МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

**В. Л. БАЛАКИН, Т.А. БАЯНДИНА**

# Оптимальное управление летательными аппаратами

Электронный курс лекций

С А М А Р А

2013

УДК 629.78 (075)

ББК 39.6я7

Б 20

Авторы: Балакин Виктор Леонидович, Баяндина Тамара Александровна

Компьютерная вёрстка Т.А. Баяндина

**Балакин В.Л., Баяндина Т.А. Оптимальное управление летательными аппаратами** [Электронный ресурс] : электрон. курс лекций / В.Л. Балакин, Т.А. Баяндина; Минобрнауки России, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королёва (Нац. исслед. ун-т). - Электрон. текстовые и граф. дан. (1,01 Мбайт). - Самара, 2013. - 1 эл. опт. диск (CD-ROM). - Систем. требования: ПК Pentium; Windows 98 или выше.

Излагается конспект лекций по дисциплине «Оптимальное управление летательными аппаратами» по дистанционной форме обучения, который выполнен на основе соответствующей рабочей программы.

Данный научно – образовательный контент разработан в обеспечение учебной подготовки магистров факультета летательных аппаратов по направлению 161100.68 – Системы управления движением и навигация по мероприятиям блока 1 «Совершенствование образовательной деятельности» Программы развития Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва».

Подготовлено на кафедре космического машиностроения.

## Предисловие

В предлагаемом курсе лекций рассматриваются вопросы, связанные с оптимальным управлением движения летательных аппаратов.

Разнообразие существующих и разрабатываемых летательных аппаратов делает невозможным сколько-нибудь полное изложение данного вопроса в одном каком-либо учебнике, не говоря уже о курсе лекций.

Учитывая, что курс лекций предназначен для студентов, обучающихся по магистерской программе «Системы управления движением и навигация», авторы сочли целесообразным уделить основное внимание оптимальному управлению применительно к объектам ракетно-космической и аэрокосмической техники.

За основу излагаемого материала взято учебное пособие В.А. Иванова, Н.В. Фалдина «Теория оптимальных систем автоматического управления», которое сочетает строгость изложения материала с разнообразными примерами [1].

Поэтому курс лекций определён материалом учебного пособия с сохранением обозначений и математических соотношений последнего. Это облегчит студентам пользование учебником при необходимости изучения тех вопросов, которые не вошли в курс лекций.

Профессор, доктор технических наук Балакин В.Л.

Доцент, кандидат технических наук Баяндина Т.А.

# 1 Понятие об оптимальном управлении

## 1.1 Постановка задачи оптимального управления

В общем случае автоматическая система состоит из объекта управления, например летательного аппарата (ЛА), и совокупности устройств, которые обеспечивают управление этим объектом. Совокупность устройств включает в себя измерительные устройства, усилительные и преобразовательные устройства, исполнительные устройства. Если объединить устройства в одно звено (*управляющее устройство*), то структурная схема системы выглядит следующим образом (рисунок 1.1):

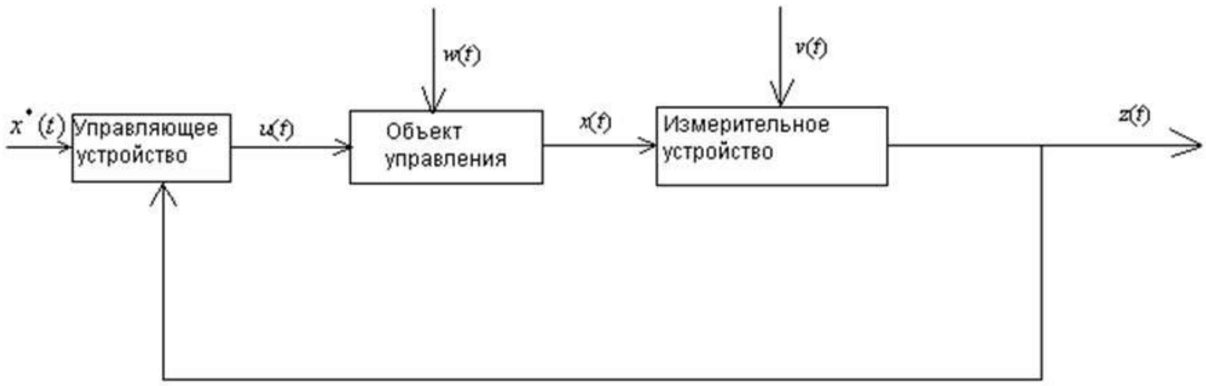


Рисунок 1.1

Информация о состоянии объекта управления через измерительное устройство поступает на вход управляющего устройства. Такие системы называются системами с обратной связью или *замкнутыми* системами. Отсутствие информации в алгоритме управления говорит о том, что система *разомкнута*. Состояние объекта управления в любой момент времени будем описывать переменными, которые называются координатами системы или *переменными состояния* - координатами $n$ - мерного *вектора состояния* $\boldsymbol{x}(t) = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$.

Измерительное устройство выдаёт информацию о состоянии объекта. Если по *вектору измерения* $\boldsymbol{z}(t)$ могут быть найдены значения всех переменных состояния $x_i(t)$, то система *полностью наблюдаема*. Если некоторые из координат состояния $x_i(t)$ не могут быть найдены при известном значении вектора $\boldsymbol{z}(t)$, то система будет *неполностью наблюдаемой*.

Управляющее устройство вырабатывает *управляющее воздействие* $\boldsymbol{u}(t)$. Управляющих воздействий может быть несколько, и они образуют $r$ - мерный управляющий вектор $\boldsymbol{u}(t) = \{u_1(t), \dots, u_n(t)\}$. .

На вход управляющего устройства поступает *задающее воздействие* $\boldsymbol{x}^*(t)$, которое несёт информацию о том, каково должно быть состояние объекта. На объект управления может действовать *возмущающее воздействие* $\boldsymbol{w}(t)$, которое представляет собой нагрузку или помеху. Измерение координат объекта может осуществляется с некоторыми погрешностями $\boldsymbol{v}(t)$, которые носят случайный характер и называются *шумами измерения*.

Задачей управляющего устройства является выработка управляющего воздействия $\boldsymbol{u}(t)$, которое обеспечивает требуемое качество функционирования системы.

Будем рассматривать такие объекты управления, которые являются *управляемыми*. Это означает, что вектор состояния можно изменять требуемым образом путём соответствующего изменения вектора управления. Будем считать, что объект полностью наблюдаемый.

Например, положение летательного аппарата характеризуется шестью координатами состояния: $x_ц$, $y_ц$, $z_ц$ - координаты центра масс; $\Psi$, $\vartheta$, $\gamma$ - углы, определяющие его поворот относительно неподвижной системы координат с началом в центре масс. Положение ЛА можно изменить с помощью органов управления (рулей высоты и направления), а также изменением вектора тяги, как по величине, так и по направлению. Таким образом, управляющий вектор может быть представлен в виде:

$$\boldsymbol{u}(t) = \{\delta_{в}, \delta_{н}, \delta_{э}, \boldsymbol{P}\},$$

где $\delta_{в}$ - отклонение рулей высоты; $\delta_{н}$ – отклонение рулей направления; $\delta_{э}$ – отклонение элеронов; $\boldsymbol{P}$ – вектор тяги.

Вектор состояния определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{x} = \{x_{ц}, y_{ц}, z_{ц}, \Psi, \vartheta, \gamma\}.$$

Можно поставить задачу определения управления, с помощью которого ЛА переводится из заданного начального состояния $\boldsymbol{x}^0$ в заданное конечное состояние $\boldsymbol{x}^1$ с минимальными затратами топлива или за минимальное время.

Дополнительная сложность при решении технических задач возникает из-за того, что на управляющее воздействие и на координаты состояния объекта управления накладываются ограничения. В рассматриваемом примере ограничены по абсолютной величине отклонения органов управления $|\delta_{в}| \leq A_1$, $|\delta_{н}| \leq A_2$, $|\delta_{э}| \leq A_3$, величина тяги $|\boldsymbol{P}|$. На координаты состояния объекта управления и их производные также накладываются ограничения, которые связаны с допустимыми перегрузками, прочностью конструкции ЛА и т.д.

Рассмотрим математическую постановку задачи оптимального управления. Неизмеряемые внешние воздействия ***w**(t)* и ***v**(t)* не будем учитывать и ограничимся рассмотрением объектов управления, поведение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Пусть уравнения, описывающие поведение объекта, имеют вид

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r), \qquad i = \overline{1,n} \tag{1.1}$$

или в векторной форме

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}),$$

где $\boldsymbol{x}$ – вектор состояния объекта, $\boldsymbol{u}$ – вектор управления, $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ – векторная функция, координатами которой являются правые части уравнений (1.1).

На вектор управления $\boldsymbol{u}$ накладываются ограничения. Его значения принадлежат замкнутой области $U$ $r$- мерного пространства управления, так что в любой момент времени $\boldsymbol{u} \in U$. Например, если координаты вектора управления удовлетворяют неравенствам

$$-1 \le u_j \le 1, \qquad j = \overline{1,r},$$

то область управления $U$ является $r$- мерным кубом.

Назовём *допустимым управлением* кусочно-непрерывную функцию $\boldsymbol{u}(t)$, значения которой в каждый момент времени $t$ принадлежит области управления $U$ и которая может иметь разрывы первого рода. Для того, чтобы выбрать управление $\boldsymbol{u}(t)$ как функцию времени и начального состояния системы $\boldsymbol{x}^0$, которое однозначно определяет движение объекта управления, необходимо, чтобы система уравнений (1.1) удовлетворяла условиям теоремы существования и единственности решения в той области пространства $X \times U$, в которой расположены возможные траектории движения объекта и допустимые управления. Если область изменения переменных является выпуклой, то для существования и единственности решений достаточно, чтобы функции $f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ были непрерывны по всем аргументам и имели непрерывные частные производные по переменным $x_i$, $(i = \overline{1,n})$.

В качестве критерия, который характеризует качество процесса управления, определим функционал

$$I(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x,u)dt. \qquad (1.2)$$

Относительно функции $f_0(x,u)$ предполагаем, что она непрерывна по всем аргументам и имеет непрерывные частные производные по $x_i$ $(i = \overline{1,n})$.

Основную задачу определения оптимального управления сформулируем следующим образом: *В фазовом пространстве X заданы начальное* $\boldsymbol{x}^{\circ}$ *и конечное* $\boldsymbol{x}^1$ *состояния объекта управления. Среди всех допустимых управлений* $\boldsymbol{u}(t)$*, для которых соответствующие траектории системы* (1.1) *проходят через начальное и конечное состояние, необходимо выбрать такое, для которого функционал (1.2) принимает минимальное значение.*

$\boldsymbol{x}(t)$—решение системы уравнений (1.1) с начальными условиями $x(t_o) = \boldsymbol{x}^{\circ}$, соответствующее управлению $\boldsymbol{u}(t)$; $t_1$ - момент времени, для которого $x(t_1) = \boldsymbol{x}^1$.

Второй важной задачей оптимального управления является *синтез оптимального регулятора,* т. е. определение оптимального управления $\boldsymbol{u}$ как функции либо вектора наблюдения $\boldsymbol{z}$, либо вектора состояния объекта $\boldsymbol{x}$.

В дальнейшем будем считать объект управляемым и наблюдаемым. В силу ограничений, накладываемых на допустимые управления, сформулированные выше задачи оптимального управления не решаются, как правило, методами классического вариационного исчисления, хотя основная задача и является типичной задачей на условный экстремум. Для решения задач оптимального управления используются разработанный Л.С. Понтрягиным[1] и его сотрудниками принцип максимума и метод динамического программирования, предложенный Р. Беллманом[2].

## 1.2 Критерии оптимизации

В зависимости от вида подынтегральной функции $f_0(x,u)$ функционала (1.2) могут быть получены различные критерии оптимизации, применяемые в практике проектирования оптимальных автоматических систем.

[1] Понтрягин Лев Семёнович (1908-1988), математик. Труды по математической теории оптимальных процессов, в которой создал научную школу.

[2] Беллман Ричард Эрис (1920-1984), американский математик.

Одним из наиболее распространённых критериев является *время переходного процесса* объекта управления, т.е. ЛА, из начального состояния $\boldsymbol{x}^{\circ}$ в конечное $\boldsymbol{x}^{1}$. Этот критерий представляет собой частный случай функционала (1.2) при $f_0(x,u) \equiv 1$. Тогда

$$I(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0. \tag{1.3}$$

Широко применяется при синтезе оптимальных автоматических систем так называемый «*квадратичный*» критерий. Подынтегральная функция функционала (1.2) представляет собой квадратичную форму координат состояния объекта и управляющих воздействий. В ряде случаев функционал содержит еще и слагаемое, которое учитывает конечное состояние системы. Таким образом, квадратичный критерий записывается в виде

$$I(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} (x^{\text{т}}Q(t)x + u^{\text{т}}R(t)u)dt + x^{\text{т}}(t_1)Fx(t_1), \tag{1.4}$$

где $Q(t)$, $R(t)$, $F$ - симметрические матрицы размера соответственно ($n$x$n$), ($r$x$r$), ($n$x$n$); индекс «т» означает операцию транспонирования.

Выбор элементов матриц $Q(t)$, $R(t)$ и $F$ определяет такие технические показатели качества систем автоматического управления, как перерегулирование, время переходного процесса и т. д. Существует методика синтеза линейных систем автоматического управления по квадратичному критерию (1.4), которая даёт возможность получить структуру и параметры оптимального регулятора, т. е. решить задачу синтеза.

Имеется и функционал другого вида, который позволяет учесть расход рабочего тела на управление

$$I(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{r} \beta_j |u_j| \, dt, \tag{1.5}$$

где $\beta_j \geq 0, j = \overline{1,r}$ - некоторые весовые коэффициенты. Задачи, в процессе решения которых минимизируется функционал (1.5), называются *задачами оптимизации систем управления по расходу топлива.* Такие задачи возникают при управлении ЛА, когда существенным является экономное расходование ограниченного количества топлива, имеющегося на борту.

Иногда рассматривают задачу минимизации функционала, который представляет собой комбинацию функционалов (1.3) и (1.5) и позволяет учесть как время переходного процесса, так и расход топлива

$$i(x,u)=\int_{t_0}^{t_1}\left(k+\sum_{j=1}^{r}\beta_j|u_j|\right)dt, \qquad (1.6)$$

где $k>0, \beta_j\geq 0, j=\overline{1,r}$.

Выбор того или иного функционала определяется показателями ЛА и условиями работы проектируемой системы автоматического управления ЛА и во многом зависит от интуиции и опыта инженера-проектировщика. Сложность математической модели объекта управления приводит к необходимости выбора такого критерия оптимизации, для которого возможно выполнить синтез оптимального регулятора без существенной потери качества за счет упрощения задачи. Решив задачу синтеза для выбранного критерия оптимизации, необходимо проверить в дальнейшем, удовлетворяет ли спроектированная таким образом система заданным показателям качества и возможностям практической реализации системы.

## 2 Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем

Принцип максимума определяет необходимые условия оптимальности управления в нелинейных системах. Он распространяется и на случай, когда на координаты состояния системы накладываются ограничения. Рассмотрим основную теорему принципа максимума и дадим формулировку оптимального управления.

Пусть объект управления описывается системой уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_r), \qquad i=\overline{1,n} \qquad (2.1)$$

или в векторной форме

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}),$$

где $x=(x_1,\dots,x_n)$ - вектор координат состояния, $u=(u_1,\dots,u_r)$ - вектор управления.

Вектор управления принимает значения из некоторой замкнутой области $U$ $r$-мерного пространства управлений. Функции $f_i(x,u)$ непрерывны по всем аргументам и имеют непрерывные частные производные по зависимым переменным $x_i$. Назовем *допустимыми* управления $u_j(t)$, которые являются кусочно-непрерывными функциями времени и принимают значения из области $U$.

Основная задача оптимального управления формулируется следующим образом: *среди всех допустимых управлений, переводящих изображающую точку в фазовом пространстве системы $X$ из начального положения $x^\circ$ в конечное $x^1$, требуется найти такое управление, для которого функционал*

$$I(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x,u)dt \tag{2.2}$$

*достигает минимума.*

Введём в рассмотрение новую координату состояния $x_0$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}), \tag{2.3}$$

где $f_0(x,u)$ — подынтегральная функция в (2.2). Присоединив (2.3) к (2.1), получим систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_r), \qquad i = \overline{1,n}. \tag{2.4}$$

Запишем систему (2.4) в векторной форме, для чего введем в рассмотрение $n+1$ мерный вектор координат состояния $\bar{\boldsymbol{x}} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$. В векторной форме (2.4) примет вид

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{x}}}{dt} = \bar{f}(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}), \tag{2.5}$$

где $\bar{f}(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}) = \{f_0(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}), f_1(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}), \dots, f_n(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u})\}$ - вектор правых частей в (2.4).

Вектор-функция $\bar{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ не зависит от координаты $x_0$ вектора $\bar{\boldsymbol{x}}$. Обозначим через $\overline{\boldsymbol{x}^0}$ точку (0, $\boldsymbol{x}^0$) в $n$ +1-мерном фазовом пространстве $\bar{X}$. Пусть $\boldsymbol{u}(t)$ - допустимое управление, для которого соответствующая фазовая траектория системы (2.1) проходит при $t = t_o$ через точку $\boldsymbol{x}^0$, а при $t = t_1$ - через точку $\boldsymbol{x}^1$. Из уравнения (2.3) следует

$$x_0 = \int_{t_0}^{t} f_0(\boldsymbol{x}(\tau),\ \boldsymbol{u}(\tau))d\tau.$$

При $t = t_1$ эта координата

$$x_0(t_1) = \int_{t_0}^{t} f_0(\boldsymbol{x}(\tau),\ \boldsymbol{u}(\tau))d\tau = I(x, \boldsymbol{u}).$$

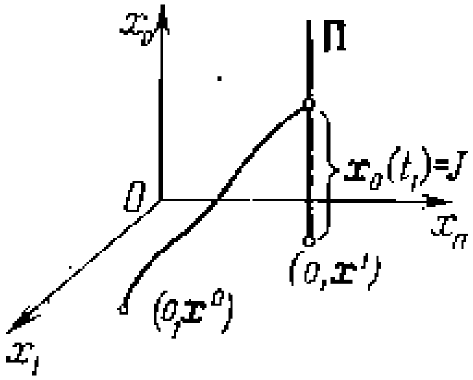


Рисунок 2.1

Таким образом, в пространстве $\bar{X}$ фазовая траектория системы (2.5), соответствующая управлению $\boldsymbol{u}(t)$, проходит при $t = t_0$ через точку (0, $\boldsymbol{x}^0$), а при $t = t_1$ — через точку $\overline{\boldsymbol{x}^1} = (I, x^1)$ (рис. 2.1).

Обозначим через *П* прямую в пространстве $\bar{X}$, проходящую через точку (0, $\boldsymbol{x}^1$) параллельно оси $x_0$ и основную задачу оптимального управления сформулируем следующим образом. *В n + 1-мерном пространстве* $\bar{X}$ *заданы начальная точка* $\overline{x^0} = (0, x^0)$ *и прямая П, параллельная оси* $x_0$ *и проходящая через точку (0,* $\boldsymbol{x}^1$*); среди всех допустимых управлений, обладающих тем свойством, что соответствующее решение системы (2.5) с начальным условием* $\bar{x}(t_0) = \overline{x^0}$ *проходит при* $t = t_1$ *через точку* $\overline{x^1}$ *прямой П, выбрать такое управление, для которого координата* $x_0^1$ *точки* $\overline{x^1}$ *имела бы минимальное значение.*

Сформулированная задача представляет собой задачу Майера[3] на условный экстремум, которая в силу ограничений, накладываемых на допустимое управление, не решается методами классического вариационного исчисления.

Перейдём к формулировке теоремы, дающей необходимые условия экстремума. Введём в рассмотрение вспомогательные переменные $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f_i(\bar{x}, u)}{\partial x_i} \psi_j,\ \ j = \overline{0, n}. \tag{2.6}$$

Система уравнений (2.6) называется *сопряжённой* по отношению к системе (2.5).

Если выбрать некоторое допустимое управление $\boldsymbol{u}(t)$ на отрезке [0, $t_1$] и найти

[3] Майер Фридрих Кристофор (1697-1729), немецкий математик и философ. Занимался математикой и астрономией, основные труды по геометрии.

соответствующее ему решение $\bar{x}(t)$ с начальным условием $\bar{x}(t_0) = \overline{x^0}$, то при подстановке в систему уравнений (2.6) управления $\boldsymbol{u}(t)$ и решения $\bar{x}(t)$ получим линейную однородную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f_i(\bar{x}(t), u(t))}{\partial x_i} \psi_j, \;\; j = \overline{0, n}. \tag{2.7}$$

Система уравнений (2.7) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения.

Системы уравнений (2.5) и (2.6) можно объединить одной формой записи, введя в рассмотрение функцию $\mathcal{H}$ переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r, \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$:

$$\mathcal{H}(\bar{\psi}, \bar{x}, u) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i(\bar{x}, u) = \left(\bar{\psi}, \bar{f}(\bar{x}, u)\right), \tag{2.8}$$

где $\bar{\psi} = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n)$. Системы уравнений (2.5) и (2.6) можно записать в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_i}, \;\; i = \overline{0, n}, \tag{2.9}$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}, \;\; i = . \tag{2.10}$$

Вектор-функции $\bar{x}(t)$ и $\bar{\psi}(t)$ непрерывны и всюду, кроме точек разрыва допустимого управления *u(t),* имеют непрерывные производные.

При фиксированных значениях $\bar{x}(t)$ и $\bar{\psi}(t)$ функция $\mathcal{H}$ становится функцией только управления $\boldsymbol{u}$. Обозначим

$$\mu(\bar{\psi}, \bar{x}) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(\bar{\psi}, \bar{x}, u).$$

Если точная верхняя грань достигается, то

$$\mu(\bar{\psi}, \bar{x}) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(\bar{\psi}, \bar{x}, u).$$

**Теорема.** *Пусть u(t),* $t_0 \le t \le t_1$, *- такое допустимое управление, что соответствующая ему фазовая траектория* $\bar{x}(t)$, *исходящая при t = $t_0$ из точки* $\overline{x^0}$, *проходит в момент t = $t_1$ через некоторую точку прямой П. Для оптимальности управления **u**(t) и траектории* $\bar{x}(t)$ *необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции* $\bar{\boldsymbol{\psi}}(t)$, *соответствующей функциям **u**(t) и* $\bar{x}(t)$, *что*

1) *при любом* $t \in [t_0, t_1]$ *функция* $\mathcal{H}(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), u(t))$ *достигает по **u**(t) максимума*

$$\mathcal{H}(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), u(t)) = \mu\left(\bar{\psi}, \bar{x}(t)\right); \qquad (2.11)$$

2) *в конечный момент времени $t_1$ имеют место соотношения*

$$\psi_0(t_1) \le 0, \ \ \mu\left(\bar{\psi}(t_1), \bar{x}(t_1)\right) = 0. \qquad (2.12)$$

Можно показать, что если вектор-функции $\bar{\psi}(t), \bar{x}(t)$ и $u(t)$ удовлетворяют системам уравнений (2.9), (2.10) и условию (2.11), то функции $\psi_0(t)$ и $\mu\left(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t)\right)$ являются постоянными, и проверку соотношений (2.12) можно проводить в любой момент времени $t \in [t_0, t_1]$.

Если начальная $x^\circ$ и конечная $x^1$ точки не фиксированы в пространстве *X*, а принадлежат соответственно начальному многообразию $M_0$ размерности $r_0$ и конечному многообразию $M_1$ размерности $r_1$, то к условиям теоремы необходимо добавить условие *трансверсальности* в начальной и конечной точках. А $n$-мерная вектор-функция $\boldsymbol{\psi}(t) = \{\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)\}$ удовлетворяет условию трансверсальности в начальной (конечной) точке траектории, если вектор $\psi(t_0)$ $(\psi(t_1))$ ортогонален касательной плоскости, проведённой к многообразию $M_0(M_1)$ в точке $x^\circ(x^1)$. Если концы траектории не фиксированы, то вектор-функция $\psi(t)$ помимо условий 1 и 2 теоремы должна удовлетворять также условиям трансверсальности.

Условия трансверсальности позволяют получить $r_0+r_1$ соотношений между координатами начальной $\boldsymbol{x}^\circ$ и конечной $\boldsymbol{x}^1$ точек. Добавим к ним $n$-$r_0$ и $n$-$r_1$ соотношений из условия расположения точек $\boldsymbol{x}^0$ и $\boldsymbol{x}^1$ на многообразиях $M_0$ и $M_1$, и получим систему соотношений для решения оптимальной задачи с подвижными границами.

Покажем, что принцип максимума позволяет из всех траекторий, начинающихся в точке $\boldsymbol{x}^\circ$ и проходящих через точку $\boldsymbol{x}^1$, выделить лишь отдельные, удовлетворяющие сформулированным необходимым условиям. Эти отдельные изолированные траектории могут оказаться оптимальными, так как принцип максимума даёт лишь необходимые условия оптимальности.

Всего в формулировке принципа максимума имеются *2n*+2+*r* неизвестных функций $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r, \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$ и столько же соотношений. Уравнение (2.11) даёт *r* соотношений между неизвестными функциями. Если точка ***u(t)*** является внутренней точкой области *U*, то для выполнения условия максимума необходимо обращение в нуль *r* частных производных:

$$\left.\frac{\partial \mathcal{H}(\bar{\psi}, \bar{x}, u)}{\partial u_j}\right|_{u=u(t)} = 0, \qquad j = \overline{1, r},$$

что даёт *r* соотношений между неизвестными функциями.

Если же точка ***u(t)*** лежит, например, на *r-1*-мерной грани области *U* (один из управляющих параметров $u_j$ принимает предельное значение), то должно выполняться условие принадлежности точки *u(t)* этой грани (одно соотношение) и для выполнения условия максимума функции $\mathcal{H}$ должны обращаться в нуль частные производные функции $\mathcal{H}(\bar{\psi}, \bar{x}, u)$ по всем направлениям этой грани, т.е. по всем остальным управлениям $u_k$ - *r-1* соотношений. Поэтому во всех случаях можно считать, что если область управления *U* является *r*- мерной, то условие максимума даёт *r* соотношений между неизвестными функциями. Эти соотношения являются конечными и не содержат производных от неизвестных функций.

Помимо соотношения (2.11) имеются системы из *2n +2* уравнений (2.9) и (2.10). Следовательно, всего имеется *2n*+2+*r* соотношений (2.9), (2.10), (2.11) для определения *2n*+2+*r* неизвестных $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r, \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$.

Общее решение систем уравнений (2.9) и (2.10) содержит *2n*+2 произвольных постоянных. Одна из них является несущественной, так как функция $\mathcal{H}(\bar{\psi}, \bar{x}, u)$ является линейной и однородной функцией переменных $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$ и соотношения (2.10), (2.11), (2.12) не изменяются при умножении всех переменных $\psi_i$ на одну и ту же постоянную величину.

Одна из постоянных может быть определена из условия, что при $t = t_1$ $\mathcal{H}(\bar{\psi}, \bar{x}, u) = 0$. С учётом изложенного решение системы (2.9), (2.10), (2.11) зависит от *2n* параметров. Их нужно подобрать так, чтобы при $t=t_0$ траектория $\bar{x}(t)$ проходила через точку $\bar{x}^0$, а при $t=t_1$ - через точку прямой *П*. Число $t_1$-$t_0$ также является параметром. Всего имеется *2n+1* неизвестных параметров. Условия прохождения траектории через точку $\bar{x}^0$ и прямую *П* дают *2n+1* соотношений. Поэтому могут быть отдельные изолированные траектории, соединяющие точку $\boldsymbol{x}^\circ$ с прямой *П* и удовлетворяющие требованиям теоремы принципа максимума. Если условиям теоремы удовлетворяет единственная траектория и из физических соображений ясно, что оптимальная траектория существует, то найденная траектория и будет являться оптимальной.

# 3 Метод динамического программирования

## 3.1 Принцип оптимальности

Метод динамического программирования предназначен для решения задач оптимального управления. Впервые этот метод был применен для дискретных систем управления, а затем был распространён и на непрерывные системы.

В основе метода динамического программирования лежит *принцип оптимальности.* Приведём формулировку этого принципа в форме, которая была предложена автором метода динамического программирования, американским математиком Р. Беллманом.

Пусть имеется некоторая система, которая характеризуется $n$ параметрами, называемыми *параметрами состояния.* Эта система подвержена многошаговому процессу. На каждом шаге принимается *решение,* в результате которого параметры состояния изменяются. Рассматриваются системы, для которых предыстория не имеет значения для определения будущих действий. Это условие выполняется для достаточно широкого класса физических систем, в частности, для ЛА, поведение которых описывается разностными и обыкновенными дифференциальными уравнениями.

*Целью многошагового процесса является выбор такой последовательности решений, для которой некоторая функция параметров состояния системы, достигает экстремального (минимального или максимального) значения.* Любое правило принятия решений назовем *стратегией*. Для *оптимальной стратегии* функция параметров состояния системы имеет экстремальное значение.

В качестве примера многошагового процесса рассмотрим изменение $n$-мерного вектора $\boldsymbol{x}(k)$, описываемое разностным уравнением

$$\boldsymbol{x}(k+1) = f\big(\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k)\big), \tag{3.1}$$

где $\boldsymbol{x}$ -$n$-мерный вектор состояния, $\boldsymbol{u}$ -$r$-мерный вектор управления.

Если задать начальное значение вектора состояния $x(0)=x_0$ и для каждого значения $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ выбирать управление $\boldsymbol{u}(k)$ (определять некоторую стратегию), то разностное уравнение (3.1) задаёт многошаговый процесс $x(0), x(1), \dots, x(N)$. Если $N=\infty$, то процесс будет *бесконечношаговым.* Функция параметров состояния, которая минимизируется для рассматриваемого процесса может быть выбрана в виде

$$I\big(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k)\big)=\sum_{k=0}^{N-1}G_k\big(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k)\big). \qquad (3.2)$$

Для многошагового процесса справедлив следующий принцип оптимальности.

*Оптимальная стратегия обладает тем свойством, что каково бы ни было первоначальное состояние и решение в начальный момент, последующие решения должны составлять оптимальную стратегию относительно состояния, полученного в результате первого решения.*

Отметим, что многошаговые процессы имеют широкое применение. Каждый непрерывный процесс можно представить как многошаговый, если рассматривать значения процесса в дискретные моменты времени. Покажем это. Пусть некоторый непрерывный процесс $\boldsymbol{x}(t)$ описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}),$$

причем $x(0) = x^\circ$, $0 \le t \le T$.

Разбивая промежуток [0, $T$] на $N$ равных частей и полагая $T = \Delta N$ ($\Delta$ - достаточно малая величина), можно перейти от системы дифференциальных уравнений к системе разностных уравнений

$$\boldsymbol{x}[(k+1)\Delta]=\boldsymbol{x}(k\Delta)+f[\boldsymbol{x}(k\Delta),\boldsymbol{u}(k\Delta)]\Delta,$$

где через $k\Delta$ обозначено текущее время $t$, взятое в дискретные моменты времени: $k = 0, 1, ..., N$.

Качество многошагового процесса может характеризоваться различными функционалами. Помимо функционала вида (3.2) могут применяться и другие функционалы

$$I\big(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k)\big)=\prod_{k=0}^{N-1}G_k\big(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k)\big);$$

$$I\big(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k)\big)=\max_k G_k\big(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k)\big);$$

$$I\big(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k)\big)=\sum_{k=0}^{N-1}G_k\big(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k)\big)+\varphi\big(\boldsymbol{x}(N)\big).$$

Последний из функционалов отличается от функционала (3.2) лишь наличием слагаемого $\varphi\big(\boldsymbol{x}(N)\big)$, которое учитывает конечное состояние системы.

Проиллюстрируем принцип оптимальности на примере непрерывной задачи. Пусть управляемый объект описываете векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \tag{3.3}$$

где *x*-$n$ -мерный вектор координат состояния, *u* - $r$-мерный вектор управления.

Требуется определить такое управление ***u****(t),* переводящее заданное начальное состояние $x(0)=x_0$ в конечное состояние $x(T)=x_т$, чтобы для этого управления и соответствующей ему траектории системы ***x****(t)* функционал

$$I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \int_0^T G\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\big)dt$$

достигал бы минимума.

Конечное время $T$ полагается фиксированным, а конечное состояние $x(T)$ - произвольным. Пусть $\bar{\boldsymbol{u}}(t)$ - оптимальное управление и $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$- соответствующая ему оптимальная фазовая траектория в $n$-мерном пространстве (рис. 3.1). Выберем произвольную точку $\bar{\boldsymbol{x}}(t_1)$ на траектории ($0 < t_1 < T$). Эта точка разобьёт фазовую траекторию на два участка. Первому участку соответствует значение функционала $I_1 = \int_0^{t_1} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})dt$, второму - $I_2 = \int_{t_1}^{T} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})dt$. Второй участок можно рассматривать и как самостоятельную фазовую траекторию с начальным значением $\bar{\boldsymbol{x}}_1 = \bar{\boldsymbol{x}}(t_1)$. Она будет оптимальной, если функционал $I_2$ достигает на ней минимума. Принцип оптимальности утверждает, что участок 2 оптимальной траектории также является оптимальной траекторией. Следовательно, независимо от того, каким образом система попадает в точку $\bar{\boldsymbol{x}}_1$, её дальнейшее оптимальное движение будет по траектории 2 (рис. 3.1). Покажем это. Пусть существует траектория 2', для которой функционал $I_2$ имеет меньшее значение, чем для траектории 2. Тогда можно построить траекторию 1—2', для которой функционал $I$ будет иметь меньшее значение, чем для траектории 1—2. Но это невозможно, так как функционал $I$ достигает минимума на траектории 1—2.

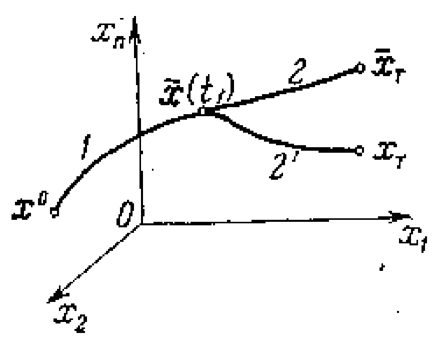


Рисунок 3.1

## 3.2 Оптимальное управление дискретными системами

Рассмотрим задачу оптимального управления дискретной системой регулирования. Пусть объект регулирования описывается разностным уравнением (3.1).

Начальное состояние вектора состояния $\boldsymbol{x}$ задано: $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$.

Требуется выбрать такое управление $\boldsymbol{u}(k)$, $k$=0, 1, …, $N$—1), чтобы на соответствующем ему решении уравнения (3.1) функционал

$$I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \sum_{k=0}^{N-1} G_k\big(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k)\big) + \varphi\big(\boldsymbol{x}(N)\big) \qquad (3.4)$$

достигал минимума.

Вектор управления $\boldsymbol{u}(k)$ принадлежит некоторой замкнутой области $U$ пространства управлений.

Таким образом, имеется задача выбора оптимальной стратегии в многошаговом процессе, определяемом разностным уравнением (3.1). К этой задаче, как показано выше, может быть сведена и задача выбора оптимального управления $\boldsymbol{u}(t)$ для объекта, описываемого векторным дифференциальным уравнением (3.3), а оптимальность понимается в смысле минимума функционала

$$I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \int_0^T G(\boldsymbol{x},u)dt + \varphi\big(\boldsymbol{x}(T)\big).$$

Поставленная задача может быть решена как задача на условный экстремум функции $rN$ переменных $I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ при наличии уравнения (3.1). Однако такое решение очень громоздко из-за наличия большого числа переменных. Метод динамического программирования позволяет свести задачу к последовательной минимизации функции $r$ переменных.

Допустим, что все значения оптимального управления $\boldsymbol{u}(k)$, кроме последнего, найдены и система находится в состоянии $x(N$—1). Согласно принципу оптимальности управление $u(N$—1) должно быть также оптимальным. Это управление должно доставлять минимум функционалу (3.4), который для последнего участка траектории имеет вид

$$I_{N-1}\big(\boldsymbol{x}(N-1),\boldsymbol{u}(N-1)\big) = G_{N-1}[\boldsymbol{x}(N-1),\boldsymbol{u}(N-1)] + \varphi[\boldsymbol{x}(N)]. \qquad (3.5)$$

Обозначим

$$S_{N-1}(\boldsymbol{x}(N-1)) = \min_{u(N-1)\in U} I_{N-1}(\boldsymbol{x}(N-1), \boldsymbol{u}(N-1)). \qquad (3.6)$$

Подставив в (3.5) значение $\boldsymbol{x}(N)$ из уравнения (3.1), получим

$$S_{N-1}(\boldsymbol{x}(N-1)) = \min_{u(N-1)\in U}\{G_{N-1}[\boldsymbol{x}(N-1), \boldsymbol{u}(N-1)] + \varphi[f(\boldsymbol{x}(N-1), \boldsymbol{u}(N-1))]\}.$$

Для определения $S_{N-1}(\boldsymbol{x}(N-1))$ необходимо провести минимизацию функции $I_{N-1}(\boldsymbol{x}(N-1), \boldsymbol{u}(N-1))$ по $r$ переменным $u_1(N-1), \ldots, u_r(N-1)$. В процессе минимизации определяется оптимальное управление $\bar{\boldsymbol{u}}(N-1)$ как функция состояния $\boldsymbol{x}(N\text{-}1)$.

Перейдём к предпоследнему участку, для которого начальное значение будет $\boldsymbol{x}(N\text{-}2)$. Для последнего и предпоследнего участков траектории функционал (3.4) имеет вид

$$I_{N-2}(\boldsymbol{x}(N-2), \boldsymbol{u}(N-2)) = G_{N-2}[\boldsymbol{x}(N-2), \boldsymbol{u}(N-2)] + G_{N-1}[\boldsymbol{x}(N-1), \boldsymbol{u}(N-1)] + \varphi(\boldsymbol{x}(N)).$$

Необходимо определить управления $\bar{\boldsymbol{u}}(N-1)$ и $\bar{\boldsymbol{u}}(N-2)$, которые доставляют минимум этому функционалу. Согласно принятым обозначениям

$$S_{N-2}(\boldsymbol{x}(N-2)) = \min_{\substack{u(N-1)\in U\\ u(N-2)\in U}} I_{N-2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) =$$
$$= \min_{\substack{u(N-1)\in U\\ u(N-2)\in U}}\{G_{N-2}[\boldsymbol{x}(N-2), \boldsymbol{u}(N-2)] + G_{N-1}[\boldsymbol{x}(N-1), \boldsymbol{u}(N-1)] + \varphi(\boldsymbol{x}(N))\}.$$

Выше получен минимум по $\boldsymbol{u}(N—1)$ для каждого $\boldsymbol{x}(N—1)$ и определено соответствующее оптимальное управление $\bar{\boldsymbol{u}}(N-1)$. Поэтому с учётом (3.1) можно написать:

$$S_{N-2}(\boldsymbol{x}(N-2)) = \min_{u(N-2)\in U}\{G_{N-2}[\boldsymbol{x}(N-2), \boldsymbol{u}(N-2)] + S_{N-1}[\boldsymbol{x}(N-1)]\} =$$
$$= \min_{u(N-2)\in U}\{G_{N-2}[\boldsymbol{x}(N-2), \boldsymbol{u}(N-2)] + S_{N-1}[f(\boldsymbol{x}(N-2), \boldsymbol{u}(N-2))]\}.$$

На этом шаге также производится минимизация функции $r$ переменных, причём определяется оптимальное управление $\bar{\boldsymbol{u}}(N-2)$. Действуя аналогичным образом, получим рекуррентную формулу для определения на $k$-м шаге минимального значения функционала $I_{N-k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ и соответствующего оптимального управления $\bar{\boldsymbol{u}}(N-k)$

$$S_{N-k}\big(\boldsymbol{x}(N-k)\big)=\min_{u(N-k)\in U}\{G_{N-k}[\boldsymbol{x}(N-k),\boldsymbol{u}(N-k)]+S_{N-k+1}[f(\boldsymbol{x}(N-k),\boldsymbol{u}(N-k))]\}. \quad (3.7)$$

Оптимальное управление $\bar{\boldsymbol{u}}(N-k)$ определяется как функция координат состояния системы $\bar{\boldsymbol{u}}(N-k)=\bar{\boldsymbol{u}}(x(N-k))$.

Вычисляя по формуле (3.7) последовательно значения функции $S_{N-k}$ для $k=\overline{1,N}$, при $k$=$N$ получим минимальное значение $S_0$ функционала (3.4) для всей траектории. Одновременно определяется и оптимальное управление $\bar{\boldsymbol{u}}(0), \bar{\boldsymbol{u}}(1)$, …, $\bar{\boldsymbol{u}}(N-1)$ в функции координат системы, т.е. решается задача синтеза оптимального регулятора. Указанная процедура может быть выполнена аналитически. Если это невозможно, то решение проводится с помощью ЭВМ. Таким образом, применение принципа оптимальности позволяет существенно упростить вычисления по сравнению с прямым методом решения задачи на условный экстремум. Минимизация функции большого числа переменных (число переменных равно $N$ для скалярного управления и $rN$ - для векторного) сводится к последовательной минимизации функции либо одной переменной, если управление скалярное, либо $r$ переменных, если управление является $r$-мерной векторной величиной.

## 3.3 Оптимальное управление непрерывными системами

Метод динамического программирования при некоторых дополнительных допущениях может быть применён для определения оптимального управления и в непрерывных системах. Получим необходимое условие оптимальности управления для управляемого объекта, описываемого системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_i,\dots,x_n,u_i,\dots,u_r,t),\ \ i=\overline{1,n}$$

или в векторной форме

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t), \quad (3.8\}$$

где $\boldsymbol{x}$ –$n$-мерный вектор координат состояния, $\boldsymbol{u}$ - $r$-мерный вектор управления.

Полагаем, что $u\in U$, т.е. вектор управления принимает значения из некоторой области пространства управлений.

Пусть минимизируемый функционал имеет вид

$$I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \int_0^T G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)dt. \tag{3.9}$$

Полагаем, что задано начальное состояние $x(0)=x_0$, конечное состояние $x(T)$ не фиксируется, время $T$ фиксируется.

Пусть найдена оптимальная траектория $x(t)$, выходящая из начальной точки $x_0$ и проходящая через точку $x(T)$.

Минимальное значение критерия $I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ обозначим через $S(x_0,0)$. Возьмём на траектории промежуточные точки $x(t)$ и $x(t+\Delta t)$, соответствующие моментам времени $t$ и $t+\Delta t$.

Согласно принципу оптимальности участок траектории от точки $x(t)$ до точки $x(T)$ также является оптимальной траекторией.

Имеем

$$S(\boldsymbol{x}(t),t) = \min_{u(\tau)\in U} \int_t^T G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\tau)d\tau. \tag{3.10}$$

Представим интеграл в виде суммы двух интегралов — от $t$ до $t+\Delta t$ и от $t+\Delta t$ до $T$:

$$S(\boldsymbol{x}(t),t) = \min_{u(\tau)\in U} \left[ \int_t^{t+\Delta t} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\tau)d\tau + \int_{t+\Delta t}^{T} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\tau)d\tau \right].$$

Для первого слагаемого, учитывая малость приращения $\Delta t$, согласно теореме о среднем запишем

$$\int_t^{t+\Delta t} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\tau)d\tau = G(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t)\Delta t + o_1(\Delta t), \tag{3.11}$$

где $o_1(\Delta t)$ - малая, более высокого порядка малости, чем $\Delta t$ и

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{o_1(\Delta t)}{\Delta t} = 0.$$

Учитывая, что

$$\min_{u(\tau)\in U}\left[\int_t^T G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\tau)d\tau\right] = S(\boldsymbol{x}(t+\Delta t), t+\Delta t),$$

получим

$$S(\boldsymbol{x}(t),t) = \min_{u(\tau)\in U}[G(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t)\Delta t + S(\boldsymbol{x}(t+\Delta t),t+\Delta t) + o_1(\Delta t)].$$

Ввиду малости приращения $\Delta t$ можно записать

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \frac{dx}{dt}\Delta t + o_2(\Delta t), \qquad (3.12)$$

где $o_2(\Delta t)$ - малая, более высокого порядка малости, чем $\Delta t$.

Положим теперь, что функция $S(x,t)$ имеет непрерывные частные производные по всем переменным $x_1, x_2, \dots, x_n, t.$ Справедливость последующего вывода зависит от выполнения этого предположения. Заранее функция $S(x,t)$ неизвестна, и поэтому проверить справедливость этого предположения по уравнениям движения нельзя. Если в процессе решения оптимальной задачи полученная функция $S(x,t)$ окажется непрерывно дифференцируемой, то все полученные далее результаты будут справедливы. Если предположение не выполняется, то все последующие рассуждения носят эвристический характер.

Разложим функцию $S(x(t+\Delta t),t+\Delta t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(x,t)$. Учитывая равенство (3.12), получим

$$S(\boldsymbol{x}(t+\Delta t),t+\Delta t) = S(\boldsymbol{x}(t),t) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial x_i}f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\Delta t + \frac{\partial S}{\partial t}\Delta t + o_3(\Delta t), \qquad (3.13)$$

где $o_3(\Delta t)$ -малая, более высокого порядка малости, чем $\Delta t$.

Введём в рассмотрение вектор-строку

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \left[\frac{\partial S}{\partial x_1}\ \frac{\partial S}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial S}{\partial x_n}\right].$$

Тогда (3.13) может быть записана в более компактном виде

$$S(\boldsymbol{x}(t+\Delta t), t+\Delta t) = S(\boldsymbol{x}(t), t) + \frac{\partial S}{\partial x} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)\Delta t + \frac{\partial S}{\partial t}\Delta t + o_3(\Delta t).$$

Подставим это значение $S(x(t+\Delta t), t+\Delta t)$ в (3.11), поделим на $\Delta t$ обе части полученного равенства и перейдём к пределу при $\Delta t \to 0$. Учитывая, что функции $S(x,t)$ и $\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}$ от управления $\boldsymbol{u}(t)$ не зависят, получим

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \min_{u(t)\epsilon U}\left[G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \frac{\partial S}{\partial x} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)\right]. \qquad (3.14)$$

Уравнение (3.14) носит название *уравнения Беллмана* и представляет собой необходимое условие экстремума. Это уравнение в частных производных относительно функции $S(x,t)$. В результате минимизации правой части управление $\boldsymbol{u}(t)$ исчезает, и уравнение содержит лишь неизвестную функцию $S(x,t)$.

Рассмотрим задачу синтеза оптимального управления для управляемого объекта, описываемого стационарной системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r), \quad i = \overline{1, n}, \qquad (3.15)$$

где $\boldsymbol{x}$ - $n$-мерный вектор координат состояния, $\boldsymbol{u}$ - $r$-мерный вектор управления; $\boldsymbol{u} \in U$.

Минимизируемый функционал выберем в виде

$$I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \int_0^T G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)dt. \qquad (3.16)$$

Отметим, что подынтегральная функция $G(x,u)$ не зависит явно от времени.

Полагаем фиксированным начальное состояние $x(0)=x_0$ и конечное $x(T) = x_т$, а время перехода $T$ из начального состояния в конечное не фиксируем.

Предполагаем, что найдено оптимальное управление $\boldsymbol{u}(t)$ и соответствующая ему траектория $\boldsymbol{x}(t)$, проходящая через точку $x_т$ в момент времени $t=T$.

Минимальное значение функционала

$$S(\boldsymbol{x}_0) = \min_{u(t)\in U} \int_0^T G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) dt$$

является функцией начального состояния системы $\boldsymbol{x}_0$.

Пусть $\boldsymbol{x}(t)$ - некоторая точка на оптимальной траектории ($0<t<T$). Используя принцип оптимальности, запишем

$$S(\boldsymbol{x}(t)) = \min_{u(\tau)\in U} \int_0^T G(\boldsymbol{x}(\tau), \boldsymbol{u}(\tau)) d\tau. \tag{3.17}$$

Поскольку система уравнений (3.15) стационарная, подынтегральная функция $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ функционала (3.16) не зависит явно от времени и время перехода $T$ не фиксировано, функция $S(x(t))$ не зависит явно от времени.

Рассмотрим соседнее с $\boldsymbol{x}(t)$ состояние $\boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{x}_1$, причём $t_1=t+\Delta t$, где $\Delta t$ — малая величина. Из непрерывности оптимальной траектории следует, что состояние $\boldsymbol{x}_1$ принадлежит малой окрестности $\boldsymbol{x}(t)$ и имеет место равенство

$$x_1 = x + \frac{dx}{dt}\Delta t + o(\Delta t),$$

где $o(\Delta t)$ - малая, более высокого порядка, чем $\Delta t$.

Выражение для $S(x(t))$ запишем в следующем виде:

$$S\big(x(t)\big) = \min_{u(\tau)\in U} \left[ \int_t^{t+\Delta t} G(\boldsymbol{x}(\tau), \boldsymbol{u}(\tau)) d\tau + \int_{t+\Delta t}^T G(\boldsymbol{x}(\tau), \boldsymbol{u}(\tau)) d\tau \right] =$$

$$= \min_{u(t)\in U} \left[ G(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))\Delta t + \min_{u(t)\in U} \int_{t+\Delta t}^T G(\boldsymbol{x}(\tau), \boldsymbol{u}(\tau)) d\tau \right]. \tag{3.18}$$

Второе слагаемое можно обозначить через $S(x_1)$. В дальнейшем полагаем, что функция $S(x)$ обладает непрерывными частными производными по всем аргументам до второго порядка включительно. Разложим функцию $S(x_1)$ в ряд Тейлора, ограничившись двумя членами разложения. Учитывая, что $\frac{dx}{dt} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ будем иметь

$$S(\boldsymbol{x_1}) = S(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial S}{\partial x} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \Delta t + \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t + o_1(\Delta t),$$

где через $o_1(\Delta t)$ обозначены члены разложения, имеющие более высокий порядок малости, чем $\Delta t$.

Подставив выражение для $S(\boldsymbol{x_1})$ в правую часть равенства (3.18) и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$0 = \min_{u(t) \in U} \left[ G(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) + \frac{\partial S(x)}{\partial x} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \right]. \qquad (3.19)$$

Уравнение (3.19) представляет собой *уравнение Беллмана для стационарной задачи с фиксированными границами,* т. е. фиксированной начальной $x_0$ и конечной $x_т$ точками и свободным временем перехода *T*.

В частном случае, когда рассматривается *задача оптимальности по быстродействию,* подынтегральная функция функционала (3.16) тождественно равна единице:

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \equiv 1.$$

В этом случае уравнение Беллмана принимает вид

$$-1 = \min_{u(t) \in U} \left[ \frac{\partial S}{\partial x} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \right]. \qquad (3.20)$$

Если ставится задача о переводе за минимальное время *T* произвольного начального состояния $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$ в начало координат $\boldsymbol{x}(T)=0$, то решение S(*x*)=*T(x)* уравнения (3.20) должно удовлетворять граничному условию

$$T(0) = 0.$$

## 3.4 Связь между вариационным исчислением, принципом максимума и динамическим программированием

Установим вначале *связь между принципом максимума и классическим вариационным исчислением*. Покажем, если на управление не накладываются ограничения, необходимые условия экстремума функционала, полученные в вариационном исчислении, могут быть найдены с помощью принципа максимума.

Для этого рассмотрим следующую задачу вариационного исчисления: среди всех кусочно-гладких кривых ***x(t),*** удовлетворяющих граничным условиям $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}°$, $\boldsymbol{x}(t_1)=1^1$**,** требуется определить такую кривую, которая доставляет минимум функционалу

$$I(\boldsymbol{x}) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)dt. \tag{3.21}$$

Относительно функции $f_0(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)$ полагаем, что она непрерывна по всем аргументам и имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по переменным $\boldsymbol{x}$ и $\dot{\boldsymbol{x}}$**.**

Для простоты изложения рассматривается задача с закреплёнными границами. В задаче с подвижными границами, когда концы траектории ***x(t)*** не закреплены, а принадлежат некоторым многообразиям $M_0$ и $M_1$**,** следует применить условия трансверсальности, сформулированные для случая $n$=2.

Введём обозначение

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{u} \tag{3.22}$$

и перейдём от сформулированной выше задачи вариационного исчисления к задаче выбора оптимального управления ***u****(t)* динамической системой (3.22). Минимизируемый функционал имеет вид

$$I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)dt. \tag{3.23}$$

Используя принцип максимума для неавтономных систем, составим функцию

$$\mathcal{H}(\bar{\psi}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) = \psi_0 f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i u_i. \tag{3.24}$$

Вспомогательные переменные $\psi_i(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0, \qquad \frac{d\psi_i}{dt} = -\psi_0 \frac{\partial f_0(x,u,t)}{\partial x_i}\ , \quad i = \overline{1,n}\,. \tag{3.25}$$

Поскольку интересует нетривиальное решение системы уравнений (3.25), то $\psi_0 = const < 0.$

Выберем $\psi_0 = -1$, и тогда функция $\mathcal{H}(\overline{\boldsymbol{\psi}}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)$ примет вид

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) = -f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i u_i,$$

а система уравнений (3.25) примет вид

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \frac{\partial f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)}{\partial x_i}\ , \quad i = \overline{1,n}\,. \tag{3.26}$$

Согласно теореме о единственности оптимального управления функция $\mathcal{H}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)$ достигает на оптимальном управлении максимума по ***u*.** Область изменения управления является открытой, и поэтому управление ***u****(t)*, доставляющее максимум $\mathcal{H}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)$, должно удовлетворять условию

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i} = 0\,, \ \ i = \overline{1,n.} \tag{3.27}$$

Кроме того, квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u_i \partial u_j} h_i h_j \le 0 \tag{3.28}$$

для любых $h_i, h_j$, и $t \in [t_0, t_1]$.

Равенства (3.27) с учетом (3.24) запишем в виде

$$\psi_i = \frac{\partial f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)}{\partial u_i}\ , \quad i = \overline{1,n.} \tag{3.29}$$

Проинтегрировав уравнения (3.26) и принимая во внимание равенства (3.29), получим

$$\frac{\partial f_0}{\partial u_i} = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial f_0}{\partial x_i} dt + \varphi_i(t_0), \quad i = \overline{1,n}.$$

Уравнения (3.30) представляют собой *уравнения Эйлера*[4] *в интегральной форме.* Продифференцировав обе части уравнений (3.30) с учетом (3.22), перейдём к *уравнениям Эйлера в дифференциальной форме:*

$$\frac{\partial f_0(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f_0(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.31}$$

Получено первое необходимое условие минимума функционала (3.21): кривая, на которой достигается минимум, должна быть экстремалью, т. е. решением уравнений Эйлера (3.31). Для получения второго необходимого условия минимума функционала запишем неравенство (3.28), учитывая (3.22) и (3.24):

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f_0(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} h_i h_j \geq 0, \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{3.32}$$

Условие (3.32) представляет собой *необходимое условие Лежандра*[5] минимума функционала (3.21). Если при *t=t*' траектория ***x(t)*** терпит излом и производная $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ при *t=t*' имеет разрыв непрерывности первого рода, то из непрерывности вектор-функции ***ψ(t)*** и функции $\mathcal{H}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)$ с учётом (3.24) и (3.29), следует

$$\begin{gathered} \left.\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_i}\right|_{t=t'-0} = \left.\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_i}\right|_{t=t'+0}, \qquad i = \overline{1,n}, \\ \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i \left.\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_i}\right|_{t=t'-0} = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i \left.\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_i}\right|_{t=t'+0}. \end{gathered} \tag{3.33}$$

Получены *условия Вейерштрасса*[6] *- Эрдмана,* которым должна удовлетворять кривая ***x(t)*** в точке излома.

[4] Эйлер Леонард (1707-1783), математик, механик, физик и астроном. Автор работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближённым вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению.

[5] Лежандр Андриен Мари (1752-1833), французский математик. Труды по теории чисел, эллиптическим интегралам, геодезии.

[6] Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (1815-1897), немецкий математик. Труды по математическому анализу, теории функций, вариационному исчислению, алгебре, дифференциальной геометрии и линейной алгебре.

Если рассматривается задача с подвижными границами, то можно показать, что из условия трансверсальности принципа максимума следуют условия трансверсальности классического вариационного исчисления для функционала (3.21).

Покажем, что основные соотношения принципа максимума при решении задачи оптимального управления системой

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) \tag{3.34}$$

при отсутствии ограничений на управление могут быть получены с помощью классического вариационного исчисления.

Пусть минимизируемый функционал имеет вид (3.23). Сформулированная задача представляет собой *задачу Лагранжа*[7] *на условный экстремум.*

Следуя методу решения задачи Лагранжа, составим вспомогательный функционал

$$I_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \big(x_i - f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)\big) \right\} dt. \tag{3.35}$$

Уравнения Эйлера для функционала (3.35) имеют вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d\boldsymbol{x_i}}{dt} = f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t), \quad i = \overline{1,n},\\
&\frac{d\lambda_j}{dt} = \frac{\partial f_0}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \qquad j = \overline{1,n},\\
&\frac{\partial f_0}{\partial u_j} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_j} = 0, \qquad j = \overline{1,n}.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Введём в рассмотрение векторную функцию

$$\bar{\psi}(t) = \{\psi_0(t), \dots, \psi_n(t)\}, \tag{3.37}$$

полагая $\psi_0(t) = -1,\ \psi_i(t) = \lambda_i(t),\ i = \overline{1,n}$ , и функцию

[7] Лагранж Жозеф Луи (1736-1813), французский математик и механик. Труды по вариационному исчислению, математическому анализу, теории чисел, алгебре, дифференциальным уравнениям.

$$\mathcal{H}(\overline{\boldsymbol{\psi}}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t). \tag{3.38}$$

Тогда для функций $\psi_i(t)$ получим систему уравнений:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} \psi_j \frac{\partial f_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)}{\partial x_i}, \ \ i = \overline{1, n}. \tag{3.39}$$

Из равенств (3.37) следует, что оптимальное управление ***u****(t)* является стационарной точкой функции $\mathcal{H}(\overline{\boldsymbol{\psi}}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_j} = 0, \qquad j = \overline{1, n}. \tag{3.40}$$

Теперь выясним *связь между классическим вариационным исчислением и методом динамического программирования*. Для этого рассмотрим задачу минимизации функционала

$$I(x) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) dt.$$

Обозначим $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{u}$ и выполним решение этой задачи методом динамического программирования. Составим уравнение Беллмана

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\min_{u(t)} \left[ f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \frac{\partial S}{\partial x} \boldsymbol{u} \right]. \tag{3.41}$$

Полагаем, что на управление $\boldsymbol{u}$ ограничений не накладывается. Тогда управление $\boldsymbol{u}$, минимизирующее правую часть уравнения (3.41), определяется из условий

$$\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{u}} + \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{x}} = 0, \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 f_0}{\partial \boldsymbol{u}^2} \geq 0.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим

$$\frac{\partial f_0}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} + \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{x}} = 0,$$

$$f_0(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) + \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{x}} \dot{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \qquad (3.42)$$

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}^2} \geq 0. \qquad (3.43)$$

Из уравнений (3.42) следует *уравнение Эйлера — Лагранжа,* а условие (3.43) представляет собой *условие Лежандра*, поскольку взяв полную производную по $t$ первого уравнения и частную производную по *x* второго уравнения системы (3.42), будем иметь

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{x} \partial t} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{x} \partial x} \dot{\boldsymbol{x}} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{x}^2} \ddot{\boldsymbol{x}} = 0$$

или

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}} = 0.$$

Установим теперь *связь между принципом максимума и методом динамического программирования*. Для упрощения рассмотрим стационарную задачу с закреплёнными границами. Для динамической системы, описываемой дифференциальными уравнениями в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \qquad (3.44)$$

требуется определить допустимое управление $\boldsymbol{u}(t) \in U$, для которого соответствующая траектория $\boldsymbol{x}(t)$ доставляет минимум функционалу

$$I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) dt.$$

Начальная точка $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}^\circ$ и конечная $\boldsymbol{x}(t_1)=\boldsymbol{x}^1$ полагаются фиксированными.

Уравнение Беллмана для этого случая имеет вид

$$0 = \min_{u \in U} \left[ f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \frac{\partial S}{\partial x} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \right], \qquad (3.45)$$

где

$$S\big(x(t)\big) = \min_{u(\tau)\in U} \int_t^{t_1} f_0\big(\boldsymbol{x}(\tau), \boldsymbol{u}(\tau)\big) d\tau.$$

Полагаем, что функция *S(x)* дважды непрерывно дифференцируема, и введём в рассмотрение функцию

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_i} f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}). \qquad (3.46)$$

Тогда уравнение (3.45) можно записать в виде

$$0 = \max_{u(t)\in U} [g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) - f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})]. \qquad (3.47)$$

Пусть $\boldsymbol{u}(t)$ - оптимальное управление. В силу непрерывной дифференцируемости функции $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ имеем

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f_0}{\partial x_j} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_0}{\partial x_j} = 0, \;\; i = \overline{1, n}. \qquad (3.48)$$

Запишем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}\frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial x_j}\right).$$

Если обозначить

$$\frac{\partial S}{\partial x_j} = -\psi_j, \quad j = \overline{1, n}, \qquad \psi_0 = -1, \qquad (3.49)$$

то систему (3.48) можно представить в виде

$$\frac{d\psi_j}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} \psi_i \frac{\partial f_i\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\big)}{\partial x_j}, \;\; j = \overline{1, n},$$

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0. \tag{3.50}$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями для векторной функции $\overline{\boldsymbol{\psi}}(t)$ в основной теореме принципа максимума, а из равенства (3.47) следует, что функция Гамильтона

$$\mathcal{H}(\overline{\boldsymbol{\psi}}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}). \tag{3.51}$$

достигает на оптимальном управлении $\boldsymbol{u}(t)$ максимума по $\boldsymbol{u}$.

Таким образом, установлена взаимная связь между классическим вариационным исчислением, принципом максимума и динамическим программированием. Показано, что необходимые условия экстремума функционала, которые рассматриваются в классическом вариационном исчислении, могут быть получены из основной теоремы принципа максимума. А при отсутствии ограничений на управляющее воздействие необходимые условия оптимальности управления и фазовой траектории, сформулированные в основной теореме принципа максимума, могут быть найдены с помощью методов классического вариационного исчисления.

С использованием для решения задачи минимизации функционала метода динамического программирования получены оба необходимых условия минимума функционала, которые рассматриваются в вариационном исчислении: уравнения Эйлера - Лагранжа и условие Лежандра.

С использованием для решения стационарной задачи необходимого условия минимума, полученного методом динамического программирования (уравнение Беллмана), установлено, что функция Гамильтона должна достигать на оптимальном управлении максимума. Это условие составляет содержание основной теоремы принципа максимума.

## Заключение

Возвращаясь к теме многообразия методов оптимального управления движением различных летательных аппаратов, авторы хотели бы предложить студентам в качестве справочного материала список дополнительной литературы, которой может быть полезен в практической деятельности, связанной с авиационной, ракетной и космической техникой.

### Дополнительная литература


1 Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – 2-е изд. – М.: Наука, 1969.

2 Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1969.

3 Летов А.М. Динамика полёта и управление. – М.: Наука, 1969.

4 Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления / Беллман Р., Калаба Р. ; пер. с англ. Ройтенберг Е. Я. ; ред. пер. с англ. Разумихин Б. С. - М. : Наука, 1969.

5 Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем М.: Наука, 1971.

6 Шкадов Л.М., Буханова Р.С., Илларионов В.Ф. Механика оптимального пространственного движения летательных аппаратов в атмосфере. - М.: Машиностроение, 1972.

7 Лазарев Ю.Н.. Управление траекториями аэрокосмических аппаратов. – Самара: Самар. науч. центр РАН, 2007.

8 Салмин, В. В. Методы оптимального управления и численные методы в задачах синтеза технических систем [Текст] : [учеб. пособие] / В. В. Салмин, Ю. Н. Лазарев, О. Л. Старинова ; Федер. агентство по образованию, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева. - Самара : Изд-во СГАУ, 2007.

9 Динамика полёта самолёта: учебник для вузов/ А.В. Ефремов, В.Ф. Захарченко, В.Н. Овчаренко и др.; под ред. академика РАН Г.С. Бюшгенса. Изд-во "Машиностроение", 2011.

Список использованных источников

1 Теория оптимальных систем автоматического управления. Иванов В.А., Фалдин Н.В. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 336с.

# Оглавление