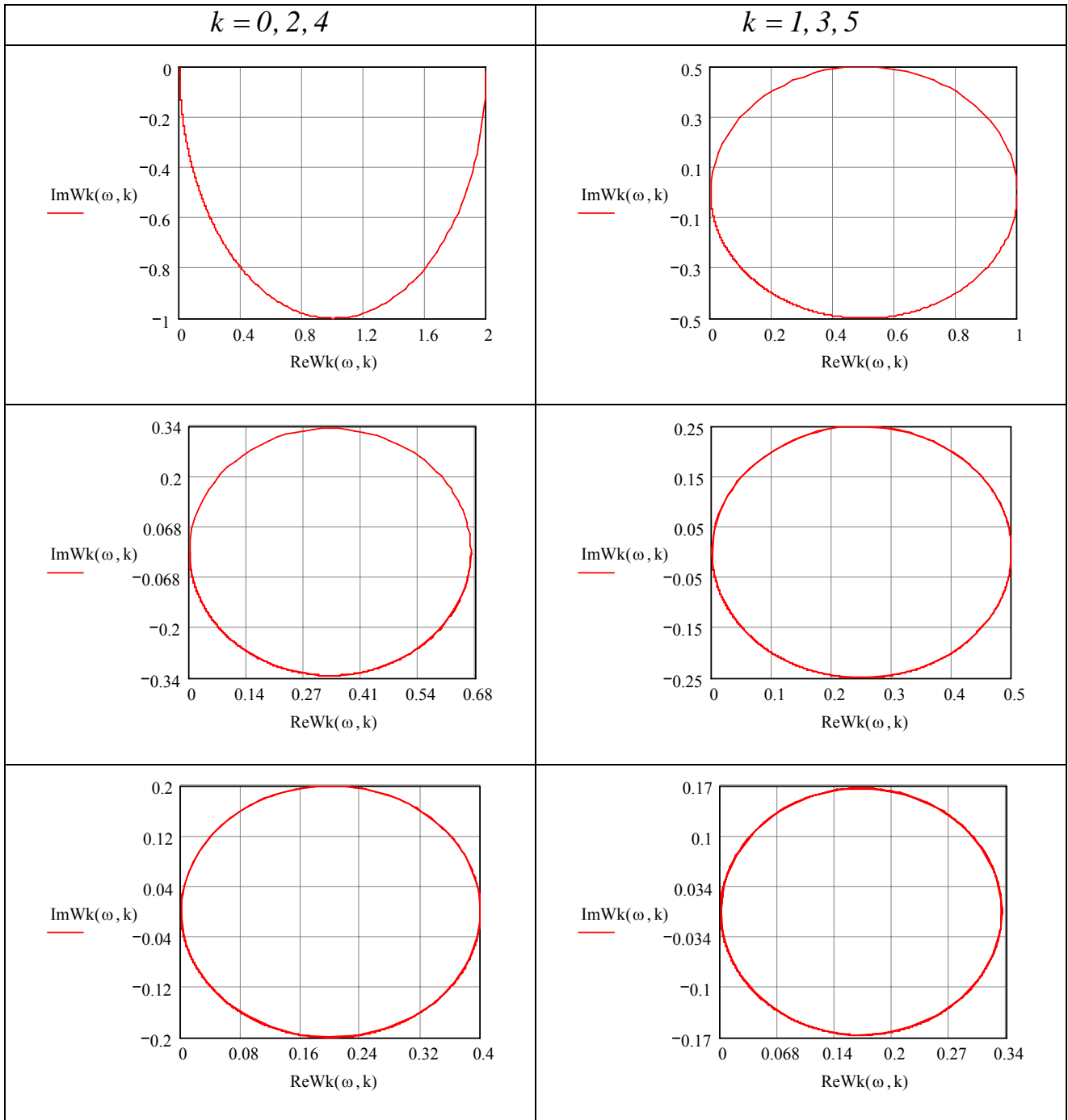
## ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Частотные характеристики ортогональных функций Лагерра

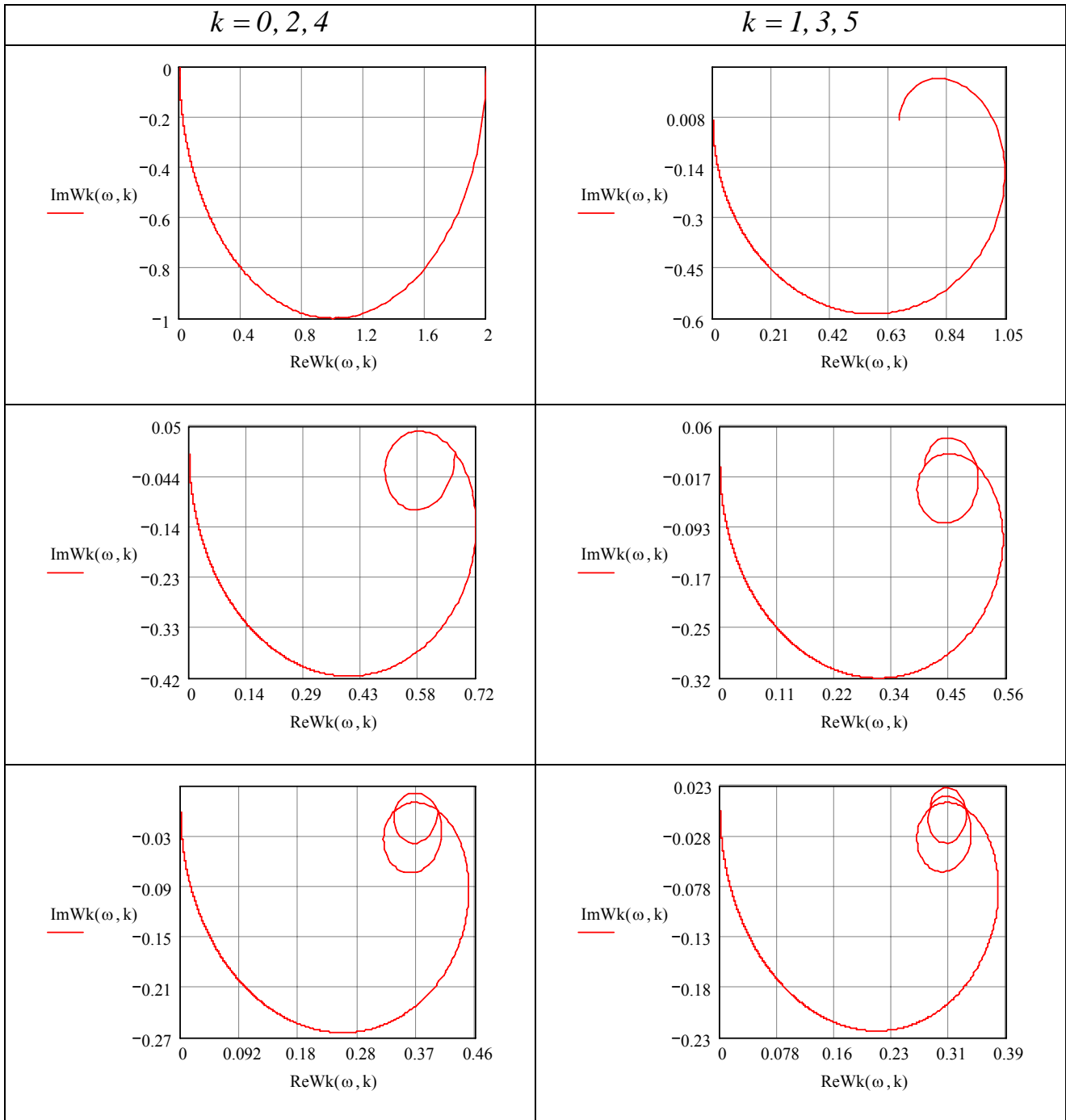




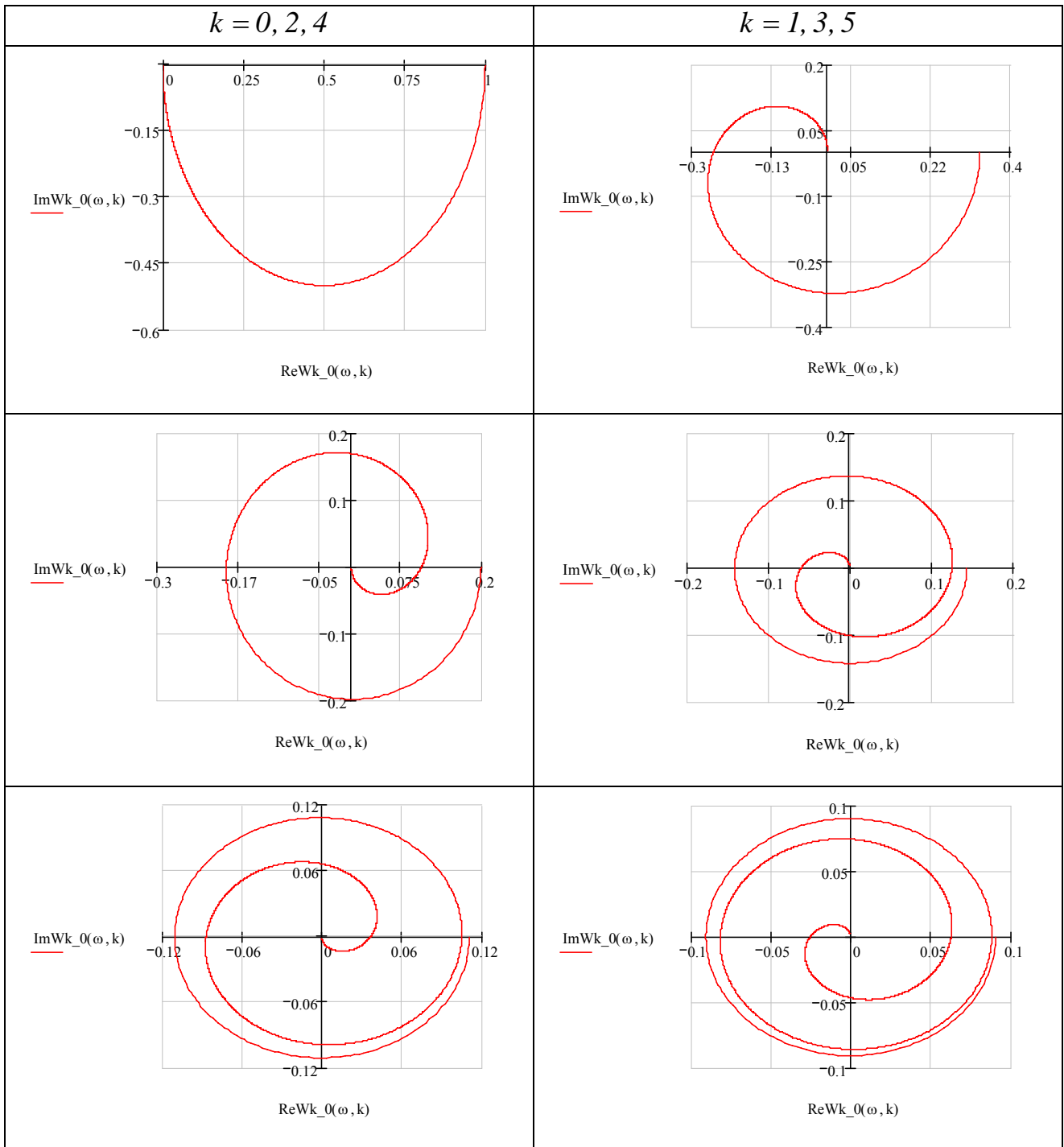
Частотные характеристики ортогональных функций Сонина-Лагерра ( $\alpha = 1$ )



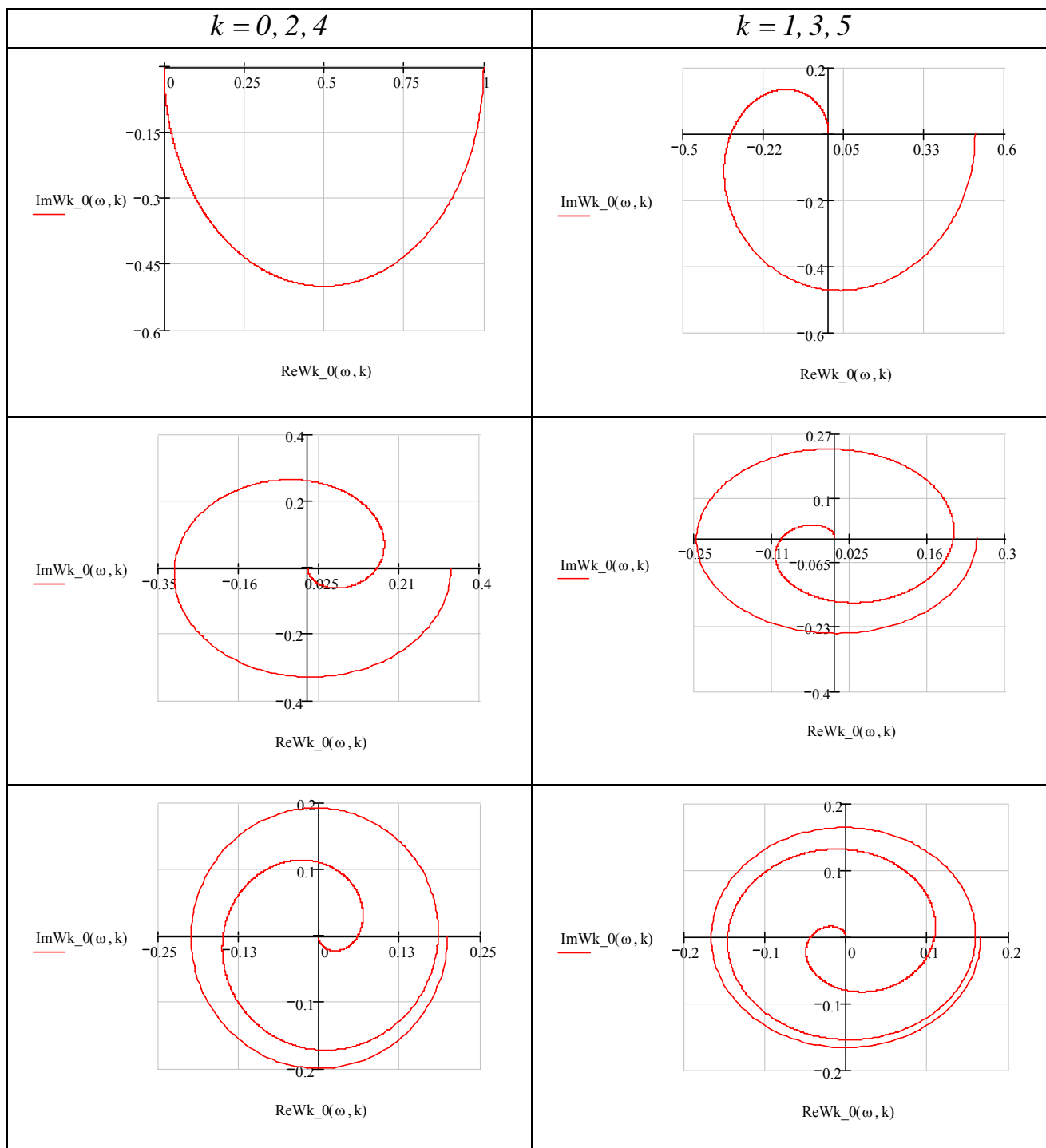
Частотные характеристики ортогональных функций Сонина-Лагерра ( $\alpha = 2$ )



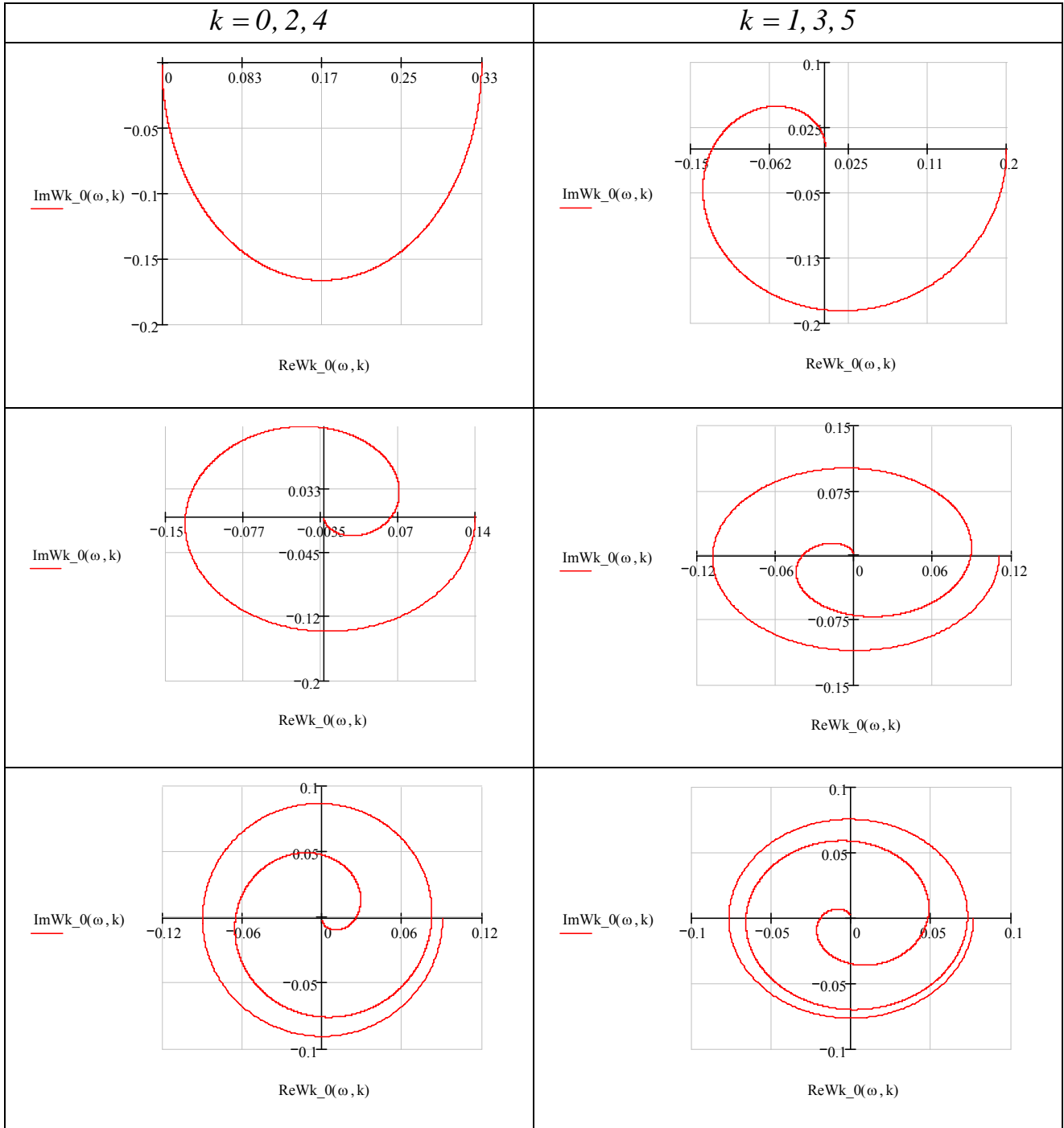
Частотные характеристики ортогональных функций Лежандра



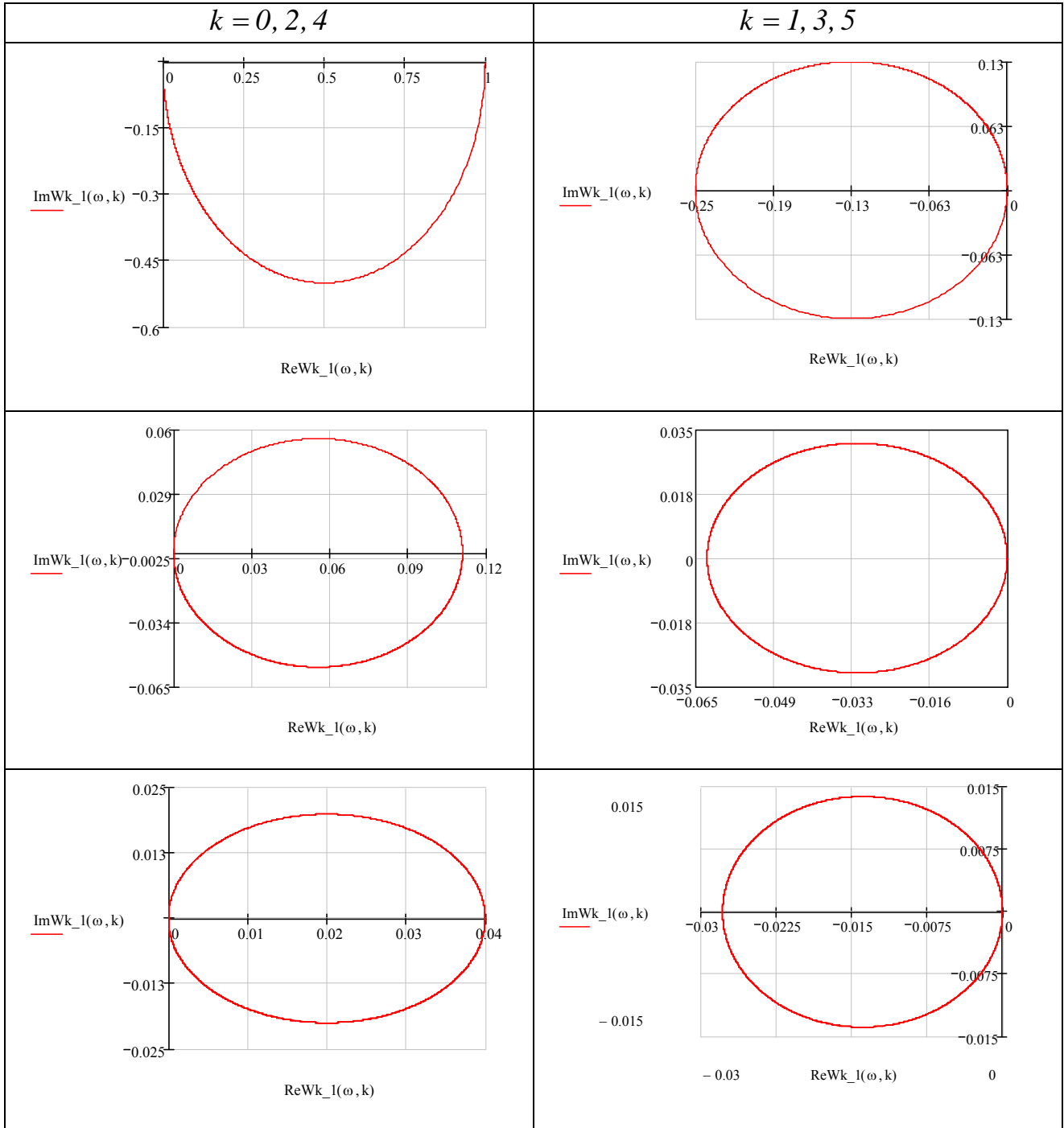
Частотные характеристики ортогональных функций Якоби ( $\alpha = 1, \beta = 0$ )



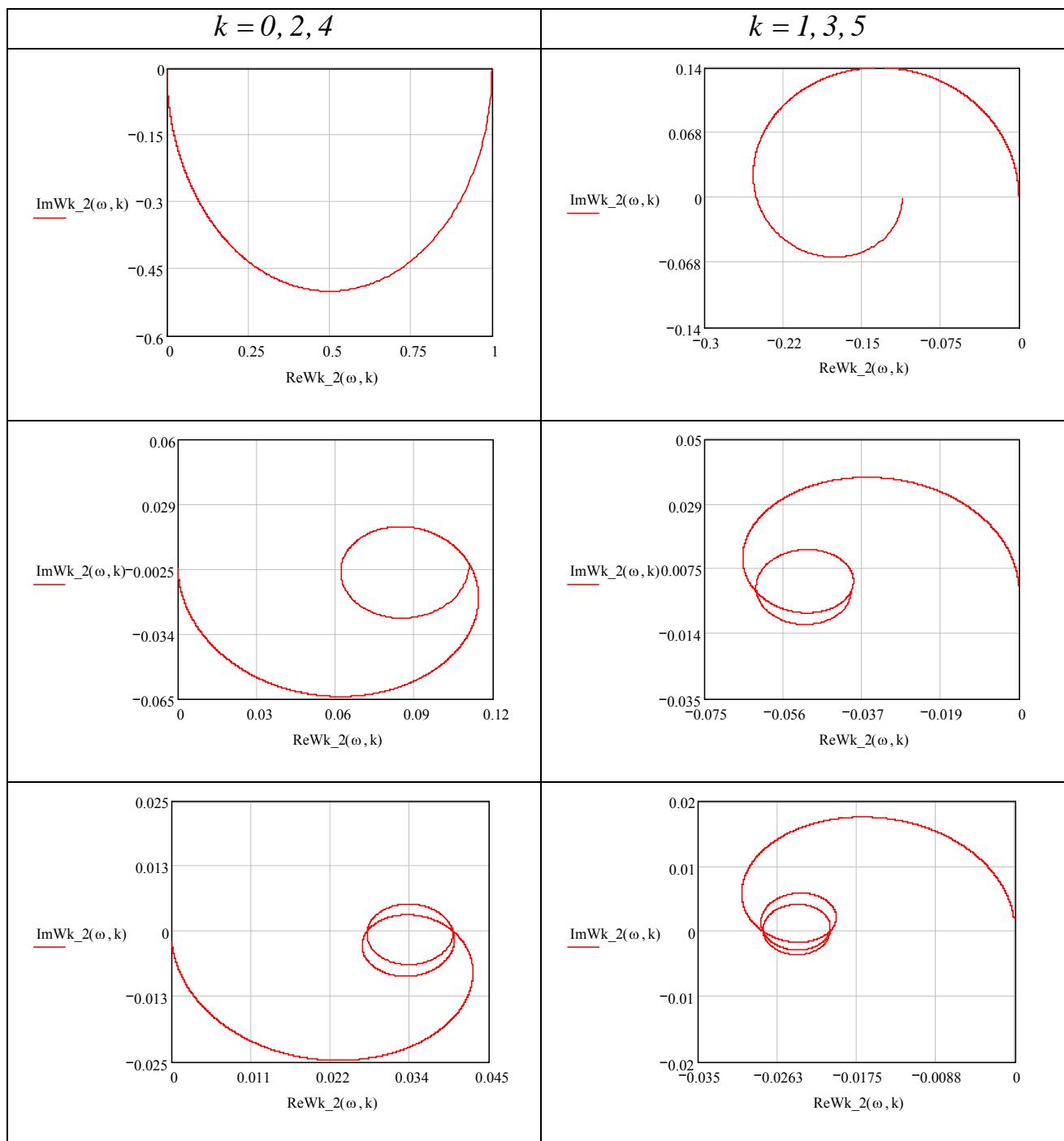
Частотные характеристики ортогональных функций Якоби ( $\alpha = 2, \beta = 0$ )



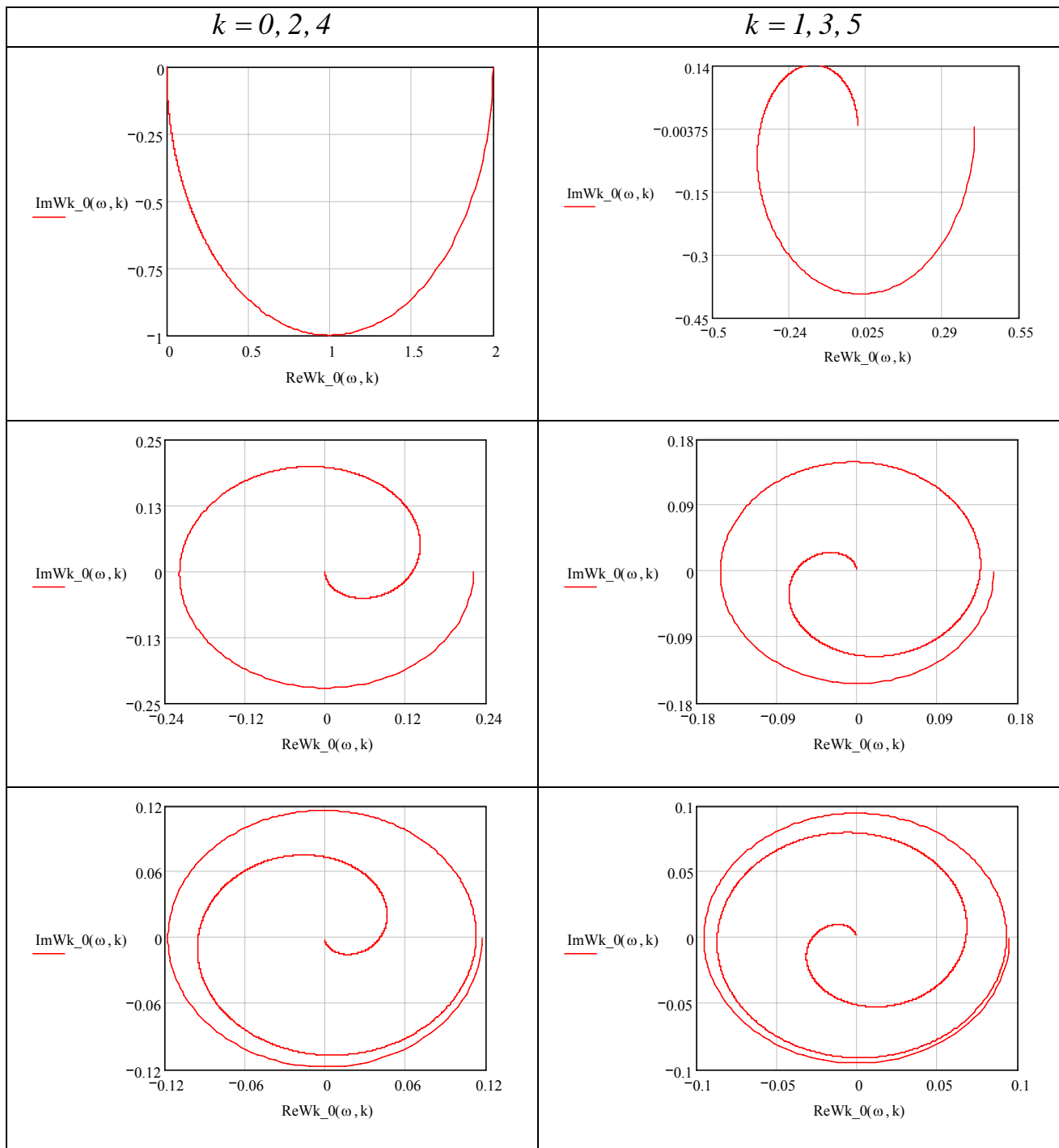
Частотные характеристики ортогональных функций Якоби ( $\alpha = 0, \beta = 1$ )



Частотные характеристики ортогональных функций Якоби ( $\alpha = 0, \beta = 2$ )

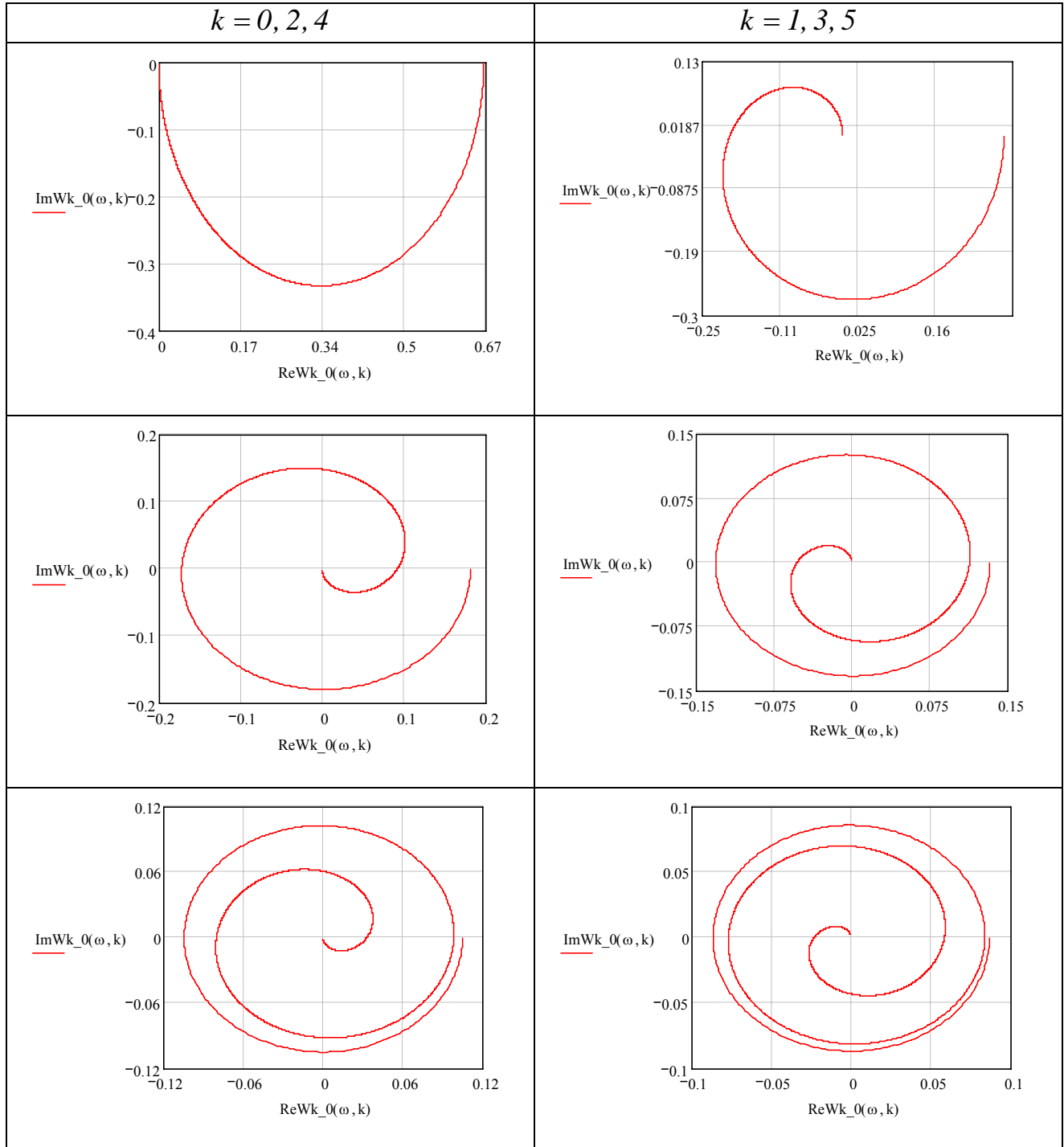


Частотные характеристики ортогональных функций Якоби ( $\alpha = -0,5, \beta = 0$ )

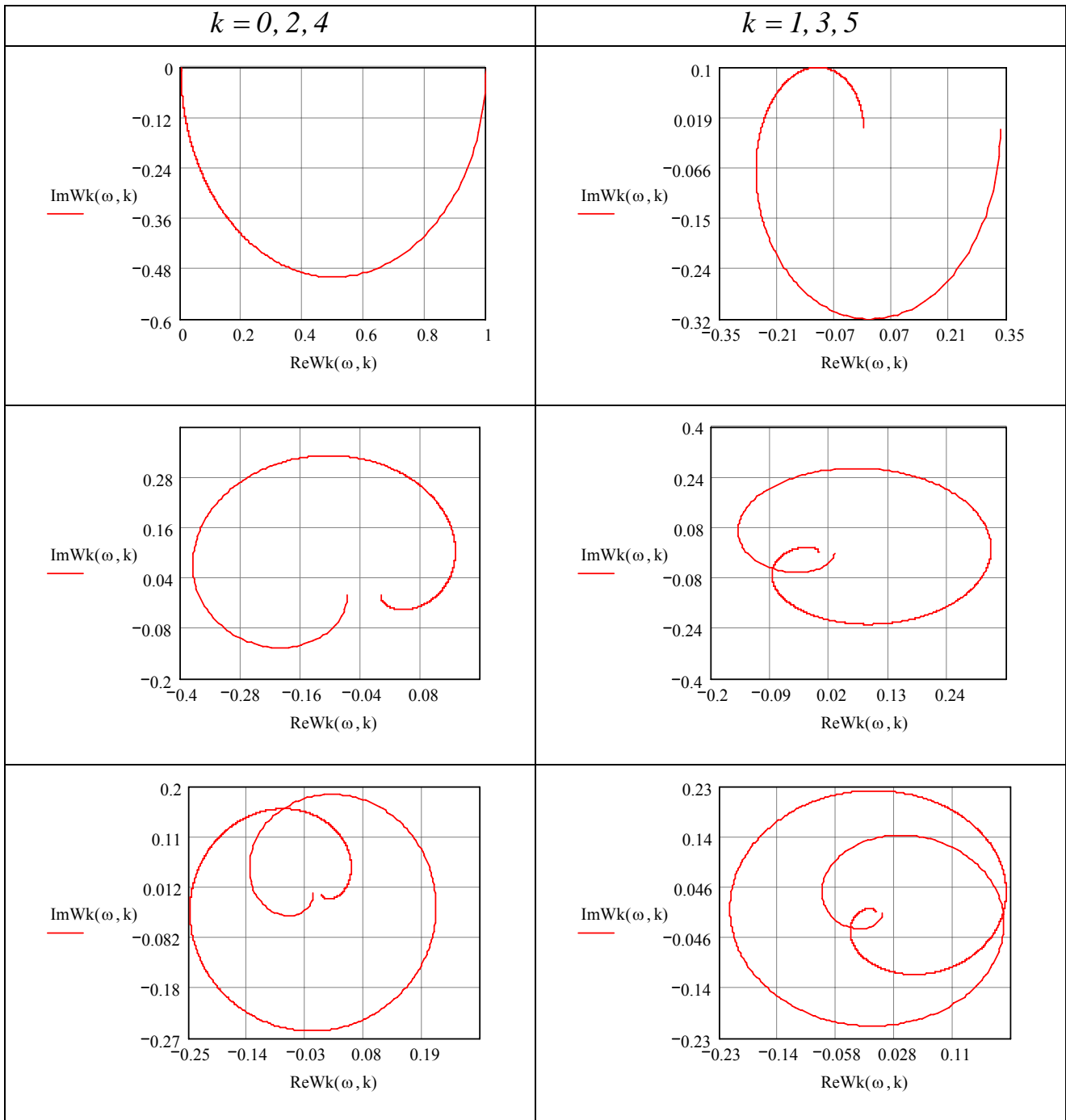




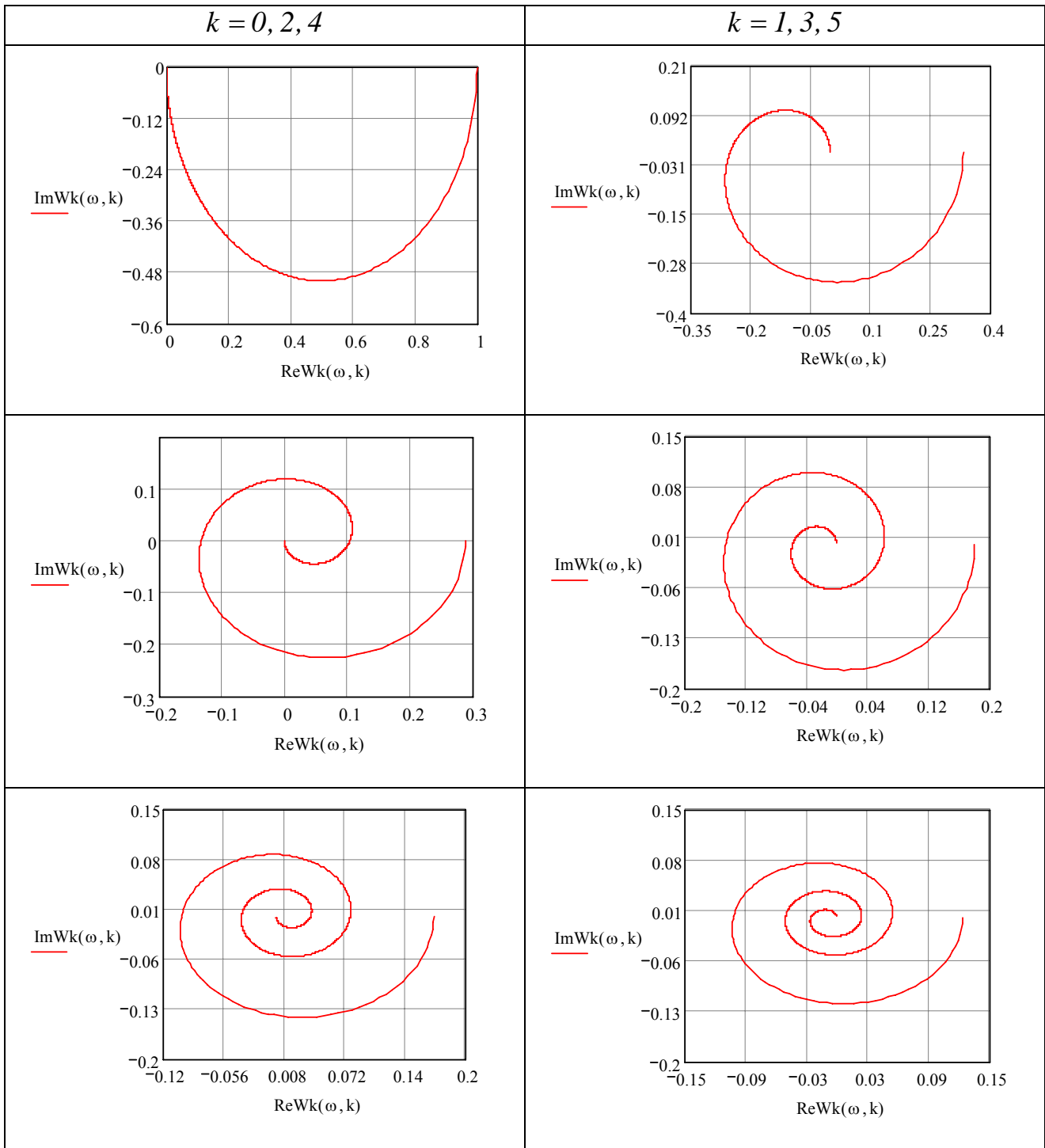
Частотные характеристики ортогональных функций Якоби ( $\alpha = 0,5, \beta = 0$ )



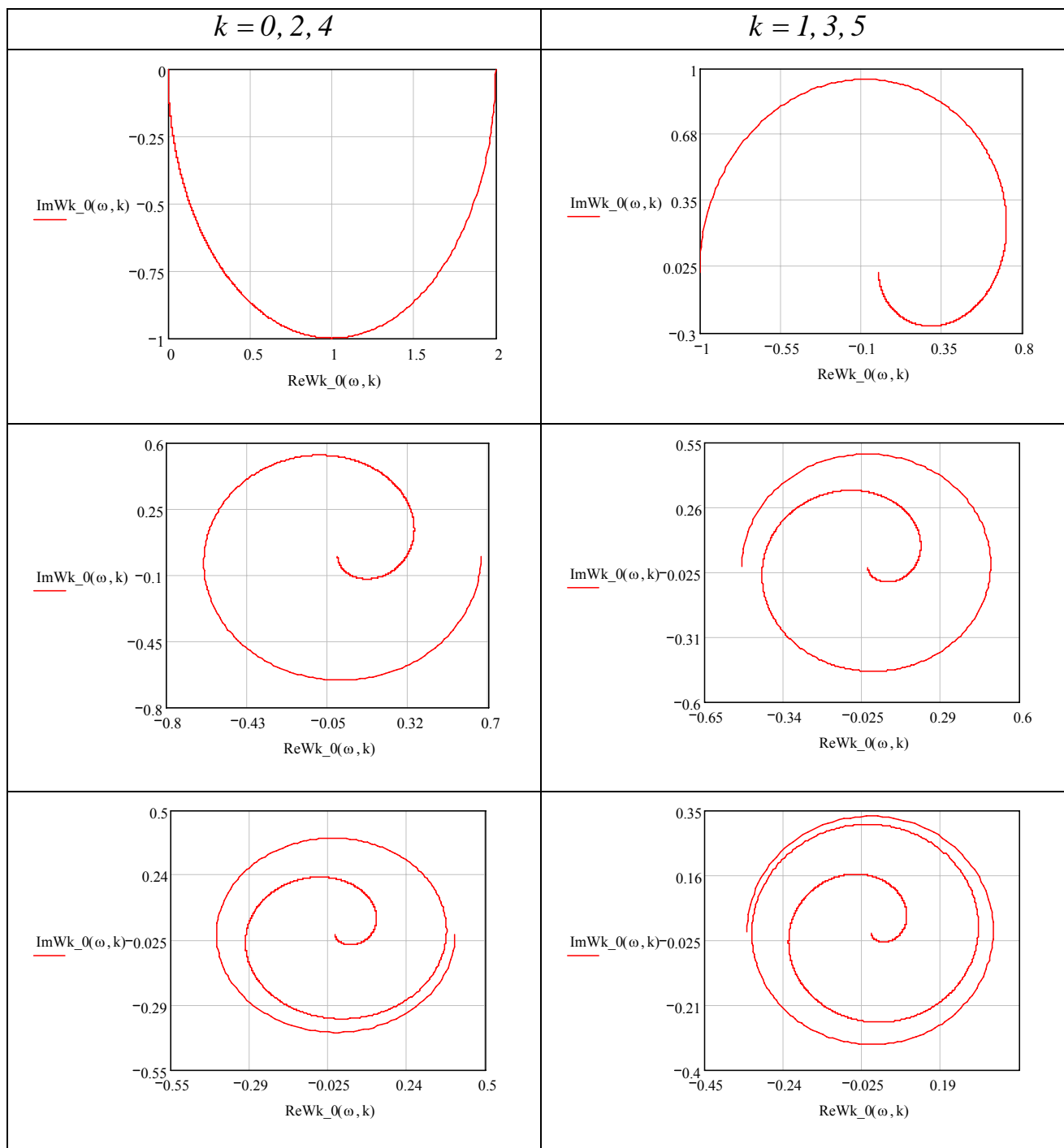
Частотные характеристики ортогональных функций Чебышева 1-ого рода



Частотные характеристики ортогональных функций Чебышева 2-ого рода

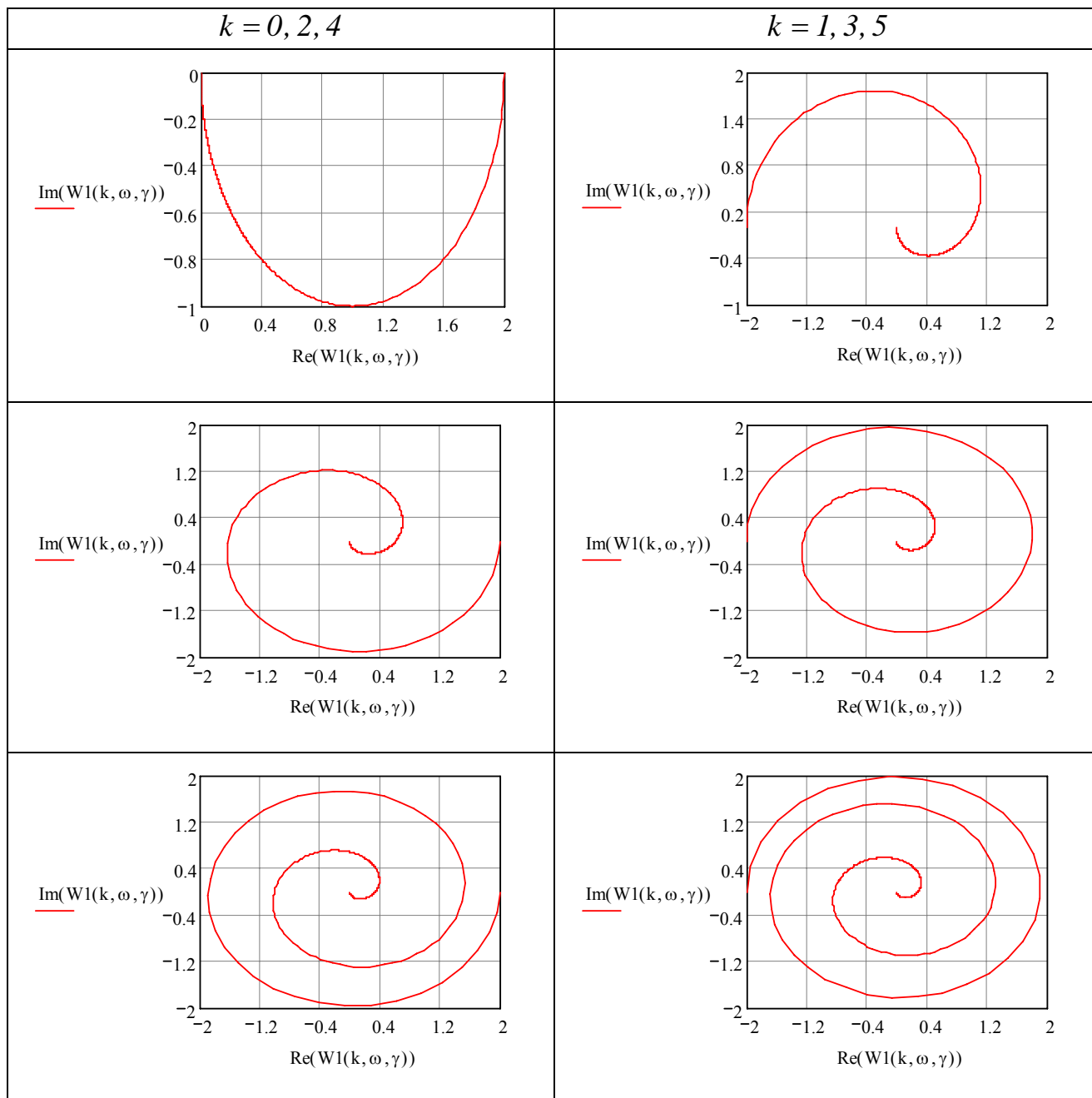


Частотные характеристики ортогональных функций Дирихле

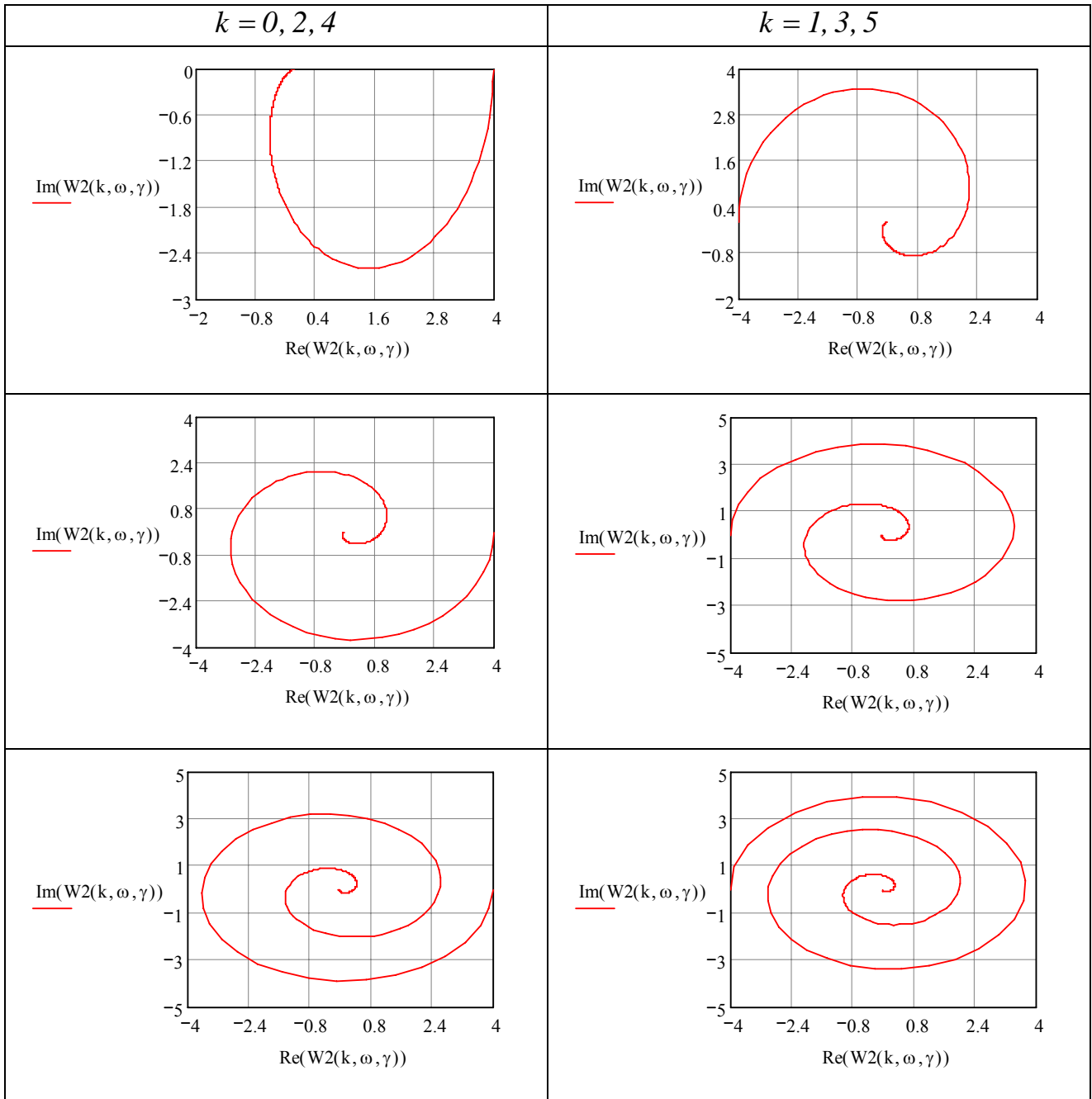


ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФИЛЬТРОВ

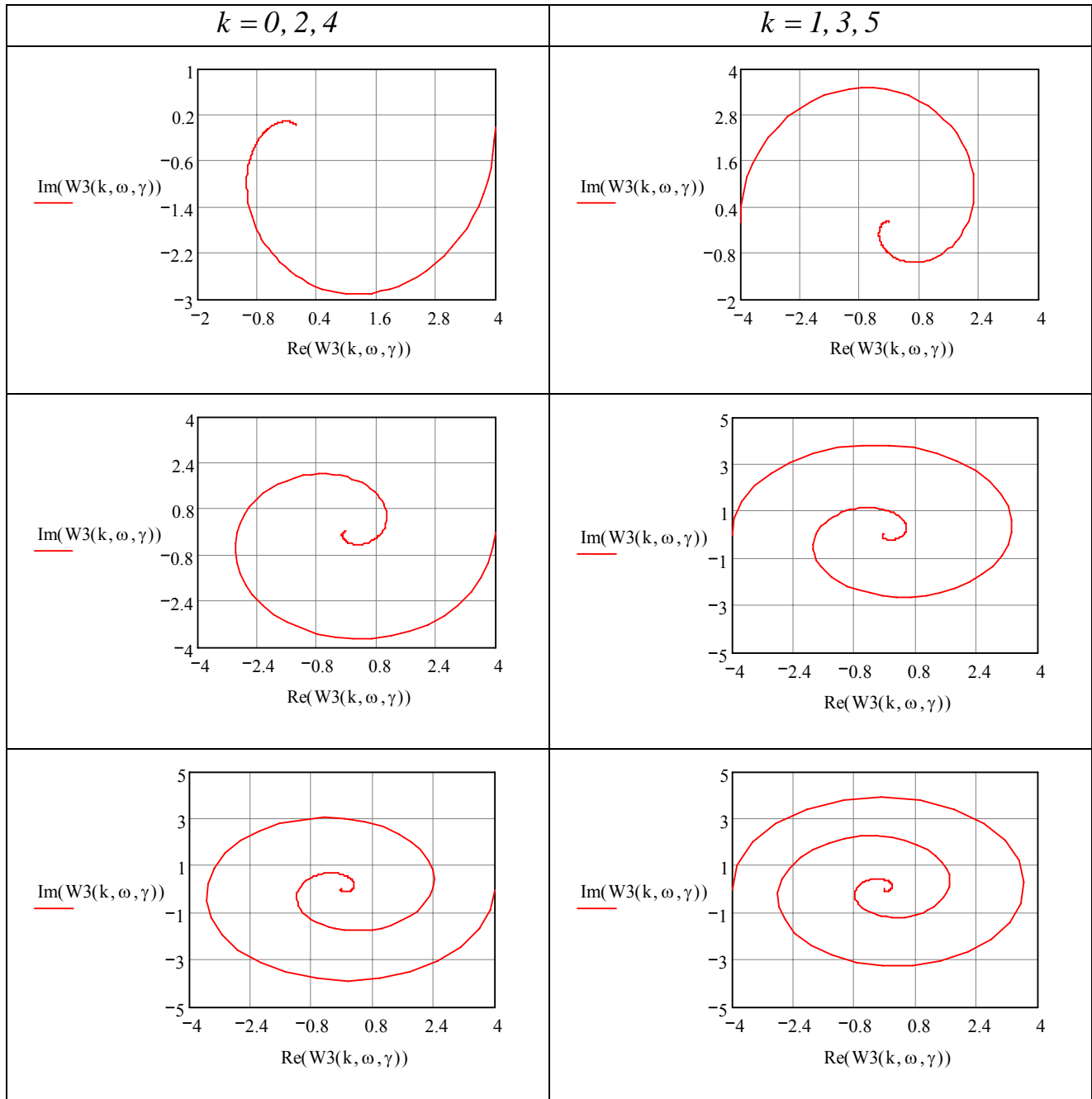
Частотные характеристики ортогональных фильтров Лагерра



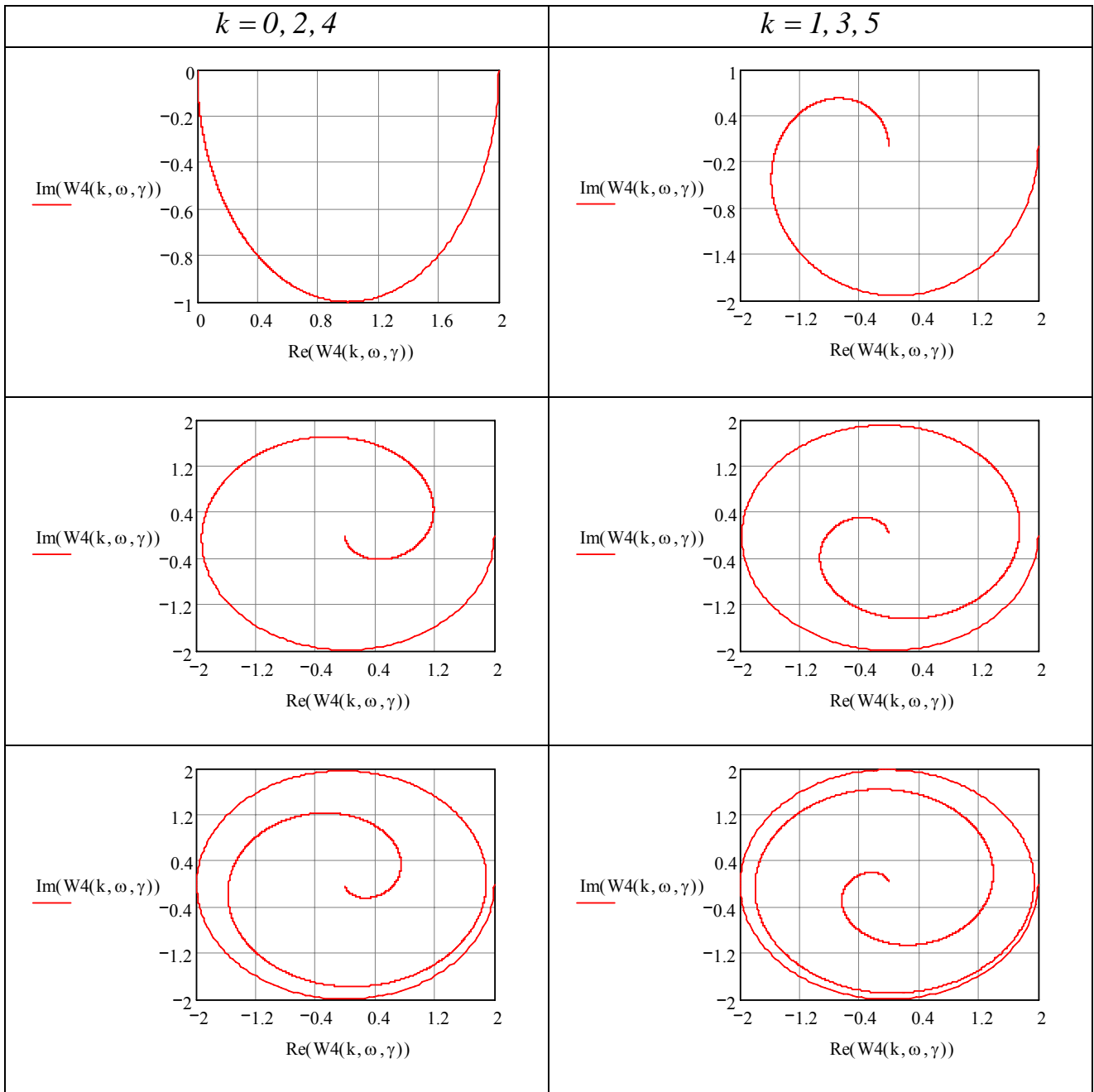
Частотные характеристики ортогональных фильтров Сонина-Лагерра ( $\alpha = 1$ )



Частотные характеристики ортогональных фильтров Сонина-Лагерра ( $\alpha = 2$ )

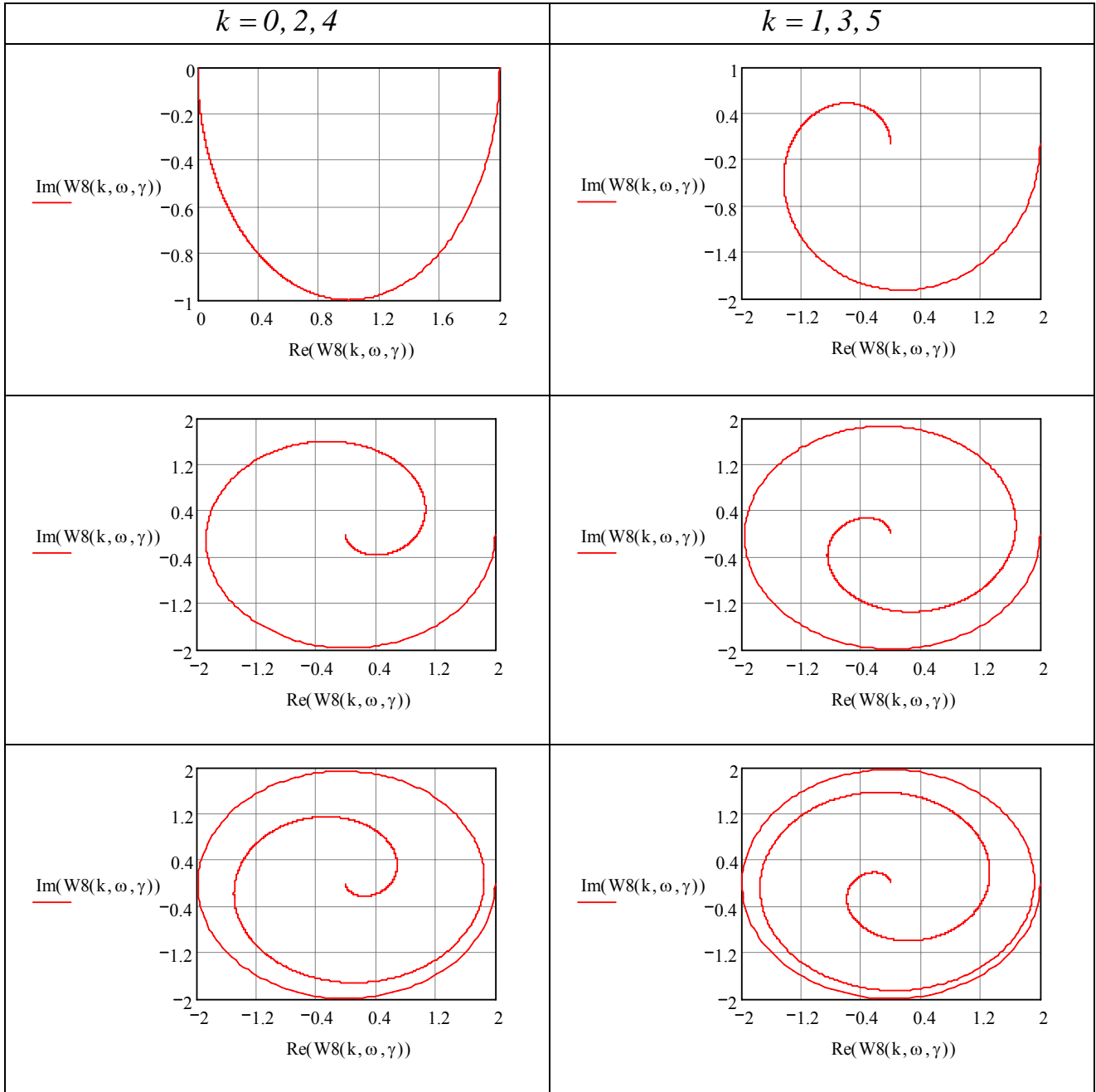


Частотные характеристики ортогональных фильтров Лежандра

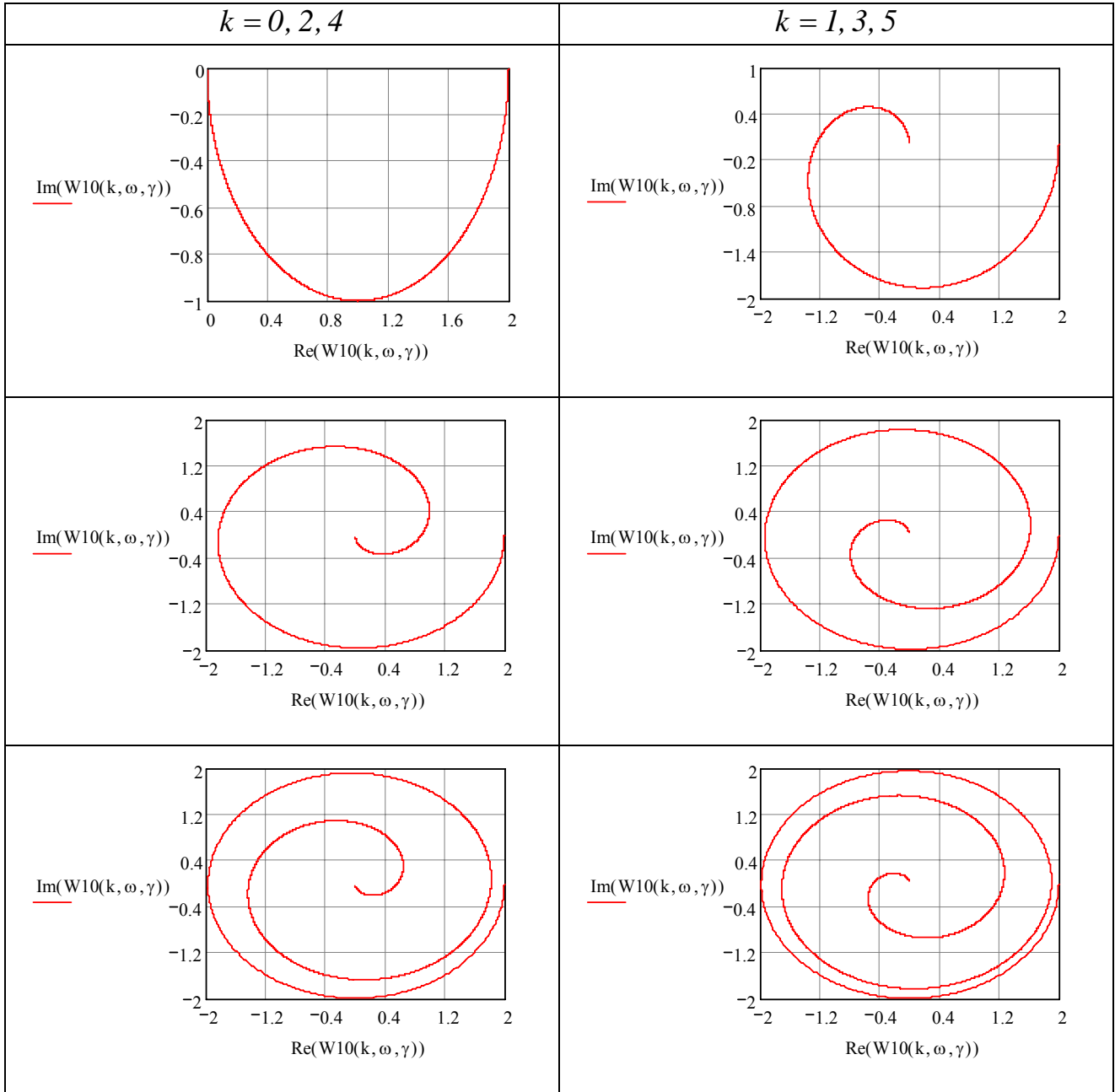




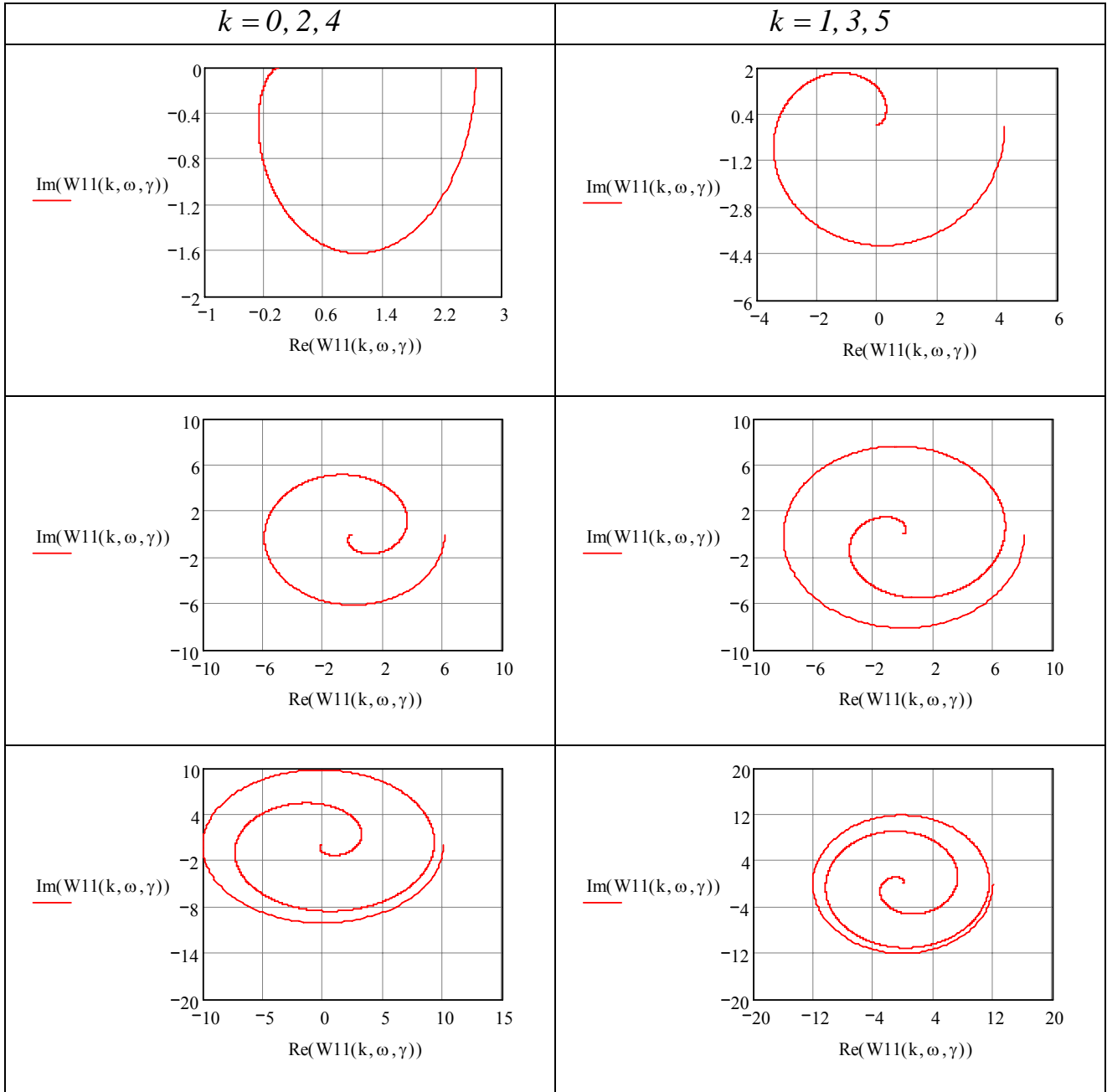
Частотные характеристики ортогональных фильтров Якоби ( $\alpha = 1, \beta = 0$ )



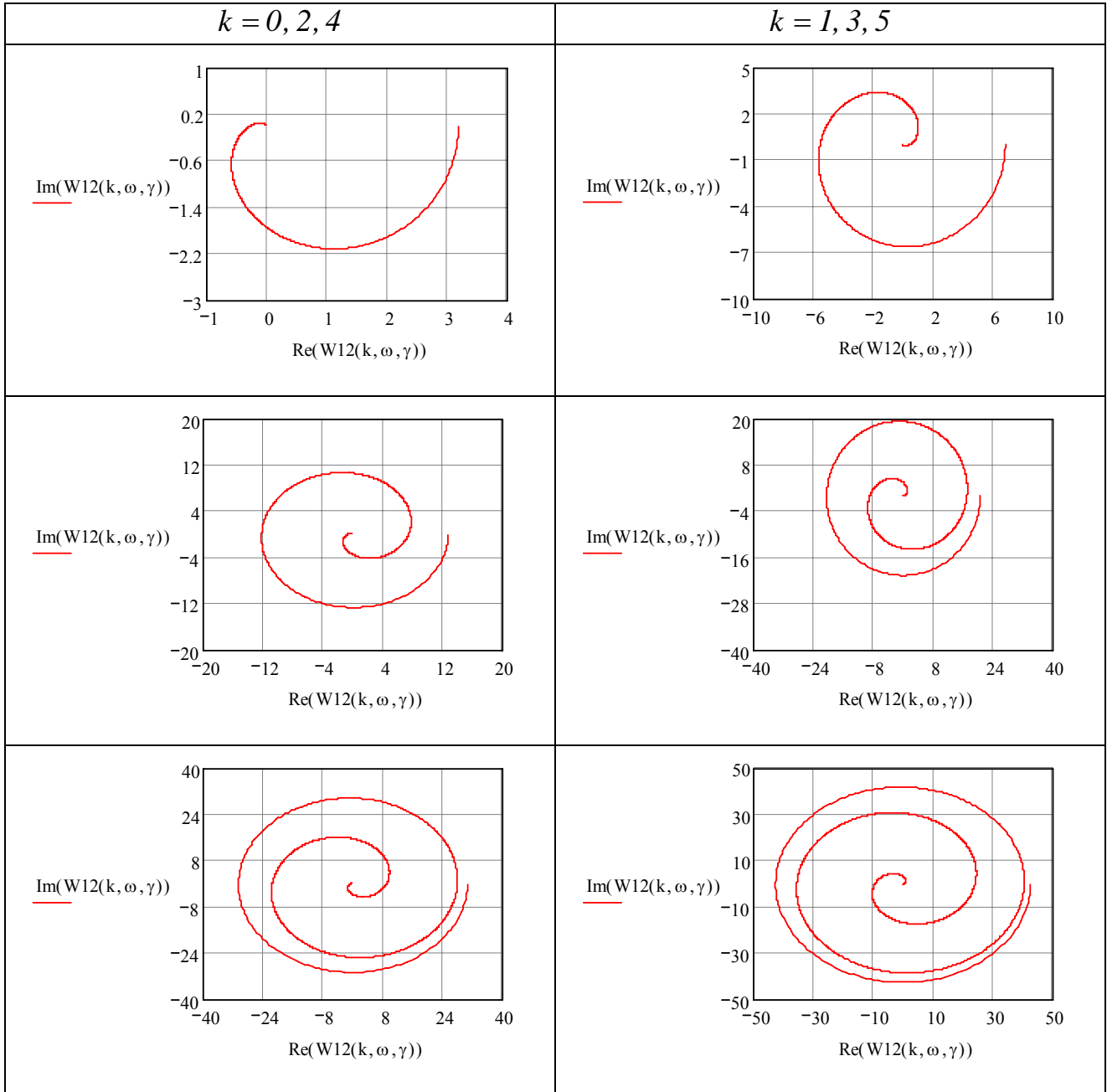
Частотные характеристики ортогональных фильтров Якоби ( $\alpha = 2, \beta = 0$ )



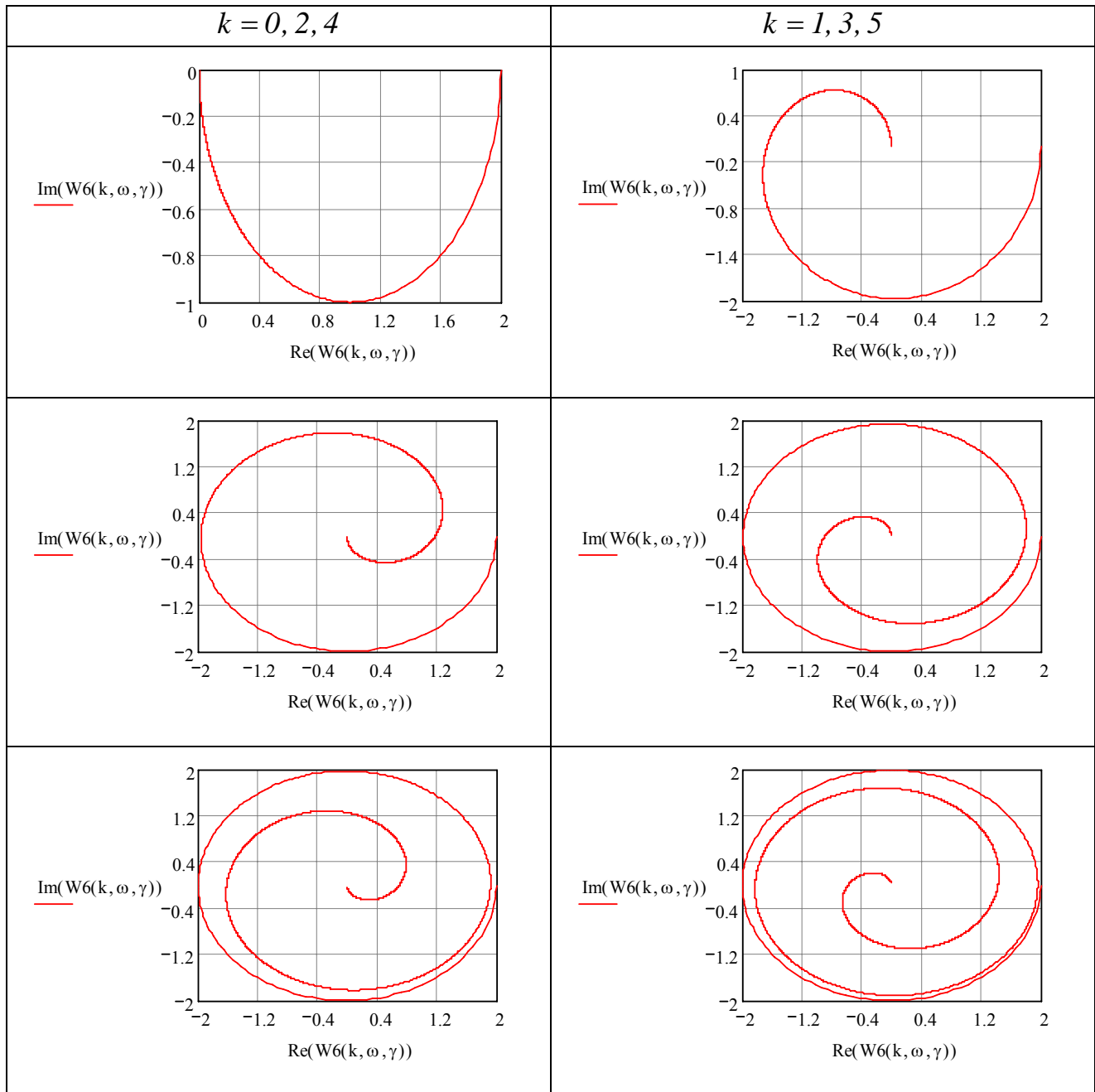
Частотные характеристики ортогональных фильтров Якоби ( $\alpha = 0, \beta = 1$ )



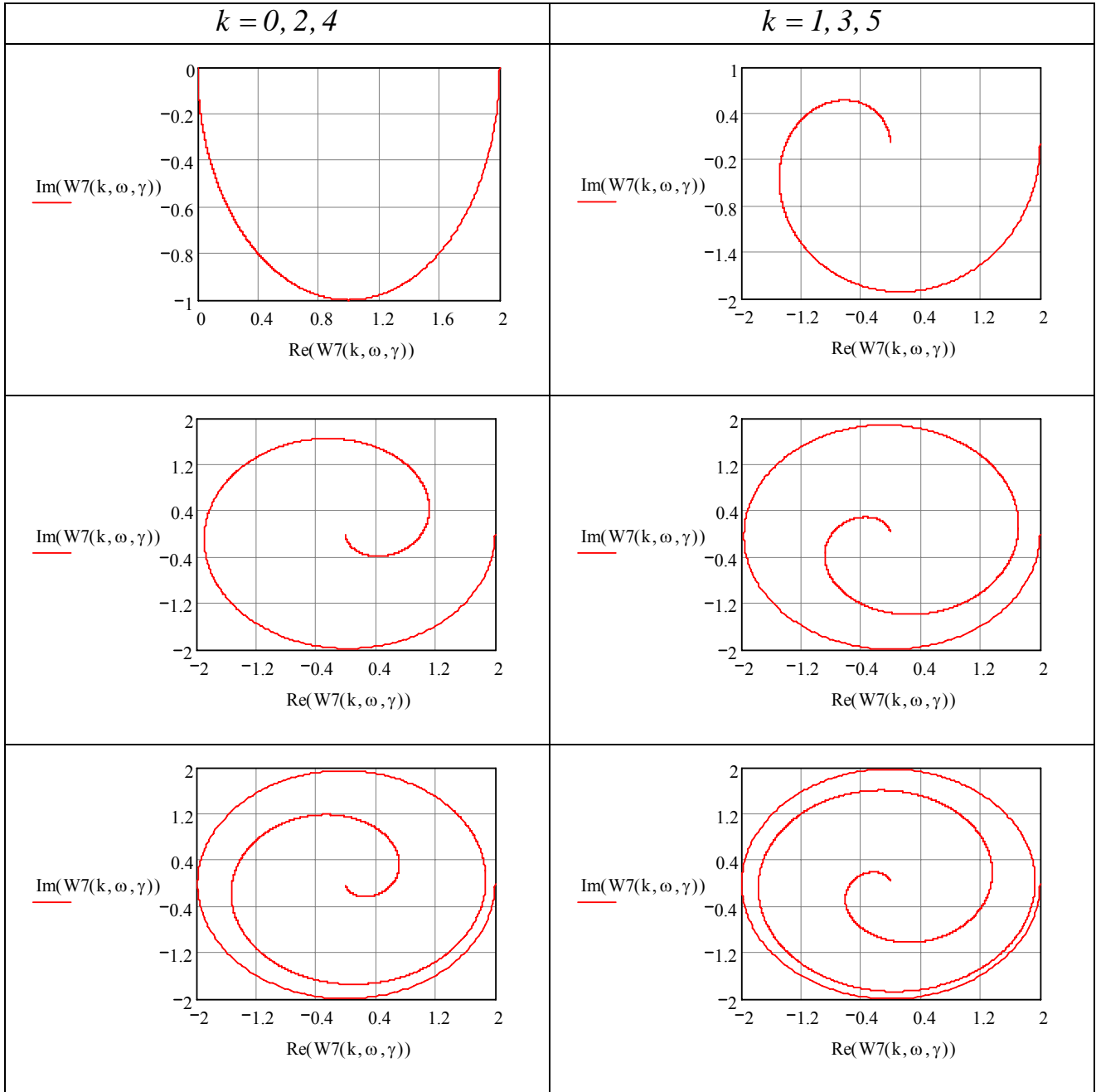
Частотные характеристики ортогональных фильтров Якоби ( $\alpha = 0, \beta = 2$ )



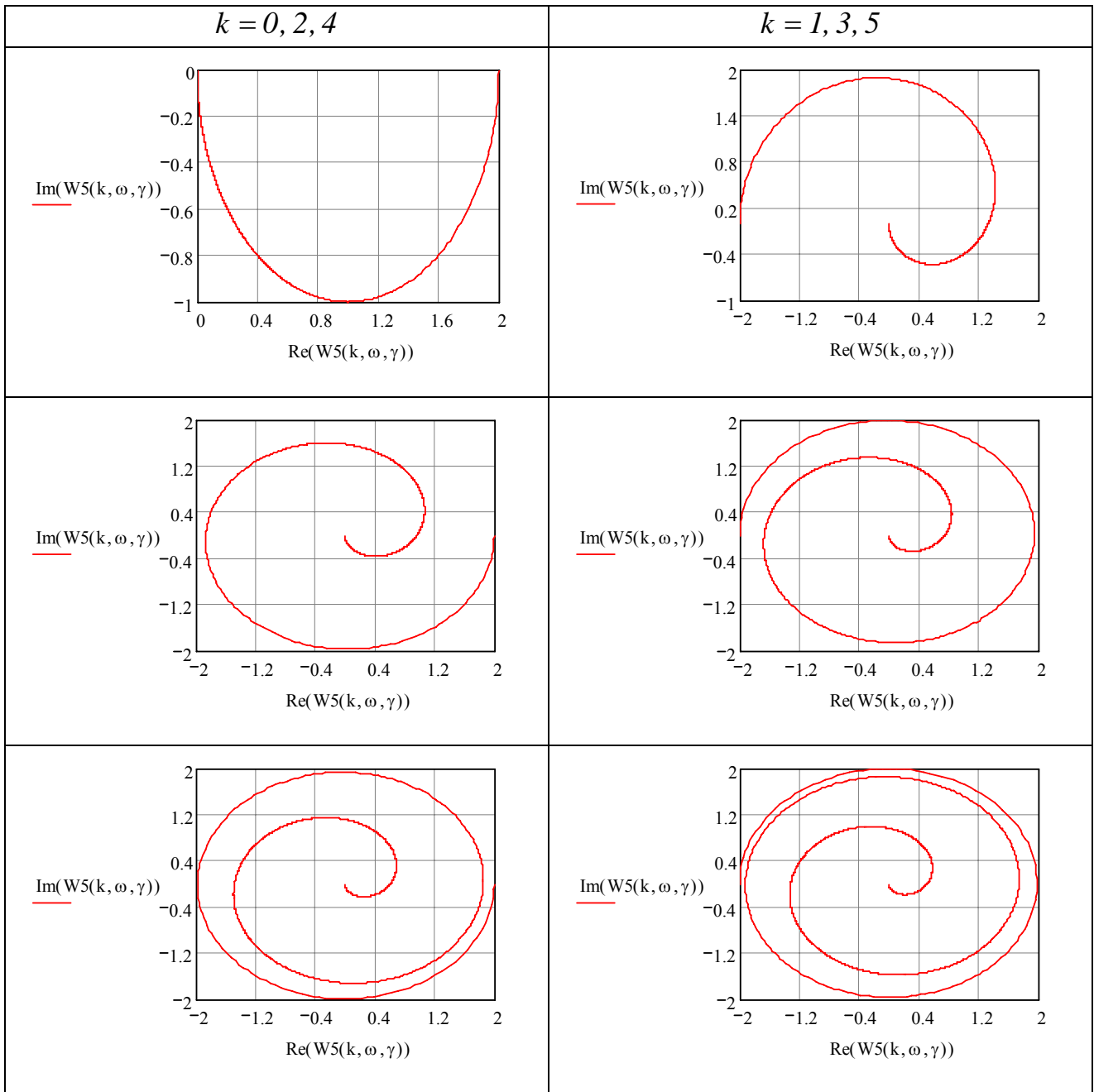
Частотные характеристики ортогональных фильтров Якоби ( $\alpha = -0,5, \beta = 0$ )



Частотные характеристики ортогональных фильтров Якоби ( $\alpha = 0,5, \beta = 0$ )



Частотные характеристики ортогональных фильтров Дирихле



**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 4. «ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ  
ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ»**

**Цель работы:** исследование частотных характеристик ортогональных функций.

1. Построить частотные характеристики, соответствующие выражениям (4.6) - (4.9);  $m = 0 - 4$ ,  $\gamma = \text{const}$ .

$$m := 0..4$$

$$\gamma := 0.875$$

$$\omega := 0,0 + 0.5..50$$

$$\phi(k, \omega) := \text{atan} \left[ \frac{\omega}{\gamma \cdot (k + 1)} \right]$$

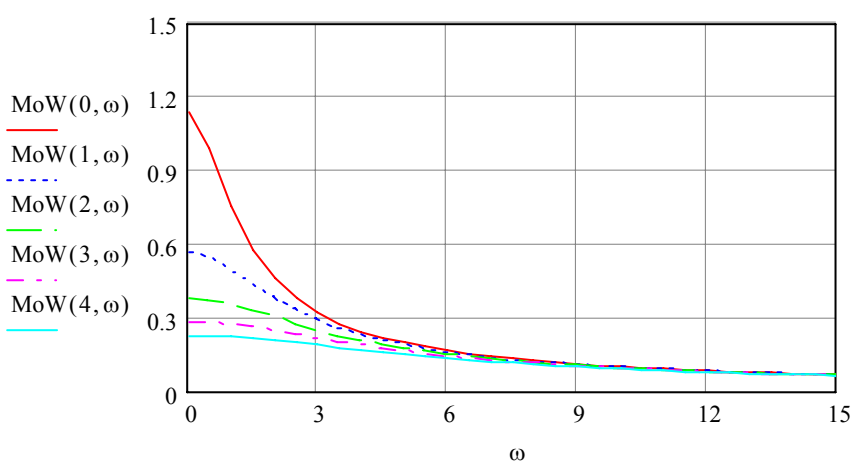
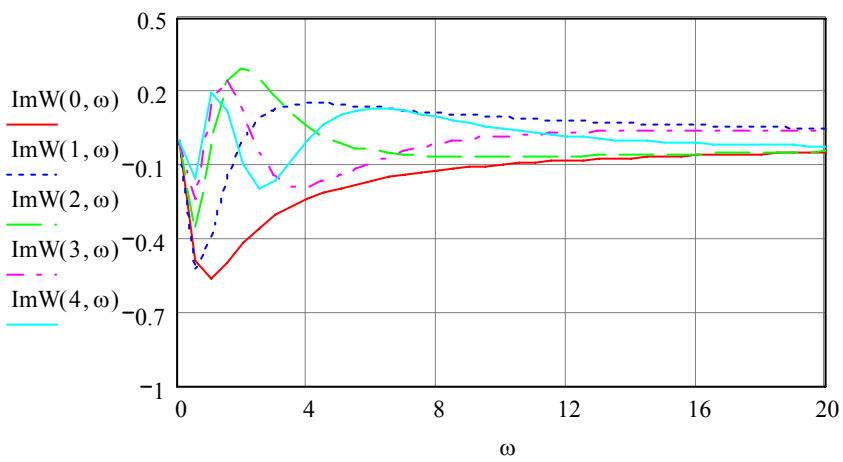
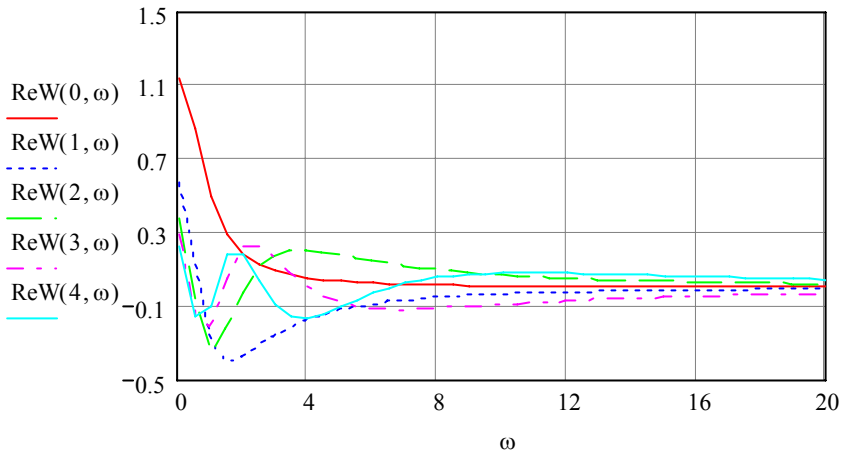
$$\text{Re}W(m, \omega) := \frac{1}{\gamma \cdot (m + 1)} \cdot \cos(\phi(m, \omega)) \cdot \cos \left[ \phi(m, \omega) + \left[ \begin{array}{l} 0 \text{ if } m = 0 \\ 2 \left( \sum_{s=0}^{m-1} \phi(s, \omega) \right) \text{ otherwise} \end{array} \right] \right]$$

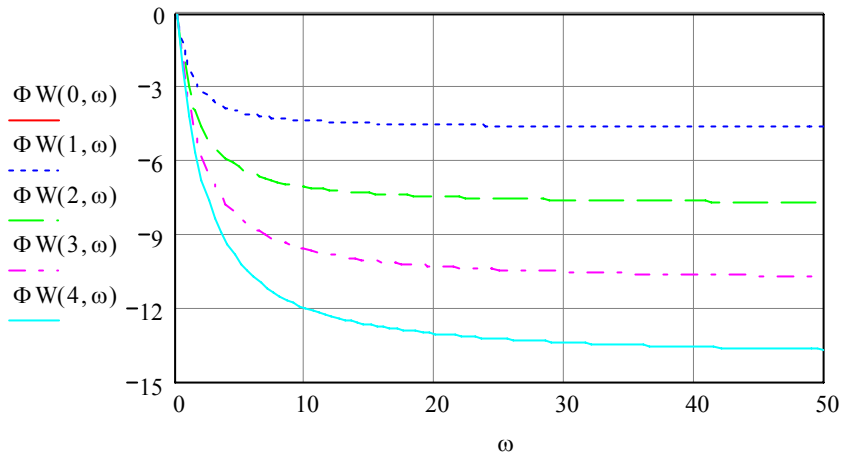
$$\text{Im}W(m, \omega) := -\frac{1}{\gamma \cdot (m + 1)} \cdot \cos(\phi(m, \omega)) \cdot \sin \left[ \phi(m, \omega) + \left[ \begin{array}{l} 0 \text{ if } m = 0 \\ 2 \left( \sum_{s=0}^{m-1} \phi(s, \omega) \right) \text{ otherwise} \end{array} \right] \right]$$

$$\text{Mo}W(m, \omega) := \frac{\cos(\phi(m, \omega))}{\gamma \cdot (m + 1)}$$

$$\Phi W(m, \omega) := - \left( \phi(m, \omega) + 2 \cdot \sum_{s=0}^{m-1} \phi(s, \omega) \right)$$

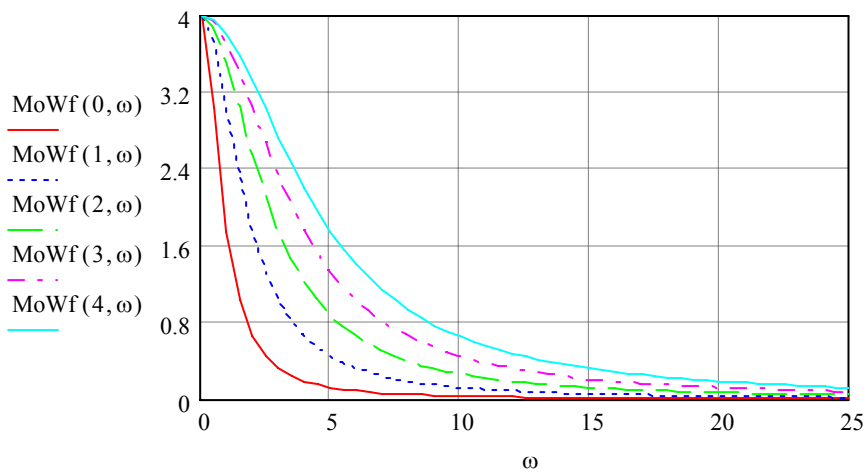






2. Построить зависимость квадрата модуля частотной характеристики ортогонального фильтра от порядка  $m$ ;  $m = 0 - 4$ ,  $\gamma = \text{const}$ .

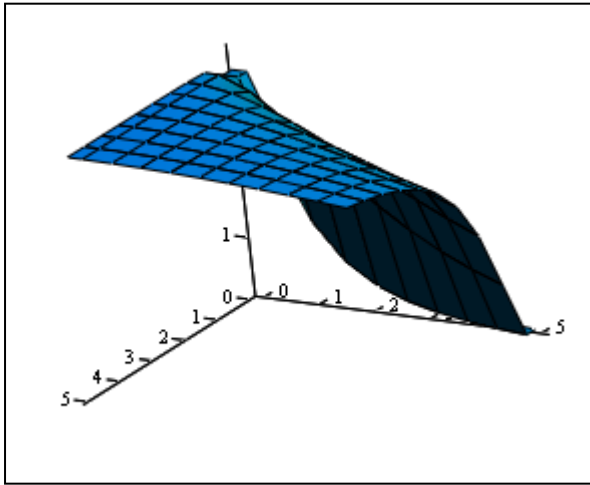
$$\text{MoWf}(m, \omega) := \frac{4(m+1)^2 \cdot \gamma^2}{(m+1)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2}$$



3. Построить зависимость квадрата модуля частотной характеристики ортогонального фильтра от параметра  $\gamma$ ;  $m = \text{const}$ .

$$m := 3$$

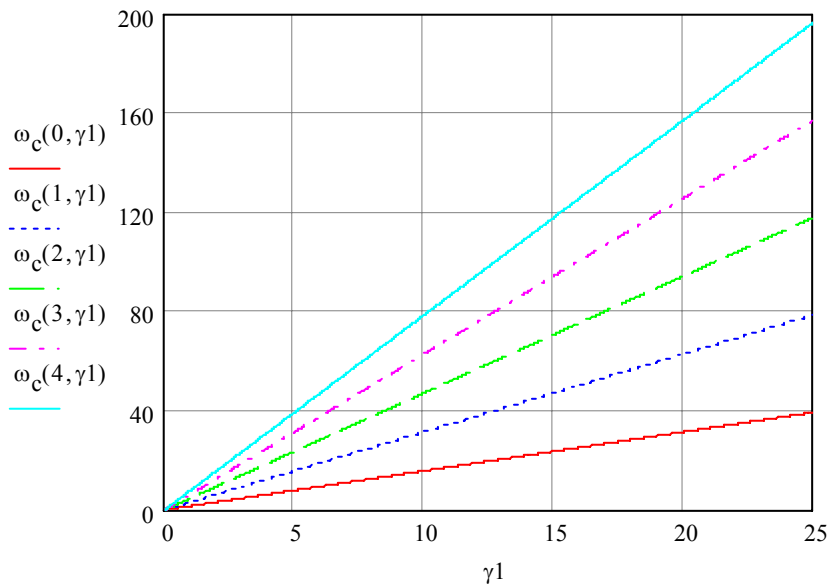
$$\text{MoWf}(\gamma, \omega) := \frac{4(m+1)^2 \cdot \gamma^2}{(m+1)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2}$$



CreateMesh (MoWf)

4. Построить зависимость полосы пропускания ортогонального фильтра  $m$ -ого порядка от параметра  $\gamma$ ;  $m = 0 - 4$ .

$$\omega_c(m, \gamma) := \frac{\pi \cdot \gamma \cdot (m + 1)}{2}$$



**АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ  
КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ**

Модель  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}$

Таблица П 10.1

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\beta_k$
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s \frac{1}{(\lambda + \gamma((4s+1)/2))}$
$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s \frac{1}{(\lambda + \gamma((4s+3)/2))}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{1}{(\lambda + \gamma(2s+1))}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s \frac{1}{(\lambda + \gamma(s+1))}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s \frac{1}{(\lambda + \gamma(2s+3))}$
$L_k(\tau, \gamma)$	$\gamma \sum_{s=0}^k C_k^s \frac{(-\gamma)^s}{(\lambda + \gamma/2)^{s+1}}$
$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\gamma^2 \sum_{s=0}^k C_{k+1}^{k-s} \frac{(-\gamma)^s (s+1)}{(\lambda + \gamma/2)^{s+2}}$
$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^3}{2} \sum_{s=0}^k C_{k+2}^{k-s} \frac{(-\gamma)^s (s+1)(s+2)}{(\lambda + \gamma/2)^{s+3}}$

Модель  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}(1 + \lambda|\tau|)$

Таблица П 10.2

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\beta_k$
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s \frac{2\lambda + \gamma((4s+1)/2)}{(\lambda + \gamma((4s+1)/2))^2}$
$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s \frac{2\lambda + \gamma((4s+3)/2)}{(\lambda + \gamma((4s+3)/2))^2}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{2\lambda + \gamma(2s+1)}{(\lambda + \gamma(2s+1))^2}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s \frac{2\lambda + \gamma(s+1)}{(\lambda + \gamma(s+1))^2}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s \frac{2\lambda + \gamma(2s+3)}{(\lambda + \gamma(2s+3))^2}$
$L_k(\tau, \gamma)$	$\gamma \sum_{s=0}^k C_k^s \frac{(-\gamma)^s}{(\lambda + \gamma/2)^{s+2}} (\lambda(s+2) + \gamma/2)$
$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\gamma^2 \sum_{s=0}^k C_{k+1}^{k-s} \frac{(-\gamma)^s (s+1)}{(\lambda + \gamma/2)^{s+3}} (\lambda(s+3) + \gamma/2)$
$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^3}{2} \sum_{s=0}^k C_{k+2}^{k-s} \frac{(-\gamma)^s (s+1)(s+2)}{(\lambda + \gamma/2)^{s+4}} (\lambda(s+4) + \gamma/2)$

Модель  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}(1 - \lambda|\tau|)$

Таблица П 10.3

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\beta_k$
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s \frac{\gamma((4s+1)/2)}{(\lambda + \gamma((4s+1)/2))^2}$
$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s \frac{\gamma((4s+3)/2)}{(\lambda + \gamma((4s+3)/2))^2}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{\gamma(2s+1)}{(\lambda + \gamma(2s+1))^2}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s \frac{\gamma(s+1)}{(\lambda + \gamma(s+1))^2}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s \frac{\gamma(2s+3)}{(\lambda + \gamma(2s+3))^2}$
$L_k(\tau, \gamma)$	$\gamma \sum_{s=0}^k C_k^s \frac{(-\gamma)^s}{(\lambda + \gamma/2)^{s+2}} (\gamma/2 - \lambda s)$
$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\gamma^2 \sum_{s=0}^k C_{k+1}^{k-s} \frac{(-\gamma)^s (s+1)}{(\lambda + \gamma/2)^{s+3}} (\gamma/2 - \lambda(s+1))$
$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^3}{2} \sum_{s=0}^k C_{k+2}^{k-s} \frac{(-\gamma)^s (s+1)(s+2)}{(\lambda + \gamma/2)^{s+4}} (\gamma/2 - \lambda(s+2))$

$$\text{Модель } \rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} (1 + \lambda|\tau| + \lambda^2\tau^2/3)$$

Таблица П 10.4

$\psi_k(\tau, \gamma/\alpha)$	$\beta_k$
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s \frac{[8\lambda^2 + 9\lambda\gamma((4s+1)/2) + 3\gamma^2((4s+1)/2)^2]}{3(\lambda + \gamma((4s+1)/2))^3}$
$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s \frac{[8\lambda^2 + 9\lambda\gamma((4s+3)/2) + 3\gamma^2((4s+3)/2)^2]}{3(\lambda + \gamma((4s+3)/2))^3}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{[8\lambda^2 + 9\lambda\gamma(2s+1) + 3\gamma^2(2s+1)^2]}{3(\lambda + \gamma(2s+1))^3}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s \frac{[8\lambda^2 + 9\lambda\gamma(s+1) + 3\gamma^2(s+1)^2]}{3(\lambda + \gamma(s+1))^3}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s \frac{[8\lambda^2 + 9\lambda\gamma(2s+3) + 3\gamma^2(2s+3)^2]}{3(\lambda + \gamma(2s+3))^3}$
$L_k(\tau, \gamma)$	$\gamma \sum_{s=0}^k C_k^s \frac{(-\gamma)^s}{3(\lambda + \gamma/2)^{s+3}} [3(\lambda(s+2) + \gamma/2)(\lambda + \gamma/2) + \lambda^3(s+1)(s+2)]$
$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\gamma^2 \sum_{s=0}^k C_{k+1}^{k-s} \frac{(-\gamma)^s (s+1)}{3(\lambda + \gamma/2)^{s+4}} [3(\lambda(s+3) + \gamma/2)(\lambda + \gamma/2) + \lambda^3(s+2)(s+3)]$
$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^3}{2} \sum_{s=0}^k C_{k+2}^{k-s} \frac{(-\gamma)^s (s+1)(s+2)}{3(\lambda + \gamma/2)^{s+5}} [3(\lambda(s+4) + \gamma/2)(\lambda + \gamma/2) + \lambda^3(s+3)(s+4)]$

Модель  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$

Таблица П 10.5

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\beta_k$
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s \frac{(\lambda + \gamma((4s+1)/2))}{[(\lambda + \gamma((4s+1)/2))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s \frac{(\lambda + \gamma((4s+3)/2))}{[(\lambda + \gamma((4s+3)/2))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{(\lambda + \gamma(2s+1))}{[(\lambda + \gamma(2s+1))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s \frac{(\lambda + \gamma(s+1))}{[(\lambda + \gamma(s+1))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s \frac{(\lambda + \gamma(2s+3))}{[(\lambda + \gamma(2s+3))^2 + \omega_0^2]}$



$$\text{Модель } \rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$$

Таблица П 10.6

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\beta_k$
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s \frac{(2\lambda + \gamma((4s+1)/2))}{[(\lambda + \gamma((4s+1)/2))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s \frac{(2\lambda + \gamma((4s+3)/2))}{[(\lambda + \gamma((4s+3)/2))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{(2\lambda + \gamma(2s+1))}{[(\lambda + \gamma(2s+1))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s \frac{(2\lambda + \gamma(s+1))}{[(\lambda + \gamma(s+1))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s \frac{(2\lambda + \gamma(2s+3))}{[(\lambda + \gamma(2s+3))^2 + \omega_0^2]}$

$$\text{Модель } \rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$$

Таблица П 10.7

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\beta_k$
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s \frac{\gamma((4s+1)/2)}{[(\lambda + \gamma((4s+1)/2))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s \frac{\gamma((4s+3)/2)}{[(\lambda + \gamma((4s+3)/2))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{\gamma(2s+1)}{[(\lambda + \gamma(2s+1))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s \frac{\gamma(s+1)}{[(\lambda + \gamma(s+1))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s \frac{\gamma(2s+3)}{[(\lambda + \gamma(2s+3))^2 + \omega_0^2]}$

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 5. «ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ  
КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ»**

**Цель работы:** изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации корреляционных функций случайных процессов ортогональными функциями.

1. Определить коэффициенты разложения  $\beta_k$ . Построить графические зависимости  $\beta_k$  от порядка  $k$ ;  $\mu$ ,  $m$ ,  $\gamma$ .

$$\lambda := 1$$

$$\omega := 5$$

$$\gamma := 0.30619$$

$$m := 15$$

$$k := 0..m$$

$$\phi_1(k) := \operatorname{atan}\left[\frac{\omega}{(k+1)\cdot\gamma + \lambda}\right]$$

$$\phi_2(k) := \operatorname{atan}\left[\frac{\omega}{(k+1)\gamma - \lambda}\right]$$

$$A_1(k) := \frac{\gamma\cdot(k+1)}{(k+1)\cdot\gamma + \lambda}$$

$$A_2(k) := \frac{\gamma\cdot(k+1)}{(k+1)\cdot\gamma - \lambda}$$

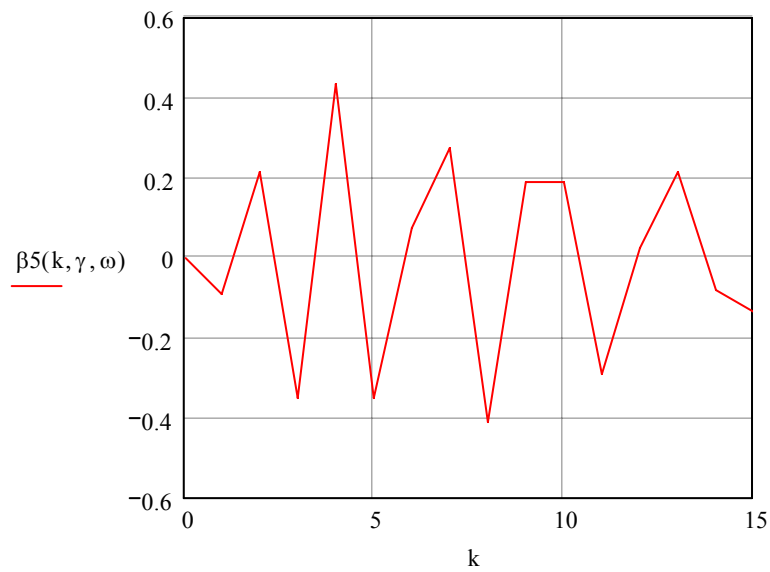
$$B(k) := \frac{A_1(k)\cdot\cos(\phi_1(k))}{A_2(k)\cdot\cos(\phi_2(k))}$$

$$\beta_5(k, \gamma, \omega) := 2\cdot A_1(k)\cdot\cos(\phi_1(k))\cdot\left[\cos\left[\phi_1(k) + \left[\begin{array}{l} 0 \text{ if } k = 0 \\ \sum_{s=0}^{k-1} (\phi_1(s) + \phi_2(s)) \text{ otherwise} \end{array}\right]\right]\right] \cdot \prod_{s=0}^{k-1} B(s)$$

$$\beta_5(k, \gamma, \omega) =$$

0
-0.09485
0.21058
-0.35094
0.43418
-0.35344
0.07198
0.27425
-0.41313
0.1892
0.18679
-0.29204
0.02293
0.21325
-0.08428
-0.13962

$$\beta_5(0, \gamma, \omega) \rightarrow 2.9951346856683673202 \cdot 10^{-2}$$



2. Построить графические зависимости  $\delta$  от числа членов разложения  $m$ ;  $\mu = 0 - 5$ ,  $\chi$ .

$$\tau_4(\omega) := \frac{2 \cdot \lambda^2 + \omega^2}{4 \cdot \lambda \cdot (\lambda^2 + \omega^2)}$$

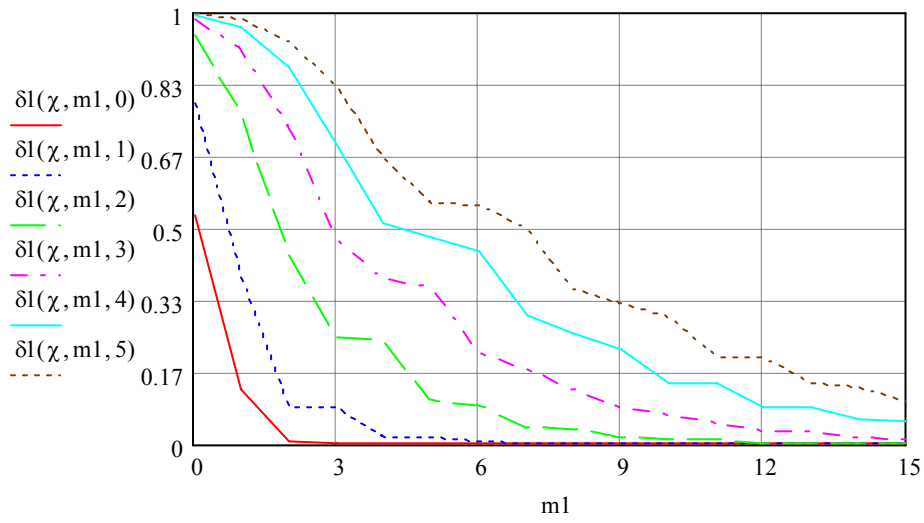
$$\chi := \gamma$$

$$P_7(k, \tau, \chi) := \sum_{s=0}^k \text{combin}(k, s) \cdot \text{combin}(k+s+1, k) \cdot (-1)^s \cdot e^{-(s+1) \cdot \chi \cdot \tau}$$

$$\beta_{5i}(k, \chi, \omega) := 2\chi \cdot (k+1) \cdot \int_0^{\infty} P_7(k, \tau, \chi) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau) \, d\tau$$

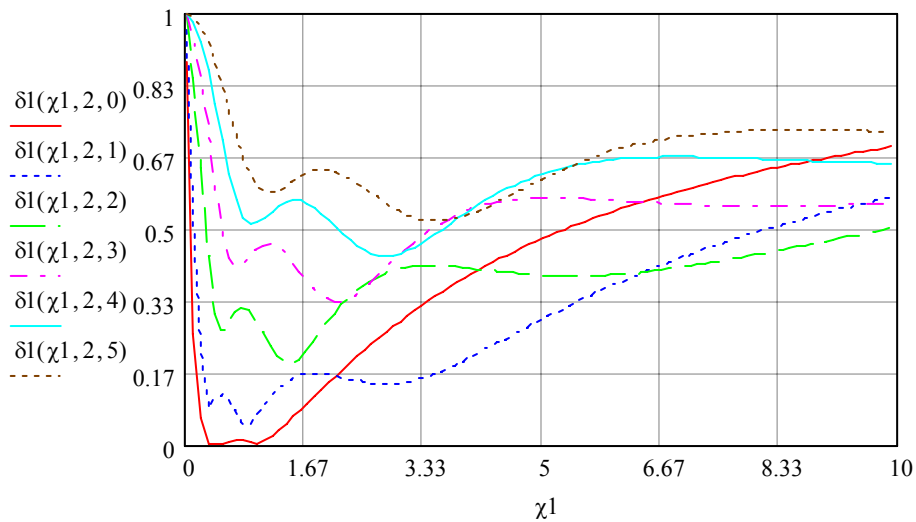
$$\delta_1(\chi, m, \omega) := \sqrt{1 - \frac{1}{2 \cdot \chi \cdot \tau_4(\omega)} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{(\beta_{5i}(k, \chi, \omega))^2}{k+1}}$$

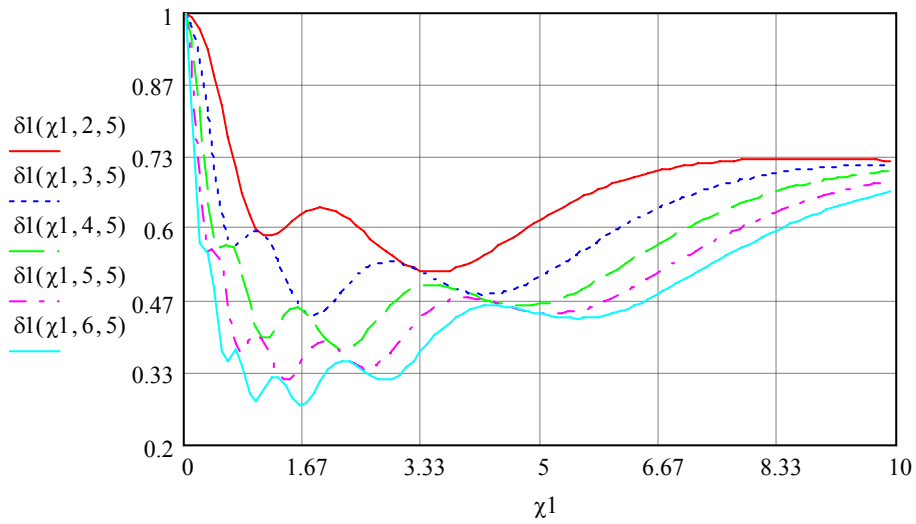
$m1 := 0..15$



3. Построить графические зависимости  $\delta$  от параметра  $\chi$ ;  $\mu = 0 - 5$ ,  $m = 2 - 6$ .  
 Определить количество локальных экстремумов, значения параметра  $\chi_{орт}$  и соответствующие им значения погрешностей.

$\chi1 := 0.01, 0.01 + 0.1..10$





$$\delta_{\min 1}(\chi_1) := \delta l(\chi_1, 2, 5)$$

$$\chi_1 := 2$$

Given

$$0.5 < \chi_1 < 5$$

$$\text{Minimize}(\delta_{\min 1}, \chi_1) = 3.49967$$

$$\chi_{\min M_0} := \text{Minimize}(\delta_{\min 1}, \chi_1)$$

$$\delta_{\min 1}(\chi_1) := \delta l(\chi_1, 3, 5)$$

$$\chi_1 := 2$$

Given

$$0.5 < \chi_1 < 5$$

$$\text{Minimize}(\delta_{\min 1}, \chi_1) = 1.80553$$

$$\chi_{\min M_1} := \text{Minimize}(\delta_{\min 1}, \chi_1)$$

$$\delta_{\min 1}(\chi_1) := \delta_1(\chi_1, 4, 5)$$

$$\chi_1 := 1.8$$

Given

$$0.5 < \chi_1 < 5$$

$$\text{Minimize}(\delta_{\min 1}, \chi_1) = 2.22454$$

$$\chi_{\min M_2} := \text{Minimize}(\delta_{\min 1}, \chi_1)$$

$$\delta_{\min 1}(\chi_1) := \delta_1(\chi_1, 5, 5)$$

$$\chi_1 := 1.6$$

Given

$$0.5 < \chi_1 < 5$$

$$\text{Minimize}(\delta_{\min 1}, \chi_1) = 1.41339$$

$$\chi_{\min M_3} := \text{Minimize}(\delta_{\min 1}, \chi_1)$$

$$\delta_{\min 1}(\chi_1) := \delta_1(\chi_1, 6, 5)$$

$$\chi_1 := 2$$

Given

$$0.5 < \chi_1 < 5$$

$$\text{Minimize}(\delta_{\min 1}, \chi_1) = 1.63404$$

$$\chi_{\min M_4} := \text{Minimize}(\delta_{\min 1}, \chi_1)$$

$$\chi_{\min M} = \begin{pmatrix} 3.49967 \\ 1.80553 \\ 2.22454 \\ 1.41339 \\ 1.63404 \end{pmatrix}$$

$$\delta_{\min M_0} := \delta l(\chi_{\min M_0, 2, 5})$$

$$\delta_{\min M_1} := \delta l(\chi_{\min M_1, 3, 5})$$

$$\delta_{\min M_2} := \delta l(\chi_{\min M_2, 4, 5})$$

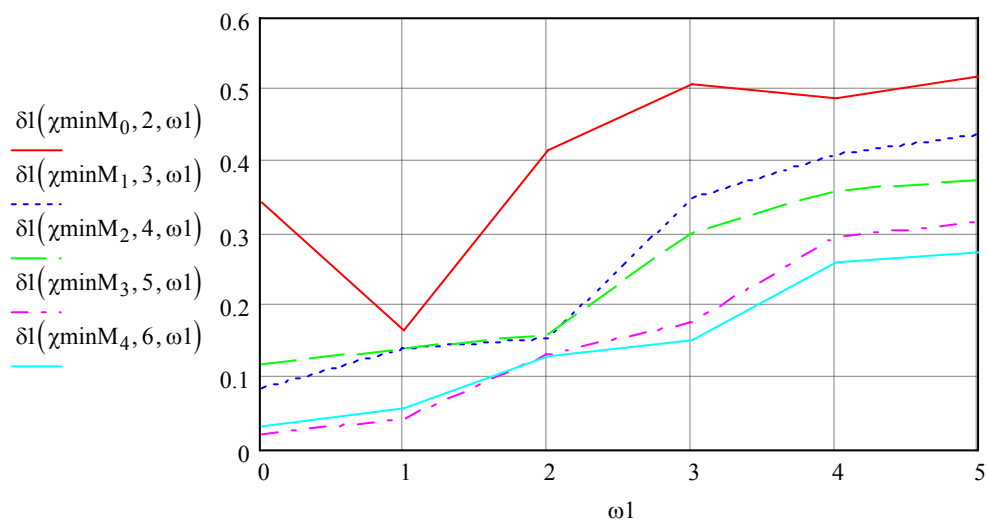
$$\delta_{\min M_3} := \delta l(\chi_{\min M_3, 5, 5})$$

$$\delta_{\min M_4} := \delta l(\chi_{\min M_4, 6, 5})$$

$$\delta_{\min M} = \begin{pmatrix} 0.519 \\ 0.439 \\ 0.375 \\ 0.316 \\ 0.273 \end{pmatrix}$$

4. Построить графические зависимости  $\delta$  от параметра  $\mu$ ,  $m$ ;  $\mu = 0 - 5$ ,  $m = 2 - 6$ ,  $\chi_{\text{opt}}$ .

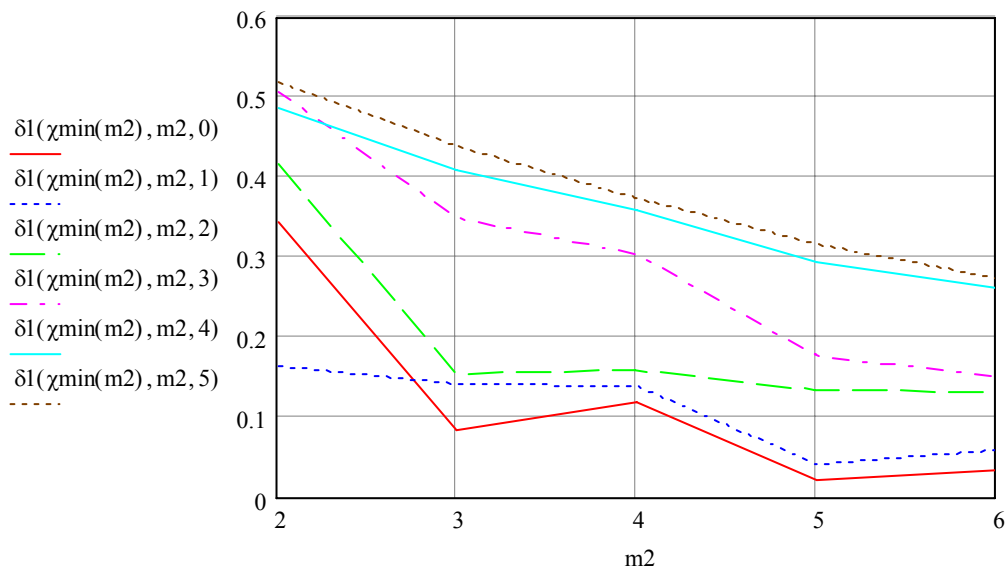
$\omega_1 := 0..5$





$$\chi_{\min}(m) := \begin{cases} \chi_{\min M_0} & \text{if } m = 2 \\ \chi_{\min M_1} & \text{if } m = 3 \\ \chi_{\min M_2} & \text{if } m = 4 \\ \chi_{\min M_3} & \text{if } m = 5 \\ \chi_{\min M_4} & \text{if } m = 6 \end{cases}$$

$$m_2 := 2..6$$



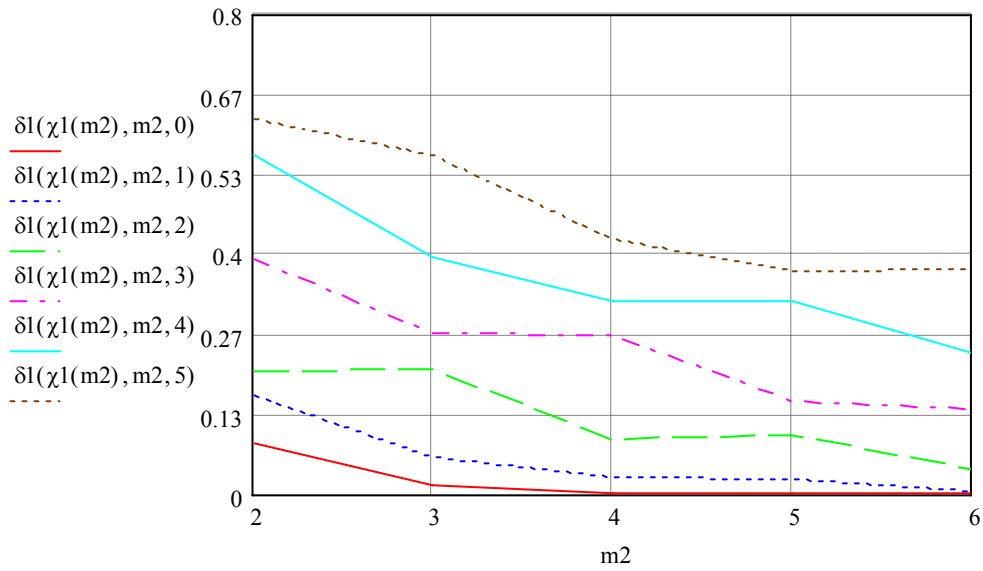
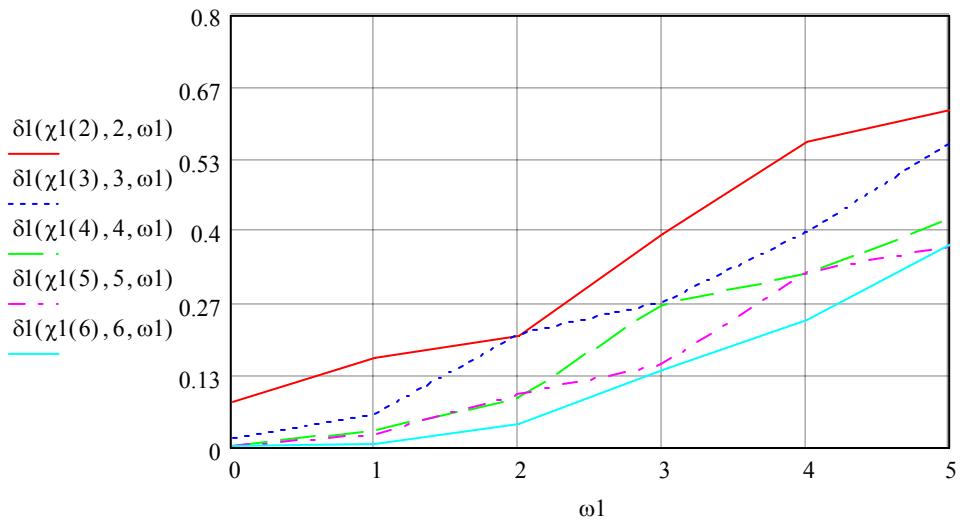
5. Построить графические зависимости  $\delta$  от параметра  $\mu$ ,  $m$ ;  $\mu = 0 - 5$ ,  $m = 2 - 6$ ,  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ .

$$\Delta_t := \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{8 \cdot 0.02}{\sqrt{\left| \left( \frac{\omega}{\lambda} \right)^2 - 1 \right|}}$$

$$\chi_1(m_2) := \frac{0.4}{(m_2 + 1) \cdot \Delta_t}$$

$$\chi_1(m_2) =$$

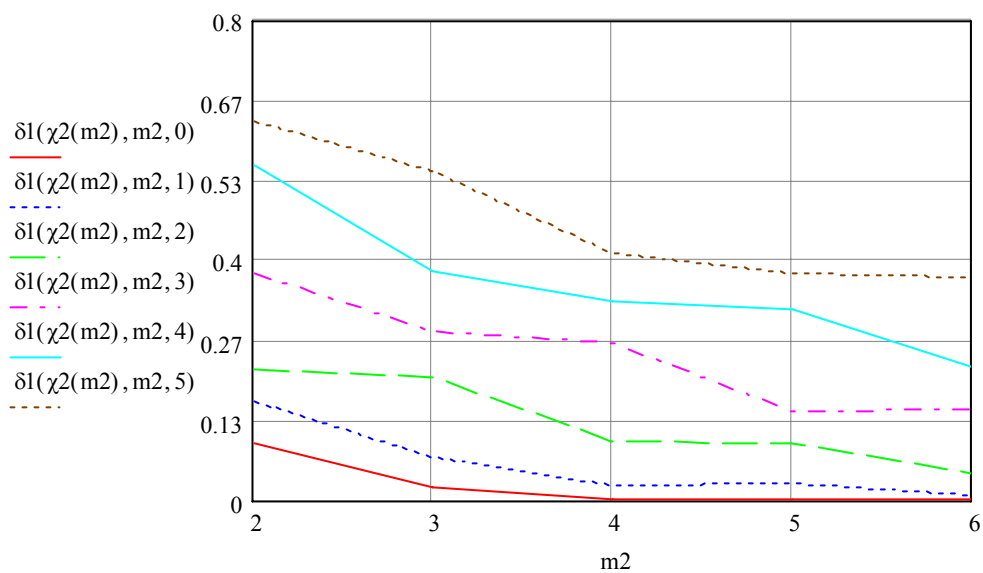
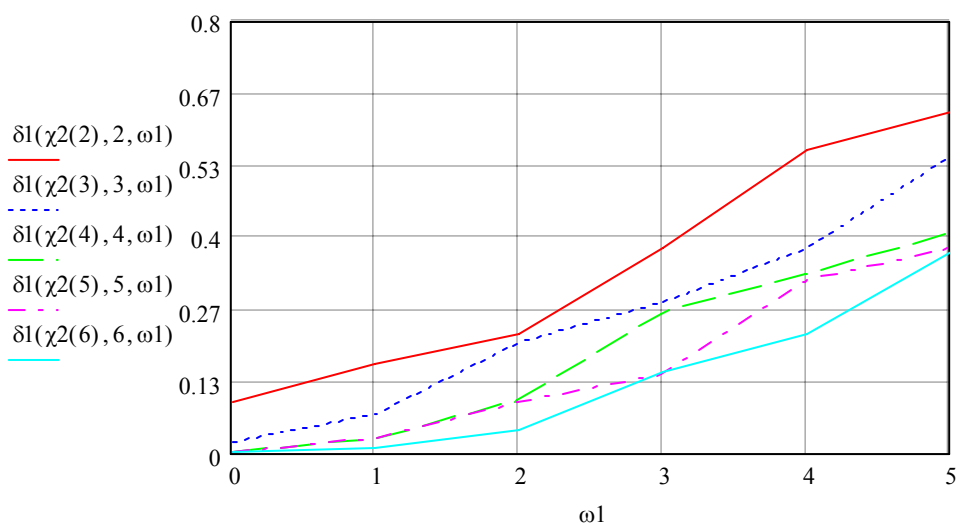
1.633
1.225
0.98
0.816
0.7



$$\chi_2(m_2) := \frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}}{(m_2 + 1)}$$

$\chi_2(m_2) =$

1.7
1.275
1.02
0.85
0.728



6. Построить модели корреляционной функции;  $\lambda = 1, \mu = 5, m = 5/10, \chi_1, \chi_2, \chi_{opt}$ .

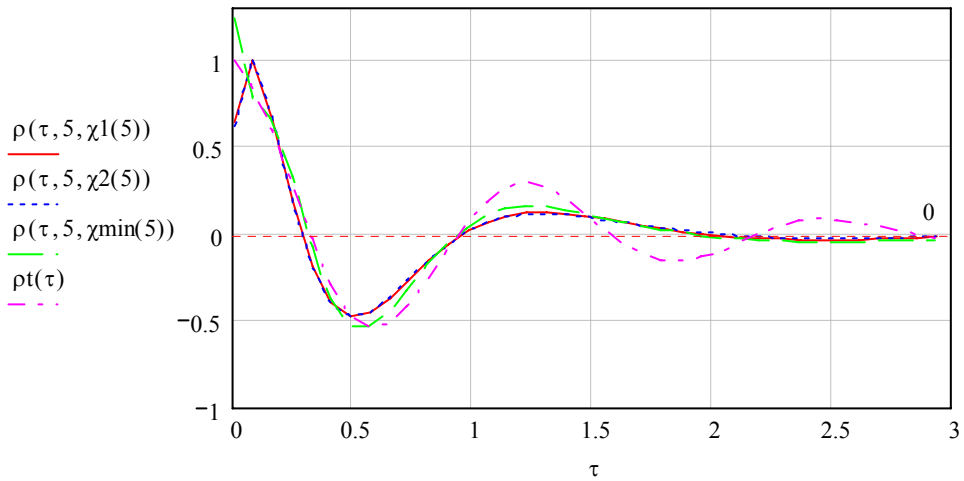
$$\rho(\tau, m, \chi) := \sum_{k=0}^m \beta_5 i(k, \chi, \omega) \cdot P_7(k, \tau, \chi)$$

$\Delta\tau := 0.081649'$

$N_x := 37$

$$\tau := 0, 0 + \Delta\tau \dots (Nx - 1) \cdot \Delta\tau$$

$$\rho t(\tau) := e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau)$$



$$\delta_{\min 1}(\chi_3) := \delta l(\chi_3, 10, 5)$$

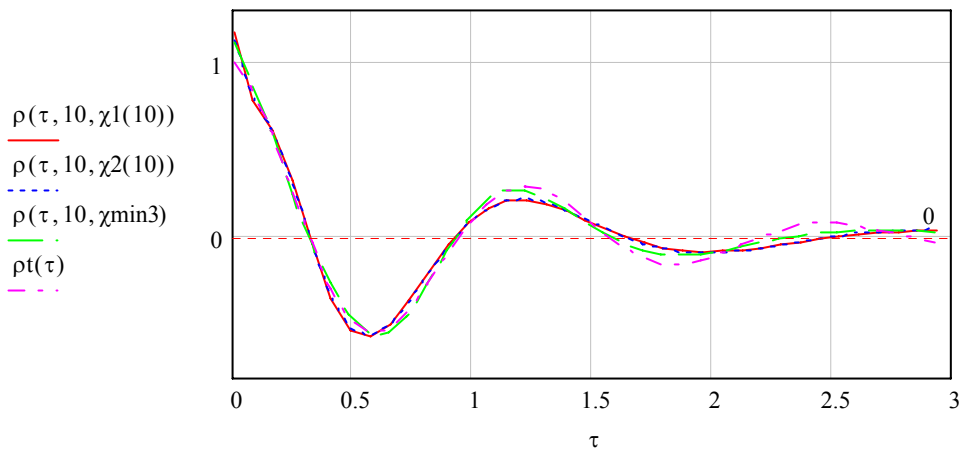
$$\chi_3 := 0.7^t$$

Given

$$0.5 < \chi_3 < 2$$

$$\text{Minimize}(\delta_{\min 1}, \chi_3) = 0.76934$$

$$\chi_{\min 3} := \text{Minimize}(\delta_{\min 1}, \chi_3)$$



**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 6. «АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ С УЧЕТОМ УСЛОВИЯ НОРМИРОВКИ»**

**Цель работы:** изучение метода и приобретение практических навыков при аппроксимации корреляционных функций случайных процессов ортогональными функциями при ограничении на её модель.

1. Определить коэффициенты разложения  $\beta_k$  и  $b_k$ . Построить графические зависимости  $\beta_k$  и  $b_k$  от порядка  $k$ ;  $\mu$ ,  $m$ ,  $\gamma$ .

$$\lambda := 1$$

$$\omega := 5$$

$$\gamma := 0.30619$$

$$m := 15$$

$$k := 0..m$$

$$P7(k, \tau, \gamma) := \sum_{s=0}^k \text{combin}(k, s) \cdot \text{combin}(k + s + 1, s + 1) \cdot (-1)^s \cdot e^{-(s+1) \cdot \gamma \cdot \tau}$$

$$\beta5(k, \gamma, \omega) := 2\gamma \cdot (k + 1) \cdot \int_0^{\infty} P7(k, \tau, \gamma) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau) \, d\tau$$

$$b5(k, \gamma, \omega) := \beta5(k, \gamma, \omega) + \frac{2 \cdot (-1)^k \cdot (k + 1) \cdot \left[ 1 - \sum_{s=0}^m (-1)^s \cdot \beta5(s, \gamma, \omega) \right]}{(m + 1) \cdot (m + 2)}$$

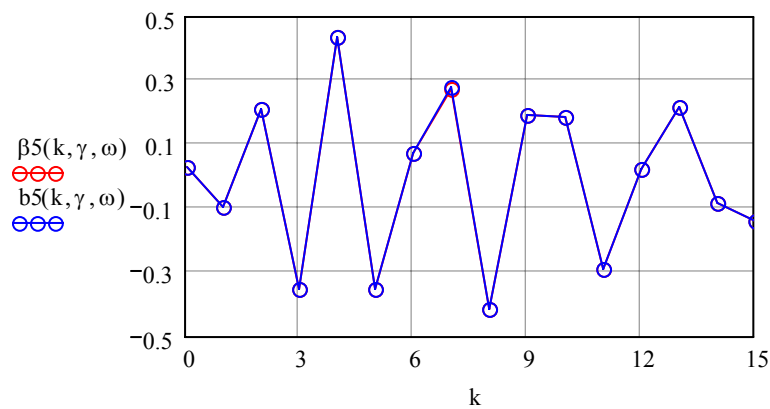
$$\beta_5(k, \gamma, \omega) =$$

0.029948
-0.094859
0.210559
-0.350974
0.434154
-0.353464
0.071981
0.274272
-0.41309
0.189251
0.186837
-0.292016
0.022924
0.21321
-0.084343
-0.139691

$$b_5(k, \gamma, \omega) =$$

0.029851
-0.094664
0.210267
-0.350585
0.433667
-0.35288
0.071299
0.275051
-0.413966
0.190224
0.185766
-0.290847
0.021658
0.214573
-0.085804
-0.138133

$$\sum_{k=0}^m b_5(k, \gamma, \omega) \cdot (-1)^k = 1$$



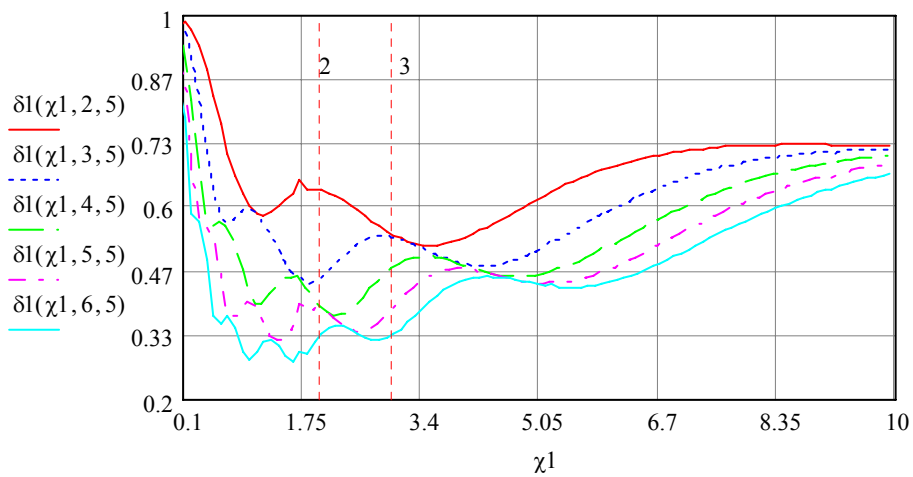
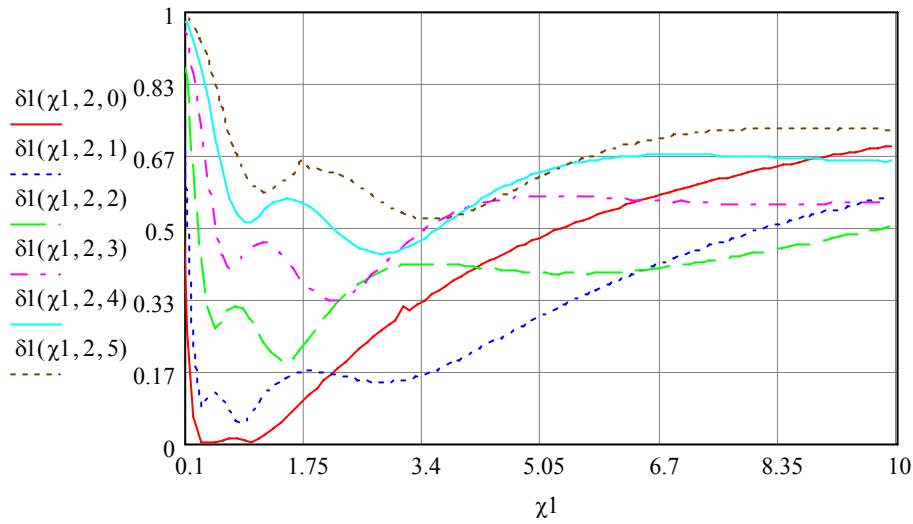
2. Построить графические зависимости  $\delta$  от параметра  $\chi$ ;  $\mu = 0 - 5$ ,  $m = 2 - 6$ .  
 Определить количество локальных экстремумов, значения параметра  $\chi_{opt}$  и соответствующие им значения погрешностей.

$$\tau_4(\omega) := \frac{2 \cdot \lambda^2 + \omega^2}{4 \cdot \lambda \cdot (\lambda^2 + \omega^2)}$$

$$\chi := \gamma$$

$$\delta l(\chi, m, \omega) := \sqrt{1 - \frac{1}{2 \cdot \chi \cdot \tau 4(\omega)} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{(b5(k, \chi, \omega))^2}{k+1}}$$

$$\chi^1 := 0.01, 0.01 + 0.1 \dots 10$$



$$\delta m(\chi^1) := \delta l(\chi^1, 2, 5)$$

$$\chi^1 := 2.4$$

Given

$$0.5 < \chi^1 < 5$$

$$\text{Minimize}(\delta m, \chi^1) = 3.515$$

$$\chi^{\text{minM}_0} := \text{Minimize}(\delta m, \chi^1)$$

$$\delta m(\chi_1) := \delta l(\chi_1, 3, 5)$$

$$\chi_1 := 2.1$$

Given

$$0.5 < \chi_1 < 3$$

$$\text{Minimize}(\delta m, \chi_1) = 1.81528$$

$$\chi_{\min M_1} := \text{Minimize}(\delta m, \chi_1)$$

$$\delta m(\chi_1) := \delta l(\chi_1, 4, 5)$$

$$\chi_1 := 1.8$$

Given

$$0.8 < \chi_1 < 3$$

$$\text{Minimize}(\delta m, \chi_1) = 2.21764$$

$$\chi_{\min M_2} := \text{Minimize}(\delta m, \chi_1)$$

$$\delta m(\chi_1) := \delta l(\chi_1, 5, 5)$$

$$\chi_1 := 1.7$$

Given

$$0.5 < \chi_1 < 3$$

$$\text{Minimize}(\delta m, \chi_1) = 1.39984$$

$$\chi_{\min M_3} := \text{Minimize}(\delta m, \chi_1)$$



$$\delta m(\chi_1) := \delta l(\chi_1, 6, 5)$$

$$\chi_1 := 1.4$$

Given

$$0.5 < \chi_1 < 3$$

$$\text{Minimize}(\delta m, \chi_1) = 1.64291$$

$$\chi_{\min M_4} := \text{Minimize}(\delta m, \chi_1)$$

$$\chi_{\min M} = \begin{pmatrix} 3.515 \\ 1.815 \\ 2.218 \\ 1.4 \\ 1.643 \end{pmatrix}$$

$$\delta_{\min M_0} := \delta l(\chi_{\min M_0}, 2, 5)$$

$$\delta_{\min M_1} := \delta l(\chi_{\min M_1}, 3, 5)$$

$$\delta_{\min M_2} := \delta l(\chi_{\min M_2}, 4, 5)$$

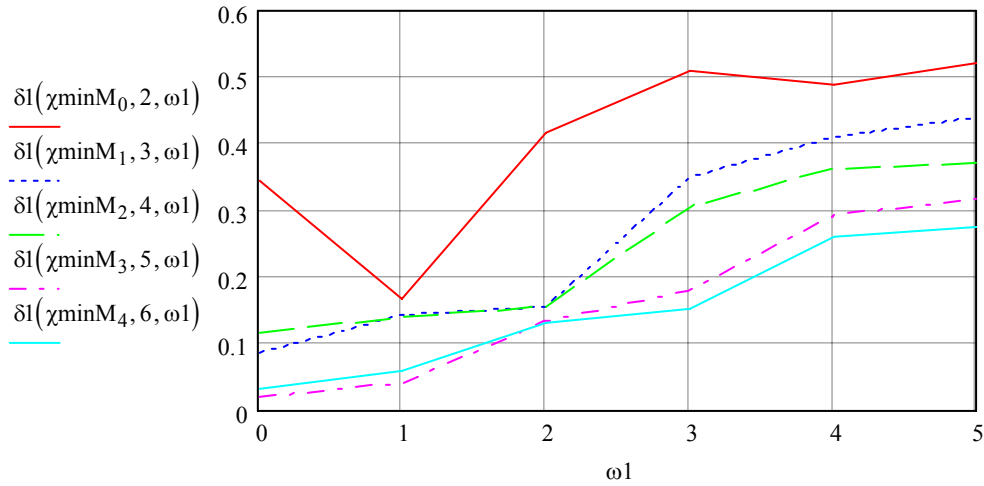
$$\delta_{\min M_3} := \delta l(\chi_{\min M_3}, 5, 5)$$

$$\delta_{\min M_4} := \delta l(\chi_{\min M_4}, 6, 5)$$

$$\delta_{\min M} = \begin{pmatrix} 0.52 \\ 0.439 \\ 0.372 \\ 0.318 \\ 0.275 \end{pmatrix}$$

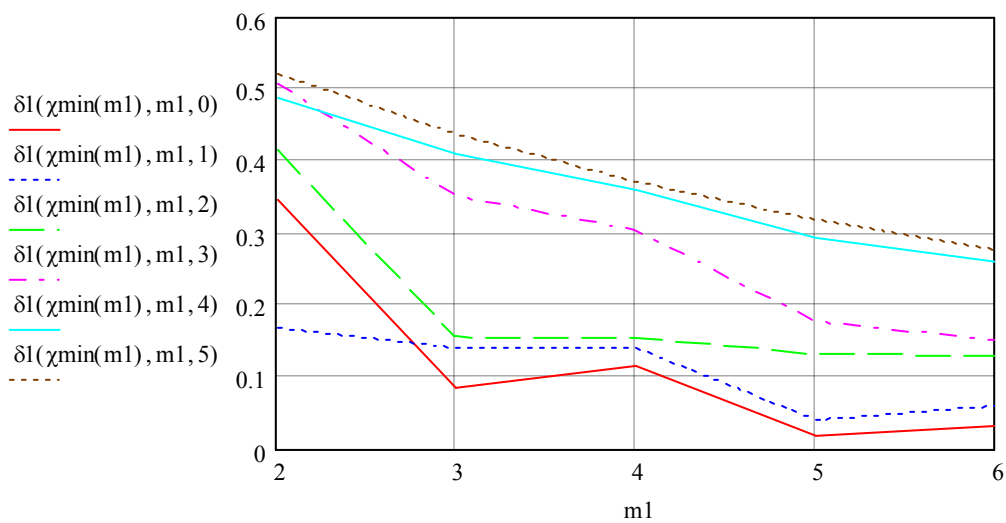
3. Построить графические зависимости  $\delta$  от параметра  $\mu$ ,  $m$ ;  $\mu = 0 - 5$ ,  $m = 2 - 6$ ,  $\chi_{opt}$ .

$\omega_1 := 0..5$



$$\chi_{min(m)} := \begin{cases} \chi_{minM_0} & \text{if } m = 2 \\ \chi_{minM_1} & \text{if } m = 3 \\ \chi_{minM_2} & \text{if } m = 4 \\ \chi_{minM_3} & \text{if } m = 5 \\ \chi_{minM_4} & \text{if } m = 6 \end{cases}$$

$m_1 := 2..6$



4. Построить графические зависимости  $\delta$  от параметра  $\mu$ ,  $m$ ;  $\mu = 0 - 5$ ,  $m = 2 - 6$ ,  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ .

$$m_2 := 2..6$$

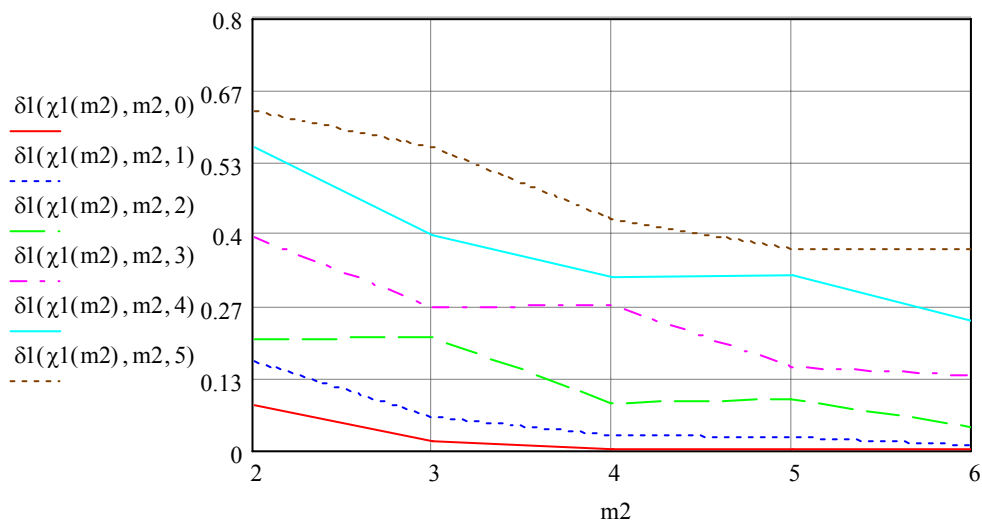
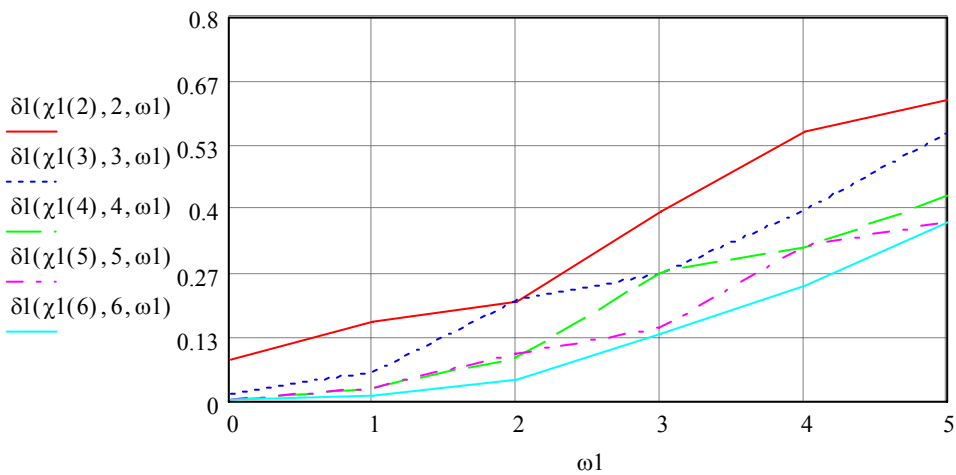
$$\omega_1 := 0..5$$

$$\Delta_t := \frac{1}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot 0.02}{\left| \left( \frac{\omega}{\lambda} \right)^2 - 1 \right|}}$$

$$\chi_1(m_2) := \frac{0.4}{(m_2 + 1) \cdot \Delta_t}$$

$$\chi_1(m_2) =$$

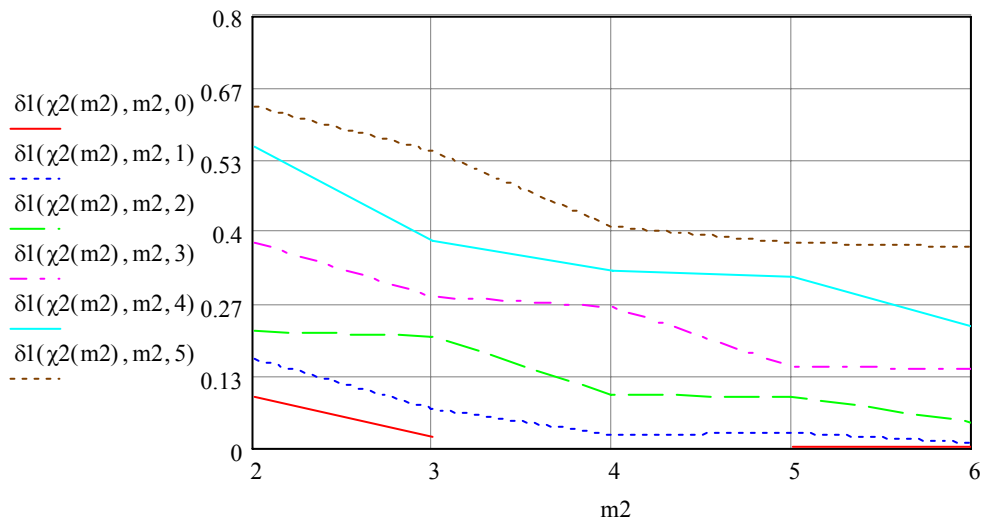
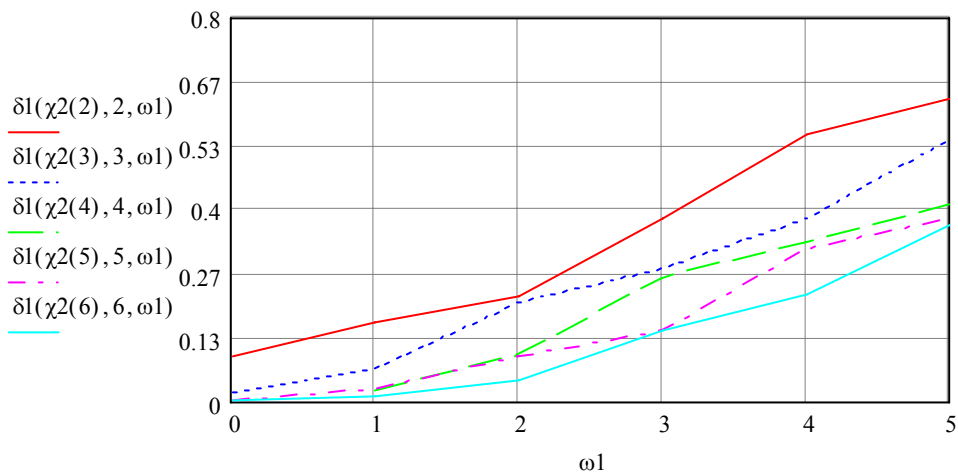
1.633
1.225
0.98
0.816
0.7



$$\chi^2(m_2) := \frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}}{(m_2 + 1)}$$

$$\chi^2(m_2) =$$

1.7
1.275
1.02
0.85
0.728



5. Построить модели корреляционной функции;  $\lambda = 1, \mu = 5, m = 5/10, \chi_1, \chi_2, \chi_{opt}$ .

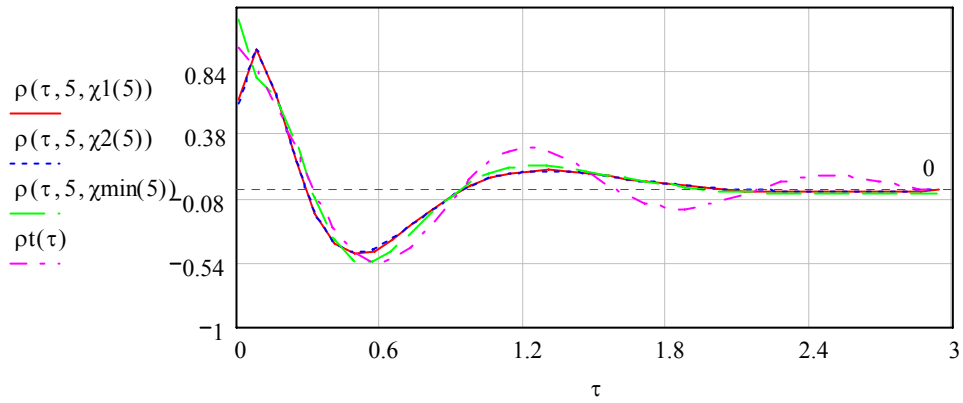
$$\rho(\tau, m, \chi) := \sum_{k=0}^m b_5(k, \chi, \omega) \cdot P_7(k, \tau, \chi)$$

$$\rho_t(\tau) := e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau)$$

$$\Delta\tau := 0.081649$$

$$N_x := 37$$

$$\tau := 0, 0 + \Delta\tau..(N_x - 1) \cdot \Delta\tau$$



$$\delta m(\chi_3) := \delta l(\chi_3, 10, 5)$$

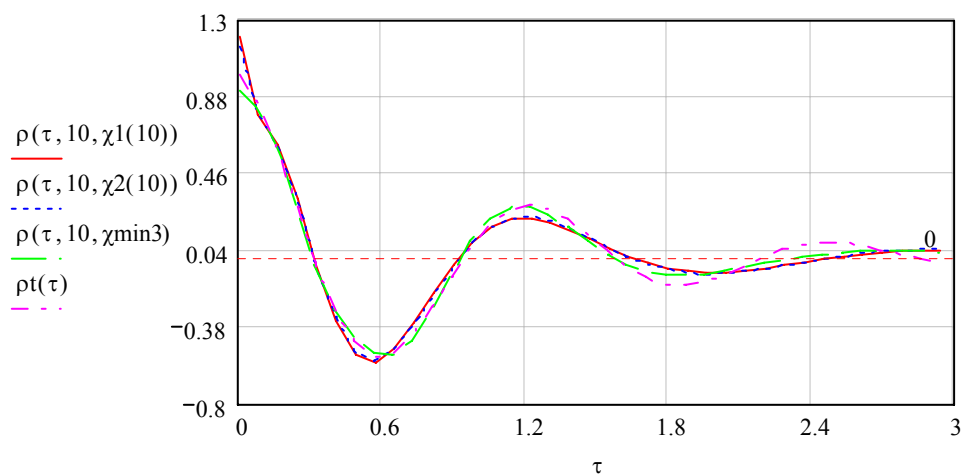
$$\chi_3 := 1$$

Given

$$0.5 < \chi_3 < 2$$

$$\text{Minimize}(\delta m, \chi_3) = 0.75691$$

$$\chi_{\min 3} := \text{Minimize}(\delta m, \chi_3)$$



**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 7. «АППРОКСИМАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ МОЩНОСТИ»**

**Цель работы:** изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации спектральных плотностей мощности случайных процессов ортогональными функциями.

1. Записать выражения, необходимые для дальнейшего расчета в соответствии с заданной ортогональной функцией и выбранным видом корреляционной функции.

$$\lambda := 1$$

$$\omega_0 := 5$$

$$m := 15$$

$$k := 0..m$$

$$\Delta_t := \frac{1}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot 0.02}{\left| \left( \frac{\omega_0}{\lambda} \right)^2 - 1 \right|}}$$

$$\gamma := \frac{0.4}{(m+1) \cdot \Delta_t}$$

$$P7(k, \tau, \gamma) := \sum_{s=0}^k \text{combin}(k, s) \cdot \text{combin}(k+s+1, s+1) \cdot (-1)^s \cdot e^{-(s+1) \cdot \gamma \cdot \tau}$$

$$\beta_5(k, \gamma) := 2\gamma \cdot (k+1) \cdot \int_0^{\infty} P7(k, \tau, \gamma) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau) \, d\tau$$

$$\tau_4 := \frac{2 \cdot \lambda^2 + \omega_0^2}{4 \cdot \lambda \cdot (\lambda^2 + \omega_0^2)}$$

$$\delta(\gamma, m) := \sqrt{1 - \frac{1}{2 \cdot \gamma \cdot \tau_4} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{(\beta_5(k, \gamma))^2}{k+1}}$$

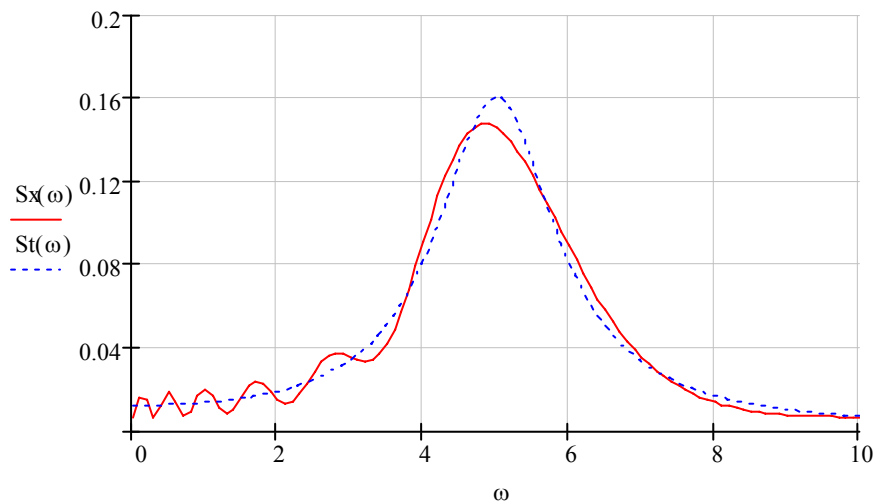
2. Найти модель спектральной плотности мощности по параметрам нормированной корреляционной функции  $\beta_k$ . Проверить условие нормировки.

$$\phi(\omega, k) := \text{atan} \left[ \frac{\omega}{(k+1)\gamma} \right]$$

$$S_X(\omega) := \frac{1}{\gamma \cdot \pi} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{\beta_5(k, \gamma)}{k+1} \cdot \left[ \cos(\phi(\omega, k)) \cdot \cos \left[ \phi(\omega, k) + \begin{cases} 0 & \text{if } k=0 \\ 2 \left( \sum_{s=0}^{k-1} \phi(\omega, s) \right) & \text{otherwise} \end{cases} \right] \right]$$

$$St(\omega) := \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \left[ \frac{1}{[\lambda^2 + (\omega - \omega_0)^2]} + \frac{1}{[\lambda^2 + (\omega + \omega_0)^2]} \right]$$

$$\omega := 0, 0 + 0.1.. 10$$



Проверка условия нормировки модели нормированной корреляционной функции.

$$\sum_{k=0}^m \beta_5(k, \gamma) \cdot (-1)^k = 1.013$$

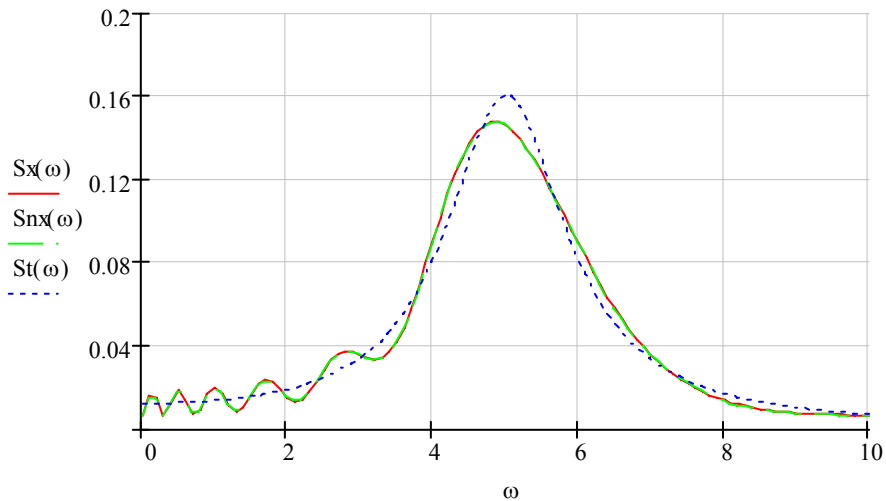
3. Найти модель спектральной плотности мощности по параметрам нормированной корреляционной функции  $b_k$ . Проверить условие нормировки.

$$b_5(k, \gamma) := \beta_5(k, \gamma) + \frac{2 \cdot (-1)^k \cdot (k+1) \cdot \left[ 1 - \sum_{s=0}^m (-1)^s \cdot \beta_5(s, \gamma) \right]}{(m+1) \cdot (m+2)}$$

$$S_{nx}(\omega) := \frac{1}{\gamma \cdot \pi} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{b_5(k, \gamma)}{k+1} \cdot \cos(\phi(\omega, k)) \cdot \cos \left[ \phi(\omega, k) + \begin{cases} 0 & \text{if } k=0 \\ 2 \left( \sum_{s=0}^{k-1} \phi(\omega, s) \right) & \text{otherwise} \end{cases} \right]$$

$$St(\omega) := \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \left[ \frac{1}{\left[ \lambda^2 + (\omega - \omega_0)^2 \right]} + \frac{1}{\left[ \lambda^2 + (\omega + \omega_0)^2 \right]} \right]$$

$\omega := 0, 0 + 0.1.. 10$



Проверка условия нормировки модели нормированной корреляционной функции.

$$\sum_{k=0}^m b_5(k, \gamma) \cdot (-1)^k = 1$$

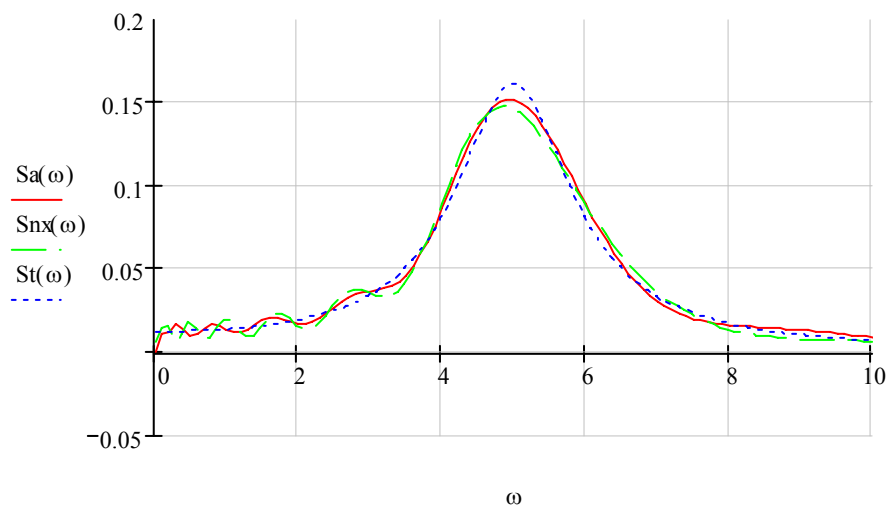


4. Для той же модели спектральной плотности мощности найти корректирующие коэффициенты  $\zeta_k$ . Построить ортогональную модель спектральной плотности мощности. Проверить условие нормировки.

$$\beta_{5s}(k, \gamma) := 2\gamma \cdot (k + 1) \cdot \int_0^{\infty} P7(k, \omega, \gamma) \cdot St(\omega) d\omega$$

$$c5(k, \gamma) := \beta_{5s}(k, \gamma) + \frac{\frac{\gamma}{2} - \sum_{s=0}^m \frac{\beta_{5s}(s, \gamma)}{s+1}}{\sum_{s=0}^m \frac{1}{s+1}}$$

$$Sa(\omega) := \sum_{k=0}^m c5(k, \gamma) \cdot P7(k, \omega, \gamma)$$



Проверка условия нормировки модели спектральной плотности мощности.

$$2 \cdot \sum_{k=0}^m \frac{c5(k, \gamma)}{2\gamma \cdot (k + 1)} = 0.5$$

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 8. «АППРОКСИМАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ»

**Цель работы:** изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации спектральных функций случайных процессов ортогональными функциями.

1. Записать выражения, необходимые для дальнейшего расчета в соответствии с заданной ортогональной функцией и выбранным видом корреляционной функции.

$$\lambda := 1$$

$$\omega_0 := 5$$

$$m := 15$$

$$k := 0..m$$

$$\gamma := 0.30615$$

$$P7(k, \tau, \gamma) := \sum_{s=0}^k \text{combin}(k, s) \cdot \text{combin}(k + s + 1, s + 1) \cdot (-1)^s \cdot e^{-(s+1) \cdot \gamma \cdot \tau}$$

$$\beta5(k) := 2\gamma \cdot (k + 1) \cdot \int_0^{\infty} P7(k, \tau, \gamma) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau) \, d\tau$$

$$b5(k) := \beta5(k) + \frac{2 \cdot (-1)^k \cdot (k + 1) \cdot \left[ 1 - \sum_{s=0}^m (-1)^s \cdot \beta5(s) \right]}{(m + 1) \cdot (m + 2)}$$

2. Построить спектральную функцию и ее ортогональную модель.

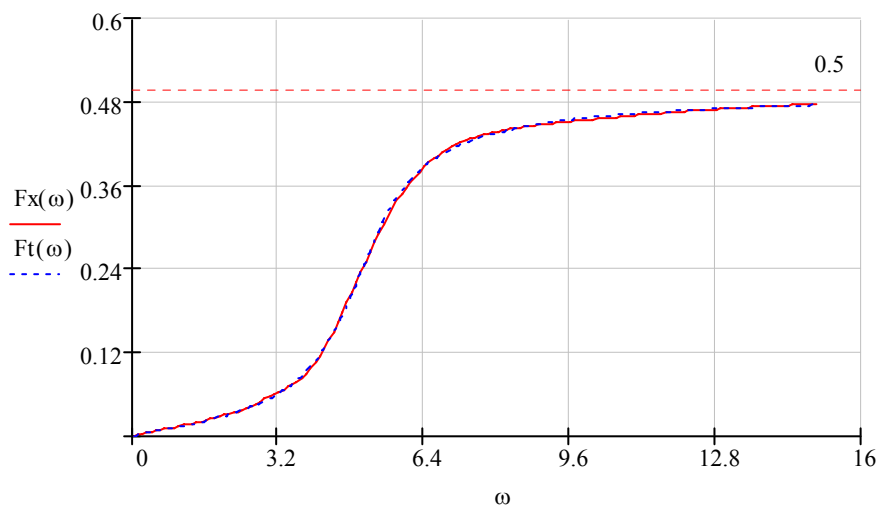
$$\phi1(\omega) := \text{atan}\left(\frac{\omega + \omega_0}{\lambda}\right)$$

$$\phi2(\omega) := \text{atan}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\lambda}\right)$$

$$F_X(\omega) := \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^m b_5(k) \cdot \sum_{s=0}^k \text{combin}(k, s) \cdot \text{combin}(k + s + 1, s + 1) \cdot (-1)^s \cdot \text{atan} \left[ \frac{\omega}{\gamma \cdot (s + 1)} \right]$$

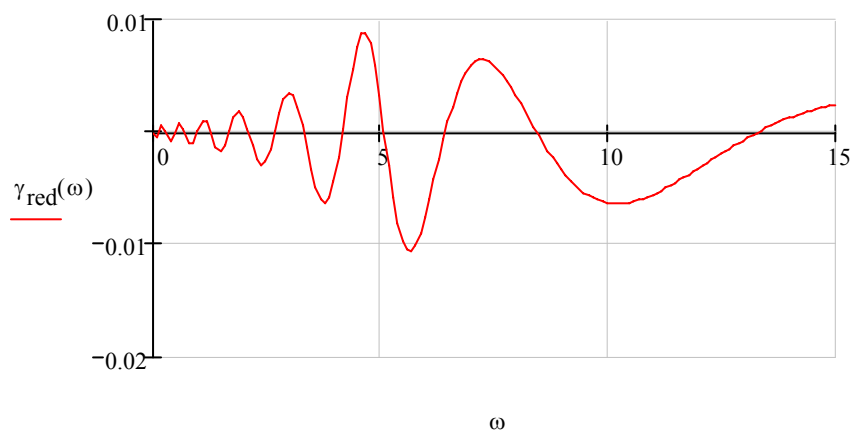
$$F_t(\omega) := \frac{1}{2\pi} \cdot (\phi_1(\omega) + \phi_2(\omega))$$

$$\omega := 0, 0 + 0.1.. 15$$



3. Найти приведенную погрешность определения спектральной функции ее ортогональной моделью. Построить график.

$$\gamma_{\text{red}}(\omega) := \frac{F_X(\omega) - F_t(\omega)}{0.5}$$



**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 9. «АППРОКСИМАТИВНЫЙ АНАЛИЗ  
ОБОБЩЕННЫХ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК»**

**Цель работы:** изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимативном анализе корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов ортогональными функциями.

1. Записать выражения, необходимые для дальнейшего расчета в соответствии с заданной ортогональной функцией и выбранным видом корреляционной функции, выражения для оценки интервалов корреляции.

$$\lambda := 1$$

$$\omega_0 := 5$$

$$m := 17$$

$$\Delta_t := \frac{1}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot 0.02}{\left| \left( \frac{\omega_0}{\lambda} \right)^2 - 1 \right|}}$$

$$k := 0..m \quad \gamma := \frac{0.4}{(m+1) \cdot \Delta_t} \quad \gamma = 0.272$$

$$P7(k, \tau, \gamma) := \sum_{s=0}^k \left[ \text{combin}(k, s) \cdot \text{combin}(k+s+1, s+1) \cdot (-1)^s \cdot e^{-(s+1) \cdot \gamma \cdot \tau} \right]$$

$$\beta_5(k) := 2\gamma \cdot (k+1) \cdot \int_0^{\infty} P7(k, \tau, \gamma) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau) \, d\tau$$

$$b_5(k) := \beta_5(k) + \frac{2 \cdot (-1)^k \cdot (k+1) \cdot \left[ 1 - \sum_{s=0}^m [(-1)^s \cdot \beta_5(s)] \right]}{(m+1) \cdot (m+2)}$$

$$\tau_{20.k} := \frac{1}{\gamma} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{b_5(k)}{k+1}$$

$$\tau_{40.k} := \frac{1}{2\gamma} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{b_5(k)^2}{k+1}$$

2. Определить относительные погрешности оценки интервалов корреляции.

$$\tau_{2k} := \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega_0^2} \qquad \tau_{4k} := \frac{2\lambda^2 + \omega_0^2}{4\lambda(\lambda^2 + \omega_0^2)}$$

$$\gamma_{cm}^1 := \frac{\tau_{20k} - \tau_{2k}}{\tau_{2k}} \qquad \gamma_{cm}^2 := \frac{\tau_{40k} - \tau_{4k}}{\tau_{4k}}$$

$$\gamma_{cm}^1 = 0.172$$

$$\gamma_{cm}^2 = -0.014$$

3. Для заданной модели спектральной плотности мощности с использованием параметров модели корреляционной функции определить эквивалентную ширину спектра мощности по аналитическим выражениям и по параметрам ортогональной модели корреляционной функции.

$$\omega_e := \sqrt{\left(2 \cdot \omega_0 \cdot \sqrt{\omega_0^2 + \lambda^2}\right) - \omega_0^2 - \lambda^2}$$

$$\omega_e = 4.999$$

$$\Delta\omega_e := \omega_e + \frac{\pi \cdot \left[\lambda^2 + (\omega_e - \omega_0)^2\right] \cdot \left[\lambda^2 + (\omega_e + \omega_0)^2\right]}{4\lambda \cdot (\lambda^2 + \omega_e^2 + \omega_0^2)}$$

$$\Delta\omega_e = 6.554$$

$$\phi(\omega, k) := \operatorname{atan} \left[ \frac{\omega}{(k+1)\gamma} \right]$$

$$S_X(\omega) := \frac{1}{\gamma \cdot \pi} \cdot \sum_{k=0}^m \left[ \frac{b_5(k)}{k+1} \cdot \cos(\phi(\omega, k)) \cdot \cos \left[ \phi(\omega, k) + \begin{cases} 0 & \text{if } k=0 \\ 2 \left( \sum_{s=0}^{k-1} \phi(\omega, s) \right) & \text{otherwise} \end{cases} \right] \right]$$

$$\omega_0_e := 4.996$$

$$\Delta\omega_0_e := \omega_0_e + \frac{1}{\text{Sx}(\omega_0_e)} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^m \left[ b_5(k) \cdot (-1)^k - \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{s=0}^k \left[ \text{combin}(k, s) \cdot \text{combin}(k + s + 1, s + 1) \cdot (-1)^s \cdot \text{atan} \left[ \frac{\omega_0_e}{(s + 1)\gamma} \right] \right] \right] \right]$$

$$\Delta\omega_0_e = 6.809$$

4. Определить относительные погрешности оценки эквивалентной ширины спектра мощности по параметрам модели корреляционной функции.

$$\gamma_{3\text{cm}}^3 := \frac{\Delta\omega_0_e - \Delta\omega_e}{\Delta\omega_e}$$

$$\gamma_{3\text{cm}} = 0.039$$

5. Построить ортогональную модель спектральной плотности мощности и найти корректирующие коэффициенты  $\zeta_k$ . Определить эквивалентную ширину спектра мощности по параметрам модели спектра мощности.

$$\text{St}(\omega) := \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \left[ \frac{1}{\lambda^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{\lambda^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]$$

$$\beta_5(s) := 2\gamma \cdot (k + 1) \cdot \int_0^\infty P_7(k, \omega, \gamma) \cdot \text{St}(\omega) \, d\omega$$

$$c_5(k) := \beta_5(k) + \frac{\frac{\gamma}{2} - \sum_{s=0}^m \frac{\beta_5(s)}{s + 1}}{\sum_{s=0}^m \frac{1}{s + 1}}$$

$$Sa(\omega) := \sum_{k=0}^m (c5(k) \cdot P7(k, \omega, \gamma))$$

$$\omega01_e := 4.999$$

$$\Delta\omega01_e := \omega01_e + \frac{\int_{4.999}^{30} Sa(\omega) d\omega}{Sa(4.999)}$$

$$\Delta\omega01_e = 6.712$$

6. Определить относительные погрешности оценки эквивалентной ширины спектра мощности по параметрам ортогональной модели спектральной плотности мощности.

$$\gamma_{cm}^4 := \frac{\Delta\omega01_e - \Delta\omega_e}{\Delta\omega_e}$$

$$\gamma_{cm}^4 = 0.024$$

АЛГОРИТМЫ РЕКУРСИВНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Вид модели	Генерирующий алгоритм	Параметры алгоритма
1	2	3
$e^{-\lambda \tau }$	$y_0 = x_0$ $y_n = a_0 x_n + b_1 y_{n-1}$	$\gamma = \lambda \Delta t$ ; $p = e^{-\gamma}$ ; $a_0 = \sqrt{1-p^2}$ ; $b_1 = p$
$e^{-\lambda \tau }(1 + \lambda \tau )$	$y_0 = x_0$ $y_1 = a_0 x_1 +$ $+ a_1 x_0 +$ $+ b_1 y_0$	$\gamma = \lambda \Delta t$ ; $p = e^{-\gamma}$ ; $\alpha_0 = p^3(1+\gamma) - p(1-\gamma)$ ; $\alpha_1 = 1 - 4p^2\gamma - p^4$ ; $a_0 = \sqrt{\frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2}}{2}}$ ; $a_1 = \frac{\alpha_1}{a_0}$ ; $b_1 = 2p$ ; $b_2 = -p^2$
$e^{-\lambda \tau }(1 - \lambda \tau )$	$y_n = a_0 x_n +$ $+ a_1 x_{n-1} +$ $+ b_1 y_{n-1} +$ $+ b_2 y_{n-2}$	$\gamma = \lambda \Delta t$ ; $p = e^{-\gamma}$ ; $\alpha_0 = p^3(1-\gamma) - p(1+\gamma)$ ; $\alpha_1 = 1 + 4p^2\gamma - p^4$ ; $a_0 = \sqrt{\frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2}}{2}}$ ; $a_1 = \frac{\alpha_0}{a_0}$ ; $b_1 = 2p$ ; $b_2 = -p^2$
$e^{-\lambda \tau }\left(1 + \lambda \tau  + \frac{\lambda^2 \tau^2}{3}\right)$	$y_0 = x_0$ $y_1 = a_0 x_1 +$ $+ b_1 y_0$ $y_2 = a_0 x_2 +$ $+ a_1 x_1 +$ $+ a_2 x_0 +$ $+ b_1 y_1 +$ $+ b_2 y_0$ $y_n = a_0 x_n +$ $+ a_1 x_{n-1} +$ $+ a_2 x_{n-2} +$ $+ b_1 y_{n-1} +$ $+ b_2 y_{n-2} +$ $+ b_3 y_{n-3}$	$\gamma = \lambda \Delta t$ ; $p = e^{-\gamma}$ ; $\alpha_0 = p^4(\gamma^2/3 + \gamma + 1) - p^2(\gamma^2/3 - \gamma + 1)$ ; $\alpha_1 = p^5(\gamma^2/3 - \gamma - 2) - 6\gamma p^3 - p(\gamma^2/3 + \gamma - 2)$ ; $\alpha_2 = p^6 - p^4(2\gamma^2 - 6\gamma - 3) + p^2(2\gamma^2 + 6\gamma - 3) - 1$ ; $y_{1,2} = \frac{-\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2 + 8\alpha_0^2}}{2\alpha_0}$ ; $a_0 = \sqrt{-\alpha_0 \frac{(y_1 + \sqrt{y_1^2 - 4})(y_2 + \sqrt{y_2^2 - 4})}{2}}$ ; $a_2 = \sqrt{-\alpha_0 \frac{2}{(y_1 + \sqrt{y_1^2 - 4})(y_2 + \sqrt{y_2^2 - 4})}}$ ; $a_1 = -\alpha_2 (y_1 + \sqrt{y_1^2 - 4})(y_2 + \sqrt{y_2^2 - 4})$ ; $b_1 = 3p$ ; $b_2 = -3p^2$ ; $b_3 = p^3$
$e^{-\lambda \tau } \cos \omega_0 \tau$	$y_0 = x_0$ $y_1 = a_0 x_1 +$ $+ a_1 x_0 +$ $+ b_1 y_0$	$\gamma = \lambda \Delta t$ ; $p = e^{-\gamma}$ ; $\gamma_0 = \omega_0 \Delta t$ ; $\alpha_0 = p(p^2 - 1)\cos \gamma_0$ ; $\alpha_1 = 1 - p^4$ ; $a_0 = \sqrt{\frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2}}{2}}$ ; $a_1 = \frac{\alpha_0}{a_0}$ ; $b_1 = 2p \cos \gamma_0$ ; $b_2 = -p^2$



1	2	3
$e^{-\lambda \tau } \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau  \right)$	$y_n = a_0 x_n +$ $+ a_1 x_{n-1} +$ $+ b_1 y_{n-1} +$ $+ b_2 y_{n-2}$	$\gamma = \lambda \Delta t; p = e^{-\gamma}; \gamma_0 = \omega_0 \Delta t;$ $\alpha_0 = p(p^2 - 1) \cos \gamma_0 + \frac{\lambda}{\omega_0} p(p^2 + 1) \sin \gamma_0;$ $\alpha_1 = 1 - p^4 - 4p^2 \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \gamma_0 \cos \gamma_0;$ $a_0 = \sqrt{\frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2}}{2}}; a_1 = \frac{\alpha_0}{a_0};$ $b_1 = 2p \cos \gamma_0; b_2 = -p^2$
$e^{-\lambda \tau } \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau  \right)$		$\gamma = \lambda \Delta t; p = e^{-\gamma}; \gamma_0 = \omega_0 \Delta t;$ $\alpha_0 = p(p^2 - 1) \cos \gamma_0 - \frac{\lambda}{\omega_0} p(p^2 + 1) \sin \gamma_0;$ $\alpha_1 = 1 - p^4 + 4p^2 \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \gamma_0 \cos \gamma_0;$ $a_0 = \sqrt{\frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2}}{2}}; a_1 = \frac{\alpha_0}{a_0};$ $b_1 = 2p \cos \gamma_0; b_2 = -p^2$

## АИС КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА В ОРТОГОНАЛЬНЫХ БАЗИСАХ

При проектировании разработанной автоматизированной системы был использован язык UML – унифицированный язык моделирования [15].

Этот язык позволит использовать объектно-ориентированные понятия уже на этапе моделирования, явным образом обеспечить взаимосвязь между базовыми понятиями для моделей концептуального и физического уровней и обеспечить масштабируемость модели. К тому же он понятен аналитикам и программистам и поддерживается практически всеми современными инструментальными средствами.

При проектировании системы использовалась среда разработки Rational Rose 2000e [15], которая базируется на унифицированном языке моделирования UML.

В качестве инструментального средства разработки был выбран объектно-ориентированный язык программирования Delphi (в 1 - 6 версиях среды разработки Delphi язык называется Object Pascal, однако в 7 версии он переименован в Delphi) и среда разработки приложений Borland Delphi v 7.0. Такой выбор можно аргументировать наличием ряда свойств у среды разработки (IDE – Integrated Development Environment – интегрированная среда разработки), позволяющих сделать процесс создания приложения сравнительно быстрым, обладающим малой трудоемкостью и удобством в создании интерфейсной части.

На рисунках П 17.1 – П 17.2 приведены диаграммы вариантов использования «Аппроксимативный анализ ВКФ» и «Аппроксимативный анализ СПМ» и соответствующие им диаграммы деятельности (см. рисунки П 17.3 – П 17.4), а также диаграмма классов всей системы, представленная на рисунке П 17.5.

В качестве основного подхода к реализации системы, целесообразного с точки зрения современных средств программирования, был принят объектно-ориентированный подход.

На рисунке П 17.6 представлена структурная схема разработанной автоматизированной системы, где цифровыми эквивалентами указаны соответствующие ей подсистемы:

1. Подсистема генерации источника случайного процесса;
2. Подсистема настройки оптимальных параметров;
3. Подсистема фильтрации;
4. Подсистема формирования взаимной корреляционной функции;
5. Подсистема аппроксимации взаимной корреляционной функции;
6. Подсистема построения модели спектральной плотности мощности;
7. Подсистема построения модели спектральной функции;
8. Подсистема аппроксимации спектральной плотности мощности;
9. Подсистема восстановления взаимной корреляционной функции;
10. Подсистема построения корреляционных функций специального вида;
11. Подсистема исследования ортогональных полиномов и функций;
12. Подсистема имитационного моделирования;
13. Подсистема ввода-вывода;
14. Подсистема экспорта данных в MS Word;
15. Подсистема экспорта данных в MS Excel.

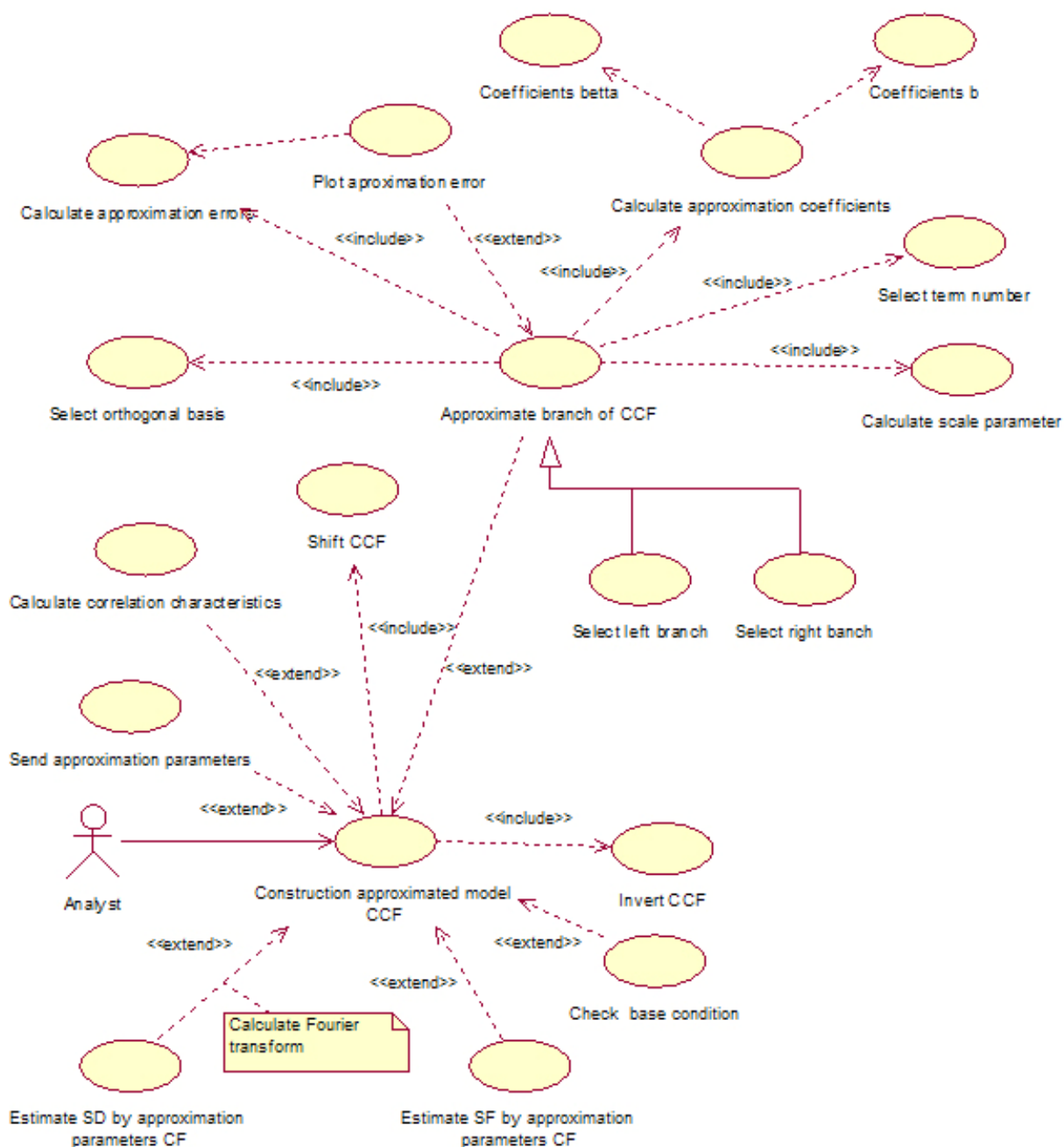


Рисунок П 17.1 – Диаграмма вариантов использования «Аппроксимативный анализ ВКФ»

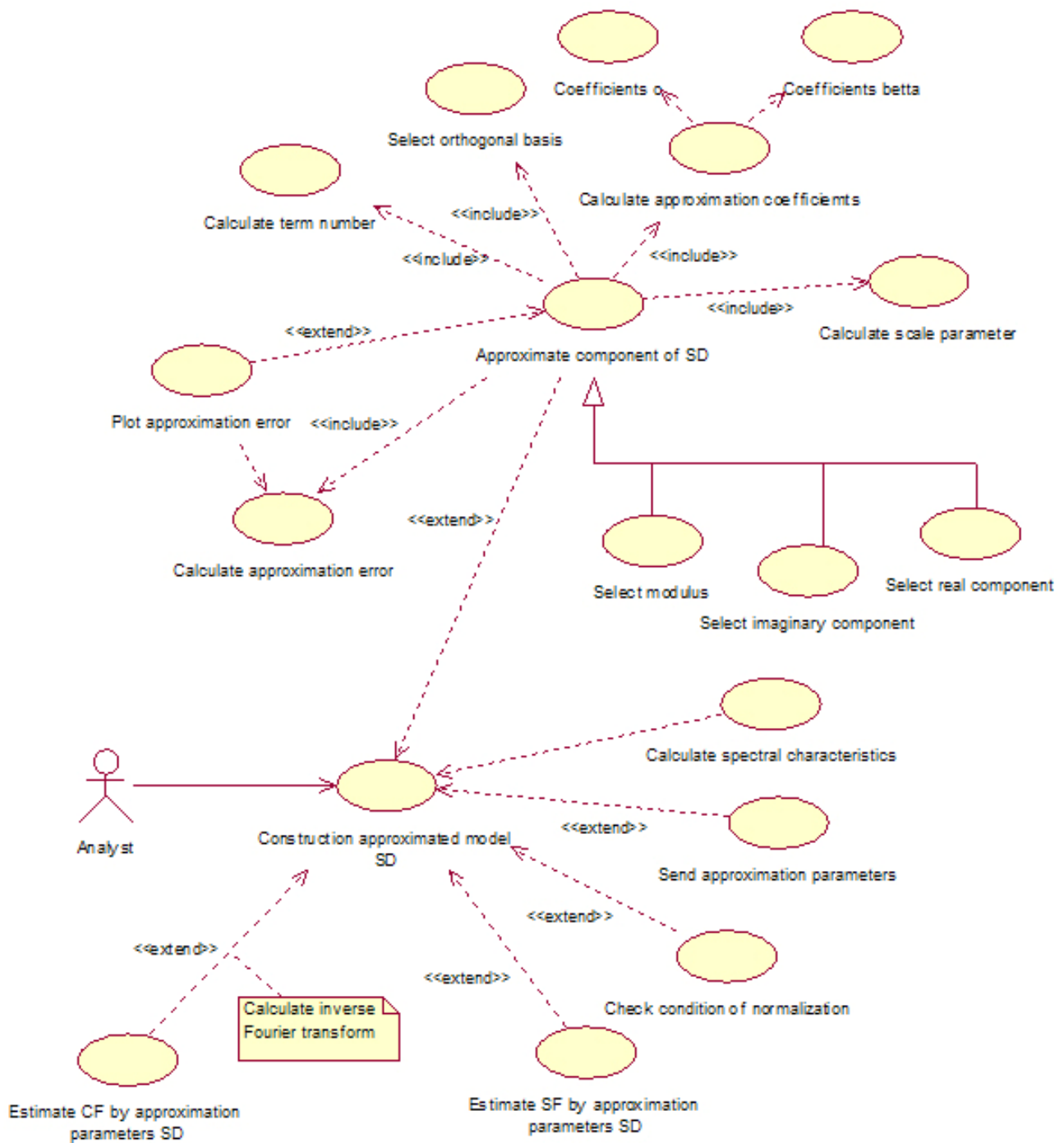


Рисунок П 17.2 – Диаграмма вариантов использования «Аппроксимативный анализ СПМ»

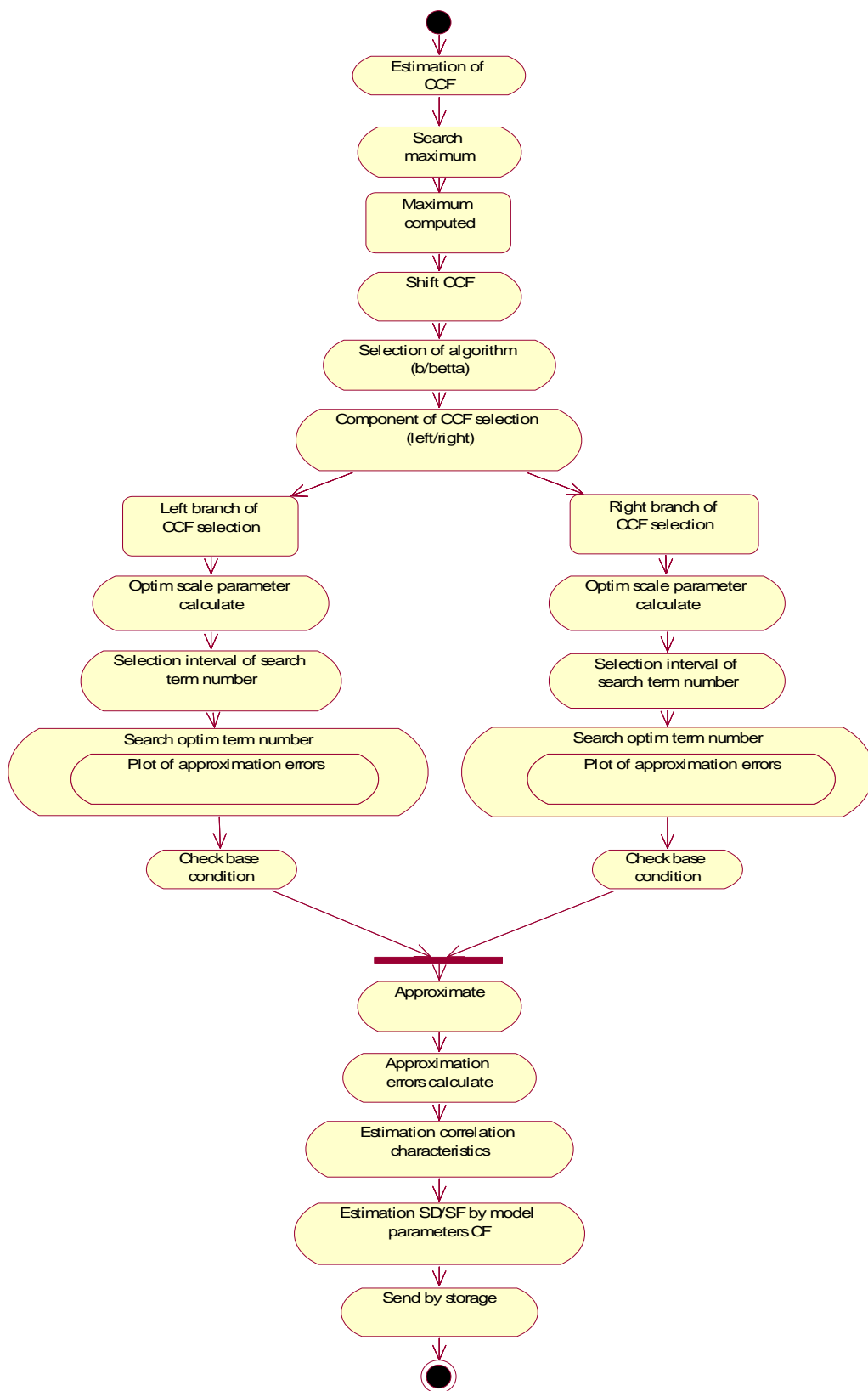


Рисунок П 17.3 – Диаграмма деятельности «Аппроксимация ВКФ»

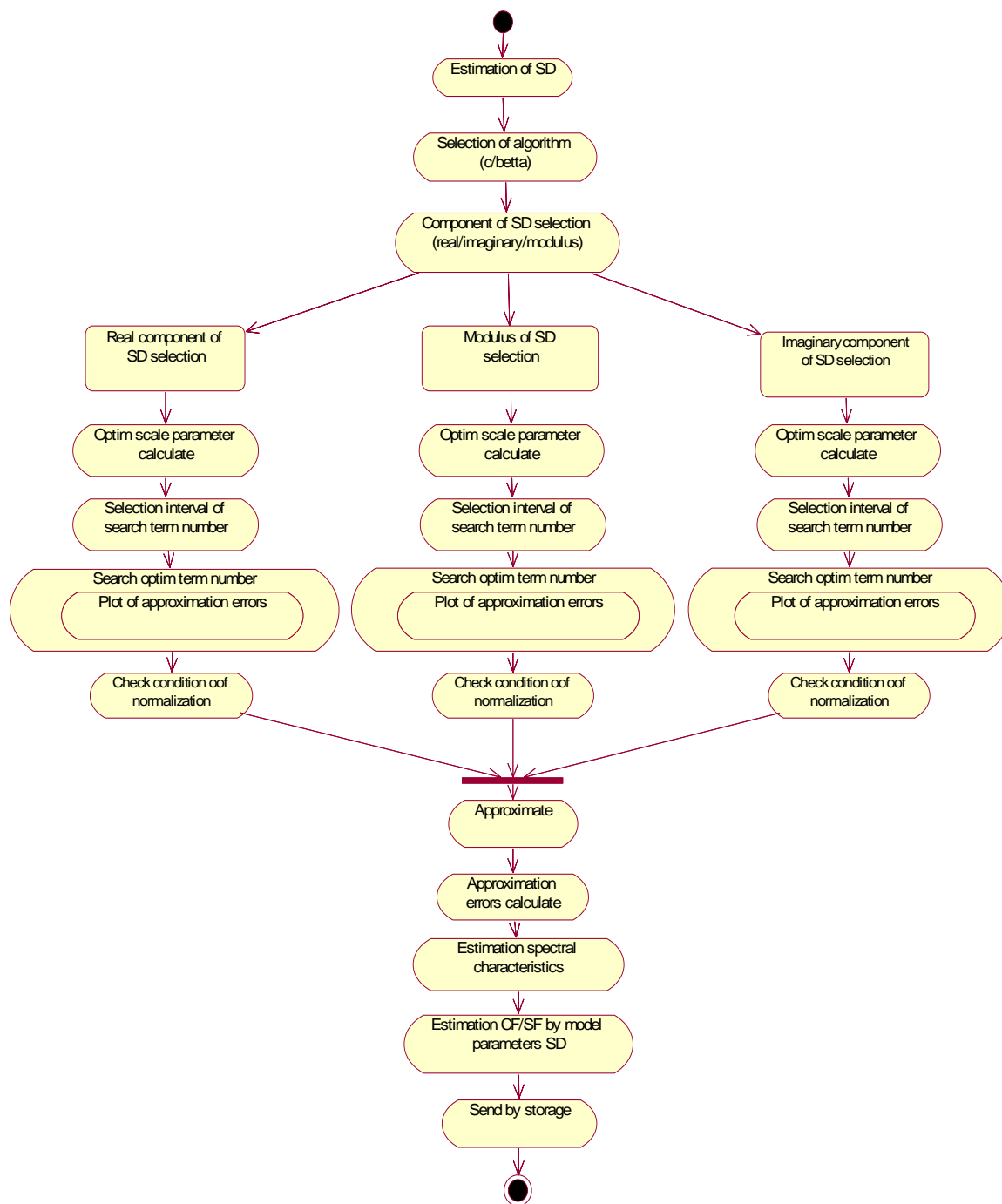


Рисунок П 17.4 – Диаграмма деятельности «Аппроксимация СПМ»

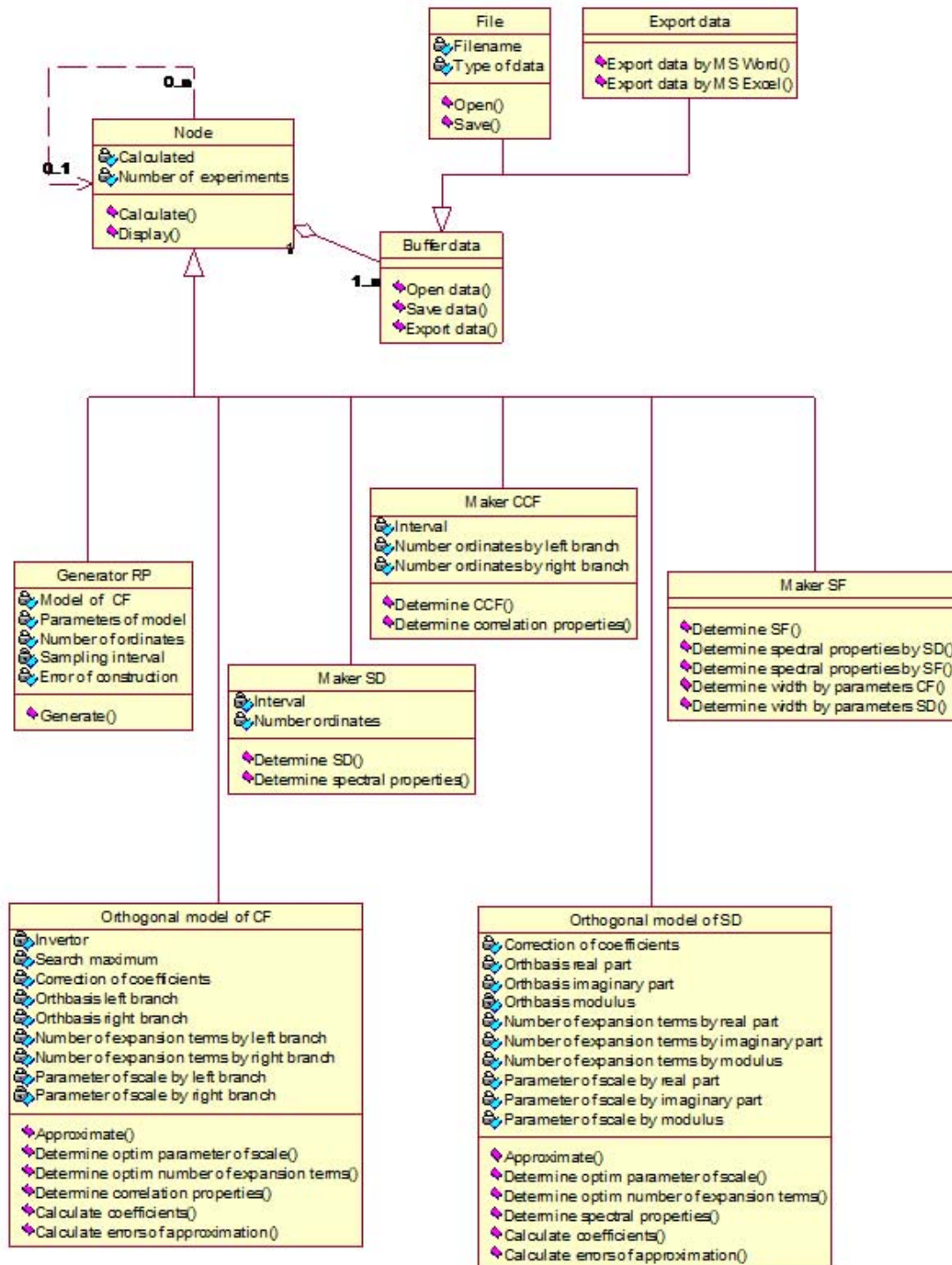


Рисунок П 17.5 – Диаграмма классов автоматизированной системы

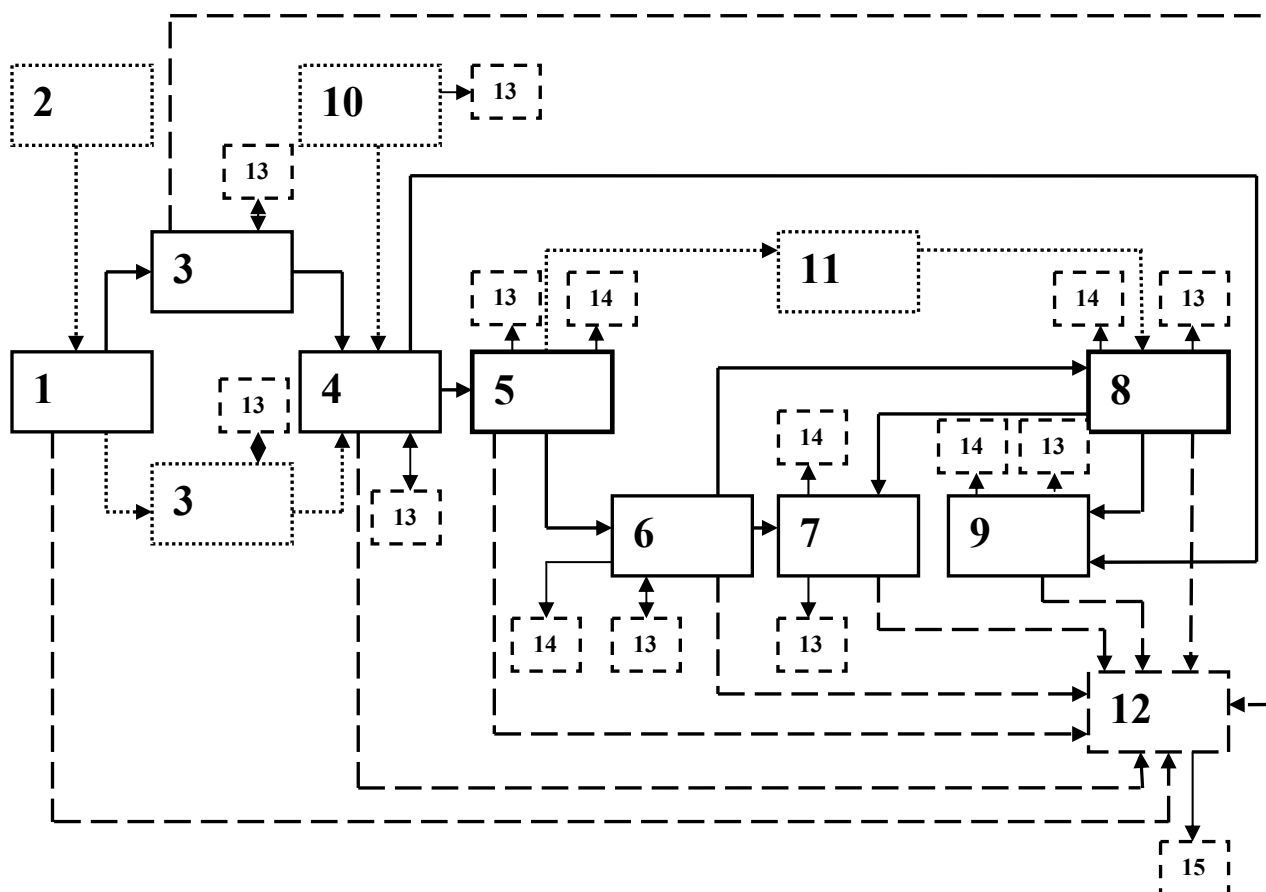


Рисунок П 17.6 – Структурная схема автоматизированной системы

**Подсистема генерации источника случайного процесса** предназначена либо для моделирования исходного случайного процесса – «Белого шума», либо процесса с заданным видом корреляционной функции по алгоритмам рекурсивной фильтрации [21]. Подсистема позволяет также исследовать основные характеристики случайного процесса: математическое ожидание, дисперсию, коэффициент асимметрии и коэффициент эксцесса. По полученному процессу строится корреляционная функция и фазовый портрет. Для проверки качества генерирования имеется возможность наложения теоретической кривой с нахождением соответствующих погрешностей: квадратической, средней квадратической и максимальной.

**Подсистема настройки оптимальных параметров** позволяет определить рекомендуемые значения интервала дискретизации и числа ординат восстановления корреляционной функции при моделировании случайного процесса с заданным видом корреляционной функции. Данная подсистема не является обязательной (на рисунке обозначена штриховой линией).

**Подсистема фильтрации** позволяет получить два процесса с заданным видом корреляционной функции в случае взаимной корреляционной функции и один процесс в случае автокорреляционной функции (второй процесс дублируется) (см. рисунок П 17.6). Если при генерации случайных процессов использовать подсистему 2, то в данной подсистеме выбраны функции и оптимальные параметры данных функций. В противном случае все необходимые настройки можно произвести в данной подсистеме. Также провести исследование основных характеристик моделируемого случайного процесса. Для проверки качества генерирования имеется возможность наложения теоретической кривой.



**Подсистема формирования взаимной корреляционной функции** позволяет построить взаимную корреляционную функцию (либо автокорреляционную функцию). При этом пара процессов, поступающих из подсистемы фильтрации, центрируется и нормируется. Для проверки качества генерирования также имеется возможность наложения теоретической кривой.

**Подсистема аппроксимации взаимной корреляционной функции** является одной из двух основных в разработанной автоматизированной системе (на рисунке обозначена жирной линией). Подсистема предназначена для аппроксимации взаимной корреляционной функции ортогональными функциями из семейств Якоби и Сонина-Лагерра. Всего имеется набор из восьми ортогональных функций с различными параметрами ортогональных базисов: Якоби (-0,5, 0); Якоби (0,5, 0); Якоби (0, 0) (Лежандра); Якоби (1, 0); Якоби (2, 0); Сонина-Лагерра (0) (Лагерра); Сонина-Лагерра (1); Сонина-Лагерра (2).

Помимо выбора ортогонального базиса можно произвести расчет оптимальных параметров аппроксимации в соответствии с минимумом квадратической погрешности аппроксимации. К параметрам аппроксимации относятся коэффициенты разложения Фурье, параметр масштаба, число членов разложения ряда. Методика аппроксимации корреляционных функций с помощью ортогональных разложений описана в работе [21]. По построенной модели определяются обобщенные корреляционные характеристики.

**Подсистема построения модели спектральной плотности мощности** предназначена для построения взаимной спектральной плотности мощности и ее составляющих: реальная компонента, мнимая компонента, фаза и модуль спектральной плотности мощности – по параметрам аппроксимативной модели взаимной корреляционной функции. По построенному спектру определяются обобщенные спектральные характеристики. Для проверки качества аппроксимации имеется возможность наложения теоретической кривой.

**Подсистема построения модели спектральной функции** предназначена для построения спектральной функции по параметрам модели корреляционной функции и спектральной плотности мощности, а также исследования обобщенных спектральных характеристик.

**Подсистема аппроксимации спектральной плотности мощности** является второй из двух основных. Подсистема предназначена для аппроксимации выбранной компоненты спектральной плотности мощности (действительной или мнимой). Набор ортогональных функций аналогичен тому, что описан в подсистеме 5. Методика аппроксимации спектральных плотностей мощности с помощью ортогональных разложений описана в работе [21].

**Подсистема восстановления взаимной корреляционной функции** предназначена для восстановления взаимной корреляционной (автокорреляционной) функции по параметрам моделей действительной и мнимой частей спектральной плотности мощности. Имеется возможность наложения как теоретической кривой, если исходная корреляционная функция была сгенерирована, так и взаимной корреляционной функции из подсистемы 4.

**Подсистема построения корреляционных функций специального вида** позволяет построить корреляционные функции идеального белого шума и идеального полосового шума, которые физически сложно реализуемы, с заданием входных параметров. Передав построенную функцию на подсистему 4, можно изучить ее корреляционно-спектральные характеристики.

**Подсистема исследования ортогональных полиномов и функций** предназначена для построения ортогональных полиномов и функции, исследования их поведения на выбранном сегменте ортогональности и общих свойств [21].

**Подсистема имитационного моделирования** позволяет проводить имитационное моделирование и провести анализ разработанных алгоритмов корреляционно-спектрального анализа на адекватность и пригодность при обработке экспериментальных данных. Следует заметить, что данная подсистема связана с подсистемами, соответствующими цифровым эквивалентам 1, 3 – 12 (см. рисунок П 17.6), из которых экспортируются данные для последующей обработки. Данная подсистема содержит результаты моделирования в виде отчета, а исходные параметры для моделирования можно выбрать в подсистемах, указанных выше.

**Подсистема ввода-вывода** предназначена для открытия из файла и сохранения в файл определенного формата выбранной функциональной зависимости и ее характеристик.

**Подсистема экспорта данных в MS Word** предназначена для формирования отчетов определенной структуры из активной в данный момент подсистемы в текстовый редактор, для их последующего редактирования либо печати.

**Подсистема экспорта данных в MS Excel** позволяет выгружать результаты имитационного моделирования из аналогичной подсистемы в MS Excel для последующего анализа.

## РУКОВОДСТВО ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ

Основные функции, выполняемые разработанной системой:

- Генерирование случайного процесса с заданным видом корреляционной функции;
- Построение корреляционной функции и фазового портрета по исходному процессу;
- Построение взаимной корреляционной функции и фазового портрета по паре процессов;
- Аппроксимация взаимной корреляционной функции ортогональными функциями;
- Оценка спектральной плотности мощности и ее составляющих по параметрам аппроксимирующего выражения;
- Аппроксимация составляющих спектральной плотности мощности (действительная и мнимая части, модуль);
- Оценка КФ по параметрам модели спектральной плотности мощности;
- Оценка спектральной функции по параметрам модели корреляционной функции и спектральной плотности мощности;
- Построение корреляционных функций идеального белого шума и идеального низкочастотного шума;
- Оценка обобщенных корреляционно-спектральных характеристик;
- Исследование ортогональных полиномов, функций и их свойств;
- Проведение экспериментов с помощью имитационного моделирования.

Для начала работы программы необходимо запустить файл CSA.exe. На экране появится форма, изображенная на рисунке П 18.1.

Экранную форму можно условно разбить на блоки:

1. Панель кнопок, при нажатии на которые выполняются определенные действия. В зависимости от выбранной закладки (подсистемы) на панели высвечиваются доступные для заданной подсистемы кнопки.

2. Панель-блокнот, позволяющая при работе с автоматизированной системой, не имея под рукой необходимых средств, записать требуемую информацию либо делать заметки.

3. Панель навигации, предназначенная для удобства работы с автоматизированной системой. Предоставляет возможность производить навигацию не только по закладкам, на которых организована система, но и по дереву, имеющему логическую структуру, разработанную на основании структурной схемы системы, и по списку, являющаяся упрощенной схемой навигации по дереву и имеющая идентичную логическую структуру.

4. Панель состояния, предназначенная для отображения этапа и процента выполнения решаемой задачи.

5. Панель расположения подсистем в виде закладок. При выборе подсистемы можно пользоваться как панелью навигации, так и непосредственным переходом по закладкам. На каждой закладке располагаются те кнопки, которые в данный момент активны на панели кнопок, а также компоненты ввода-вывода параметров и отображение результатов работы подсистемы.

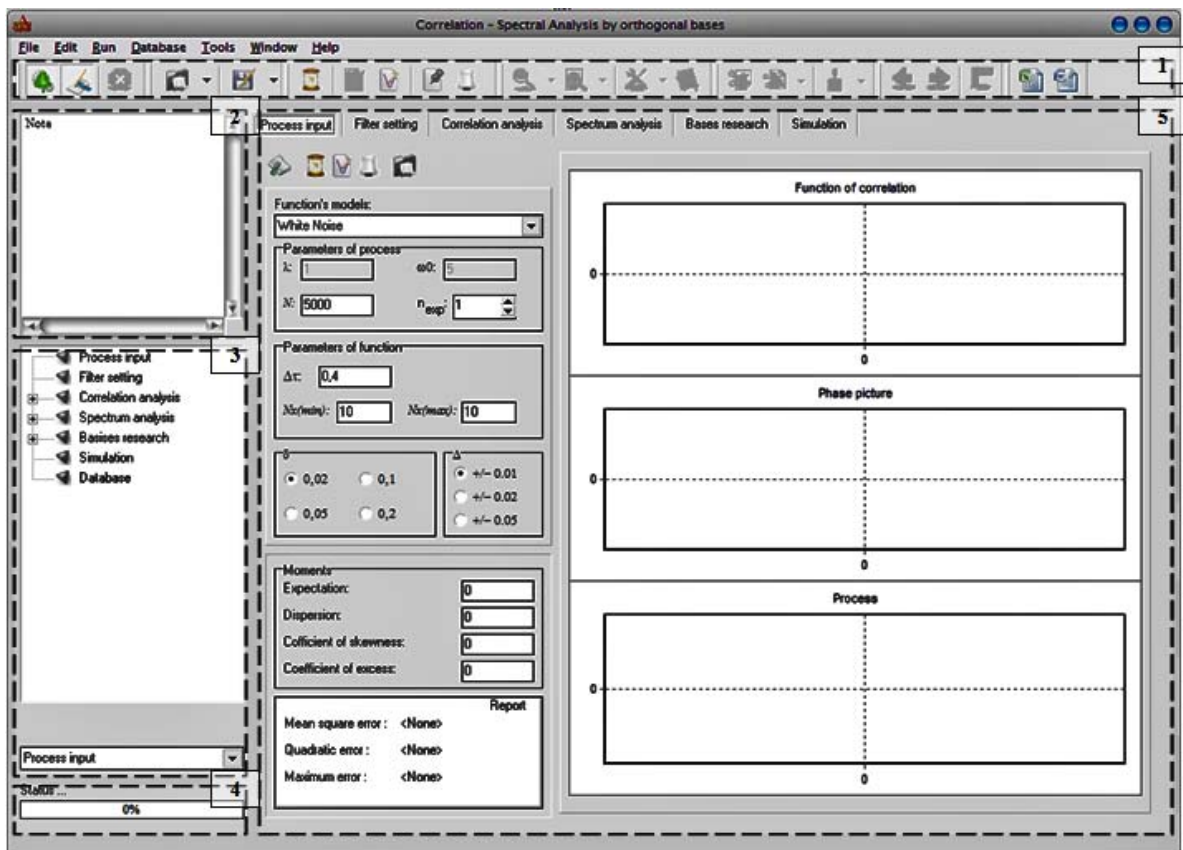






Рисунок П 18.1 – Вид экранной формы начала работы


Представим описание кнопок и действий, которые могут производиться при нажатии на соответствующие кнопки (панель кнопок):


 - кнопка, имеющая два состояния: в активном (нажатом) состоянии панель навигации и панель состояния отображены; в неактивном (отжатом) состоянии указанные панели не отображаются;


 - кнопка, имеющая два состояния: в активном состоянии – панель-блокнот отображается, иначе – не отображается;

 - кнопка прерывания, предназначенная для остановки вычислений при работе системы в случае необходимости;


 - кнопка открытия файла (процесса, взаимной корреляционной функции, действительной компоненты спектра, мнимой компоненты спектра);
















 - кнопка сохранения файла (процесса, взаимной корреляционной функции, действительной компоненты спектра, мнимой компоненты спектра, модуля и фазы спектральной плотности мощности, спектральной плотности мощности);

 - кнопка генерации источника «белого шума» с передачей параметров на подсистемы 3-8, согласно структурной схемы системы (см. Приложение 17).

 - кнопка построения сгенерированной функциональной зависимости либо открытой из файла;

 - кнопка построения теоретической функциональной зависимости;

 - кнопка фиксирования функциональных зависимостей, которая при работе в сочетании с кнопкой генерации позволяет перейти в режим имитационного моделирования;

-  - кнопка очистки графических плотов;
-  - кнопка поиска оптимальных параметров аппроксимации  $m$  и  $\gamma$ ;
-  - кнопка поиска оптимального числа членов разложения  $m$  при заданном параметре  $\gamma$ ;
-  - кнопка поиска оптимального параметра масштаба  $\gamma$  при заданном числе членов разложения ряда  $m$ ;
-  - кнопка настройки параметров и условий аппроксимации;
-  - кнопка аппроксимации;
-  - кнопка передачи функциональной зависимости из заданной подсистемы;
-  - кнопка передачи параметров функциональной зависимости из заданной подсистемы;
-  - кнопка построения ортогональных полиномов и функций;
-  - кнопка формирования левой ветви взаимной корреляционной функции специального вида;
-  - кнопка формирования правой ветви взаимной корреляционной функции специального вида;
-  - кнопка, имеющая два состояния: в активном состоянии – оси отображаются, иначе – не отображается;
-  - кнопка экспорта данных в MS Excel;
-  - кнопка формирования отчета в MS Word;
-  - кнопка вызова окна рекомендаций по выбору интервала дискретизации и числа ординат восстановления, располагающаяся на закладке формирования источника.

В качестве демонстрации работы автоматизированной системы, рассмотрим работу системы при решении задачи аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа с использованием корреляционных функций специального вида.

На рисунке П 18.2 представлена экранная форма подсистемы построения корреляционной функции специального вида, в качестве которой выбрана корреляционная функция низкочастотного полосового шума.

При нажатии соответствующей кнопки передадим сформированную автокорреляционную функцию на подсистемы формирования взаимных корреляционных функций и аппроксимации взаимных корреляционных функций. Соответствующие экранные формы представлены ниже на рисунках П 18.3 и П 18.4.

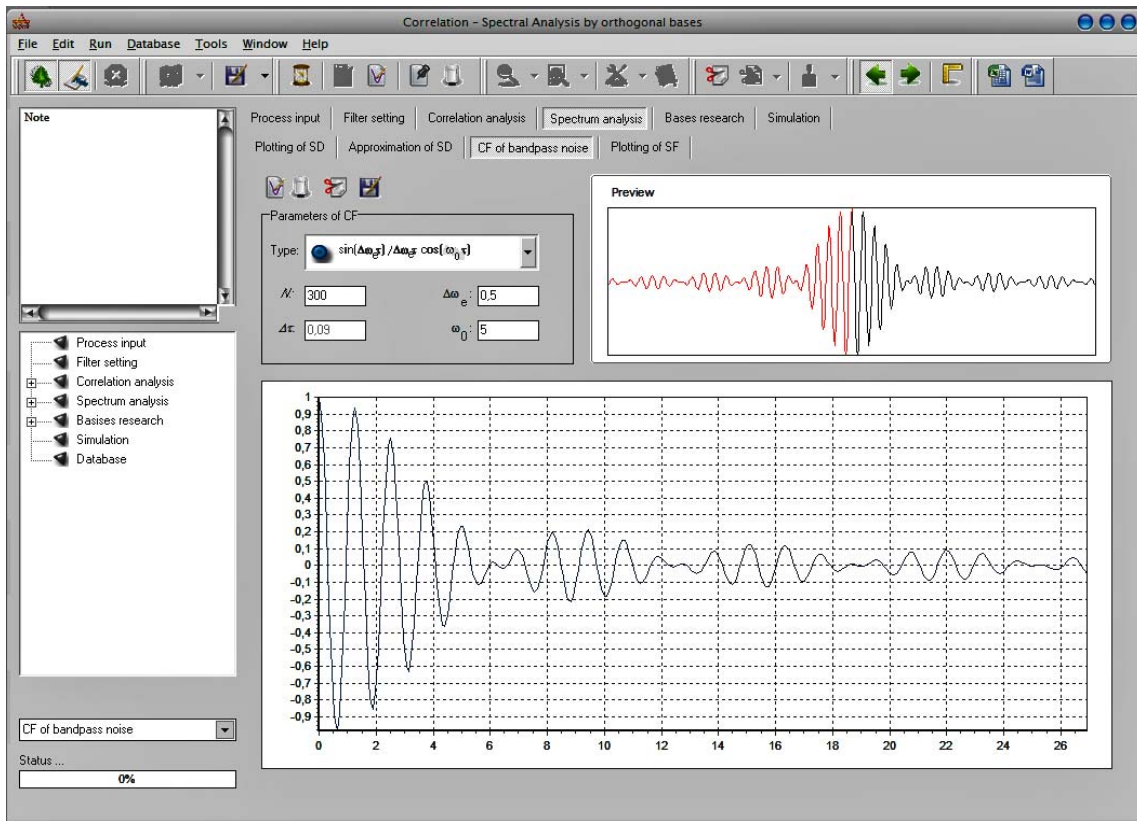


Рисунок П 18.2 – Экранная форма подсистемы построения корреляционных функций специального вида

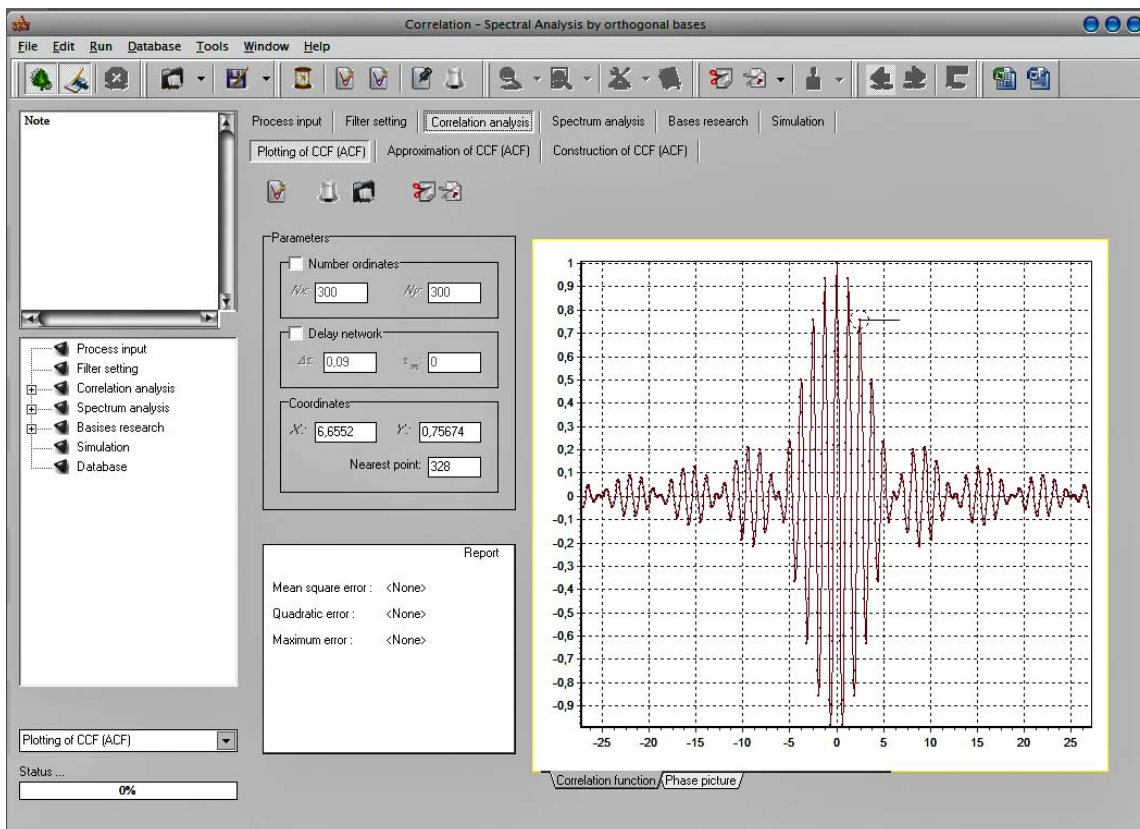


Рисунок П 18.3 – Экранная форма подсистемы формирования ВКФ

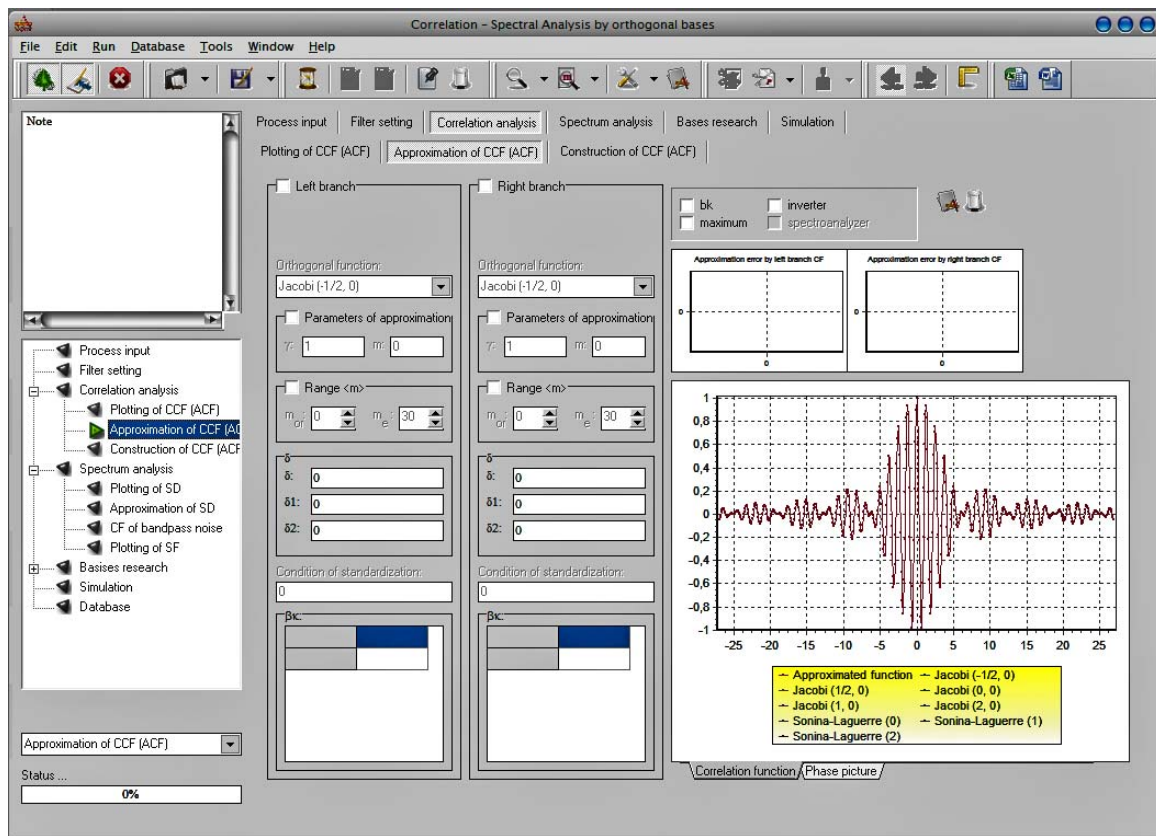


Рисунок П 18.4 – Экранная форма подсистемы аппроксимации ВКФ

Настроив параметры аппроксимации, построим аппроксимативную модель сформированной корреляционной функции в выбранном ортогональном базисе.

Результаты проведения аппроксимации отражены на экранной форме, представленной на рисунке П 18.5. Нажатием правой кнопки мыши по графическому плоту, на котором отображается функциональная зависимость и ее ортогональная модель, выгружается информационное окно с обобщенными корреляционными характеристиками.

По параметрам ортогональной модели корреляционной функции оценим модель спектральной плотности мощности. Вид подсистемы построения спектра и его составляющих приведен на рисунке П 18.6. Нажатием правой кнопки мыши по соответствующим графическим плотам (действительная часть, мнимая часть, модуль спектральной плотности мощности), на которых отображается функциональные зависимости, выгружается информационное окно с обобщенными спектральными характеристиками. Также предоставляются следующие возможности: на график действительной и мнимой частей спектральной плотности мощности наложить модуль спектральной плотности мощности и эквивалентную ширину спектра мощности; увеличить масштаб графика мнимой части, действительной части и модуля спектральной плотности мощности.

Построенную модель СПМ можно получить и другим способом – через аппроксимацию ее составляющих. Выбрав график аппроксимируемой составляющей (действительная часть, мнимая часть или модуль), передадим ее на подсистему аппроксимации СПМ (см. рисунок П 18.7).

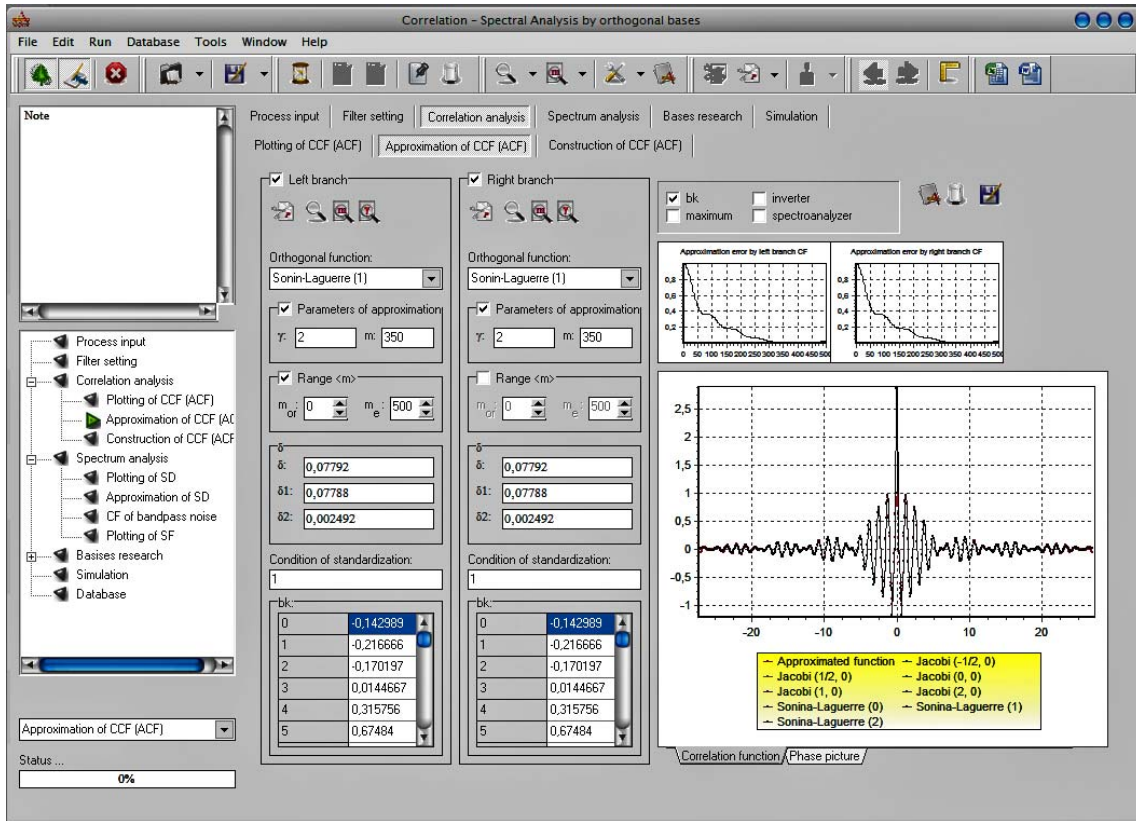


Рисунок П 18.5 – Экранная форма подсистемы аппроксимации КФ с отображением результатов эксперимента

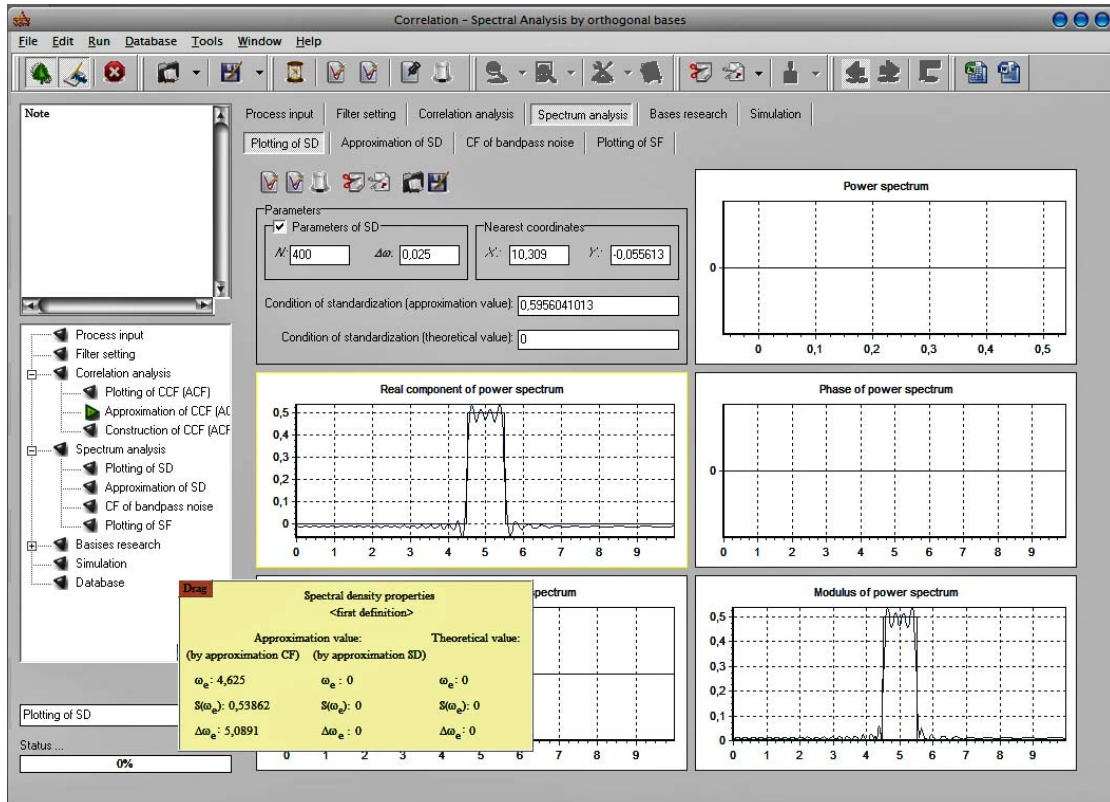


Рисунок П 18.6 – Экранная форма подсистемы построения модели СПМ



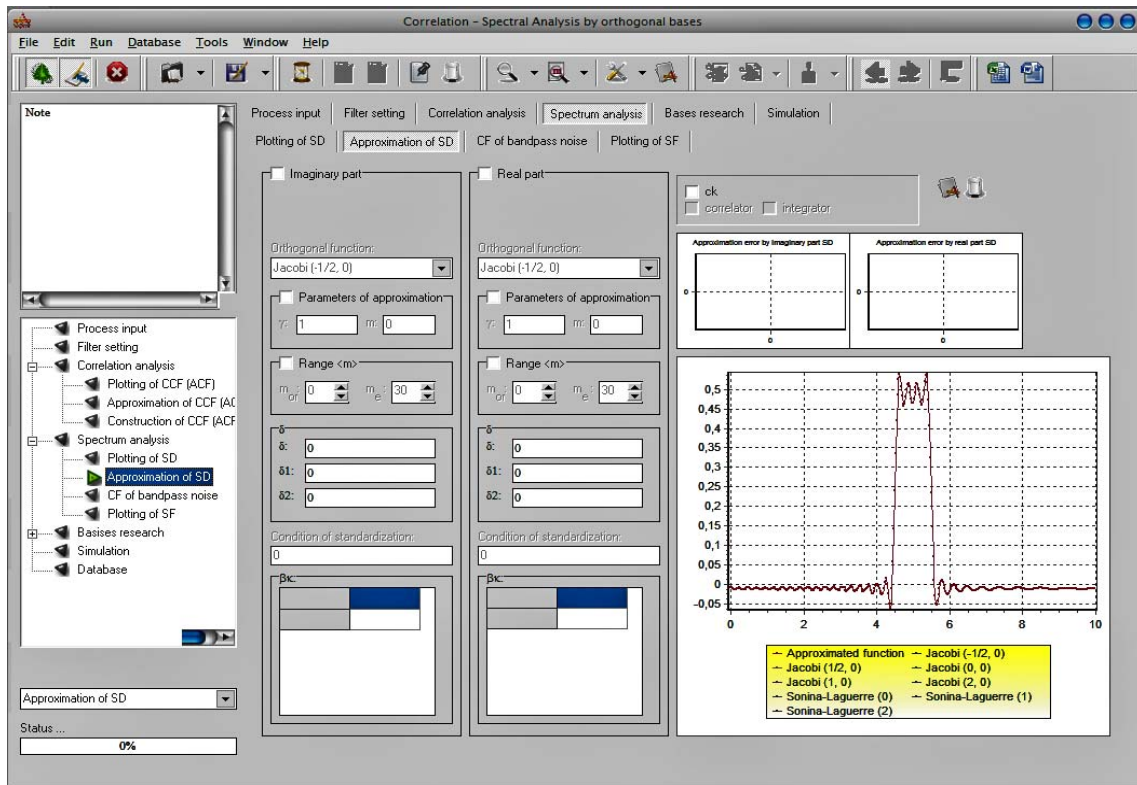


Рисунок П 18.7 – Экранная форма подсистемы аппроксимации СПМ

Результаты проведения аппроксимации отражены на экранной форме, представленной на рисунке П 18.8. Нажатием правой кнопки мыши по графическому плоту, на котором отображается функциональная зависимость и ее ортогональная модель, выгружается информационное окно с обобщенными спектральными характеристиками.

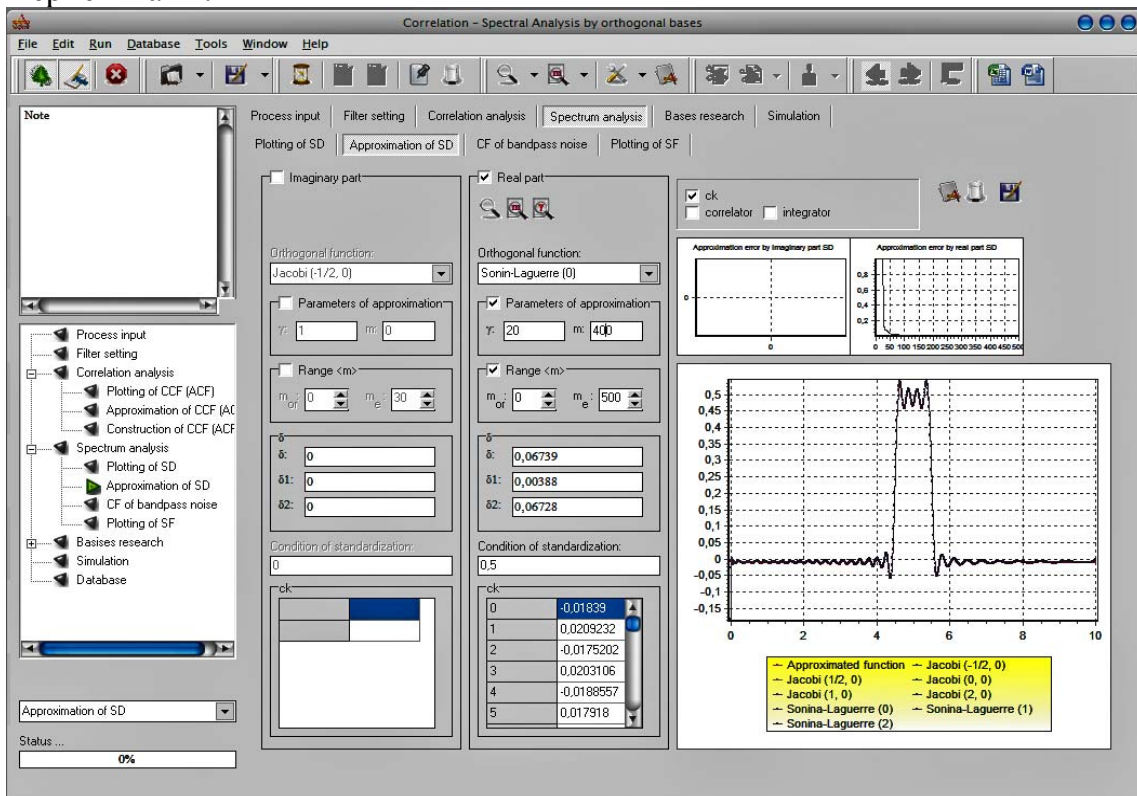


Рисунок П 18.8 – Экранная форма подсистемы аппроксимации СПМ с отображением результатов эксперимента

По параметрам аппроксимативной модели СПМ можно восстановить исходную модель КФ. Результаты построения КФ представлены в подсистеме восстановления взаимной корреляционной функции (см. рисунок П 18.9). При необходимости в указанную подсистему можно передать исходную корреляционную функцию из подсистемы формирования взаимной корреляционной функции нажатием соответствующей кнопки. Результаты наложения исходной и полученной корреляционных функций представлены на рисунке П 18.10.

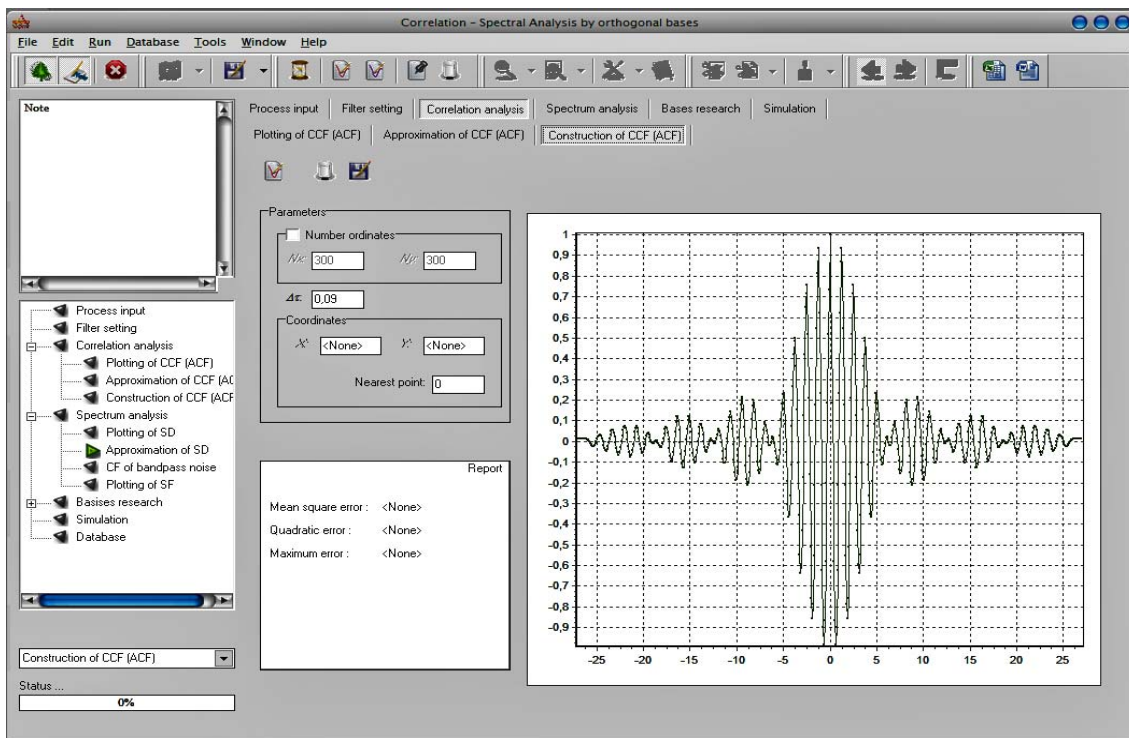


Рисунок П 18.9 – Экранная форма подсистемы восстановления ВКФ

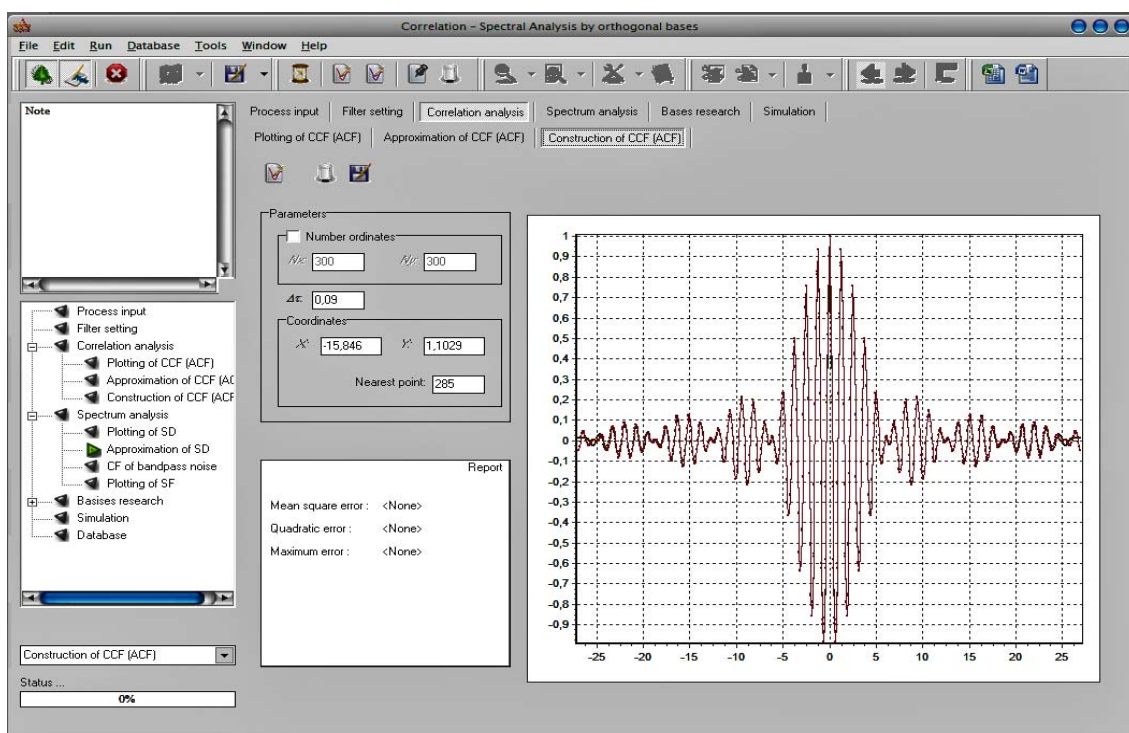


Рисунок П 18.10 – Экранная форма подсистемы восстановления ВКФ с наложением исходной ВКФ

**Формат вводимых и выводимых файлов**

Процесс с регулярной дискретизацией *rd	Процесс с нерегулярной дискретизацией *nrd	ВКФ с регулярной дискретизацией *txt	Спектральная плотность мощности (парам. модели) *txt	Спектральная плотность мощности *txt	Параметры ортогональных функций *txt
M	$M_j$	$J_{\max, \Pi}$	$\Delta\omega$	$\Delta\omega$	$\alpha_{\Pi}$
$\Delta t$	$x(1)$	$J_{\max, \Lambda}$	$\omega_{\text{э}}$	$\omega_{\text{э}}$	$\beta_{0, \Pi}$
$x(1)$	...	$\Delta\tau$	$S_x(\omega_{\text{э}})$	$S_x(\omega_{\text{э}})$	...
...	...	$\rho_{x, \Pi}(1)$	$\Delta\omega_{\text{э}}$	$\Delta\omega_{\text{э}}$	$\beta_{m1, \Pi}$
...	$x(M_j)$	...	$S_x(1)$	$S_x(1)$	$\alpha_{\Lambda}$
...	$t(1)$	$\rho_{x, \Pi}(J_{\max, \Pi})$	$S_x(2)$	$S_x(2)$	$\beta_{0, \Lambda}$
...	...	$\rho_{x, \Lambda}(1)$	...	...	...
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	$\beta_{m2, \Lambda}$
...	...	...	...	...	$\tau_m$
...	...	...	...	...	$\rho_{xy\max}$
...	...	...	...	...	m
...	...	...	...	...	$\tau_k^{(2)}$
$x(M)$	$t(M_j)$	$\rho_{x, \Lambda}(J_{\max, \Lambda})$	$S_x(N)$	$S_x(N)$	$\tau_k^{(4)}$

**ПРИМЕР ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ****КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ФОТОПЛЕТИЗМОГРАММ****Описание предметной области и постановка задачи**

Движение крови в сосудах обусловлено работой сердца. При сокращении миокарда желудочков кровь под давлением изгоняется из сердца в аорту и легочную артерию. Ритмические сокращения миокарда образуют ритмические расширения сосудистой стенки (пульс), которые под действием распространения волн давления от начальной части аорты к артериолам и капиллярам вызывают распространение пульсовых волн. В фотоплетизмографии (ФПГ) участок тканей, в котором исследуется кровоток, например палец руки, располагают на пути луча света между источником излучения и фотоприемником. Поскольку поглощение света в тканях пропорционально объему крови, проходящему через освещаемый участок, то усиливая сигнал фотоприемника, можно зарегистрировать изменения его амплитуды и параметров объемной пульсовой волны, обусловленные артериальной пульсацией сосуда [13, 14].

Решим следующие задачи с использованием автоматизированной системы аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах:

- 1) определить частоту пульсаций по фотоплетизмограмме с использованием аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах;
- 2) определить корреляцию параметров пульсовых волн по спектру мощности фотоплетизмограммы;
- 3) определить корреляцию параметров пульсовых волн по различным реализациям фотоплетизмограммы одного объекта, либо нескольких объектов, относящихся к одной группе.

Перед проведением корреляционно-спектрального анализа, исходный процесс необходимо отцентрировать, например, с применением ортогональных полиномов [21]. Вид центрированных фотоплетизмограмм, являющихся набором исходных данных для обработки и решения вышеуказанных задач, приведен в Приложении 21.

**Определение частоты пульсаций по фотоплетизмограмме**

Для определения частоты пульсаций проведен корреляционно-спектральный анализ. На рисунке П 20.1 представлен исходный центрированный процесс FPG - 13 (см. Приложение 21).

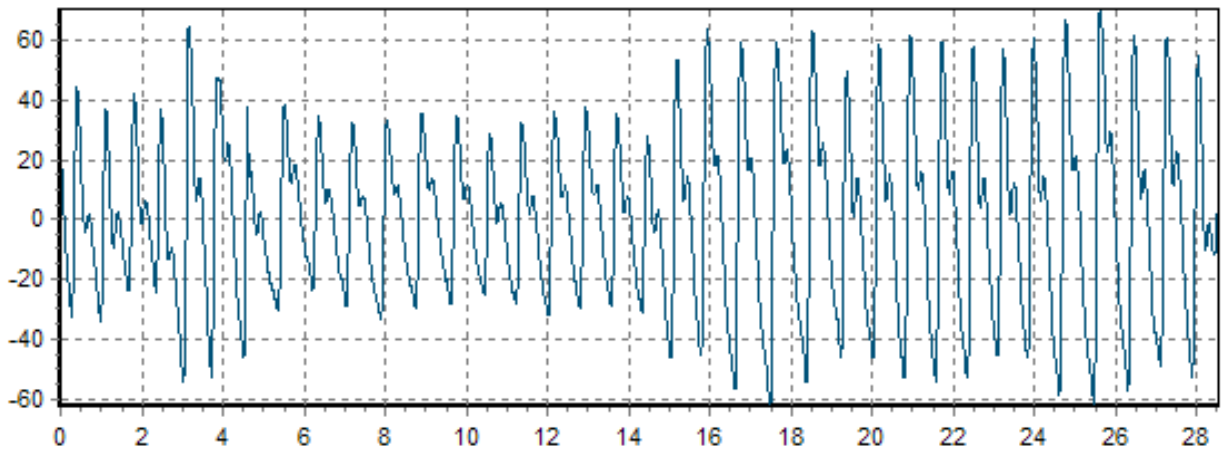


Рисунок П 20.1 - Центрированный процесс, полученный с датчика  
с интервалом в 10 мс, объем выборки - 2854

Ниже на рисунках П 20.2 и П 20.3 – АКФ с интервалом дискретизации  $\Delta\tau = 0,01$  и числом ординат восстановления  $N_x = 1500$  и ее фазовый портрет соответственно.

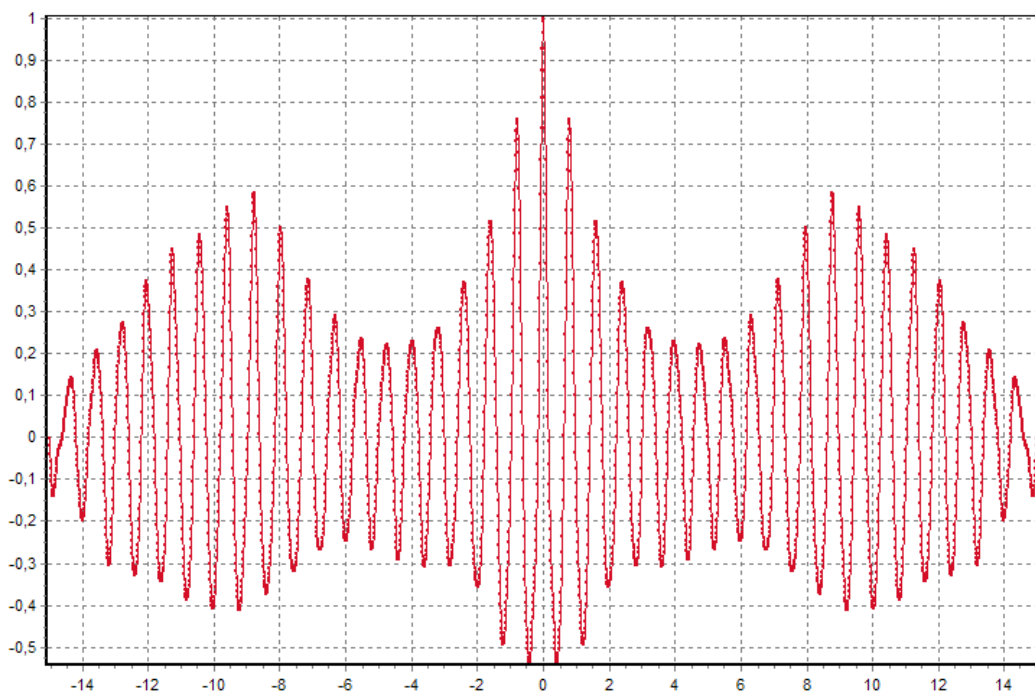


Рисунок П 20.2 - АКФ с параметрами  $\Delta\tau = 0,01$ ,  $N_x = 1500$

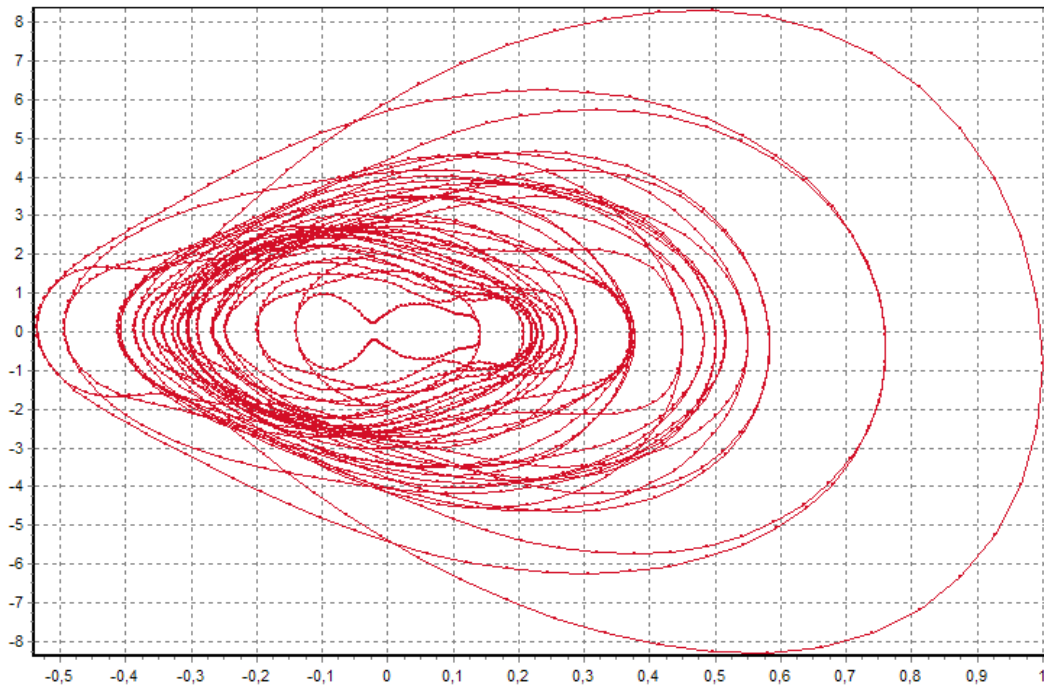


Рисунок П 20.3 – Фазовый портрет АКФ

Построим ортогональную модель АКФ с помощью ортогональных функций Со-нина-Лагерра (1) (см. рисунок П 20.4).

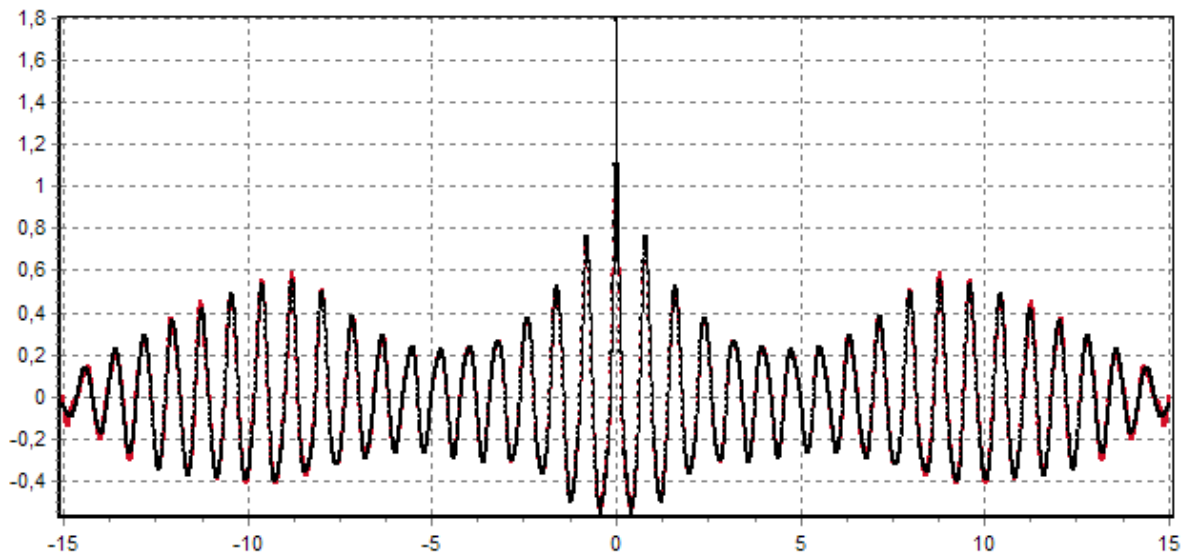


Рисунок П 20.4 – Аппроксимация АКФ ортогональными функциями  
Сонина-Лагерра (1);  $\gamma = 10$ ,  $m = 280$ ,  $\delta = 0,087$

Тогда, по параметрам ортогональной модели АКФ оценим СПМ процесса и определим обобщенные спектральные характеристики (см. рисунок П 20.5). На рисунке построены графики реальной части СПМ и модуля СПМ, а прямоугольником указана найденная эквивалентная ширина.

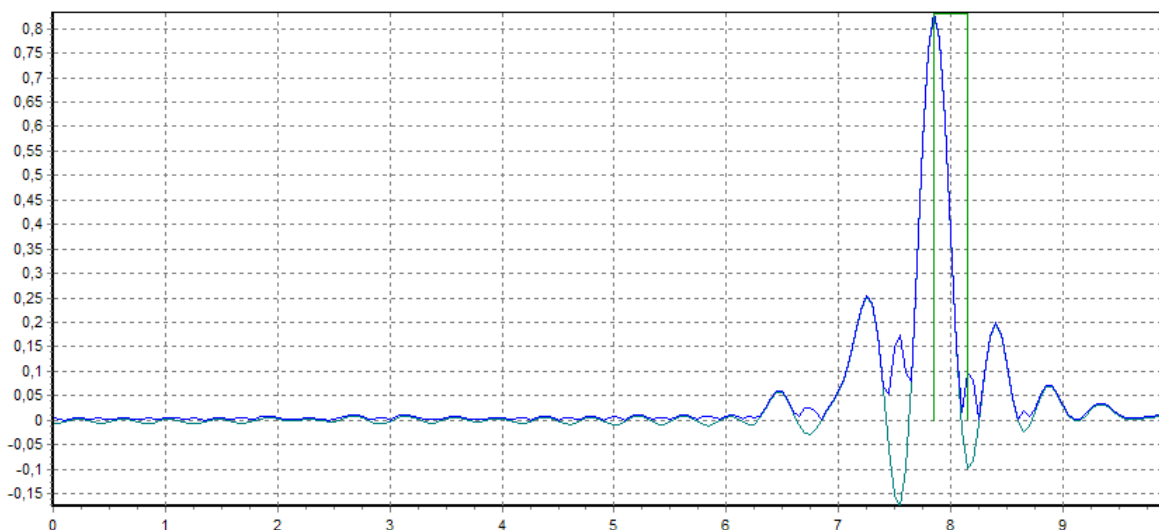


Рисунок П 20.5 – Модель СПМ и его составляющие с характеристиками  
 $\omega_e = 7,85, S(\omega_e) = 0,83047, \Delta\omega_e = 8,151$

Известно, что СПМ представляет собой распределение частот процесса. В свою очередь частота пульсаций соответствует экстремальной частоте  $\omega_e = 7,85 \text{ рад/с}$ . Данное значение представлено в относительных единицах. Следовательно,  
 $f_n = \frac{\omega_e}{2\pi} = 1,25 \text{ уд/с}$  или  $f_n = 75 \text{ уд/мин}$ .

### Определение корреляции параметров пульсовых волн по спектру мощности фотоплетизмограммы

Заметим, что разработанная автоматизированная система при необходимости позволяет найти решения обратной задачи, а именно, по имеющейся спектральной плотности мощности, построив ее ортогональную модель в выбранном базисе, восстановить КФ с заданным числом ординат восстановления.

Воспользуемся данной возможностью для определения корреляции различных параметров сигнала (в данном случае параметров объемной пульсовой волны) через определение его корреляционной функции.

В качестве исходных данных используем СПМ, полученную при решении прямой задачи (см. рисунок П 20.5), и построим ортогональную модель ее действительной компоненты в ортогональном базисе Лагерра. На рисунке П 20.6 – результаты аппроксимации.

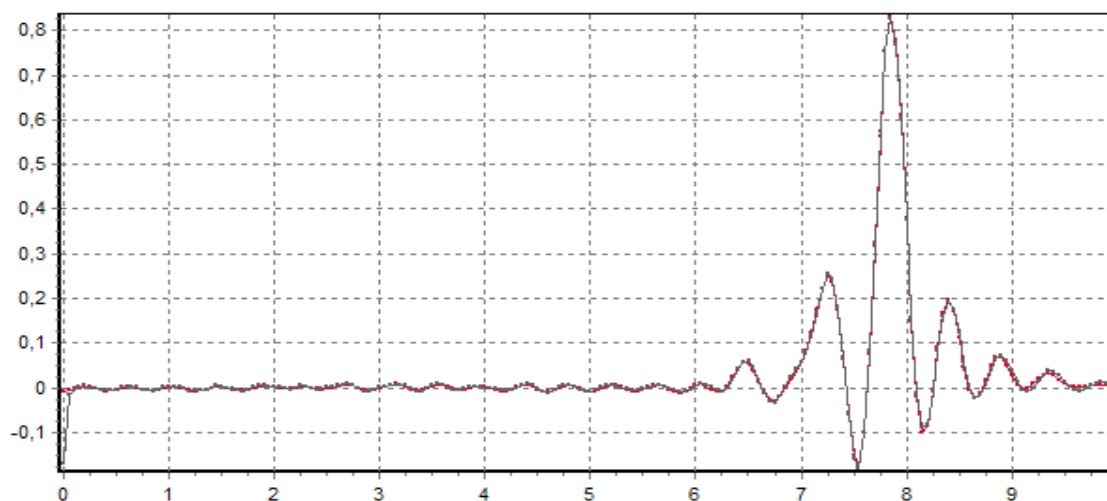


Рисунок П 20.6 – Аппроксимация действительной части СПМ ортогональными функциями Лагерра;  $\gamma = 5$ ,  $m = 350$ ,  $\delta = 0,0362$

По параметрам ортогональной модели СПМ (мнимая компонента равна нулю) можно оценить КФ и спектральные характеристики (см. рисунок П 20.7).

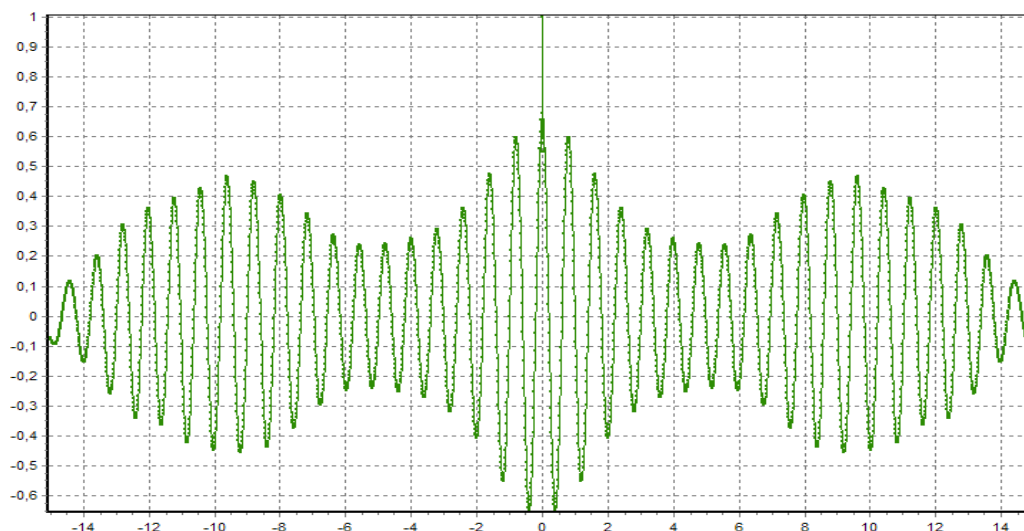


Рисунок П 20.7 – Модель КФ, восстановленная по параметрам модели СПМ

Для проверки адекватности предложенных алгоритмов корреляционно-спектрального анализа и достоверности результатов, получаемых при обработке реальных сигналов, наложим модель исходной АКФ (см. рисунок П 20.4) и модели КФ, полученной при решении прямой и обратной задачи. Результат наложения графиков представлен на рисунке П 20.8.



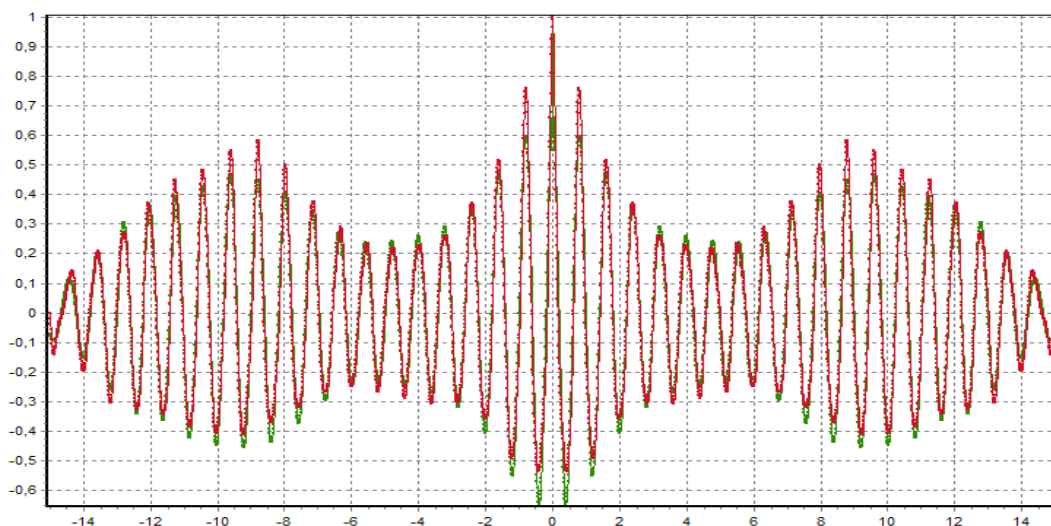


Рисунок П 20.8 – Модель КФ, восстановленная по параметрам модели СПМ, и исходная АКФ

Итак, при сравнении полученных таким образом корреляционных функций можно судить об изменении параметров исходного сигнала и об их влиянии друг на друга по спектру мощности, а также о виде сигналов, поступающих на вход по характеру получаемой корреляционной функции: АКФ либо ВКФ.

### **Определение корреляции параметров пульсовых волн по различным реализациям фотоплетизмограммы**

Проведем исследование коэффициента корреляции двух сигналов – различных реализаций фотоплетизмограммы. Исходные данные для обработки представлены в Приложении 21.

Для решения данной задачи необходимо сформировать ВКФ. На рисунках П 20.9 и П 20.10 представлены результаты построения ВКФ и ее фазового портрета для сигналов FPG – 13 и FPG – 14.

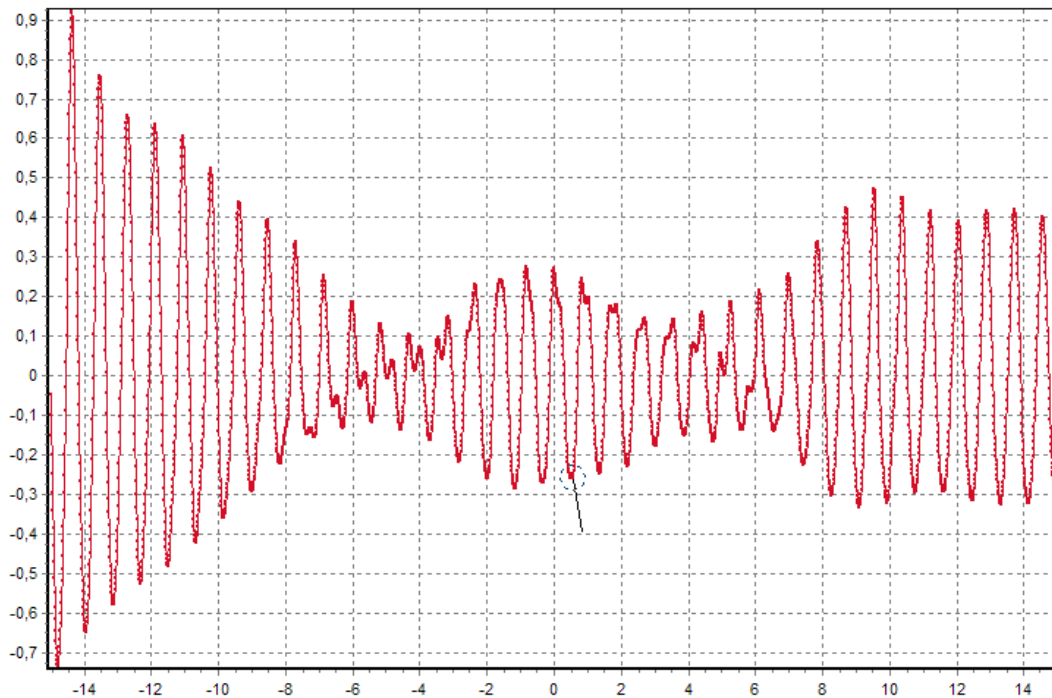


Рисунок П 20.9 – Формирование ВКФ

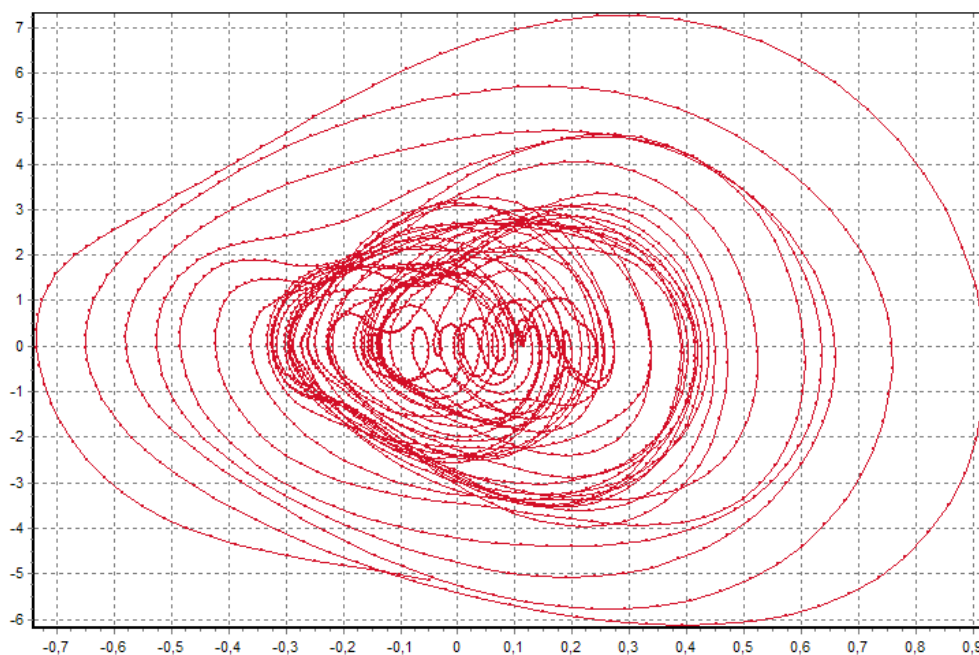


Рисунок П 20.10 – Построение фазового портрета сформированной ВКФ

В таблице П 20.1 представлены результаты обработки сигналов, снятых с фотоплетизмографа с интервалом в 10 мс (см. Приложение 21), где введены следующие обозначения: «+» - результирующая ВКФ с высоким коэффициентом корреляции; «-» - ВКФ с низким коэффициентом корреляции.

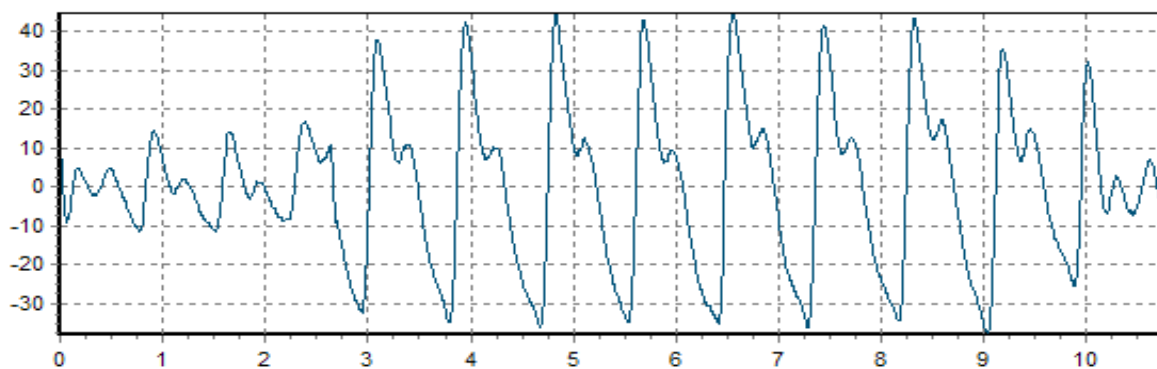
Таблица П 20.1

	FPG-1	FPG-2	FPG-3	FPG-4	FPG-5	FPG-6	FPG-7	FPG-8	FPG-9	FPG-10	FPG-11	FPG-12	FPG-13	FPG-14	FPG-15	FPG-16
FPG-1	+	-	-	+	+	-	+	-	-	-	-	-	-	+	-	+
FPG-2	-	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-
FPG-3	-	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-
FPG-4	+	+	+	+	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	+	+
FPG-5	+	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+
FPG-6	-	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-
FPG-7	+	-	-	+	-	+	+	-	-	-	-	-	-	+	-	+
FPG-8	-	-	-	-	-	+	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-
FPG-9	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-
FPG-10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-
FPG-11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-
FPG-12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-
FPG-13	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+
FPG-14	+	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	+	-	+
FPG-15	-	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-
FPG-16	+	-	-	+	+	-	+	-	-	-	-	-	+	+	-	+

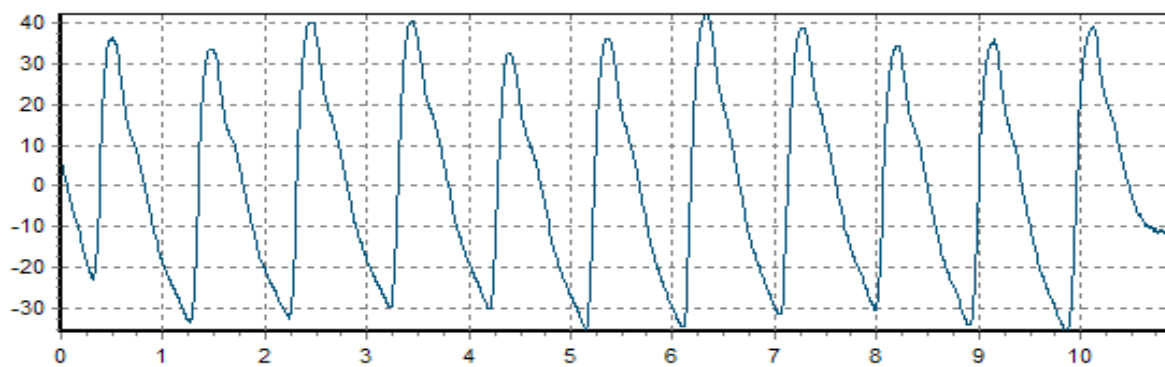
Заметим, при необходимости можно указать конкретные значения коэффициента корреляции, показывающие степень взаимосвязи параметров объекта исследования друг относительно друга.

**ВИД ЦЕНТРИРОВАННЫХ ФОТОПЛЕТИЗМОГРАММ**

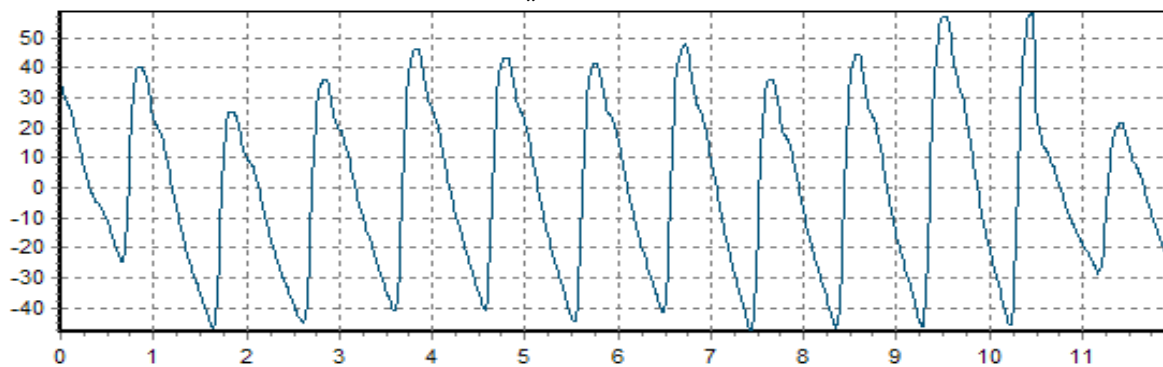
FPG – 1 ( $N_x = 1077, dt = 0,01$ )



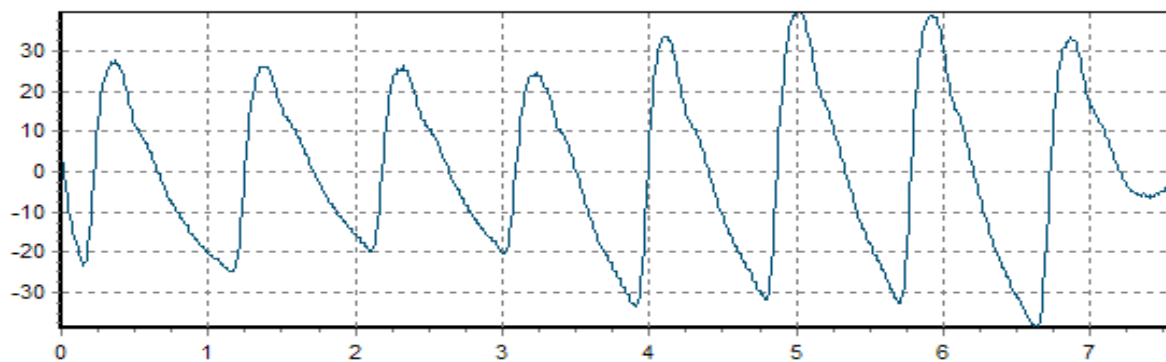
FPG – 2 ( $N_x = 1094, dt = 0,01$ )



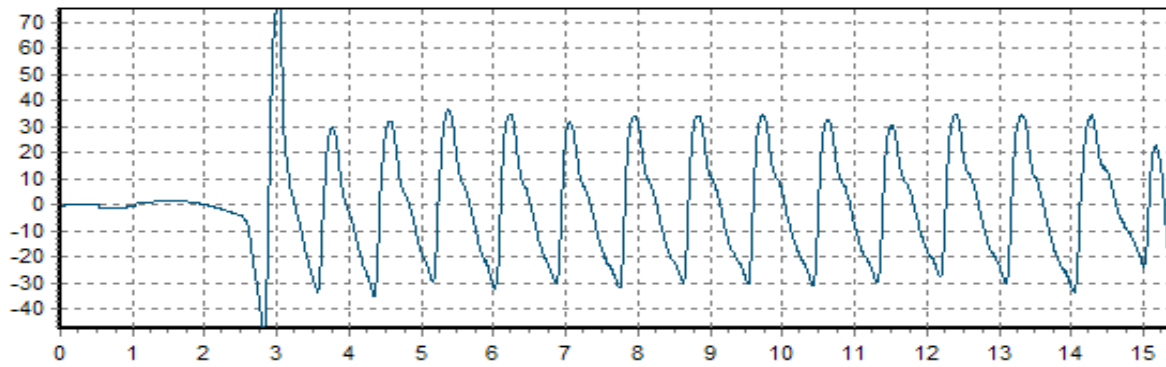
FPG – 3 ( $N_x = 1198, dt = 0,01$ )



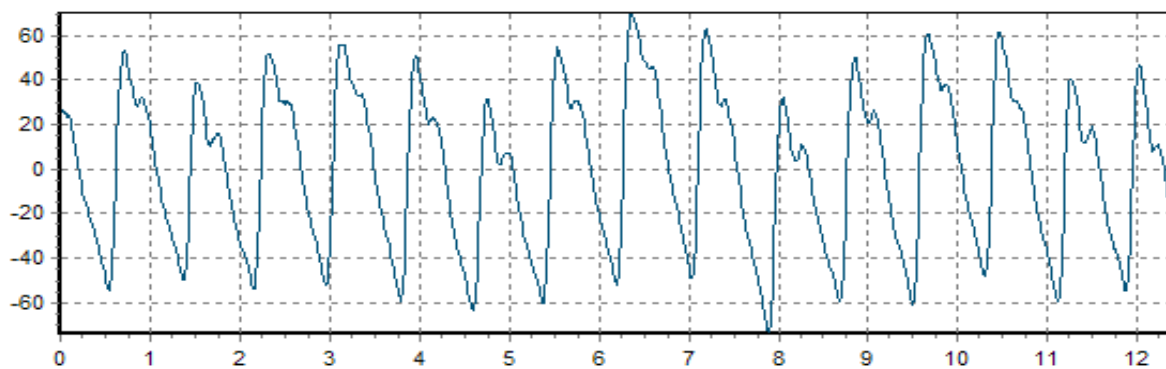
FPG – 4 ( $N_x = 759, dt = 0,01$ )



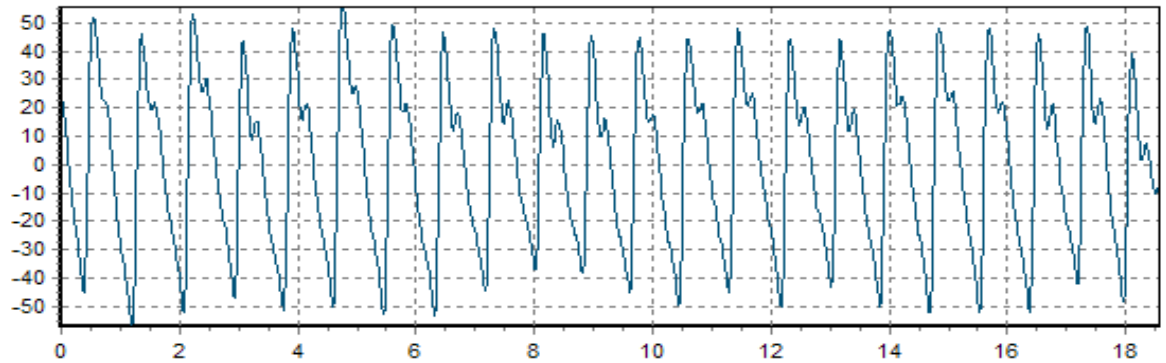
FPG - 5 ( $N_x = 1536, dt = 0,01$ )



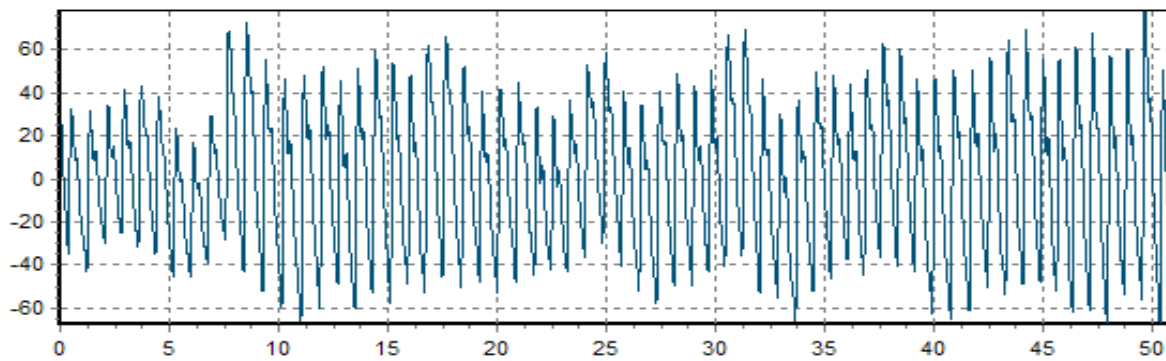
FPG - 6 ( $N_x = 1236, dt = 0,01$ )



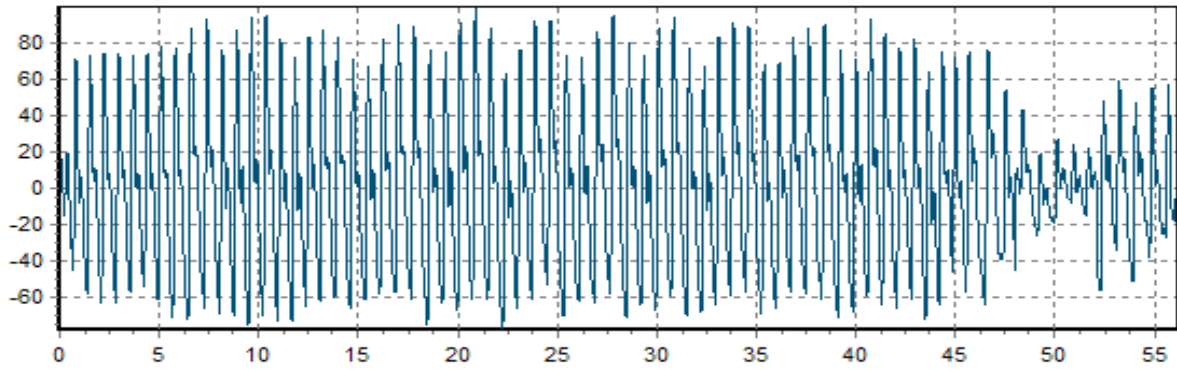
FPG - 7 ( $N_x = 1858, dt = 0,01$ )



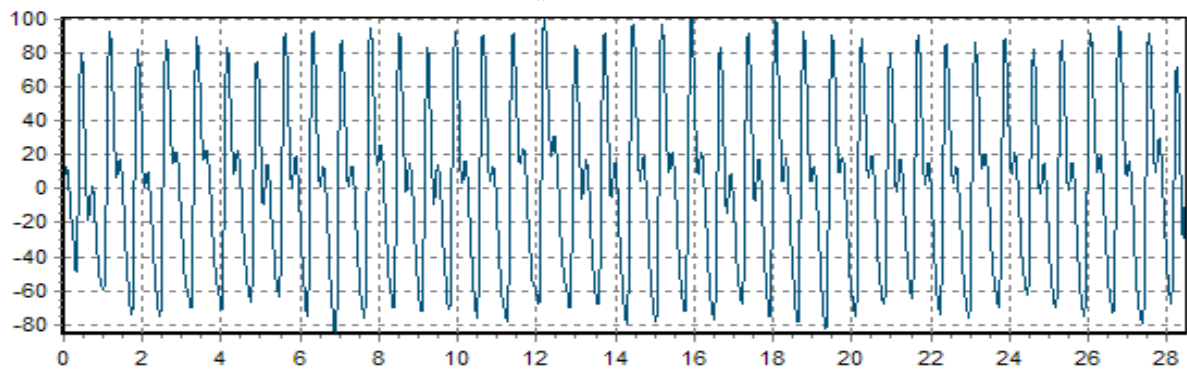
FPG - 8 ( $N_x = 5075, dt = 0,01$ )



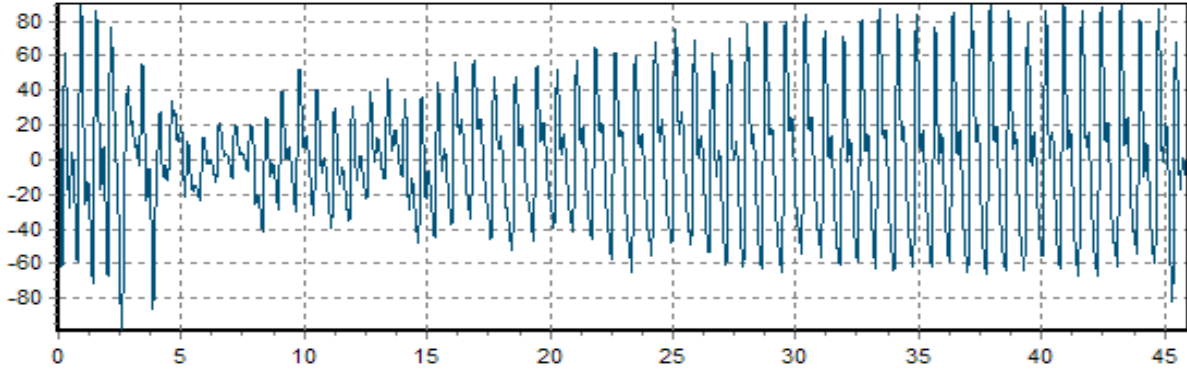
FPG – 9 ( $N_x = 5614$ ,  $dt = 0,01$ )



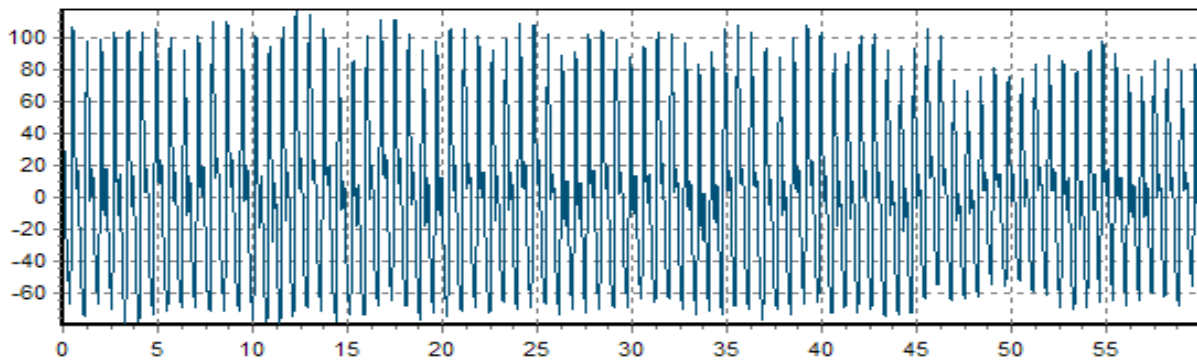
FPG – 10 ( $N_x = 2849$ ,  $dt = 0,01$ )



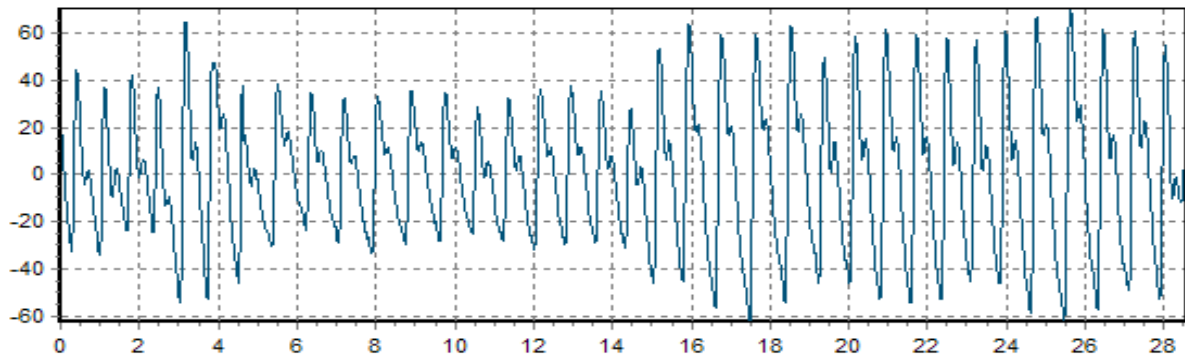
FPG – 11 ( $N_x = 4592$ ,  $dt = 0,01$ )



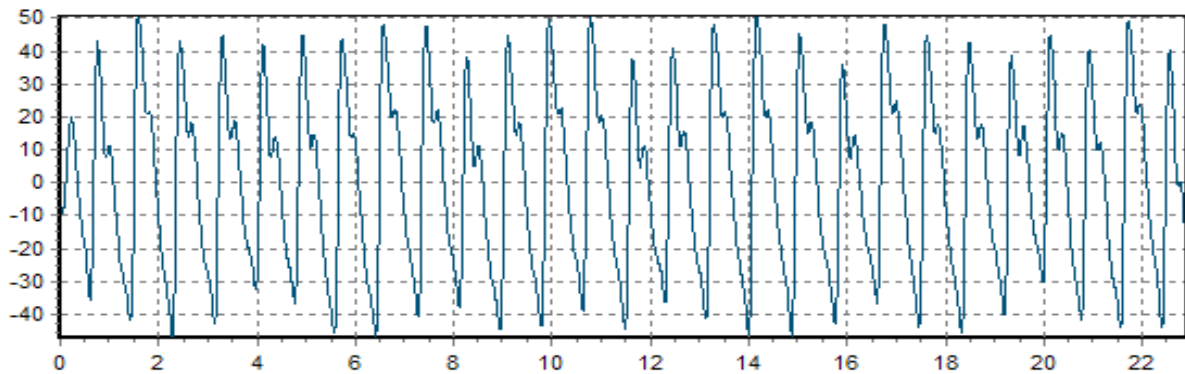
FPG – 12 ( $N_x = 6000$ ,  $dt = 0,01$ )



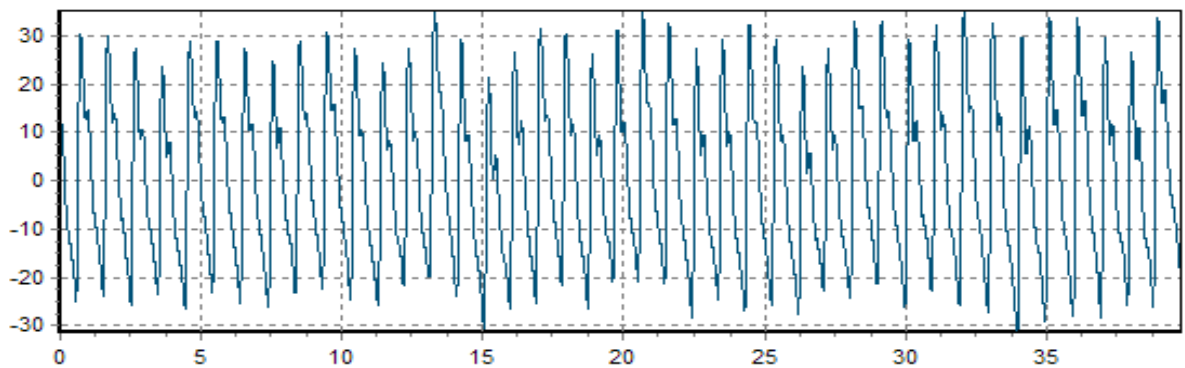
FPG – 13 ( $N_x = 2854$ ,  $dt = 0,01$ )



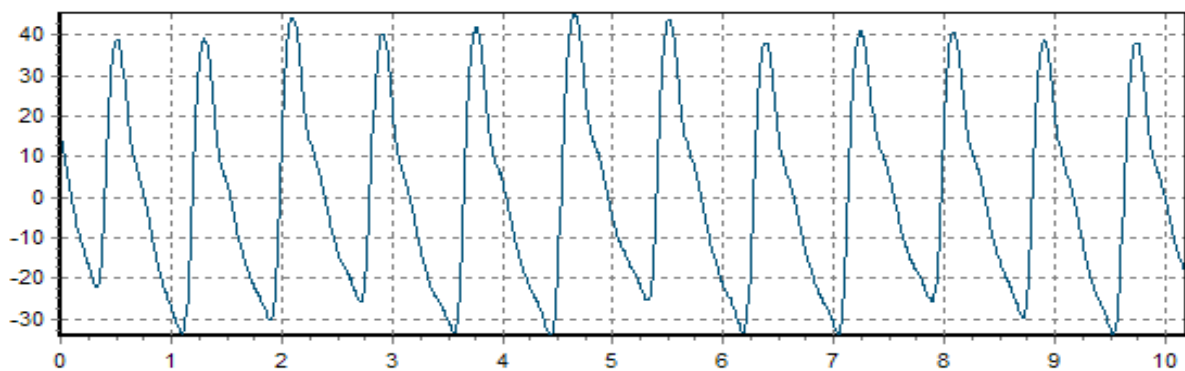
FPG – 14 ( $N_x = 2288$ ,  $dt = 0,01$ )



FPG – 15 ( $N_x = 3979$ ,  $dt = 0,01$ )



FPG – 16 ( $N_x = 1019$ ,  $dt = 0,01$ )



**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 12. «АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТЕЙ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ»**

**Цель работы:** анализ погрешностей оценки коэффициентов разложения ортогональных моделей корреляционной функции.

1. Определить коэффициенты разложения  $\beta_k$ .

$$\lambda := 1$$

$$\omega := 5$$

$$\gamma := 0.30615$$

$$m := 15$$

$$k := 0..m$$

$$\Delta\tau := 0.081649 \quad N_x := 37$$

$$\tau_{\max} := \Delta\tau \cdot N_x$$

$$\rho_x(\tau) := e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau)$$

$$P7(k, \tau, \gamma) := \sum_{s=0}^k \text{combin}(k, s) \cdot \text{combin}(k + s + 1, s + 1) \cdot (-1)^s \cdot e^{-(s+1) \cdot \gamma \cdot \tau}$$

$$\beta5(k) := 2\gamma \cdot (k + 1) \cdot \int_0^{\infty} P7(k, \tau, \gamma) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau) \, d\tau$$

2. Найти оценку коэффициентов разложения  $\beta_{k\_1}$  и составляющую методической погрешности, вызванную конечным верхним пределом интегрирования  $\Delta 1 \beta$ .

$$\beta5\_1(k) := 2\gamma \cdot (k + 1) \cdot \int_0^{\tau_{\max}} P7(k, \tau, \gamma) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau) \, d\tau$$

$$\Delta 1 \beta5(k) := \beta5\_1(k) - \beta5(k)$$



$$\Delta 1_{\beta 5}(k) =$$

0.00174
0.0027
-0.00127
-0.00453
-0.00032
0.00581
0.00304
-0.00596
-0.00655
0.00431
0.01011
-0.00042
-0.01275
-0.00615
0.0124
0.01452

3. Найти оценку коэффициентов разложения  $\beta_{k\_2}$  и составляющую методической погрешности, вызванную дискретизацией КФ и необходимостью численного интегрирования  $\Delta 2 \beta$ .

MethodInt :=

Выбран метод Симпсона.

$$\text{func}(k, dt, J) := \rho_x(dt \cdot J) \cdot P7(k, dt \cdot J, \gamma)$$

Реализация методов численного интегрирования.

Метод прямоугольников.

$$\text{IntP}(dt, J, k) := \begin{array}{l} \text{temp} \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..J - 1 \\ \quad \text{temp} \leftarrow \text{temp} + \text{func}(k, dt, i) \\ \text{temp} \leftarrow \text{temp} \cdot dt \\ \text{temp} \end{array}$$

Метод трапеций.

```
IntT(dt, J, k) := | temp ← 0
                  | for i ∈ 1..J - 2
                  |   temp ← temp + func(k, dt, i)
                  | temp ← temp +  $\frac{(\text{func}(k, dt, 0) + \text{func}(k, dt, J - 1))}{2}$ 
                  | temp ← temp · dt
                  | temp
```

Метод Ньютона.

```
IntN(dt, J, k) := | i ← 0
                  | temp ← 0
                  | while i ≤ J - 4
                  |   | temp ← temp + (func(k, dt, i) + 3 func(k, dt, i + 1) + 3 func(k, dt, i + 2) + func(k, dt, i + 3))
                  |   | i ← i + 3
                  |   temp ← temp · dt ·  $\frac{3}{8}$ 
                  | temp
```

Метод Симпсона.

```
IntS(dt, J, k) := | i ← 1
                  | temp ← 0
                  | while i ≤ J - 2
                  |   | temp ← temp + 4 func(k, dt, i)
                  |   | i ← i + 2
                  |   i ← 2
                  |   while i ≤ J - 3
                  |     | temp ← temp + 2 func(k, dt, i)
                  |     | i ← i + 2
                  |   temp ←  $\frac{(\text{temp} + \text{func}(k, dt, 0) + \text{func}(k, dt, J - 1)) \cdot dt}{3}$ 
                  | temp
```

$$\text{Integ}(dt, J, k) := \begin{cases} \text{IntP}(dt, J, k) & \text{if MethodInt} = 1 \\ \text{IntT}(dt, J, k) & \text{if MethodInt} = 2 \\ \text{IntN}(dt, J, k) & \text{if MethodInt} = 3 \\ \text{IntS}(dt, J, k) & \text{if MethodInt} = 4 \end{cases}$$

$$\beta5\_2(k) := 2\gamma \cdot (k + 1) \cdot \text{Integ}(\Delta\tau, Nx, k)$$

$$\Delta2_{\beta5}(k) := \beta5\_2(k) - \beta5\_1(k)$$

$$\Delta2_{\beta5}(k) =$$

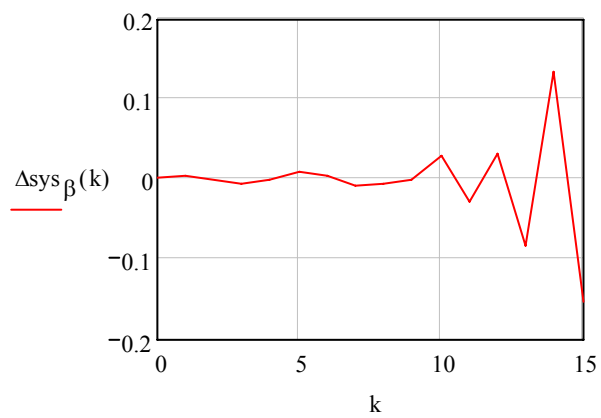
0.00068
0.00116
-0.00055
-0.00156
-0.00063
0.00238
0.0012
-0.00266
0.00082
-0.00624
0.01792
-0.02777
0.04449
-0.07804
0.12012
-0.16853

4. Найти систематическую составляющую методической погрешности  $\Delta_{\text{sys } \beta}$ .

$$\Delta_{\text{sys } \beta}(k) := \Delta_{1\beta 5}(k) + \Delta_{2\beta 5}(k)$$

$\Delta_{\text{sys } \beta}(k) =$

0.00242
0.00386
-0.00181
-0.00609
-0.00095
0.00819
0.00424
-0.00862
-0.00573
-0.00194
0.02803
-0.02819
0.03174
-0.08419
0.13252
-0.15401



**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 13. «ВЛИЯНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ НА УВЕЛИЧЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ»**

**Цель работы:** изучение погрешностей аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями.

1. Записать выражения, необходимые для дальнейшего расчета в соответствии с заданной ортогональной функцией и выбранным видом корреляционной функции.

$$\lambda := 1$$

$$\omega := 5$$

$$m := 15$$

$$k := 0..m$$

$$\Delta_t := \frac{1}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot 0.02}{\left| \left( \frac{\omega}{\lambda} \right)^2 - 1 \right|}}$$

$$\gamma(m) := \frac{0.4}{(m + 1) \cdot \Delta_t}$$

$$P7(k, \tau, \gamma) := \sum_{s=0}^k \text{combin}(k, s) \cdot \text{combin}(k + s + 1, s + 1) \cdot (-1)^s \cdot e^{-(s+1) \cdot \gamma \cdot \tau}$$

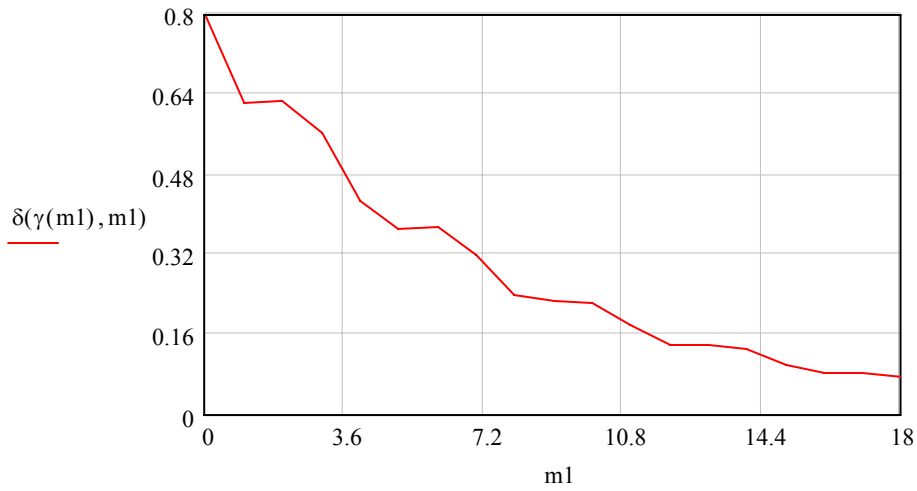
$$\beta5(k, \gamma) := 2 \cdot \gamma \cdot (k + 1) \cdot \int_0^{\infty} P7(k, \tau, \gamma) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau) \, d\tau$$

$$\tau4 := \frac{2 \cdot \lambda^2 + \omega^2}{4 \cdot \lambda \cdot (\lambda^2 + \omega^2)}$$

$$\delta(\gamma, m) := \sqrt{1 - \frac{1}{2 \cdot \gamma \cdot \tau4} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{(\beta5(k, \gamma))^2}{k + 1}}$$

2. Построить зависимость  $\delta_{\min}$  от параметра  $m$  при заданном параметре масштаба.

$m1 := 0..18$

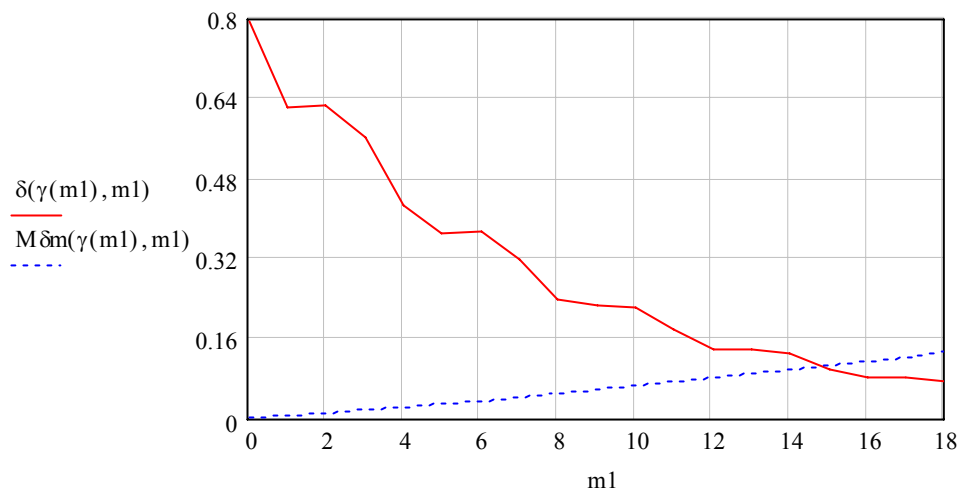


3. Построить зависимость  $M[\delta m]$  от параметра  $m$  при заданном параметре  $\gamma_k$ .

$g_k :=$

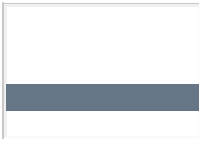
$\gamma_k := \begin{cases} 0.005 & \text{if } g_k = 1 \\ 0.01 & \text{if } g_k = 2 \\ 0.02 & \text{if } g_k = 3 \\ 0.05 & \text{if } g_k = 4 \\ 0.1 & \text{if } g_k = 5 \end{cases}$

$$M\delta m(\gamma, m) := \frac{1}{2 \cdot \gamma \cdot \tau^4} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{\gamma_k}{k+1}$$



4. Построить зависимость  $M[\delta]$  от параметра  $m$  при заданном параметре  $\gamma_k$ .

$g_k :=$



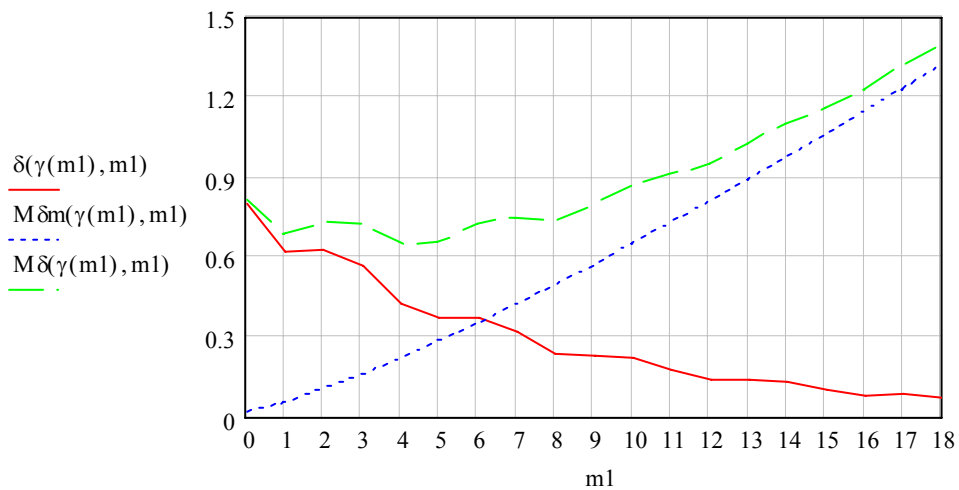
$\gamma_k :=$

0.005	if $g_k = 1$
0.01	if $g_k = 2$
0.02	if $g_k = 3$
0.05	if $g_k = 4$
0.1	if $g_k = 5$

$$\delta(\gamma, m) := \sqrt{1 - \frac{1}{2 \cdot \gamma \cdot \tau^4} \sum_{k=0}^m \frac{(\beta_5(k, \gamma))^2}{k+1}}$$

$$M\delta m(\gamma, m) := \frac{1}{2 \cdot \gamma \cdot \tau^4} \sum_{k=0}^m \frac{\gamma_k}{k+1}$$

$$M\delta(\gamma, m) := \delta(\gamma, m) + M\delta m(\gamma, m)$$



5. Построить зависимость  $m_{opt}$  от параметра  $\gamma_k$ .

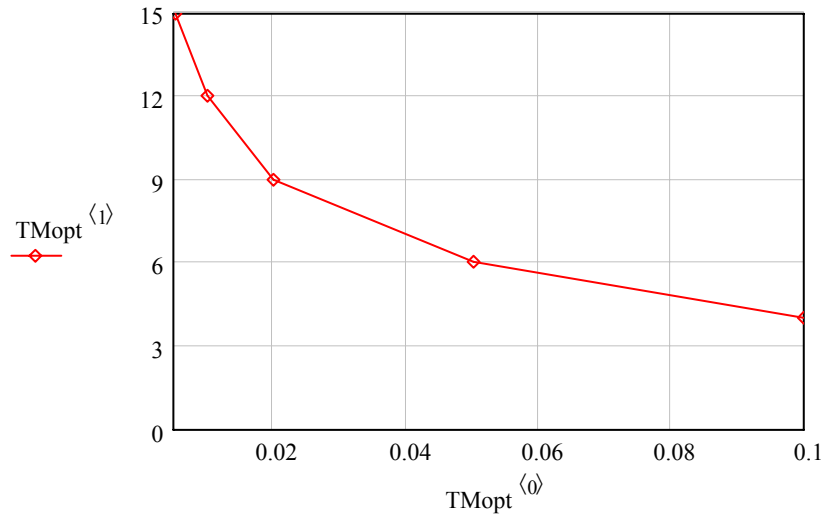
$m_2 := 9$

Given

$$M\delta m(\gamma(m_2), m_2) = \delta(\gamma(m_2), m_2)$$

Find( $m_2$ ) = 6.285

$$\text{TMopt} := \begin{pmatrix} 0.005 & 15 \\ 0.01 & 12 \\ 0.02 & 9 \\ 0.05 & 6 \\ 0.1 & 4 \end{pmatrix}$$





## КРАТКИЕ БИОГРАФИИ МАТЕМАТИКОВ

## ГИЛЬБЕРТ Давид (David Hilbert)



Гильберт Давид (23.1.1862 – 14.2.1943) - немецкий математик. Родился в Велау, близ Кёнигсберга. Окончил Кёнигсбергский университет, в 1893-1895 г.г. профессор там же, в 1895-1930 г.г. профессор Гёттингенского университета, до 1933 г. продолжал читать лекции в университете, после прихода гитлеровцев к власти в Германии (1933) жил в Гёттингене в стороне от университетских дел.

Исследования Гильберта оказали большое влияние на развитие многих разделов математики, а его деятельность в Гёттингенском университете в значительной мере содействовала тому, что Гёттинген в 1-й трети XX в. являлся одним из основных мировых центров математической мысли.

Научная биография Д. Гильберта резко распадается на периоды, посвященные работе в какой-либо одной области математики: а) теория инвариантов (1885-1893); б) теория алгебраических чисел (1893-

1898); в) основания геометрии (1898-1902); г) принцип Дирихле и примыкающие к нему проблемы вариационного исчисления и дифференциальных уравнений (1900-1906); д) теория интегральных уравнений (1900-1910); е) решение проблемы Варинга в теории чисел (1908-1909); ж) основы математической физики (1910-1922); з) логической основы математики (1922-1939).

В теории инвариантов исследования Д. Гильберта явились завершением периода бурного развития этой области математики во 2-й половине XIX в. Им доказана основная теорема о существовании конечного базиса системы инвариантов. Работы Д. Гильберта по теории алгебраических чисел преобразовали эту область математики и стали исходным пунктом её последующего развития. Данное Д. Гильбертом решение проблемы Дирихле положило начало разработке т. н. прямых методов в вариационном исчислении. Построенная Д. Гильбертом теория интегральных уравнений с симметричным ядром составила одну из основ современного функционального анализа и особенно спектральной теории линейных операторов. Основания геометрии Д. Гильберта (1899) стали образцом для дальнейших работ по аксиоматическому построению геометрии.

К 1922 г. у Д. Гильберта сложился значительно более обширный план обоснования всей математики путём её полной формализации с последующим «метаматематическим» доказательством непротиворечивости формализованной математики.

Два тома «Оснований математики», написанных Д. Гильберт совместно с П. Бернайсом, в которых эта концепция подробно развивается, вышли в 1934 г. и 1939 г. Считая с логической точки зрения необходимой полную формализацию математики, Д. Гильберт в то же время верил в силу творческой математической интуиции.

Он был большим мастером в высшей степени наглядного изложения математических теорий. В этом отношении замечательна «Наглядная геометрия», написанная Д. Гильбертом совместно с С. Кон-Фоссеном. Д. Гильберт умер 14 февраля 1943 г. в Гёттингене [58].

**ДИРИХЛЕ Петер Густав Лежен (Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet)**

Дирихле Петер Густав Лежен (13.2.1805 – 5.5.1859) - немецкий математик. Родился в Дюрене. В 1822-1827 г.г. был домашним учителем в Париже. Входил в кружок молодых ученых, которые группировались вокруг Ж. Фурье. В 1827 г. занял место доцента в Бреславе; с 1829 г. работал в Берлине. В 1831-1855 г.г. - профессор Берлинского университета, после смерти К. Гаусса (1855 г.) - Гёттингенского университета. Сделал ряд крупных открытий в теории чисел; установил формулы для числа классов бинарных квадратичных форм с заданным определителем и доказал теорему о бесконечности количества простых чисел в арифметической прогрессии из целых чисел, первый член и разность которой взаимно просты. К решению этих задач применил аналитические функции, названные функциями (рядами) Дирихле. Создал общую теорию алгебр, единиц в алгебраическом числовом поле. В области математического

анализа впервые точно сформулировал и исследовал понятие условной сходимости ряда, дал строгое доказательство возможности разложения в ряд Фурье кусочно-непрерывной и монотонной функций, что послужило обоснованием для многих дальнейших исследований. Значительны труды Дирихле в механике и математической физике, в частности в теории потенциала. С именем Дирихле связаны задача, интеграл (ввел интеграл с ядром Дирихле), принцип, характер, ряды. Лекции Дирихле имели огромное влияние на выдающихся математиков более позднего времени, в том числе на Г. Римана, Ф. Эйзенштейна, Л Кронекера, Ю. Дедекинда [59].

**ЛАГЕРР Эдмон Никола (Edmond-Nicolas Laguerre)**

Лагерр Эдмон Никола (9.04.1834 – 14.08.1886) - французский математик. Первую известность ему дали еще некоторые ученические его работы. В 1853 г. он поступил в Ecole Polytechnique, откуда поступил на службу в артиллерию. В 1864 г. Лагерр был назначен репетитором в Ecole polytechnique.

В 1885 г. академия наук в Париже избрала его членом геометрического отдела, на место Серре, а немного спустя Бертран избрал его своим заместителем по кафедре физики в College de France.

Первоначальные работы его имели целью найти конкретное изображение мнимых точек на плоскости и в пространстве; он первый уяснил важную роль площади сферического треугольника в сферической геометрии и распространил на все алгебраические кривые теорию фокусов. Затем он изучал подобие форм, нашел две новые системы координат, из которых в одной

"смешанное уравнение (equation mixte)", как он это называл, показывало свойства всех касательных, которые можно провести к кривой из внешней точки. В то же время он указал несколько новых свойств кривых и поверхностей аналитических, распространил на гиперэллиптические функции теорему Понсле и на поверхности второго порядка теорему Иохимстала. В 1867 г. Лагерр опубликовал в "Journal de l'Ecole Polytechnique" замечательный мемуар: "Sur le Systemes lineaires". Немного позже он создал геометрию направления. Затем, обратившись к алгебраическим уравнениям и найдя недостаточными методы Штурма и Ньютона, он еще более упростил объяснение Декартова правила знаков, применяя его как к многочленам, так и к бесконечным рядам; нашел способ отделять мнимые корни и делать с ними вычисления; показал, что можно привести расходящийся ряд в расходящуюся непрерывную дробь.

Эти и другие труды его составляют около полутора ста оригинальных мемуаров, появлявшихся в "Nouvelles Annales de mathematiques", "Comptes rendus de l'Academie de sciences de Paris", "Bulletin de la Societe philomatique", "Bulletin de la Societe mathematique" и др. Отдельно были напечатаны только "Note sur la resolution des equations numeriques" (П. 1880); "Theorie des equations numeriques" (П., 1884); "Recherches sur la geometrie de direction" (П., 1885).

В 1887 г. академия наук воздала ему посмертную честь, присудив ему премию Petit d'Ormy. Ср. "Notice sur les travaux mathematiques de M. Laguerre" (П., 1875 и 1884); Poincare, "Notice sur Laguerre" (П., 1887); "Comptes rendus de l'Acad. des sciences" (1886) [60].

**ЛЕЖАНДР Адриен Мари (Adrien-Marie Legendre)**

Лежандр Адриен Мари (18.9.1752 – 10.1.1833) - французский математик, профессор Политехнической школы, чл. Парижской АН (1785). Родился в Париже. Лежандр обосновал и развил теорию геодезических измерений, сделал значительный вклад в тригонометрию на поверхности сфероида. Он сформулировал теорему о том, что сферический треугольник, стороны которого в сравнении с радиусом сферы так малы, что сферический излишек достигает всего нескольких градусов, можно вычислять как плоский треугольник с теми самыми сторонами, вычтя из каждого его угла треть сферического излишка. Одновременно с К.Ф. Гауссом, но независимо от него, Лежандр разработал метод вычисления наиболее вероятнейших результатов совокупности наблюдений, известный в науке как метод наименьших

квадратов. Ему также принадлежит ряд фундаментальных исследований по математическому анализу и теории чисел. В 1783 г., определяя компоненту силы притяжения эллипсоида вращения в направлении радиуса-вектора, открыл многочлены, получившие название полиномов Лежандра, и доказал их важнейшие свойства. В вариационном исчислении Лежандр установил признаки существования экстремумов. Его двухтомный труд "Теория чисел", третье издание которого вышло в 1830 г., был самым полным изложением теории чисел в то время. Первая из его четырех частей посвящена теории непрерывных дробей, которую впоследствии Лежандр использовал для решения неопределенных уравнений. В следующих двух частях рассматриваются общие свойства чисел, доказывається закон взаимности квадратичных вычетов, по которым определяются делители целых чисел. В четвертой части "Теории чисел" освещается вопрос о количестве простых чисел, которые не превышают данного числа, а во втором издании этого труда автор приводит и свою знаменитую эмпирическую формулу

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x - 1,08366}, \quad \pi(x) - \text{число простых чисел, не превосходящих } x, \text{ найденную в 1798 г..}$$

В последующих изданиях (1808, 1816, 1825) он помещает доказательство великой теоремы Ферма для  $n = 5$ , которое нашел одновременно с П. Дирихле. В 1794 г. Лежандр издал учебник по элементарной геометрии под названием "Начала геометрии". В этом учебнике, в отличие от "Начал" Евклида, осуществлена алгебраизация и арифметизация геометрии, а также используются элементы учения о симметрии. По образцу "Начал геометрии" Лежандра создавались все учебники по элементарной геометрии, в частности в России. Лежандру принадлежит одна из попыток доказать постулат о параллельных [61].

### РОДРИГ Бенжамен Оленд (Benjamin Olinde Rodrigues)



Родриг Бенжамен Оленд (16.10.1794 – 26.12.1851) - французский математик и экономист. Родился в португальской еврейской семье в Бордо. Окончил Высшую нормальную школу в Париже. В то время евреям было запрещено посещать *École Polytechnique* – самую престижную школу в Париже, поэтому углубленным изучением математики О. Родригу приходилось заниматься самостоятельно.

В 1816 г. О. Родриг получает докторскую степень по математике. Результаты его диссертации содержат так называемую формулу Родрига.

После выпуска Родриг становится банкиром. О. Родриг состоял в закрытой организации называемой «Comte de Saint-Simon». В 1825 г. после смерти лидера данной организации продолжает его идеи – «Saint-Simonianism». О. Родриг публикует ряд работ по политике, социальным реформам и банковскому делу. В

1840 г. публикует результаты по группам преобразований, однако они были проигнорированы и лишь не так давно стали использоваться некоторые из них.

О. Родриг знаменит двумя основными результатами: формула вращения векторов Родрига и формула представления ортогональных многочленов, позже названная формулой Родрига благодаря усилиям адвоката Эдварда Хейна, который доказал, что О. Родриг получил данную формулу раньше, чем Шарль Эрмит. В 1851 г. О. Родриг умер в Париже [62, 63, 64].

**СОНИН Николай Яковлевич**

Сонин Николай Яковлевич (10 февраля 1849 – 14 февраля 1915) – русский математик. Образование получил в Москве, в 4-й гимназии и в университете по физико-математическому факультету (1869). Был оставлен при Университете и в 1871 г. защитил диссертацию на степень магистра чистой математики под названием: "О разложении функций в бесконечные ряды" (V т. "Матем. сборн."). Диссертация эта посвящена объединению и обобщению результатов, полученных Гейне и К. Нейманом относительно разложения дроби  $1/(a-z)$  по сферическим и цилиндрическим функциям.

В 1873 - 1877 г.г. выезжал в командировку за границу, где слушал лекции Ж. Лиувилля, Ш. Эрмита, Ж. Бертрана, Ж. Серре, Ж. Дарбу.

В 1874 г. удостоен степени доктора математики за диссертацию: "Об интегрировании уравнений с частными производными второго порядка" (VII т. "Матем. Сборн."), переведенную на немецкий язык проф. Энгелем в "Mathem. Ann." 1897 г. В этой диссертации впервые решен вопрос о существовании общего интеграла первого порядка и приведен в окончательную форму способ интеграции, предложенный Дарбу.

С 1872 г. состоял на службе в Варшавском университете, сначала в должности доцента, потом (1877) экстраординарного и, наконец (1879), ординарного профессора.

В 1890 г. получил от Академии наук премию имени В. Я. Буняковского за представленный сборник статей, в 1891 г. избран членом-корреспондентом Академии, с 1893 г. избран ординарным академиком на место В. Я. Буняковского.

Первый труд: "О дифференцировании с произвольным указателем" был сообщен в 1869 г. на II съезде русских естествоиспытателей и врачей в Москве ("Матем. Сборн.", т. VI). В статье "Recherches sur les fonctions cylindriques" ("Mathematische Annalen", 1879) выведены замечательные прерывные интегралы с цилиндрическими функциями и выполнено интегрирование гипергеометрического уравнения при помощи цилиндрических функций. В статье "О некоторых неравенствах, относящихся к определенным интегралам" ("Mem. de l'Acad. de St.-Petersb." 1898) указано происхождение и истинное место в теории определенных интегралов некоторым неравенствам, выведенным П. Л. Чебышевым, которые к тому же значительно обобщены.

Основные научные результаты Сонины Н.Я. в области математики касаются теории различных специальных функций: гамма-функций, цилиндрических функций, полиномов Бернулли, ортогональных многочленов и т.д. В мемуаре "О некоторых неравенствах, касающихся определенных интегралов" разработал метод ортогонализации системы функций. Результаты по теории ортогональных многочленов получил большей частью в связи с приближенным вычислением определенных интегралов.

В работах о дополнительных членах формул Эйлера и Стирлинга впервые выведены низшие пределы величин этих дополнительных членов в различных формах, одна из которых обязана своим происхождением вызову, сделанному автору по этому предмету знаменитым парижским академиком Эрмитом [65].

**ФУРЬЕ Жан Батист Жозеф (Jean Baptiste Joseph Fourier)**

Фурье Жан Батист Жозеф (21 марта 1768, Осер, Франция – 16 мая 1830, Париж) – французский математик и физик. Родился в Осере в семье портного. В 9 лет потерял обоих родителей. Сироту устроили в Военную школу при бенедиктинском монастыре. В 1789 г. приехал в Париж, чтобы представить работу о численном решении уравнений любой степени, но она затерялась во время революции.

Революция пришла раньше, чем он смог решить, кем ему стать – монахом, военным или математиком. Фурье вернулся в Осер и стал преподавать в школе, где прежде учился. Он активно содействовал новой власти, и Фурье пригласили в Нормальную школу, организованную Конвентом для подготовки преподавателей (1794). Вскоре школу закрыли, но он успел обратить на себя внимание видных учёных (Лагранжа, Лапласа и Монжа).

В 1795-1798 г.г. преподавал в Политехнической школе. По отзывам слушателей, лекции Фурье были блестящими. В своих лекциях Фурье излагает теорему о числе вещественных корней в заданном интервале (опубликована в 1820 г.). Позднее его результаты обобщили швейцарец Ж.Ш.Штурм (работавший в Париже) и Коши.

В 1798 г. Наполеон берёт Фурье, Монжа и Бертолле в свой Египетский поход, в составе Легиона культуры.

В 1801 г. Фурье возвращается во Францию и назначается префектом департамента Изер. Занимается осушением болот. Пишет "Математическую теорию тепла".

В 1808 г. Фурье получает от Наполеона титул барона и награждается орденом Почётного легиона.

В 1812 г. Фурье получает Большую премию Академии за аналитическую теорию теплопроводности, несмотря на нестрогие доказательства. Впрочем, полная строгость была достигнута только в эпоху Гильберта. Свои методы (ряды и интегралы Фурье) он использовал в теории распространения тепла. Но вскоре они стали исключительно мощным инструментом математического исследования самых разных задач – особенно там, где есть волны и колебания. А этот круг чрезвычайно широк – астрономия, акустика, теория приливов, радиотехника и др.

В период «Ста дней» (1815 г.) Фурье переходит на сторону императора. После Реставрации отстранён от должности префекта и бедствует. Возвращается в Париж, где некоторое время работал директором Статистического бюро.

В 1817 г. Академия, вопреки давлению Бурбонов, избирает Фурье своим членом (первая попытка в 1816 году не удалась, король Людовик XVIII отменил избрание). Фурье становится одним из самых влиятельных академиков, и в 1822 г. его избирают пожизненным секретарём.

В 1822 г. наконец выходит в свет завершающий классический трактат "Математическая теория тепла" (*Theorie analytique de la chaleur*). «Великой математической поэмой» назвал этот труд лорд Кельвин.

**Научные достижения:**

- Доказал теорему о числе действительных корней алгебраического уравнения, лежащих между данными пределами (Теорема Фурье 1796).

- Исследовал, независимо от Ж. Мурайле, вопрос об условиях применимости разработанного Исааком Ньютоном метода численного решения уравнений (1818).
- Монографии «Аналитическая теория тепла», в которой был дан вывод уравнения теплопроводности в твёрдом теле, и разработка методов его интегрирования при различных граничных условиях. Метод Фурье состоял в представлении функций в виде тригонометрических рядов Фурье.
- Нашёл формулу представления функции с помощью интеграла, играющую важную роль в современной математике.
- Доказал, что всякую произвольно начерченную линию, составленную из отрезков дуг разных кривых, можно представить единым аналитическим выражением.
- В 1823 г. независимо от Эрстеда открыл термоэлектрический эффект, показал, что он обладает свойством суперпозиции, создал термоэлектрический элемент [66].



**ЧЕБЫШЕВ Пафнутий Львович**

Русский математик и механик, адъюнкт (1853), с 1856 г. экстраординарный, с 1859 г. - ординарный академик Петербургской АН (26 мая 1821 – 8 декабря 1894). Родился в с. Окатово Калужской губернии, ныне Калужской области.

Первоначальное образование получил дома; в 16 лет поступил в Московский университет и окончил его в 1841 г. В 1846 г. при Московском университете защитил магистерскую диссертацию. В 1847 г. переехал в Петербург, где в том же году защитил диссертацию при университете и начал чтение лекций по алгебре и теории чисел. В 1849 г. защитил докторскую диссертацию, удостоенную в том же году Петербургской АН Демидовской премии; в 1850 г. стал профессором Петербургского университета. Длительное время принимал участие в работе артиллерийского отделения военно-учёного комитета и учёного комитета Министерства народного просвещения. В 1882 г. прекратил чтение лекций в Петербургском университете и, выйдя в отставку, целиком занялся научной работой.

Чебышев П.Л. - основатель Петербургской математической школы, наиболее крупными представителями которой были А.Н. Коркин, Е.И. Золотарев, А.А. Марков, Г.Ф. Вороной, А.М. Ляпунов, В.А. Стеклов, Д.А. Граве.

Характерные черты творчества Чебышева П.Л. – разнообразие областей исследования, умение получить посредством элементарных средств большие научные результаты и неизменный интерес к вопросам практики.

Исследования Чебышева П.Л. относятся к теории приближения функций многочленами, интегральному исчислению, теории чисел, теории вероятностей, теории механизмов и многим другим разделам математики и смежных областей знания. В каждом из упомянутых разделов Чебышев П.Л. сумел создать ряд основных, общих методов и выдвинул идеи, наметившие ведущие направления в их дальнейшем развитии. Стремление увязать проблемы математики с принципиальными вопросами естествознания и техники в значительной мере определяет его своеобразие как учёного. Многие открытия Чебышева П.Л. навеяны прикладными интересами. Это неоднократно подчёркивал и сам Чебышев П.Л., говоря, что в создании новых методов исследования «... науки находят себе верного руководителя в практике» и что «... сами науки развиваются под влиянием ее: она открывает им новые предметы для исследования...» (Полн. собр. соч., т. 5, 1951, с. 150).

В теории вероятностей Чебышеву П.Л. принадлежит заслуга систематического введения в рассмотрение случайных величин и создание нового приёма доказательства предельных теорем теории вероятностей - т. н. метода моментов (1845, 1846, 1867, 1887). Им был доказан закон больших чисел в весьма общей форме. При этом его доказательство поражает своей простотой и элементарностью. Исследование условий сходимости функций распределения сумм независимых случайных величин к нормальному закону Чебышев П.Л. не довёл до полного завершения. Однако посредством некоторого дополнения методов Чебышева П.Л. это удалось сделать А.А. Маркову. Работы Чебышева П.Л. по теории вероятностей составляют важный этап в её развитии, кроме того, они явились базой, на которой выросла русская школа теории вероятностей, вначале состоявшая из непосредственных учеников Чебышева П.Л.

В теории чисел Чебышев П.Л., впервые после Евклида, существенно продвинул (1849, 1852) изучение вопроса о распределении простых чисел. Он доказал, что функция  $\pi(x)$  – число простых чисел, не превосходящих  $x$ , удовлетворяет неравенствам  $a \frac{x}{\ln x} < \pi(x) < b \frac{x}{\ln x}$ , где  $a < 1$  и  $b > 1$  – вычисленные Чебышевым П.Л. постоянные ( $a = 0,921$ ,  $b = 1,06$ ). Исследование расположения простых чисел в ряду всех целых чисел привело Чебышева П.Л. также к исследованию квадратичных форм с положительными определителями. Работа Чебышева П.Л., посвященная приближению чисел рациональными числами (1866), сыграла важную роль в развитии теории диофантовых приближений.

Наиболее многочисленны работы Чебышева П.Л. в области математического анализа. Ему была, в частности, посвящена диссертация на право чтения лекций, в которой Чебышев П.Л. исследовал интегрируемость некоторых иррациональных выражений в алгебраических функциях и логарифмах. Интегрированию алгебраических функций Чебышев П.Л. посвятил также ряд других работ.

Важное направление исследований по математическому анализу составляют его работы по построению общей теории ортогональных многочленов. Поводом к её созданию явилось параболическое интерполирование способом наименьших квадратов. К этому же кругу идей примыкают исследования Чебышева П.Л. по проблеме моментов и по квадратурным формулам. Имея в виду сокращение вычислений, Чебышев П.Л. предложил (1873) рассматривать квадратурные формулы с равными коэффициентами.

Чебышев П.Л. – основоположник так называемой конструктивной теории функций, основной составляющей элемент которой – теория наилучшего приближения функций. Простейшая постановка задачи Чебышева П.Л. такова (1854): дана непрерывная функция  $f(x)$ ; среди всех многочленов степени  $x$  найти такой  $P(x)$ , чтобы в данном промежутке  $[a, b]$  выражение  $\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P(x)|$  было возможно меньшим. Помимо указанного равномерного наилучшего приближения, Чебышев П.Л. рассматривал также квадратическое приближение, а помимо приближений алгебраическими многочленами, – приближение посредством тригонометрических полиномов и с помощью рациональных функций.

Теория машин и механизмов была одной из тех дисциплин, которыми Чебышев П.Л. систематически интересовался всю жизнь. Особенно многочисленны его работы, посвященные синтезу шарнирных механизмов, в частности параллелограмму Уатта (1861, 1869, 1871, 1879 и др.). Изучение параллелограмма Уатта и стремление усовершенствовать его натолкнуло Чебышева П.Л. на постановку задачи о наилучшем приближении функций.

Чебышев П.Л. оставил яркий след в развитии математики и собственными исследованиями, и постановкой соответствующих вопросов перед молодыми учёными. Так, по его совету А. М. Ляпунов начал цикл исследований по теории фигур равновесия вращающейся жидкости, частицы которой притягиваются по закону всемирного тяготения.

Труды Чебышева П.Л. ещё при жизни нашли широкое признание не только в России, но и за границей. Он был избран членом Берлинской АН (1871), Болонской АН (1873), Парижской АН (1874; член-корреспондент 1860), Лондонского королевского общества (1877), Шведской АН (1893) и почётным членом многих других русских и иностранных научных обществ, академий и университетов.

В честь Чебышева П.Л. АН СССР учредила в 1944 премию за лучшие исследования по математике [67, 68].

## ЭЙЛЕР Леонард (Leonhard Euler)



Леонард Эйлер (15.04.1707 – 18.09.1783) - немецкий и русский математик, механик и физик. Родился 15 апреля 1707 г. в Базеле. Учился в Базельском университете (1720-1724), где его учителем был Иоганн Бернулли. В 1722 г. получил степень магистра искусств. В 1727 г. переехал в Санкт-Петербург, получив место адъюнкт-профессора в недавно основанной Академии наук и художеств. В 1730 г. стал профессором физики, в 1733 г. - профессором математики. За 14 лет своего первого пребывания в Петербурге Эйлер опубликовал более 50 работ. В 1741-1766 г.г. работал в Берлинской академии наук под особым покровительством Фридриха II и написал множество сочинений, охватывающих по существу все разделы чистой и прикладной математики. В 1766 г. по приглашению Екатерины II Эйлер возвратился в Россию. Вскоре после прибытия в Санкт-Петербург полно-

стью потерял зрение из-за катаракты, но благодаря великолепной памяти и способностям проводить вычисления в уме до конца жизни занимался научными исследованиями: за это время им было опубликовано около 400 работ, общее же их число превышает 850.

Труды Эйлера свидетельствуют о необычайной разносторонности автора. Широко известен его трактат по небесной механике "Теория движения планет и комет" ("Theoria motus planetarum et cometarum", 1774), в котором особое внимание уделено теории движения Луны. Автор книг по гидравлике, кораблестроению, артиллерии. В 1739 г. Эйлер создает новую теорию музыки. Образцом популяризации науки является изложение Эйлером наиболее важных проблем естествознания в его "Письмах к одной немецкой принцессе о разных метафизических материях" ("Lettres a une Princesse d'Allemagne", 1768-1772). Работа ученого "Об усовершенствовании стеклянных очковых линз" ("Sur la Perfection des Verres Object des Lunettes", 1747) способствовала созданию ахроматических телескопов.

Наибольшую известность принесли Эйлеру исследования в области чистой математики. Современная тригонометрия с определением тригонометрических функций как отношений и с принятыми в ней обозначениями берет начало с эйлеровского "Введения в анализ бесконечных" ("Introductio in analysin infinitorum", 1748). Предпринятый в этой работе анализ кривых и поверхностей с использованием их уравнений позволяет рассматривать ее как первый учебник аналитической геометрии.

Следующее значительное сочинение Эйлера – "Дифференциальное исчисление" ("Institutiones calculi differentialis", 1755), а затем трехтомное "Интегральное исчисление" ("Institutiones calculi integralis", 1768-1774). Здесь не только рассматриваются разделы математики, вынесенные в названия книг, но и развивается теория обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных. Эйлеру принадлежит первое изложение вариационного исчисления, он является создателем теории специальных функций, известны его работы по теории чисел. Эйлер установил некоторые свойства аналитических функций, применил мнимые величины к вычислению интегралов, тем самым положив начало теории функций комплексного переменного. Умер Эйлер в Санкт-Петербурге 18 сентября 1783 года [69, 70].

**ЭРМИТ Шарль (Charles Hermite)**

ЭРМИТ Шарль (24.12.1822 – 14.01.1901) – французский математик. Родился 24 декабря 1822 г. в Дьёзе. Посещал коллеж Генриха IV. В 1841 г. поступил в лицей Людовика Великого, затем в Политехническую школу, которую окончил в 1847 г. С 1848 г. преподавал математику в Коллеж де Франс, с 1870 г. – профессор Высшей нормальной школы и Сорбонны. Член Парижской академии наук с 1856 г., Лондонского королевского общества – с 1873 г. Работы Эрмита посвящены теории чисел, алгебре и теории эллиптических функций. Он показал, как свести общее алгебраическое уравнение пятой степени к виду, разрешимому в эллиптических модулярных функциях. Изучил класс ортогональных многочленов (многочлены Эрмита), создал теорию инвариантов (совместно с Кэли и Сильверстом). Доказал трансцендентность числа  $e$  (1873); позднее немецкий математик Ф.Линдеман доказал методом, аналогичным методу Эрмита, трансцендентность

числа  $\pi$ . Известен труд Эрмита «О решении уравнения пятой степени» (Sur la resolution de l'equation du cinquieme degr, 1858). Умер Эрмит в Париже 14 января 1901 г. [71].

**ЯКОБИ Карл Густав Якоб (Jacobi Carl Gustav Jacob)**

Якоби Карл Густав Якоб (10.12.1804 – 18.02.1851.) – немецкий математик. Член Берлинской Академии наук. Брат физика и электротехника Б.С.Якоби. Родился и посещал школу в Потсдаме. В 16 лет поступил в Берлинский университет. Самостоятельно изучал труды Л.Эйлера, П.Лапласа, Ж.Лагранжа и классические языки. В 1825 г., защитив диссертацию по вопросу разложения алгебраических дробей на простейшие, получил степень доктора философии. В 1826-1842 г.г. работал в Кенигсбергском университете, затем принял приглашение на академическую работу в Берлине. В 1827-1843 г.г. – профессор Альбертины, где развил теорию эллиптических функций и провёл важные исследования в области дифференциальных уравнений, аналитической и небесной механики. Якоби – один из создателей теории эллиптических функций. Он ввел и изучил тета-функции и

некоторые другие трансцендентные функции. Применил теорию эллиптических функций к изучению движения волчка, исследованию геодезических линий на эллипсоиде и другим задачам, сделал важные открытия в области теории чисел, линейной алгебры, вариационного исчисления и теории дифференциальных уравнений, в особенности в теории уравнений 1-го порядка с частными производными; исследовал дифференциальные уравнения динамики и дал ряд новых методов их решения; ввел в употребление функциональные определители и указал на их роль при замене переменных в кратных интегралах и при решении уравнений с частными производными; исследовал один из классов ортогональных многочленов, являющихся обобщением многочленов Лежандра. С именем Якоби связаны теоремы, функции (в частности, тета-функции и эллиптические функции), тождества, уравнения, формулы, интеграл, кривая, матрица, детерминант, радикал, символ.

В 30-40-х г.г. XIX в. Якоби поддерживал тесную связь с русскими математиками М. В. Остроградским, М. А. Тихомандрицким. В 1844 г. вернулся в Берлин [72].

С.А. Прохоров, И.М. Куликовских

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ  
ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ  
Лабораторный практикум

Компьютерный набор и верстка: С.А. Прохоров, И.М. Куликовских  
Лицензия ЛР № 040910 от 10.08.98

Подписано в печать. Формат  
Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л.  
Тираж 100 экз. Заказ №

Самарский научный центр Российской академии наук.  
443001, Самара, Студенческий переулок, 3 А.