

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА"

В.Ф.Петрищев

ОПТИМАЛЬНОЕ СКАНИРОВАНИЕ КОСМИЧЕСКИМ АППАРАТОМ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

САМАРА
Издательство СГАУ
2007

УДК 629.78(075)
ББК 39.6
П 304

Рецензент д-р техн. наук, проф. В.Л. Б а л а к и н

Петрищев В.Ф.

П 304 **Оптимальное сканирование космическим аппаратом поверхности земли:** учеб. пособие / В.Ф. Петрищев. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. у-та, 2007. - 96 с.

ISBN 978-5-7883-0583-7

В учебном пособии приводится описание современного оптико-электронного комплекса (ОЭТК) космического базирования, принципы построения и функционирования его составных частей, принцип формирования изображения.

Получены уравнения движения оптического изображения в фокальной плоскости объектива ОЭТК и выражения для интегральных кривых, описывающих движение объектов наблюдения в плоскости углов отклонения КА по каналам тангажа и крена.

Изложены варианты эвристического формирования программы управления угловым движением КА.

Предназначено для студентов специальностей, связанных с созданием и эксплуатацией космических аппаратов.

УДК 629.78(075)
ББК 39.6

ISBN 978-5-7883-0583-7

©Петрищев В.Ф., 2007
© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРИНЯТЫЕ СОКРАЩЕНИЯ.....	4
ВВЕДЕНИЕ.....	5
1. СОВРЕМЕННЫЕ ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫЕ ТЕЛЕСКОПИЧЕСКИЕ КОМПЛЕКСЫ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ЗЕМЛИ КОСМИЧЕСКОГО БАЗИРОВАНИЯ	8
1.1. Принципы построения космического телескопа	8
1.2. Принципы построения и функционирования системы приёма и преобразования информации	11
1.3. Схема расположения ОЭП в фокальной плоскости объектива космического телескопа. Принцип центрального проектирования.....	16
2. ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ПРОГРАММЫ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ КА ПРИ СКАНИРОВАНИИ.....	19
2.1. Используемые системы координат.....	19
2.2. Перечень принятых допустимых положений	22
2.3. Расчет дальности до поверхности Земли.....	26
2.4. Расчёт некоторых вспомогательных кинематических параметров.....	29
3. ЗАКОНОМЕРНОСТИ ДВИЖЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ В ФОКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ ОБЪЕКТИВА ОЭТК.....	34
3.1. Уравнения движения оптического изображения в фокальной плоскости объектива ОЭТК	34
3.2. Интегральные кривые движения точек подстилающей поверхности Земли для случая круговой орбиты КА и сферической невращающейся Земли.....	41
3.3. Интегральные кривые движения точек подстилающей поверхности Земли для случая эллиптической орбиты КА и сферической вращающейся Земли.....	46
4. ВАРИАНТЫ ЭВРИСТИЧЕСКОЙ ПРОГРАММЫ УПРАВЛЕНИЯ УГЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ КА ПРИ СКАНИРОВАНИИ.....	51
4.1. Постановка задачи определения углового движения КА при сканировании.....	51
4.2. Сканирование с нулевым углом тангажа и постоянным заданным углом крена.....	53
4.3. Сканирование с выравниванием продольной составляющей скорости движения изображения по длине линейки ОЭП.....	57
5. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ СКАНИРОВАНИЯ.....	61
5.1. Постановка задачи формирования оптимальной программы сканирования.....	61
5.2. Формирование оптимальной программы сканирования.....	66
5.2.1. Определение оптимального вектора угловой скорости КА при сканировании	68
5.2.2. Функционал качества, соответствующий оптимальному вектору угловой скорости	72
5.2.3. Определение оптимального начального угла рыскания КА для случая центрального расположения ОЭП в фокальной плоскости объектива ОЭТК.....	77
5.2.4. Определение оптимального начального угла рыскания КА для общего случая расположения ОЭП в фокальной плоскости объектива ОЭТК.....	83
5.3. Анализ основных характеристик оптимальной программы управления угловым движением КА при сканировании.....	88
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	98

ПРИНЯТЫЕ СОКРАЩЕНИЯ

БКУ	–	бортовой комплекс управления
ВЗН	–	временная задержка и накопление
ВУЗ	–	восходящий узел орбиты
ГСК	–	гринвичская система координат
ДЗЗ	–	дистанционное зондирование Земли
ЗК	–	зона компенсации
ЗУТО	–	задняя узловая точка объектива
ИСК	–	инерциальная система координат
ЛВ	–	линия визирования
ЛРМ	–	линейное разрешение на местности
МСК	–	меридианная система координат
НСК	–	наземный специальный комплекс
НУЗ	–	нисходящий узел
ОСК	–	орбитальная система координат
ОЭП	–	оптико-электронный преобразователь
ОЭТК	–	оптико-электронный телескопический комплекс
ПСК	–	программная система координат
ПК	–	персональный компьютер
ПЭВМ	–	персональная электронно-вычислительная машина
САН	–	система автономной навигации
СДИ	–	скорость движения изображения
СППИ	–	система приёма и преобразования информации
ССК	–	связанная система координат
ФПЗС	–	фотоприбор с зарядовой связью
ФСК	–	фотограмметрическая система координат
ЦЛВ	–	центральная линия визирования

ВВЕДЕНИЕ

Современные оптико-электронные телескопические комплексы (ОЭТК), устанавливаемые неподвижно на КА дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ), обеспечивают высокое качество получаемых изображений снимаемых участков поверхности Земли. При этом в качестве одного из основных параметров, определяющих качество изображений, принимается линейное разрешение на местности (ЛРМ). В силу влияния различных факторов съемки, таких как качество объектива телескопа, погрешности ориентации КА по углу и стабилизации по угловой скорости, погрешность обработки оптико-электронным телескопическим комплексом заданной продольной скорости движения оптического изображения, состояние атмосферы и др., величина линейного разрешения несколько превышает величину проекции на поверхность Земли пикселя фоточувствительного элемента оптико-электронного преобразователя (ОЭП), устанавливаемого в фокальной плоскости объектива телескопа.

Наряду с этими факторами на величину линейного разрешения существенное влияние оказывают методические составляющие отклонений фактической скорости движения оптического изображения в фокальной плоскости объектива телескопа от расчётной величины. Методические составляющие, по определению, зависят от метода формирования программы углового движения КА (программы сканирования) при съемке поверхности Земли и имеют систематический характер изменения.

До настоящего времени для расчета кинематических параметров углового движения КА при сканировании поверхности Земли использовался так называемый эвристический метод, в основу которого положены простые и ясные с инженерной точки зрения требования. Перевод этих требований на математический язык позволяет получить программу управления угловым движением КА при сканировании в виде функциональных зависимостей составляющих вектора угловой скорости КА на связанные с его корпусом оси координат от текущих кинематических параметров сканирования.

Вместе с тем хорошо известно, что эвристический метод формирования программы управления КА минимизирует лишь методические продольные (вдоль столбцов линейки оптико-электронного преобразователя) отклонения составляющих скорости движения

изображения и оставляет без рассмотрения вопрос о величинах методических поперечных (вдоль строк линейки оптико-электронного преобразователя) отклонений составляющих этой скорости. Реализация эвристического метода осуществляется, как правило, с использованием численного расчета (путем перебора) начального угла рыскания КА, при котором методическая поперечная составляющая скорости движения оптического изображения по модулю минимальна.

В настоящем пособии поставлена и решена задача формирования оптимальной программы управления угловым движением КА при сканировании. При этом оптимальная программа углового движения КА определяется в результате решения классической математической задачи минимизации квадратичного функционала качества, содержащего сумму квадратов методических продольных и поперечных отклонений составляющих скорости движения изображения на левом и правом краях ОЭП. Оптимизирующими функционал параметрами в этой задаче являются три составляющих вектора угловой скорости КА по связанным осям (тангажу, крену и рысканию) и угол разворота КА по рысканию при заданных значениях углов разворота КА по тангажу и крену.

Доказывается, что задача оптимизации в такой постановке декомпозируется на две подзадачи: подзадачу минимизации суммы квадратов методических продольных отклонений составляющих скорости движения изображения на краях линейки ОЭП (соответствующим выбором оптимальных значений вектора угловой скорости КА) и подзадачу минимизации суммы квадратов методических поперечных отклонений составляющих скорости движения изображения (выбором оптимального значения угла разворота КА по рысканию).

Именно этот теоретический результат объясняет успех применения эвристического метода формирования программы управления угловым движением КА при сканировании.

При решении задачи оптимизации определены области существования глобального минимума и локального экстремума значения угла рыскания.

Проведены детальный анализ и обсуждение результатов решения задачи формирования оптимальной программы управления уг-

ловым движением КА при сканировании. Отмечаются два несомненных достоинства полученного решения задачи оптимизации:

- получение аналитического решения для всех четырех оптимизируемых параметров;

- решение получено для общего случая смещения центра рабочей части ОЭП в продольном и поперечном направлениях относительно центра фокальной плоскости объектива ОЭТК.

Настоящее учебное пособие предназначено для включения в специальный курс лекций «Задачи механики в современной технике», читаемый автором в восьмом семестре студентам СГАУ по программе подготовки магистров по направлению 011000 «Механика. Прикладная математика».

1. СОВРЕМЕННЫЕ ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫЕ ТЕЛЕСКОПИЧЕСКИЕ КОМПЛЕКСЫ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ЗЕМЛИ КОСМИЧЕСКОГО БАЗИРОВАНИЯ

1.1. Принципы построения космического телескопа

Современные оптико-электронные телескопические комплексы (ОЭТК) космического базирования, решающие задачи дистанционного зондирования Земли, обладают уникальными техническими характеристиками в части оперативности доставки информации наземному потребителю, ширины полосы захвата на поверхности Земли, пространственному разрешению, информационной производительности и сроках эксплуатации. Они существенно отличаются от фотографических комплексов такого же назначения, в которых многие из перечисленных характеристик определяются наличием невосполняемого запаса фотопленки на борту КА ДЗЗ, возвращаемой после экспонирования на Землю в спускаемых аппаратах (СА) или в спускаемых капсулах (СК). В ОЭТК процесс регистрации информации при съёмке земной поверхности, её преобразование в цифровой код и передача через бортовую радиолинию на наземный пункт приёма информации (НППИ) могут обеспечиваться в масштабе времени, близком к реальному, и ограничиваются лишь наличием

НППИ или спутника-ретранслятора (СР) информации в поле зрения КА ДЗЗ в момент регистрации информации. При увеличении полосы захвата и одновременном повышении пространственного разрешения ОЭТК возрастает поток цифровой информации (количество передаваемых кодов в секунду), который ограничивается реальной пропускной способностью применяемой радиолинии. Срок эксплуатации КА ДЗЗ на орбите с использованием современных ОЭТК достигает 5 – 7 лет.

Одним из основных элементов ОЭТК является космический телескоп (КТ). С целью уменьшения веса КА ДЗЗ объективы современных КТ выполняют, как правило, не линзовыми, а зеркальными (или зеркально-линзовыми), несмотря на некоторое ухудшение качества информации, получаемой с помощью последних.

Примерная схема космического телескопа приведена на рис.1.1 [1]. Оптическая схема его объектива выполнена по типу Ричи-Кретьена.

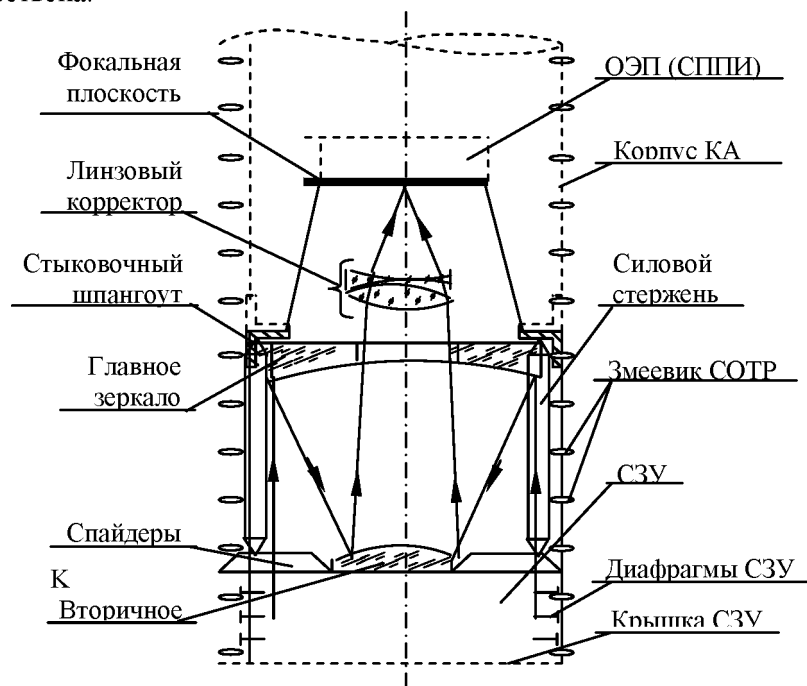


Рис.1.1. Схема космического телескопа

Космический телескоп устанавливается неподвижно на борт КА ДЗЗ.

В процессе съёмки световой поток от поверхности Земли при открытой крышке светозащитного устройства (СЗУ) попадает на зеркальную поверхность главного зеркала (ГЗ), отражается от неё, после чего попадает на зеркальную поверхность вторичного зеркала (ВЗ), отражается от последней и далее проходит через центральное отверстие в ГЗ и линзовый корректор, с помощью которого фокусируется на фокальной плоскости. Вторичное зеркало удерживается крестовиной спайдеров. Сам узел вторичного зеркала крепится к силовому шпангоуту телескопа с помощью системы стержней. Силовой шпангоут служит одновременно для стыковки телескопа с КА ДЗЗ.

Вторичное зеркало имеет пять степеней свободы по отношению к главному зеркалу:

- три линейных перемещения вдоль продольной и двух поперечных осей визирной системы координат, связанной с главным зеркалом;
- два угловых вращения относительно поперечных осей.

Эти перемещения обеспечивают в необходимых случаях юстировку и фокусировку объектива в процессе его работы на орбите с помощью соответствующих автоматических систем высокой точности.

Для уменьшения тепловых деформаций в элементах конструкции объектива КТ, приводящих к ухудшению качества получаемой информации, корпус объектива КТ помещён в рубашку, обвитую с наружной поверхности змеевиком системы обеспечения теплового режима (СОТР) КА ДЗЗ. Прокачиваемая по змеевику жидкость заданной температуры обеспечивает (при закрытой крышке СЗУ) термостабилизацию элементов конструкции объектива.

СЗУ служит для предотвращения засветки поля зрения телескопа от боковых световых лучей (Солнца, Луны, внешних элементов конструкции КА ДЗЗ).

Космический телескоп содержит также ряд служебных систем (автоматической фокусировки, автоматической юстировки, фотометрической калибровки и др.) и систему управления, обеспечивающую управление по командам из бортового цифрового вычислительного комплекса (БЦВК) КА ДЗЗ всеми системами телескопа.

С целью уменьшения веса главного зеркала, в основном определяющего вес всего телескопа, его изготавливают путём спекания из нескольких элементов, содержащих пустоты. В качестве материала ГЗ могут быть использованы: ситалл, бериллий или карбид кремния.

Главное требование, предъявляемое к качеству ГЗ – среднеквадратичное отклонение волнового фронта, отражённого от зеркала, от расчётного значения не должно превышать 2 – 3 % от длины волны при штатной эксплуатации телескопа в составе КА ДЗЗ на орбите в условиях невесомости.

Приведённая оптическая схема объектива позволяет существенно уменьшить осевую длину объектива при сохранении величины его фокусного расстояния.

1.2. Принципы построения и функционирования системы приёма и преобразования информации

Другим важным элементом ОЭТК является система приёма и преобразования информации (СППИ), содержащая оптико-электронный преобразователь (ОЭП), осуществляющий преобразование оптического сигнала элемента изображения поверхности Земли в электрический сигнал. Фоточувствительные приборы, входящие в состав ОЭП и осуществляющие это преобразование, устанавливаются в фокальной плоскости объектива телескопа.

В оптико-электронных телескопических комплексах применяются фоточувствительные приборы с зарядовой связью (ФПЗС) двух типов: линейные и матричные [2]. Схема линейного фоточувствительного прибора с зарядовой связью показана на рис.1.2.



Рис.1.2. Линейный ФПЗС

Этот прибор состоит из n - отдельных элементов (пикселей), состыкованных друг с другом в линейку. Типичный размер элемента, как правило, квадратного сечения 16×16 мкм. Существуют приборы с размером элемента 12×12 мкм.

Работает прибор следующим образом. При скорости движения изображения V и размере элемента $d \times d$ в течение времени

$$T = \frac{d}{V} \quad (1.1)$$

в каждом элементе происходит накопление электрического сигнала, пропорционального величине оптического сигнала изображения соответствующего элемента поверхности Земли, проектирующегося на данный элемент прибора. Затем происходит быстрое последовательное считывание накопленных электрических сигналов элементов в направлении линейки. В результате запоминается строка изображения поверхности Земли. Далее процесс накопления электрических сигналов в каждом элементе прибора повторяется.

Особенностью применения линейного фоточувствительного прибора является необходимость организации механического сканирования поверхности Земли для получения скорости V путём придания корпусу КА соответствующей угловой скорости вращения.

Достоинством прибора является сравнительно невысокие требования к точности ориентации и стабилизации системы управления движением (СУД) КА ДЗЗ. Однако предъявляются высокие требования к чувствительности самого преобразователя. Недостатком прибора является наличие неравномерности чувствительности элементов по длине линейки, что приводит к неизбежному искажению изображения.

Матричные ФПЗС, в свою очередь, делятся на кадровые и работающие на принципе временной задержки и накопления (ВЗН) сигнала (Push broom).

Кадровый фоточувствительный прибор (рис.1.3.) состоит из $m \times n$ элементов (m строк и n столбцов матрицы) и может накапливать сигнал в течение некоторого времени при условии отсутствия движения оптического изображения по матрице, а затем быстро считывать сигналы каждой строки независимо.

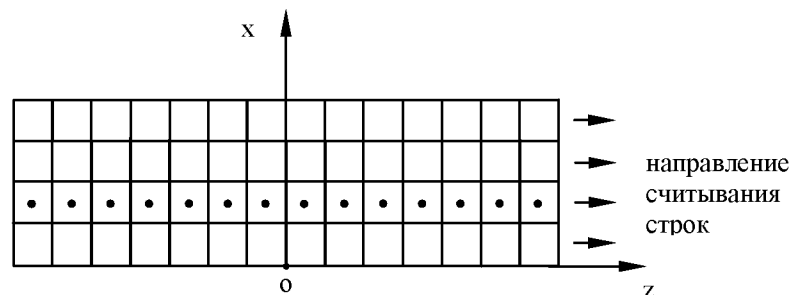


Рис. 1.3. Кадровый ФПЗС

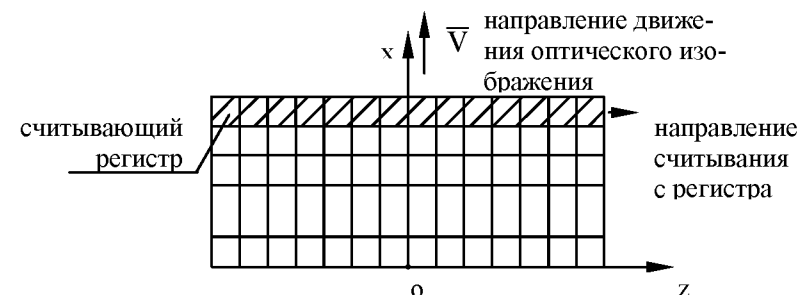


Рис. 1.4. Схема матричного ФПЗС типа ВЗН

Недостатками кадрового фоточувствительного прибора являются:

- необходимость очень точного удержания оптического изображения неподвижным относительно матрицы прибора. При этом должны выполняться весьма жёсткие требования к системе управления движением (СУД) по точности стабилизации по угловой скорости КА при сравнительно больших угловых скоростях движения КА относительно снимаемого участка поверхности Земли; затем необходимо перенацелить КА ДЗЗ на соседний участок поверхности Земли и вновь застабилизировать изображение;

- наличие неравномерности чувствительности в элементах матрицы также приводит к искажениям в полученном изображении по сравнению с исходным оптическим изображением.

В какой-то степени этих недостатков лишён матричный фоточувствительный прибор типа ВЗН (рис. 1.4).

Принцип работы приборов ФПЗС типа ВЗН состоит в следующем. При движении оптического изображения с вектором скорости \vec{V} по матрице ФПЗС, установленной в фокальной плоскости объектива ОЭТК, любая точка оптического изображения находится в пределах элемента $d \times d$ в течение времени, определённом соотношением (1.1).

В течение этого времени в каждом элементе накапливается электрический заряд, который через интервал времени T передаётся в следующий за ним по столбцу элемент в направлении движения изображения, в котором этот заряд продолжает накапливаться со скоростью, пропорциональной яркости элемента оптического изо-

бражения. Процесс повторяется до тех пор, пока изображение не попадёт на считывающий регистр, который защищён от оптического изображения. За один такт времени T происходит считывание информации со считывающего регистра. Процесс продолжается, в результате будет получено изображение в виде последовательности отдельных строк. Далее электрические сигналы квантуются по величине в 8 (или 10) – разрядный цифровой код в аналого-цифровом преобразователе (АЦП). В результате получаем цифровое изображение, которое, к примеру, можно после передачи на Землю вывести на монитор компьютера или отпечатать фотографию.

В принципе возможно создание матрицы ФПЗС с дополнительным боковым переносом зарядов (от столбца к столбцу), кроме передачи по столбцам. Но эти схемы достаточно сложны, чтобы их можно было использовать на практике.

Матрицы ФПЗС имеют различное число элементов. Наиболее употребительны матрицы, содержащие 128×1024 элементов. Здесь 128 строк и 1024 столбца. Имеется возможность использовать лишь часть строк, примыкающих к считывающему регистру (64, 32, 16, 8) в зависимости от освещённости поверхности Земли (от типа поверхности и от угла Солнца над местным – для снимаемого участка поверхности – горизонтом Земли).

В настоящее время на КА ДЗЗ «Ресурс-ДК1» разработки ГНПРКЦ «ЦСКБ-Прогресс», запущенном 15.06.07, используются матрицы ФПЗС 128×1024 элементов и с размерами отдельного элемента 9×9 мкм. Они освоены отечественной промышленностью. За рубежом уже имеются матрицы ФПЗС с размерами элемента 6×6 и даже $3,5 \times 3,5$ мкм. Для обеспечения необходимой ширины полосы

захвата из матриц ФПЗС набирается ОЭП. По технологическим соображениям эти матрицы устанавливаются не «в стык», а в «шахматном» порядке (с перекрытием, для исключения потери информации на стыках матриц), как показано на рис.1.5.

В матричном фоточувствительном приборе с режимом работы ВЗН за время движения зарядовых пакетов вдоль столбца происходит усреднение разбросов накапливаемых сигналов за счёт неравномерности чувствительности отдельных элементов столбца, в связи с чем величина получаемого электрического сигнала более адекватна величине оптического сигнала.

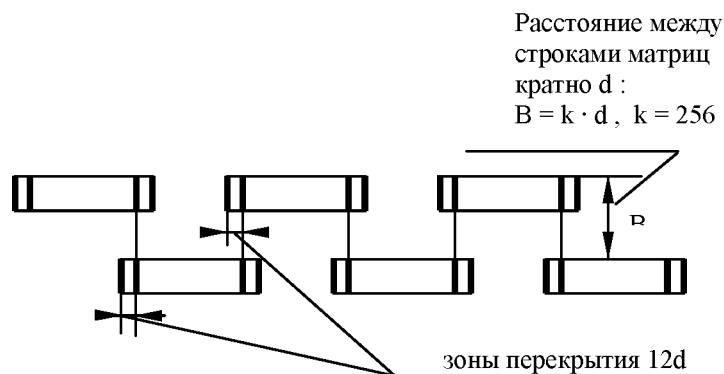


Рис.1.5. Линейка матриц ОЭП

Вместе с тем при использовании прибора с режимом ВЗН высокие требования к СУД также сохраняются. При использовании этого прибора требования к СУД определяются следующими условиями, которые являются основополагающими:

- за всё время движения оптического изображения вдоль столбцов матрицы ФПЗС, равное mT , оно не должно смещаться в поперечном направлении (вдоль строк) на величину более $0,3 - 0,5 d$;
- скорость передачи зарядовых пакетов от строки к строке должна строго соответствовать заданной скорости V движения изображения. Накопленное за время mT отставание или опережение в движении зарядовых пакетов по отношению к движению оптического изображения также не должно превышать $0,3 - 0,5 d$;
- оба перечисленных условия должны выполняться для всех столбцов всех матриц, входящих в ОЭП и образующих линейку ОЭП, включая крайние столбцы крайних матриц ОЭП.

Аналізу можливості та опису способів виконання цих умов присвячено нинішнє посібник.

1.3. Схема расположения ОЭП в фокальной плоскости объектива космического телескопа. Принцип центрального проектирования

Схема расположения ОЭП системы приёма и преобразования информации (СППИ) в фокальной плоскости ОЭТК приведена на рис.1.6.

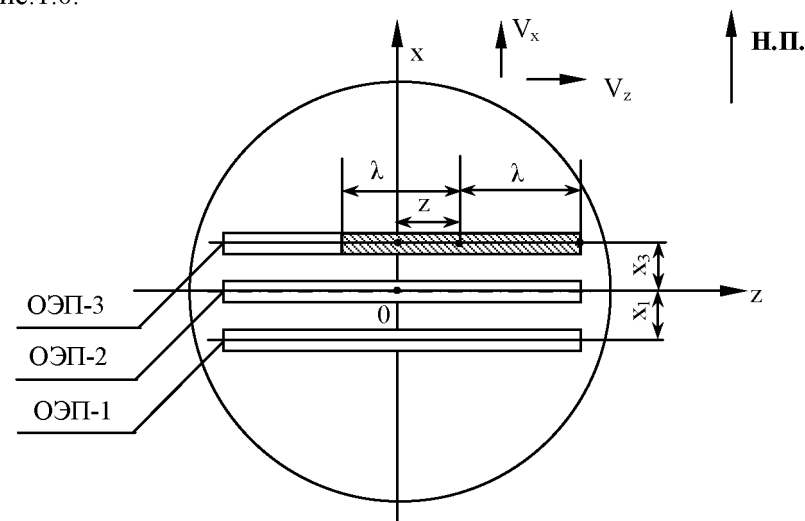


Рис. 1.6. Схема размещения ОЭП в фокальной плоскости ОЭТК

В фокальной плоскости ОЭТК расположены три матричных ОЭПа (ОЭП-1, ОЭП-2 и ОЭП-3) с различными спектральными диапазонами чувствительности. Матрицы ОЭП работают по принципу временной задержки и накопления (ВЗН) заряда и по технологическим соображениям расположены в шахматном порядке. Их плоскости чувствительности совпадают с фокальной плоскостью oxz . Линейки ОЭП привязаны к осям системы координат $oxuz$ таким образом, что строки матриц направлены параллельно поперечной оси oz , а столбцы – параллельно продольной оси ox .

В идеальном случае оптическое изображение в фокальной плоскости ОЭТК в каждой точке ОЭП движется в направлении столбцов,

т.е. совпадает с направлением оси ox и одинаково по модулю для любой точки линейки ОЭП. Это направление на рис.1.6. обозначено стрелкой V_x . В реальном же случае модуль V_x может быть переменным по длине ОЭП, а также могут иметь место поперечные составляющие V_z , отличные от нуля и также переменные по длине ОЭП.

В дальнейшем, если это не оговорено особо, рассматривается общий случай расположения работоспособной (рабочей) части ОЭП (на рис.1.6 заштрихована) в фокальной плоскости объектива ОЭТК. Здесь λ – половина длины работоспособной части ОЭП.

В соответствии с принципом центрального проектирования (рис.1.7) точке m фокальной плоскости с координатами x, z соответствует точка пространства предметов M , лежащая на линии, соединяющей точку m фокальной плоскости с задней узловой точкой объектива (ЗУТО) S , являющейся центром проектирования. Точка M предметного пространства лежит на поверхности Земли.

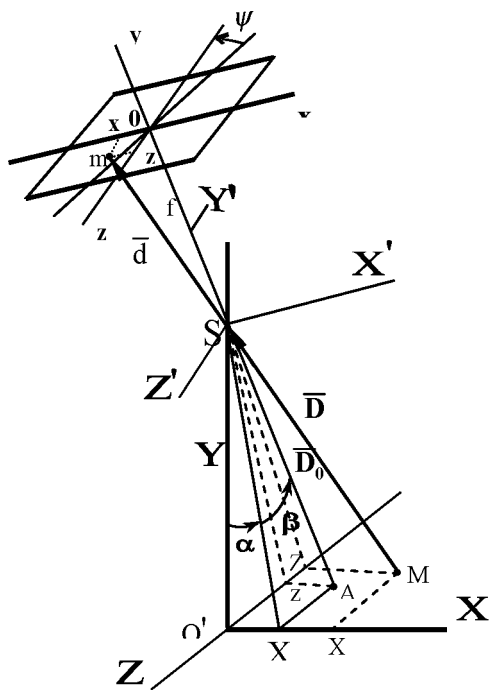


Рис. 1.7. Последовательность отсчета углов поворотов КА при съёмке

Всякую линию, проходящую через точку m фокальной плоскости с координатами x, z и ЗУТО, назовём линией визирования (ЛВ), в то время как линию, проходящую через начало координат фокальной плоскости ($x = 0, z = 0$) и ЗУТО, назовём центральной линией визирования (ЦЛВ).

Кратчайшее расстояние oS между фокальной плоскостью и ЗУТО называется фокусным расстоянием объектива и обозначается через f .

2. ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ПРОГРАММЫ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ КА ПРИ СКАНИРОВАНИИ

2.1. Используемые системы координат

В настоящем пособии используются следующие системы координат. Все системы координат являются правыми ортогональными.

2.1.1. Абсолютная инерциальная система координат (ИСК) $Ox_{II}y_{II}z_{II}$ с началом отсчёта в центре масс Земли (рис.2.1).

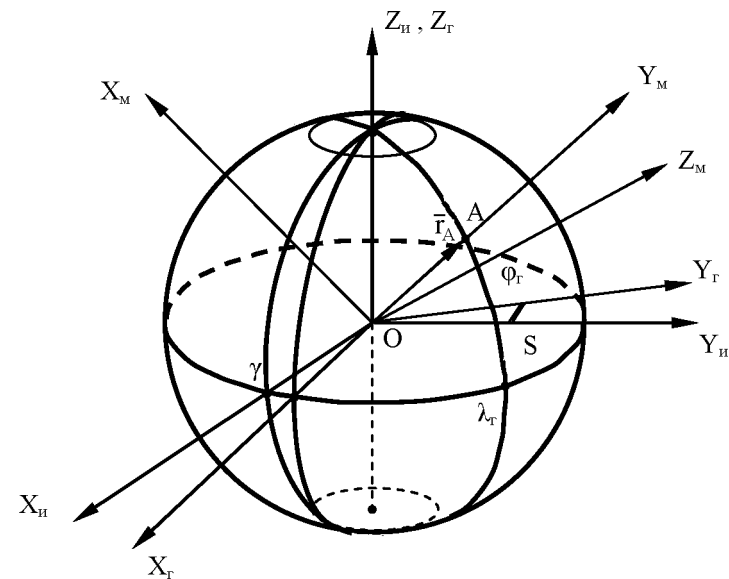


Рис.2.1. К определению ИСК, ГСК, МСК

Ось $OZ_{и}$ совпадает с осью Мира (осью вращения Земли). Ось $OX_{и}$ лежит в плоскости небесного экватора и проходит через точку Весны γ эпохи 2000г. Ось $OY_{и}$ дополняет систему до правоориентированной.

2.1.2. Гринвичская система координат (ГСК) $OX_{г}Y_{г}Z_{г}$ (рис.2.1) также с началом в центре масс Земли. Отличается от ИСК поворотом на угол S вокруг оси Мира $OZ_{и}$. При этом плоскость $OX_{г}Z_{г}$ образует плоскость меридиана Гринвича.

2.1.3. Меридианная система координат (МСК) $OX_{м}Y_{м}Z_{м}$ для произвольной точки A определяется следующим образом (рис.2.1).

Ось $OX_{м}$ направлена на север в плоскости меридиана точки A , имеющей радиус-вектор \bar{r}_A в ИСК и гринвичские долготу $\lambda_{г}$ и широту $\varphi_{г}$, перпендикулярно радиус-вектору \bar{r}_A , ось $OY_{м}$ – по радиус-вектору \bar{r}_A , ось $OZ_{м}$ дополняет систему до правоориентированной.

2.1.4. Текущая орбитальная система координат (ОСК) $OX_oY_oZ_o$ связана с текущим положением КА на орбите. На рис.2.2 показана проекция плоскости орбиты КА на единичную сферу. Направление движения по орбите определяется стрелкой, ВУЗ – восходящий узел орбиты, \bar{r}_e – текущее направление единичного радиус-вектора центра масс КА. Ось OY_o совпадает с вектором \bar{r}_e , ось OX_o также лежит в плоскости орбиты и направлена в сторону полёта. Ось OZ_o дополняет систему до правоориентированной.

2.1.5. Фотограмметрическая система координат (ФСК) $O'XYZ$ (рис.1.7).

Начало ФСК связано с некоторой произвольно выбранной точкой O' на поверхности Земли. При этом ось $O'Y$ ФСК выбирается совпадающей с осью OY_o . ОСК в каждый текущий момент времени, ось $O'X$ лежит в плоскости орбиты КА, ось $O'Z$ дополняет систему до правоориентированной.

2.1.6. Программная система координат (ПСК) $SX'Y'Z'$ (рис.1.7) определяет программное угловое положение осей КА относительно осей текущей ОСК. Начало S системы лежит на оси $O'Y$ текущей ФСК и определяет положение задней узловой точки объектива ОЭТК. Положение осей ПСК определяется тремя последовательными поворотами относительно ОСК на углы тангажа (α), крена (β) и рыскания (ψ), как показано на рис.1.7.

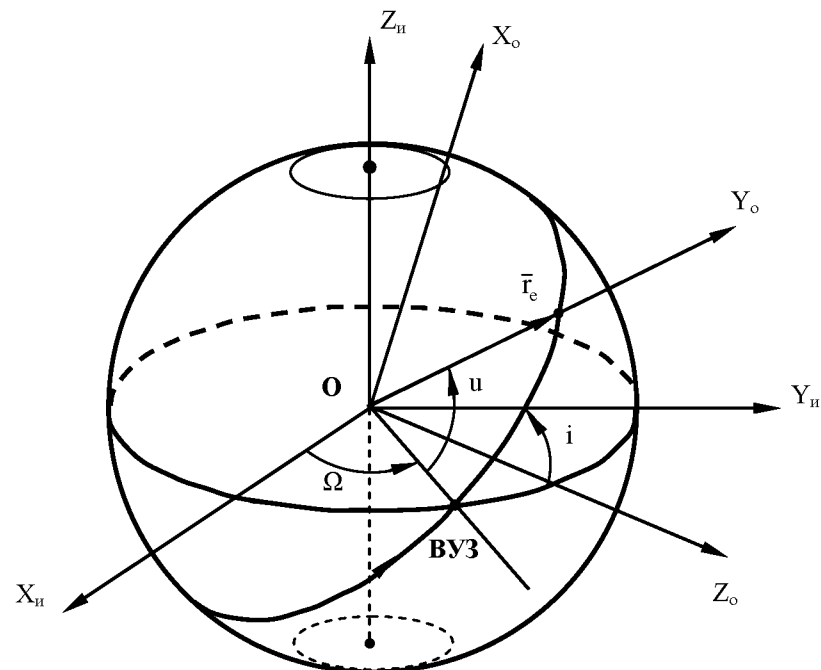


Рис.2.2. К определению ОСК

2.1.7. Связанная система координат КА. По определению её оси связаны с конструктивными осями КА, а начало отсчёта совпадает с центром масс КА. Ниже будет обосновано утверждение о совпадении центра масс КА с точкой S . В связи с тем, что в настоящем пособии исследуется лишь программное угловое движение КА без учета погрешностей ориентации и стабилизации системы управления движением (СУД), в дальнейшем эта связанная система координат не рассматривается.

2.1.8. В качестве системы координат, связанной с фокальной плоскостью ОЭТК и именуемой в дальнейшем связанной системой координат (ССК), используется система координат $oxyz$ (рис.1.7). Ось oy этой системы совпадает с осью SY' программной системы координат. Центр системы координат o смещён относительно S вдоль оси SY' на величину фокусного расстояния f объектива ОЭТК. Оси ox и oz образуют фокальную плоскость ОЭТК, в которой распо-

лагаются фоточувствительные приборы системы приёма и преобразования информации.

Поскольку при рассмотрении угловых движений важным условием является лишь параллельность осей ПСК и ССК независимо от положения начала каждой из этих систем координат, в дальнейшем не будем делать различия между ПСК и ССК.

2.1.9. Азимут маршрута A_M в точке A называется углом, отсчитываемый в касательной в точке A к земному эллипсоиду плоскости между касательной к центральной линии маршрута в точке A в направлении движения и направлением на север (меридианом точки A) в соответствии с рис.2.3. При этом отсчёт угла A_M ведётся по часовой стрелке от направления на север.

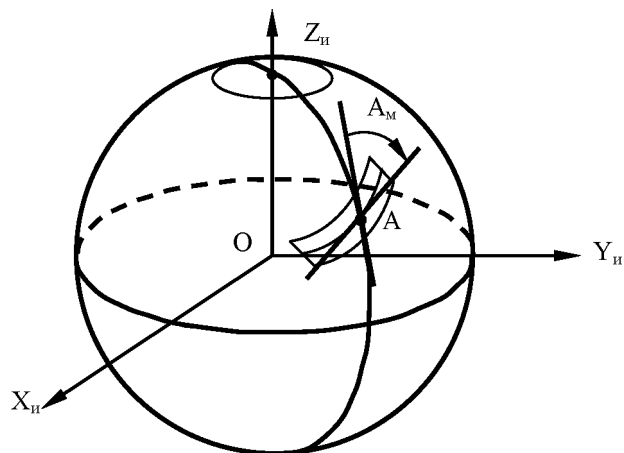


Рис.2.3. К определению азимута сканирования

2.2. Перечень принятых допустимых положений

Аналитическое решение задачи оптимального сканирования получено при использовании следующих допустимых положений, истинность которых подтверждена расчётами или результатами моделирования.

2.2.1. Продольные и поперечные методические составляющие скорости сдвига оптического изображения изменяются линейно вдоль линейки ОЭП. Некоторым логическим обоснованием

справедливости этого положения является следующее утверждение. Объективы современных ОЭТК выполняют, как правило, длиннофокусными, так что угол зрения не превышает величины $1^\circ - 2^\circ$. При таких малых углах любая нелинейная при больших углах функция пренебрежимо мало отличается от линейной.

2.2.2. Снимаемый участок поверхности Земли в пределах угла зрения объектива ОЭТК является частью сферы с радиусом, равным радиусу точки пересечения центральной линии визирования ОЭТК с поверхностью Земли. Это положение также основано на малости угла зрения ОЭТК и малом отличии эллипсоида вращения Земли от сферы.

2.2.3. В целом поверхность Земли является поверхностью эллипсоида вращения с заданными полярным и экваториальным радиусами. Как будет ясно из дальнейшего, это положение не является принципиальным и используется здесь с целью некоторого упрощения применяемых при расчетах формул.

2.2.4. Все аналитические расчёты, проводимые в настоящем пособии, являются приближёнными. Точность этих расчётов ограничивается членами второго порядка малости относительно x/f , z/f , λ/f , где x , z – координаты центра рабочей части ОЭП в фокальной плоскости ОЭТК, λ – половина длины рабочей части ОЭП (рис.1.6.), f – фокусное расстояние объектива ОЭТК. Справедливость этого положения устанавливается непосредственно. Так, при $z=0$ $(\lambda/f)^2$ не превышает 0,04%.

2.2.5. При расчёте величин продольной и поперечной составляющих скорости движения оптического изображения в фокальной плоскости объектива ОЭТК принимается равным единице косинус угла δ между центральной и любой дополнительной линией визирования, в том числе проходящей через край ОЭПа. Допустимость этого положения устанавливается также непосредственно. Так, при $x=0$, $z=0$ и заданном соотношением

$$\operatorname{tg} \delta = \delta = \frac{\lambda}{f} = 0,02 \text{ для параметра } \lambda \text{ имеем}$$

$$\cos \delta = \frac{f}{\sqrt{x^2 + (z + \lambda)^2 + f^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{f^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1,0004}} = 0,9998.$$

Другими словами, погрешность принятия данного положения приводит к относительной ошибке в вычислении составляющих скорости движения оптического изображения не более 0,0002, т.е. не более 0,02%. При продольной скорости движения изображения $V_x = 100\text{мм/с}$ это составит 0,02мм/с, пренебрежение которой вполне допустимо.

2.2.6. Моделирование движения центра масс КА можно проводить с использованием параметров оскулирующей орбиты. Поскольку длительность оптимального сканирования маршрута ограничена несколькими десятками секунд, можно пренебречь прецессией и другими эффектами, отличающими истинную орбиту от оскулирующей. Справедливость этого положения не требуется доказывать, поскольку изменение углов, вызванных этими эффектами, незначительно. Кроме того, оптимальные значения угловых скоростей движения КА определяются по текущим истинным значениям углов положения КА в ИСК. Таким образом, отличие в движении не оказывает влияния на качество формирования программы углового движения. Влияние же самих эффектов истинной орбиты на составляющие СДИ пренебрежимо мало.

2.2.7. Моделирование углового движения КА можно проводить с использованием кусочно-постоянного закона управления по угловой скорости по каждому из трёх каналов. Для выбранного малого интервала T расчётов оптимальной программы сканирования (порядка 0,01с) на концах этого интервала имеют место скачки по угловой скорости по каждому каналу в то время, как на самом интервале величина скорости принимается постоянной по каждому каналу. Это приводит к появлению скачков в методических составляющих СДИ, и тем самым к завышению величины этих составляющих, поскольку в реальных условиях бортовой комплекс управления обеспечивает высокую плавность управления благодаря сглаживанию скорости на соседних интервалах за счёт задания необходимого углового ускорения.

2.2.8. При расчёте составляющих СДИ в фокальной плоскости объектива ОЭТК можно полагать, что задняя узловая точка объектива (ЗУТО), являющаяся центром проектирования, совпадает с центром масс КА. Чтобы показать допустимость этого положения, произведём несложный расчёт. Пусть в некоторый момент времени КА в инерциальном пространстве не вращается и оптиче-

ская ось ОЭТК направлена в надир. Если предположить, что скорость движения центра масс КА W в этот момент равна 7800м/с, то все точки КА вдоль оптической оси при условии отсутствия вращения имеют в этот момент скорости, равные 7800м/с. Придадим в следующий момент времени КА угловую скорость $\omega = 1,5\text{град/с} = 0,027\text{с}^{-1}$ в плоскости орбиты. Поскольку вращение КА осуществляется вокруг его центра масс, то скорость поступательного движения центра масс в этом случае не изменится и останется $W_{\text{ц.м.}} = 7800\text{м/с}$, в то время как линейные скорости других точек КА вдоль оптической оси изменятся на величину ΔW , пропорциональную удалению ЗУТО от центра масс КА L :

$$\Delta W = L \omega .$$

Если ЗУТО не совпадает с центром масс КА, то для неё также будет иметь место изменение скорости поступательного движения.

Пусть ЗУТО отклонена от центра масс КА на величину 1м . Тогда изменение скорости её поступательного движения будет равно

$$\Delta W_{\text{ЗУТО}} = 0,027\text{м/с}.$$

В предположении о совпадении ЗУТО с центром масс КА $W_{\text{ЗУТО}}$ принимается равной скорости движения центра масс $W = 7800\text{м/с}$. Фактически же за счёт несовпадения ЗУТО с центром масс, её скорость отличается на величину 0,027м/с. Таким образом, погрешность принятия данного предположения равна

$$\Delta = \frac{\Delta W_{\text{ЗУТО}}}{W} 100\% = 0,00035\% .$$

Этой погрешностью безусловно можно пренебречь и при большем расстоянии ЗУТО от центра масс КА.

2.2.9. Для расчетов с учетом заданного превышения h по высоте маршрута над общеземным эллипсоидом допускается использовать вместо полярного и экваториального радиусов Земли $R_{\text{П}}$ и $R_{\text{Э}}$ параметры $R_{\text{П}} + h$ и $R_{\text{Э}} + h$ соответственно. В этом случае поверхность получаемого эллипсоида отстоит от поверхности общеземного эллипсоида эквидистантно в любой точке поверхности на величину h с пренебрежимо малой погрешностью в связи с малостью параметра h по сравнению с радиусами $R_{\text{П}}$ и $R_{\text{Э}}$.

2.3. Расчёт дальности до поверхности Земли

Для вывода уравнений для скорости движения оптического изображения в каждой точке фокальной плоскости ОЭТК необходимо

Найдём скалярное произведение векторов \bar{d} и \bar{a}_2 :

$$\bar{a}_2 \bar{d} = a_2 d \cos\theta = d \cos\theta, \quad (2.3)$$

где θ – угол между осью ОУ ФСК и линией визирования, проходящей через точку m фокальной плоскости.

С другой стороны, для скалярного произведения справедливо соотношение:

$$\bar{a}_2 \bar{d} = a_{21} x + a_{22} f + a_{23} z. \quad (2.4)$$

Из сравнения (2.3) и (2.4) с учётом (2.1) имеем

$$\cos\theta = \frac{a_{21} x + a_{22} f + a_{23} z}{[x^2 + f^2 + z^2]^{1/2}}.$$

Разделив числитель и знаменатель дроби в правой части полученного выражения на f , будем иметь

$$\cos\theta = \frac{a_{22} + a_{21} \frac{x}{f} + a_{23} \frac{z}{f}}{\left[\left(\frac{x}{f} \right)^2 + 1 + \left(\frac{z}{f} \right)^2 \right]^{1/2}}.$$

Знаменатель полученного выражения в силу принятого положения 2.2.5. можно принять равным единице, откуда следует окончательное выражение

$$\cos\theta = a_{22} + a_{21} \frac{x}{f} + a_{23} \frac{z}{f}. \quad (2.5)$$

В соответствии с рис.2.4 далее нетрудно получить формулу для расчёта дальности, если учесть, что треугольник OSK – прямоугольный, поскольку угол при вершине K принят прямым:

$$D = D_1 - D_2,$$

где
$$D_1 = \cos\theta \cdot r = \left(a_{22} + a_{21} \frac{x}{f} + a_{23} \frac{z}{f} \right) r.$$

Из прямоугольного треугольника OSK также следует

$$OK^2 = r^2 - D_1^2.$$

В свою очередь, из прямоугольного треугольника OMK следует

$$D_2 = (OM^2 - OK^2)^{1/2} = [R_3^2 - (r^2 - D_1^2)]^{1/2} = (D_1^2 + R_3^2 - r^2)^{1/2}.$$

Итак, окончательно получаем искомые формулы для расчёта дальности:

$$D = D_1 - D_2,$$

$$D_1 = \left(a_{22} + \frac{x}{f} a_{21} + \frac{z}{f} a_{23} \right) \cdot r, \quad (2.6)$$

$$D_2 = (D_1^2 + R_3^2 - r^2)^{1/2}.$$

По этим простым соотношениям может быть определена дальность до любой точки М участка поверхности Земли в поле зрения объектива ОЭТК, проектирующей в точку m на фокальной плоскости с координатами x и z .

Повторим, что параметры a_{21} , a_{22} , a_{23} здесь суть направляющие косинусы положения единичного вектора \bar{a}_2 , направленного по оси ОУ ФСК, в осях программной (связанной) системы координат $oxuz$.

2.4. Расчёт некоторых вспомогательных кинематических параметров

Для дальнейшего расчета проведём детальный анализ изменения дальности до произвольной точки визирования М при изменении координат x и z её проекции m , а также получим некоторые соотношения между дальностями для различных точек фокальной плоскости. В первую очередь, представляет интерес влияние изменения координаты z .

2.4.1. Дальность вдоль ЦЛВ

Обозначим через D_0 дальность вдоль центральной линии визирования, т.е. при $x = 0$, $z = 0$. Из (2.6) следует

$$D_0 = D_{10} - D_{20},$$

$$D_{10} = a_{22} r, \quad D_{20} = (D_{10}^2 + R_3^2 - r^2)^{1/2}. \quad (2.7)$$

2.4.2. Отличие в дальности на левом краю ОЭП

Определим дальность до точки, проектирующей на левый край ОЭП с координатами x и z – λ через параметры дальности D_0 :

$$D_{\lambda} = D_0 + \Delta D_{\lambda}, \quad \Delta D_{\lambda} = \Delta D_{1\lambda} - \Delta D_{2\lambda}. \quad (2.8)$$

Здесь $\Delta D_{1\lambda}$ находится из D_1 (2.6) как разность между D_1 и D_{10} :

$$\Delta D_{1л} = \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z-\lambda}{f} a_{23} \right) r . \quad (2.9)$$

Заметим, что $D_{2л}$ (2.6) отличается от D_{20} (2.7) на величину, обозначаемую $\Delta D_{2л}$. Эта величина может быть определена следующим образом. Представим левую и правую части третьего из соотношений (2.6) в функции поправок к параметрам дальности вдоль ЦЛВ:

$$D_{20} + \Delta D_{2л} = \left[(D_{10} + \Delta D_{1л})^2 + R_3^2 - r^2 \right]^{1/2} .$$

Здесь необходимо отметить, что параметр $\Delta D_{1л}$ в правой части полученного равенства значительно меньше параметра D_{10} . Поэтому, возводя двучлен в правой части в квадрат и удерживая лишь член первого порядка малости относительно $\Delta D_{1л}$, получим

$$D_{20} + \Delta D_{2л} = \left[(D_{10}^2 + R_3^2 - r^2) + 2D_{10} \Delta D_{1л} \right]^{1/2} .$$

Воспользуемся далее формулой для бинорма Ньютона разложения двучлена, удерживая в этой формуле лишь член первого порядка малости:

$$(a \pm \Delta)^n = a^n \pm n \cdot a^{n-1} \cdot \Delta \quad (2.10)$$

при $a \gg \Delta$ [4].

С учётом равенства (2.7) для D_{20} применение формулы для бинорма Ньютона даёт:

$$D_{20} + \Delta D_{2л} = D_{20} + \frac{1}{2D_{20}} 2D_{10} \Delta D_{1л} ,$$

откуда

$$\Delta D_{2л} = \Delta D_{1л} \frac{D_{10}}{D_{20}} = \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z-\lambda}{f} a_{23} \right) r \cdot \frac{D_{10}}{D_{20}} . \quad (2.11)$$

С учётом этого результата параметр $\Delta D_{л}$ (2.8) отличия дальности вдоль линии визирования, проходящей через левый край линейки ОЭП и вдоль ЦЛВ, оказывается равным

$$\Delta D_{л} = - \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z-\lambda}{f} a_{23} \right) r \left(\frac{D_{10}}{D_{20}} - 1 \right) = - \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z-\lambda}{f} a_{23} \right) r \frac{D_0}{D_{20}} , \quad (2.12)$$

поскольку в соответствии с (2.7) $D_{10} - D_{20} = D_0$.

2.4.3. Отличие в дальности на правом краю ОЭП

Совершенно аналогично предыдущему пункту устанавливается различие в дальности на правом краю ОЭП и вдоль ЦЛВ.

Запишем

$$D_{п} = D_0 + \Delta D_{п} ; \quad \Delta D_{п} = \Delta D_{1п} - \Delta D_{2п} , \quad (2.13)$$

где

$$\Delta D_{1п} = \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z+\lambda}{f} a_{23} \right) r . \quad (2.14)$$

Разлагая в правой части (2.6) D_1 на сумму D_{10} и $\Delta D_{1п}$, ограничиваясь членами первого порядка малости, воспользовавшись формулой для бинорма Ньютона (2.10) и разлагая в правой части D_2 на сумму D_{20} и $\Delta D_{2п}$, получим

$$\Delta D_{2п} = \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z+\lambda}{f} a_{23} \right) r \frac{D_{10}}{D_{20}} \quad (2.15)$$

и, соответственно,

$$\Delta D_{п} = - \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z+\lambda}{f} a_{23} \right) r \frac{D_0}{D_{20}} . \quad (2.16)$$

2.4.4. Расчёт величины $\frac{1}{D_{п}} + \frac{1}{D_{л}}$

Используя (2.13) и применяя формулу для бинорма Ньютона, величину $\frac{1}{D_{п}}$ представим в виде

$$\frac{1}{D_{п}} = (D_0 + \Delta D_{п})^{-1} = \frac{1}{D_0} - \frac{1}{D_0^2} \Delta D_{п} .$$

Подставляя сюда $\Delta D_{п}$ в соответствии с (2.16), получим

$$\frac{1}{D_{п}} = \frac{1}{D_0} \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z+\lambda}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right] . \quad (2.17)$$

Аналогично $\frac{1}{D_{л}}$ представим в виде

$$\frac{1}{D_{л}} = \frac{1}{D_0} \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z-\lambda}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right] . \quad (2.18)$$

В результате сложения (2.17) и (2.18) будем иметь

$$\frac{1}{D_{п}} + \frac{1}{D_{л}} = \frac{2}{D_0} \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right] . \quad (2.19)$$

2.4.5. Расчёт величины $\frac{1}{D_{\pi}} - \frac{1}{D_{\lambda}}$

Вычитая (2.18) из (2.17), получим

$$\frac{1}{D_{\pi}} - \frac{1}{D_{\lambda}} = 2 \frac{\lambda}{f} a_{23} \frac{r}{D_0 D_{20}}. \quad (2.20)$$

2.4.6. Расчёт величины $\frac{1}{D_{\pi}} - \frac{1}{D_0} \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right]$

Представим $\frac{1}{D_{\pi}}$ в виде (2.17):

$$\frac{1}{D_{\pi}} = \frac{1}{D_0} \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z + \lambda}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right].$$

В результате получим

$$\frac{1}{D_{\pi}} - \frac{1}{D_0} \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right] = \frac{\lambda}{f} a_{23} \frac{r}{D_0 D_{20}}. \quad (2.21)$$

2.4.7. Расчёт величины $\frac{1}{D_{\lambda}} - \frac{1}{D_0} \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right]$

По аналогии с предыдущим пунктом, воспользовавшись формулой (2.18), будем иметь

$$\frac{1}{D_{\lambda}} - \frac{1}{D_0} \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right] = -\frac{\lambda}{f} a_{23} \frac{r}{D_0 D_{20}}. \quad (2.22)$$

2.4.8. Расчёт величины $\frac{1}{D_{\pi}^2} + \frac{1}{D_{\lambda}^2}$

По аналогии с п.2.4.4 можно записать

$$\frac{1}{D_{\pi}^2} = (D_0 + \Delta D_{\pi})^{-2} = \frac{1}{D_0^2} - 2 \frac{1}{D_0^3} \Delta D_{\pi}.$$

Подставляя сюда ΔD_{π} в соответствии с (2.16), получим

$$\frac{1}{D_{\pi}^2} = \frac{1}{D_0^2} \left[1 + 2 \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z + \lambda}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right]. \quad (2.23)$$

Аналогично $\frac{1}{D_{\lambda}^2}$ представим в виде

$$\frac{1}{D_{\lambda}^2} = \frac{1}{D_0^2} \left[1 + 2 \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z - \lambda}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right]. \quad (2.24)$$

В результате имеем

$$\frac{1}{D_{\pi}^2} + \frac{1}{D_{\lambda}^2} = \frac{2}{D_0^2} \left[1 + 2 \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right]. \quad (2.25)$$

2.4.9. Расчёт некоторых вспомогательных величин

Приведём еще два вспомогательных равенства, которые также будут использованы в дальнейшем:

$$\frac{z - \lambda}{D_{\lambda}} - \frac{z}{D_0} = -\frac{\lambda}{D_0}; \quad \frac{z + \lambda}{D_{\pi}} - \frac{z}{D_0} = \frac{\lambda}{D_0}. \quad (2.26)$$

В самом деле, в соответствии с (2.18) имеем:

$$\frac{z - \lambda}{D_{\lambda}} - \frac{z}{D_0} = \frac{z - \lambda}{D_0} \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z - \lambda}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right] - \frac{z}{D_0} \cong \frac{z - \lambda}{D_0} - \frac{z}{D_0} = -\frac{\lambda}{D_0}$$

Аналогично в соответствии с (2.17) имеем:

$$\frac{z + \lambda}{D_{\pi}} - \frac{z}{D_0} = \frac{z + \lambda}{D_0} \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z + \lambda}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right] - \frac{z}{D_0} \cong \frac{z + \lambda}{D_0} - \frac{z}{D_0} = \frac{\lambda}{D_0}.$$

3. ЗАКОНОМЕРНОСТИ ДВИЖЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ В ФОКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ ОБЪЕКТИВА ОЭТК

3.1. Уравнения движения оптического изображения в фокальной плоскости объектива ОЭТК

В общем случае движение оптического изображения в фокальной плоскости ОЭТК определяется скоростью поступательного движения КА как материальной точки относительно точки М наблюде-

ния (рис.1.7) и параметрами углового движения (углами и угловыми скоростями) КА в абсолютном (инерциальном) пространстве. Отсюда следует, что скорость движения оптического изображения в каждой точке фокальной плоскости определяется не более, чем 18-ю параметрами: 6-ю параметрами поступательного движения центра масс КА в инерциальном пространстве, 6-ю параметрами углового движения вокруг центра масс КА в инерциальном пространстве и 6-ю параметрами движения в инерциальном пространстве точки М пересечения линии визирования с поверхностью Земли.

Впервые наиболее полные уравнения движения оптического изображения в фокальной плоскости объектива ОЭТК, однако без использования понятия угловой скорости КА, получены в работах [2,3]. При этом способ получения уравнений путём последовательного преобразования предметного пространства к пространству изображений и последующего дифференцирования координат заимствован из работы [5].

В настоящем пособии эти уравнения получены несколько иным способом, а именно благодаря использованию связей между основными кинематическими параметрами, определяющими процесс съёмки.

Выберем следующую последовательность поворота КА относительно фотограмметрической системы координат (ФСК) (рис.1.7): тангаж (α), крен (β), рыскание (ψ). Обозначим соответствующие им матрицы поворотов через A_α , A_β , A_ψ и матрицу суммарного поворота через A^T :

$$A^T = A_\psi A_\beta A_\alpha = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1^T \\ \bar{a}_2^T \\ \bar{a}_3^T \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Из (3.1) следует, что A^T есть матрица поворота КА от ФСК (ОСК) $O'XYZ$ к программной (связанной) системе координат (ПСК) $oxyz$, а матрица A определяет обратный поворот от ПСК к ФСК.

Нетрудно подсчитать, что элементы матрицы A равны:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \alpha \cos \psi - \sin \alpha \sin \beta \sin \psi; \\ a_{12} &= -\sin \alpha \cos \beta; \\ a_{13} &= \cos \alpha \sin \psi + \sin \alpha \sin \beta \cos \psi; \\ a_{21} &= \sin \alpha \cos \psi + \cos \alpha \sin \beta \sin \psi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{22} &= \cos \alpha \cos \beta; \\ a_{23} &= \sin \alpha \sin \psi - \cos \alpha \sin \beta \cos \psi; \\ a_{31} &= -\cos \beta \sin \psi; \\ a_{32} &= \sin \beta; \\ a_{33} &= \cos \beta \cos \psi. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из принципа центрального проектирования (рис.1.7) при высоком качестве объектива ОЭТК (близком к дифракционному) имеет место соответствие между координатами X, Y, Z точки М предметного пространства и координатами x, z ее проекции m в пространстве изображений (в фокальной плоскости объектива ОЭТК):

$$\bar{d} = \begin{bmatrix} x - x_s \\ 0 - y_s \\ z - z_s \end{bmatrix} = k A^T \begin{bmatrix} X_s - X \\ Y_s - Y \\ Z_s - Z \end{bmatrix} = k A^T \bar{D}, \quad (3.3)$$

где \bar{d} – вектор пространства изображений, являющийся продолжением вектора дальности \bar{D} предметного пространства, направленного от точки М к центру масс КА,

k – некоторый, неизвестный пока коэффициент пропорциональности,

\bar{D} – вектор дальности до рассматриваемой точки М предметного пространства с координатами X, Y, Z в ФСК, направленного от точки М,

x_s, y_s, z_s – координаты центра проектирования S в системе координат $oxyz$,

X_s, Y_s, Z_s – координаты центра проектирования S в системе координат $O'XYZ$.

Для принятого на рис.1.7 положения центра проектирования S в системе координат $oxyz$ имеют место равенства: $x_s = 0; y_s = -f; z_s = 0$, где f – фокусное расстояние объектива ОЭТК. Следовательно, вектор \bar{d} имеет вид:

$$\bar{d} = \begin{bmatrix} x \\ f \\ z \end{bmatrix}.$$

Из (3.3) с учётом (3.1) нетрудно определить соотношение для второго элемента вектора \bar{d} , являющегося фокусным расстоянием объектива ОЭТК:

$$f = k(\bar{a}_2^T \bar{D}).$$

Здесь в правой части имеем скалярное произведение векторов \bar{a}_2^T и \bar{D} . Отсюда нетрудно найти величину коэффициента пропорциональности k :

$$k = \frac{f}{(\bar{a}_2^T \bar{D})}.$$

С учётом этого значения соотношение (3.3) может быть записано через известные величины в следующем виде:

$$\bar{d} = \frac{f}{(\bar{a}_2^T \bar{D})} A^T \bar{D}. \quad (3.4)$$

Соотношение (3.4) получено также и в работах [2,3]. Оно является основным для определения скорости движения оптического изображения в фокальной плоскости объектива ОЭТК. В отличие от работ [2,3] при дифференцировании (3.4) воспользуемся известными кинематическими параметрами вращения твёрдого тела.

Продифференцируем обе части (3.4) по времени. Производную по времени будем в дальнейшем обозначать точкой сверху. Дифференцируя правую часть (3.4) как сложную функцию, получим

$$\dot{\bar{d}} = \frac{f}{(\bar{a}_2^T \bar{D})} \left[(\dot{A}^T \bar{D} + A^T \dot{\bar{D}}) - (\dot{\bar{a}}_2^T \bar{D} + \bar{a}_2^T \dot{\bar{D}}) \frac{(A^T \bar{D})}{(\bar{a}_2^T \bar{D})} \right].$$

Коэффициент у второго члена в правой части полученного выражения является скаляром, поэтому его можно переставить с вектором $(A^T \bar{D})$. Подставляя $\frac{(A^T \bar{D})}{(\bar{a}_2^T \bar{D})}$ из (3.4) в правую часть и приводя подобные в правой части, будем иметь

$$\dot{\bar{d}} = \frac{f}{(\bar{a}_2^T \bar{D})} \left\{ \left[A^T \dot{\bar{D}} - \frac{\bar{d}}{f} (\bar{a}_2^T \dot{\bar{D}}) \right] + \left[\dot{A}^T \bar{D} - \frac{\bar{d}}{f} (\dot{\bar{a}}_2^T \bar{D}) \right] \right\}. \quad (3.5)$$

Заметим, что из теории вращения твёрдого тела [6] известно, что производная от матрицы поворота может быть представлена в виде

$$\dot{A}^T = -\Omega A^T, \quad (3.6)$$

где

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – составляющие вектора мгновенной угловой скорости КА в инерциальном пространстве по осям ox, oy, oz ССК (ПСК) соответственно. Для удобства использования в дальнейшем в соответствии с принятыми названиями углов переобозначим составляющие угловых скоростей следующим образом

$$\omega_1 = \omega_\kappa, \quad \omega_2 = \omega_p, \quad \omega_3 = \omega_\tau,$$

где τ, κ, p – индексы обозначения осей соответственно тангажа, крена и рыскания.

Кроме того, умножая (3.4) слева на матрицу A и учитывая, что произведение $AA^T = E$ есть единичная матрица, можно записать

$$\frac{\bar{D}}{(\bar{a}_2^T \bar{D})} = A \frac{\bar{d}}{f}. \quad (3.7)$$

Раскрывая фигурные скобки в правой части (3.5) и учитывая (3.6) и (3.7), получим

$$\dot{\bar{d}} = \frac{f}{(\bar{a}_2^T \bar{D})} \left[A^T \dot{\bar{D}} - \frac{\bar{d}}{f} (\bar{a}_2^T \dot{\bar{D}}) \right] - \Omega \bar{d} - \frac{\bar{d}}{f} (\dot{\bar{a}}_2^T A \bar{d}). \quad (3.8)$$

Выпишем далее выражение для второй строки равенства (3.6):

$$\dot{\bar{a}}_2^T = -[\omega_\tau; 0; -\omega_\kappa] A^T.$$

Нетрудно заметить, что производная по времени от вектора дальности \bar{D} в силу определения (3.3) есть вектор скорости поступательного движения КА относительно поверхности Земли в точке пересечения линии визирования (вектора \bar{D}) с этой поверхностью.

Обозначим

$$\dot{\bar{D}} = \begin{bmatrix} \dot{X}_s - \dot{X} \\ \dot{Y}_s - \dot{Y} \\ \dot{Z}_s - \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix}.$$

Здесь W_x, W_y, W_z – проекции упомянутого вектора скорости на оси исходной ФСК (ОСК).

Заметим также, что скалярное произведение $(\bar{a}_2^T \bar{D})$ единичного вектора \bar{a}_2^T , направленного по оси oy , на вектор дальности \bar{D} равно:

$$(\bar{a}_2^T \bar{D}) = D \cos \delta,$$

где δ – угол между ЛВ (\bar{D}) и ЦЛВ (рис.2.4).

С учётом введённых обозначений и после подстановки всех полученных выражений соотношение (3.8) приобретает окончательный вид:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{d}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \frac{f}{D \cos \delta} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix} - \frac{1}{f} \begin{bmatrix} x \\ f \\ z \end{bmatrix} [a_{12}; a_{22}; a_{32}] \begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix} - \\ - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_\tau & \omega_p \\ \omega_\tau & 0 & -\omega_\kappa \\ -\omega_p & \omega_\kappa & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ f \\ z \end{bmatrix} + \frac{1}{f} \begin{bmatrix} x \\ f \\ z \end{bmatrix} [\omega_\tau; 0; -\omega_\kappa] \begin{bmatrix} x \\ f \\ z \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

В соответствии с принятым в настоящем пособии положением 2.2.5. имеем: $\cos \delta = 1$. Тогда, выписывая построчно (3.9) для первой и третьей строк, получим искомые соотношения для продольной и поперечной составляющих скорости движения оптического изображения в фокальной плоскости ОЭТК:

$$\begin{aligned} V_x = \dot{x} = \frac{f}{D} \left[(W_x a_{11} + W_y a_{21} + W_z a_{31}) - \frac{x}{f} (W_x a_{12} + W_y a_{22} + W_z a_{32}) \right] + \\ + \left(f + \frac{x^2}{f} \right) \omega_\tau - z \omega_p - \frac{x z}{f} \omega_\kappa; \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} V_z = \dot{z} = \frac{f}{D} \left[(W_x a_{13} + W_y a_{23} + W_z a_{33}) - \frac{z}{f} (W_x a_{12} + W_y a_{22} + W_z a_{32}) \right] - \\ - \left(f + \frac{z^2}{f} \right) \omega_\kappa + x \omega_p + \frac{x z}{f} \omega_\tau. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Необходимо ещё раз подчеркнуть, что в полученных уравнениях D – дальность вдоль линии визирования точки M на поверхности Земли с координатами X, Y, Z , изображение (проекция) которой (точка m) на фокальную плоскость имеет координаты x, z (рис.1.7); a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) – направляющие косинусы матрицы A поворота от ПСК (ССК) к ФСК (ОСК) (поскольку матрица A^T есть обратная матрица поворота от ФСК (ОСК) к ПСК (ССК)); W_x, W_y, W_z – проекции вектора скорости поступательного движения центра масс КА относительно поверхности Земли в точке пересечения линии визирования (\bar{D}) с этой поверхностью, имеющей координаты X, Y, Z , на оси ФСК (ОСК); $\omega_\tau, \omega_\kappa, \omega_p$ – составляющие вектора угловой скорости

сти вращения КА в абсолютном (инерциальном) пространстве в проекциях на связанные с КА (в данном случае программные) оси тангажа, крена и рыскания соответственно.

Полученные уравнения являются приближёнными, поскольку при их получении использована часть допустимых положений, изложенных в п.2.2.5. Тем не менее они допускают ещё некоторое дальнейшее упрощение, которое будет рассмотрено и использовано ниже.

Отличие уравнений в работах [2,3] от полученных состоит в том, что в них вместо составляющих $\omega_\tau, \omega_\kappa, \omega_p$ вектора угловой скорости использованы соответствующие им правые части кинематических уравнений (3.15), приведённых ниже, представляющие собой функции углов отклонения КА и их первых производных по времени.

Включение в (3.10) и (3.11) составляющих вектора угловой скорости является более содержательным, поскольку они используются как при формировании законов управления при съёмке маршрута, так и при их реализации.

Уравнения (3.10) и (3.11) можно представить в другой более простой форме. Нетрудно заметить, что в этих уравнениях составляющие СДИ выражены через составляющие скорости W_x, W_y, W_z в осях ФСК (ОСК), которые скалярно умножаются на единичные векторы, направленные по осям ПСК (ССК). Эти скалярные произведения представляют собой проекции скоростей на оси ПСК (ССК), которые обозначим с использованием буквы "р":

$$\begin{aligned} W_{xp} &= (\bar{W} \cdot \bar{a}_1^T) = W_x a_{11} + W_y a_{21} + W_z a_{31}, \\ W_{yp} &= (\bar{W} \cdot \bar{a}_2^T) = W_x a_{12} + W_y a_{22} + W_z a_{32}, \\ W_{zp} &= (\bar{W} \cdot \bar{a}_3^T) = W_x a_{13} + W_y a_{23} + W_z a_{33}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Кроме того, в соответствии с положением 2.2.4 пренебрежём членами второго порядка малости относительно $\frac{x}{f}$ и $\frac{z}{f}$.

В итоге уравнения для СДИ приобретают наиболее простой вид:

$$\begin{aligned} V_x = \frac{f}{D} \left(W_{xp} - \frac{x}{f} W_{yp} \right) + f \omega_\tau - z \omega_p - \frac{x z}{f} \omega_\kappa; \\ V_z = \frac{f}{D} \left(W_{zp} - \frac{z}{f} W_{yp} \right) - f \omega_\kappa + x \omega_p + \frac{x z}{f} \omega_\tau. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Строго говоря, необходимо было бы пренебречь в (3.13) и членами, содержащими коэффициент $\frac{xz}{f}$. Однако пока сохраним эти члены. Вопрос по их использованию в каждом конкретном случае будем решать отдельно.

Полученные в настоящем параграфе соотношения являются основополагающими. В дальнейшем они могут быть использованы как при разработке вариантов программы углового движения КА, так и при моделировании и оценке величины истинной скорости движения изображения в произвольно заданной точке фокальной плоскости.

3.2. Интегральные кривые движения точек подстилающей поверхности Земли для случая круговой орбиты КА и сферической невращающейся Земли

Полученные соотношения (3.10) и (3.11) для составляющих скорости движения изображения (СДИ) в фокальной плоскости ОЭТК не дают наглядного представления о характере этого движения. Для того, чтобы понять основные закономерности движения произвольной точки изображения и в дальнейшем давать квалифицированную оценку рассматриваемым вариантам управления линией визирования ОЭТК, необходимо знать, как ведут себя интегральные кривые движения точек подстилающей поверхности Земли в интересующей нас плоскости изменяющихся параметров: углов тангажа α и крена β . Задачу будем решать весьма упрощённую, однако результаты несут в себе все важные свойства исследуемого процесса.

Итак, поставим задачу нахождения траектории движения произвольно выбранной точки на поверхности Земли при заданных в начальный момент времени t_0 углах тангажа α_0 и крена β_0 направления на нее ЛВ с борта КА.

Для нахождения траектории движения произвольно выбранной точки в плоскости углов тангажа α и крена β отвлечёмся на время от задач съёмки и будем полагать, что изображение точки М непрерывно удерживается в центре фокальной плоскости ОЭТК по направле-

нию центральной линии визирования, то есть тождественно выполняются соотношения:

$$x \equiv 0, z \equiv 0, \psi \equiv 0, \dot{\psi} \equiv 0, V_x \equiv 0, V_z \equiv 0.$$

Здесь, как и ранее, точка над параметром ψ означает первую производную по времени. Для простоты будем также полагать, что движение КА осуществляется по круговой орбите над сферической невращающейся поверхностью Земли, то есть $W_y=0$ и $W_z=0$. Обозначим $W_x=W_0$.

При этих условиях соотношения (3.10) и (3.11) принимают вид:

$$\begin{aligned} f \frac{W_0}{D} a_{11} + f \omega_T &= 0; \\ f \frac{W_0}{D} a_{13} - f \omega_K &= 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

а выражения для направляющих косинусов a_{11} , a_{13} (3.2), соответственно, вид:

$$a_{11} = \cos \alpha; \quad a_{13} = \sin \alpha \sin \beta.$$

Кроме того, кинематические уравнения углового движения КА, связывающие скорости ω_T , ω_K , ω_P с углами α , β , ψ и их производными по времени, при последовательности поворотов: тангаж (α), крен (β), рыскание (ψ), имеющие согласно рис. 3.1 вид:

$$\begin{aligned} \omega_T &= \dot{\alpha} \cos \beta \cos \psi + \dot{\beta} \sin \psi; \\ \omega_K &= \dot{\beta} \cos \psi - \dot{\alpha} \cos \beta \sin \psi; \\ \omega_P &= \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\psi}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

при тех же условиях также приводятся к более простому виду:

$$\begin{aligned} \omega_T &= \dot{\alpha} \cos \beta; \\ \omega_K &= \dot{\beta}; \\ \omega_P &= \dot{\alpha} \sin \beta. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Здесь точкой сверху обозначена первая производная по времени.

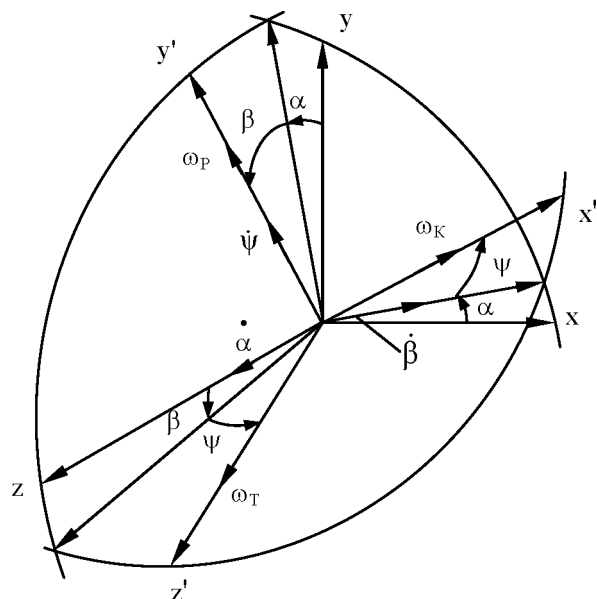


Рис.3.1. К выводу кинематических уравнений
углового движения изделия

Подставляя полученные выражения в (3.14), будем иметь

$$\frac{W_0}{D} \cos \alpha + \dot{\alpha} \cos \beta = 0;$$

$$\frac{W_0}{D} \sin \alpha \sin \beta - \dot{\beta} = 0.$$

В каждом из этих выражений найдем значение параметра $\frac{W_0}{D}$.

Получим

$$\frac{W_0}{D} = -\dot{\alpha} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha};$$

$$\frac{W_0}{D} = \frac{\dot{\beta}}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}.$$

Поскольку левые части этих выражений равны, равны и правые части. Из этого равенства имеем:

$$\frac{\dot{\beta}}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = -\dot{\alpha} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}.$$

Умножив это соотношение на $\sin \alpha$ и разделив на $\cos \beta$, получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$$\frac{\dot{\beta}}{\sin \beta \cos \beta} = -\dot{\alpha} \operatorname{tg} \alpha,$$

интегрирование которого на интервале времени от t_0 до t с начальными значениями углов α_0 и β_0 дает интегральные кривые в виде

$$\operatorname{tg} \beta = k \cos \alpha, \quad (3.17)$$

где константа k определяется начальными условиями:

$$k = \frac{\operatorname{tg} \beta_0}{\cos \alpha_0}.$$

Графики полученных интегральных кривых в функции углов тангажа и крена представлены на рис. 3.2 для различных значений параметра k . Напомним, что вектор скорости движения точек наблюдения вдоль интегральных кривых направлен по касательной к интегральной кривой в рассматриваемой точке.

Расчет интегральных кривых проведен на произвольный момент съемки маршрута, когда оси фотограмметрической системы координат $OXYZ$ параллельны осям текущей орбитальной системы координат (рис. 1.7), а именно: ось OY направлена по местной вертикали, ось OX совпадает с плоскостью орбиты. Поэтому на рис. 3.2 интегральные кривые построены фактически в осях текущей орбитальной системы координат, что необходимо иметь ввиду, пользуясь этими кривыми.

Рис. 3.2 дает наглядное представление о распределении скоростей движения точек подстилающей поверхности Земли по всему

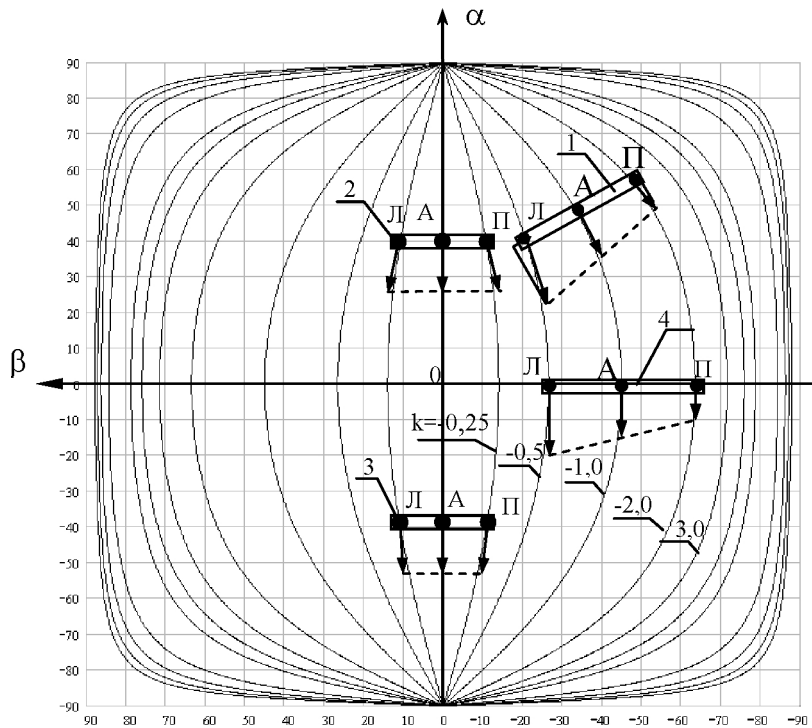


Рис. 3.2. Интегральные кривые движения точек наблюдения

полю обзора в координатах α и β и, в частности, вдоль строки матрицы ФПЗС. Так, если задать положение 1 линейки ОЭП (строки матрицы ФПЗС), как показано на рис.3.2, таким образом, что центр линейки совместится с некоторой точкой А наблюдения, для которой построена интегральная кривая, а направление линейки ОЭП будет строго перпендикулярно касательной к интегральной кривой, проходящей через точку А, то скорости движения в других точках линейки, в особенности по ее краям (точка Л у левого края и точка П у правого), будут отличаться как по величине, так и по направлению. И это отличие тем значительнее, чем больше угол зрения объектива ОЭТК и длина линейки ОЭП. Причем скорость в точке Л, расположенной ближе к началу системы координат $\alpha\beta$, будет больше по модулю скорости в точке А и иметь поперечную составляющую (вдоль линейки ОЭП), направленную в отрицательном направлении

оси oz . И наоборот, скорость в точке П, расположенной дальше точки А от начала координат, будет меньше по модулю скорости в точке А и иметь поперечную составляющую, направленную в положительном направлении оси oz .

Отметим, что для обеспечения перпендикулярности в точке А касательной к интегральной кривой и линейки ОЭП последнюю вместе с КА необходимо развернуть по каналу рыскания. Величина угла разворота может быть определена из уравнения (3.11) при условии $V_z=0$, которое при $x=0, z=0$ и при отсутствии вращения КА в инерциальном пространстве, то есть при $\omega_T=0, \omega_K=0, \omega_P=0$, дает $a_{13}=0$. С учетом (3.2) из этого равенства находится искомая величина угла разворота по рысканию

$$tg\psi = -\sin\beta tg\alpha. \quad (3.18)$$

Отметим также, что из рис. 3.2 следует: при отклонении линейки ОЭП только по тангажу в положение 2 или 3 поперечные составляющие скорости движения изображения на краях линейки ОЭП равны по величине и направлены в противоположные стороны, а при отклонении только по крену в положение 4 поперечные составляющие равны нулю в любой точке линейки ОЭП.

3.3. Интегральные кривые движения точек подстилающей поверхности Земли для случая эллиптической орбиты КА и сферической вращающейся Земли

Для нахождения траектории движения произвольно выбранной точки в плоскости углов тангажа и крена в общем случае эллиптической орбиты КА и сферической вращающейся Земли аналогично предыдущему пункту будем полагать:

$$x \equiv 0, z \equiv 0, \psi \equiv 0, \dot{\psi} \equiv 0, V_x \equiv 0, V_z \equiv 0.$$

Для составляющих W_x, W_y, W_z вектора скорости в рассматриваемом случае имеют место приближённые соотношения:

$$\begin{aligned} W_x &= \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 + e \cdot \cos v) - R_3 \Omega_3 \cos i; \\ W_y &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot e \cdot \sin v; \\ W_z &= -R_3 \cdot \Omega_3 \cdot \sin i \cdot \cos u. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Здесь $\mu = 3,986 \cdot 10^5 \text{ км}^3/\text{с}^2$ – гравитационный потенциал Земли, $\Omega_3 = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ – угловая скорость вращения Земли, параметры орбиты p, e, i, u, v – соответственно фокальный параметр, эксцентриситет, наклонение плоскости орбиты к плоскости экватора, текущий аргумент широты и истинная аномалия.

Тогда при $W_y \neq 0$ (орбита эллиптическая) и при $W_z \neq 0$ (Земля вращается) соотношения (3.10) и (3.11) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{D}(W_x a_{11} + W_y a_{21} + W_z a_{31}) + \omega_T &= 0; \\ \frac{1}{D}(W_x a_{13} + W_y a_{23} + W_z a_{33}) - \omega_K &= 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

В рассматриваемом случае кинематические уравнения (3.15) также имеют упрощенный вид (3.16). Подставляя их в (3.20), после вынесения в последних ω_T и ω_K в правые части и последующего деления этих уравнений друг на друга будем иметь:

$$\frac{W_x a_{11} + W_y a_{21} + W_z a_{31}}{W_x a_{13} + W_y a_{23} + W_z a_{33}} = -\frac{\dot{\alpha}}{\dot{\beta}} \cos \beta.$$

Подставляя сюда выражения из (3.2) для направляющих косинусов при $\psi=0$, получим:

$$\frac{W_x \cos \alpha + W_y \sin \alpha}{W_x \sin \alpha \sin \beta - W_y \cos \alpha \sin \beta + W_z \cos \beta} = -\frac{\dot{\alpha}}{\dot{\beta}} \cos \beta. \quad (3.21)$$

Для получения выражения для интегральных кривых, описываемых этим дифференциальным уравнением, необходимо последнее проинтегрировать. Результаты численного интегрирования (3.21) представлены на рис. 3.3, 3.4, 3.5. При этом приняты следующие параметры орбиты: высота перигея $H_p=350 \text{ км}$, высота апогея $H_a=700 \text{ км}$, наклонение орбиты $i=60^\circ$. Рис. 3.3 приведен для восходящего узла орбиты ($u=0$), соответствующего истинной аномалии $v=90^\circ$. Соответственно, рис. 3.4 приведен для $u=90^\circ, v=180^\circ$, а рис. 3.5 – для $u=180^\circ, v=270^\circ$.

На этих рисунках наглядно видно, как влияет главным образом вращение Земли на поведение интегральных кривых движения точек наблюдения. Практическое совпадение кривых рис. 3.4. с кривыми рис. 3.2. подтверждает, что при коллинеарности направления движе-

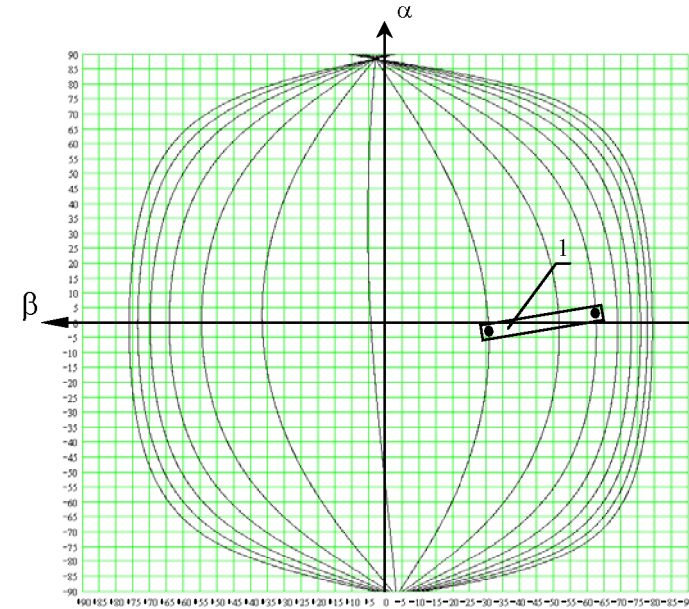


Рис. 3.3. Интегральные кривые движения точек наблюдения, $u=0$

ния точки наблюдения с плоскостью орбиты (в точке орбиты с аргументом широты $u=+90^\circ$, а также в непоказанной на рисунке точке с $u=-90^\circ$) интегральные кривые соответствуют случаю отсутствия вращения Земли. И наоборот, в восходящем узле орбиты (ВУЗ) (рис. 3.3) и нисходящем (НУЗ) (рис. 3.5) интегральные кривые в целом незначительно деформируются, причем таким образом, что в каждой точке кривой, имеющей $\alpha=0$ и некоторый заданный угол β , интегральная кривая (касательная к ней) уже перестает совпадать с направлением оси $\alpha\alpha$. Это говорит о необходимости разворачивать КА на некоторый дополнительный угол по рысканию даже при угле $\alpha=0$ и произвольном угле β .

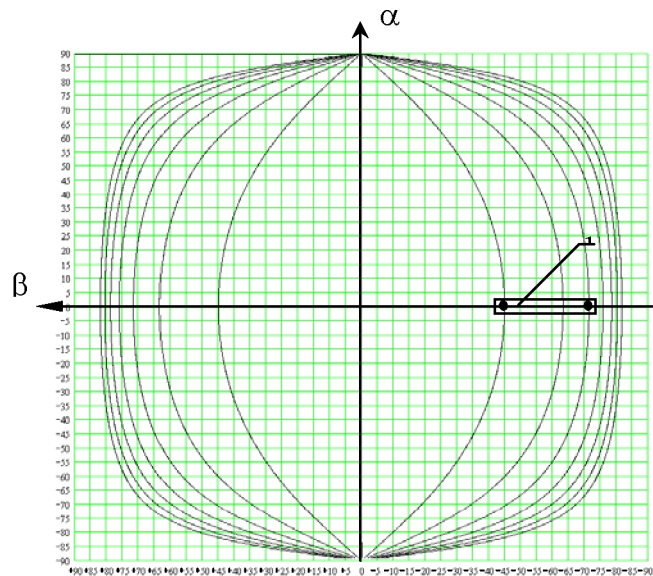


Рис. 3.4. Интегральные кривые движения точек наблюдения, $u=90^\circ$

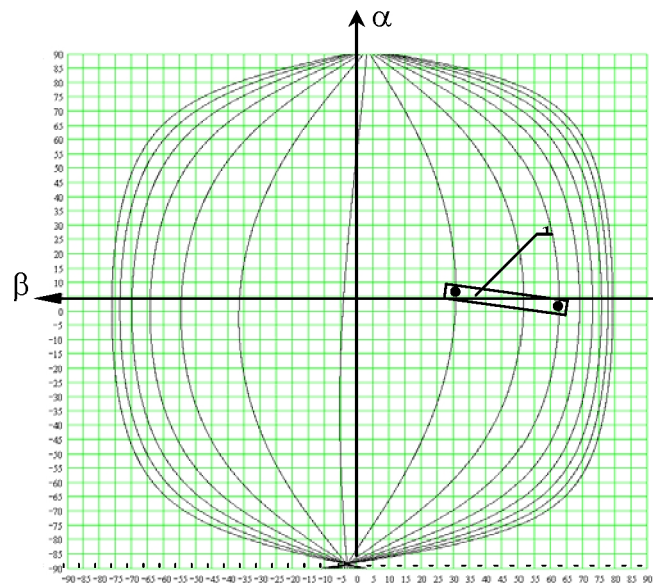


Рис. 3.5. Интегральные кривые движения точек наблюдения, $u=180^\circ$

Для нахождения угла разворота КА по рысканию для любой заданной точки наблюдения с координатами α и β воспользуемся соотношением (3.11), которое при $x=0$, $z=0$, $\omega_k=0$ и $V_z=0$ даёт

$$W_x a_{13} + W_y a_{23} + W_z a_{33} = 0,$$

откуда с учётом выражений (3.2) для a_{ij} следует искомая величина

$$\operatorname{tg} \psi = - \frac{W_x \sin \alpha \sin \beta - W_y \cos \alpha \sin \beta + W_z \cos \beta}{W_x \cos \alpha + W_y \sin \alpha}. \quad (3.22)$$

4. ВАРИАНТЫ ЭВРИСТИЧЕСКОЙ ПРОГРАММЫ УПРАВЛЕНИЯ УГЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ КА ПРИ СКАНИРОВАНИИ

4.1. Постановка задачи определения углового движения КА при сканировании

Современные методы космической оптико-электронной съемки поверхности Земли развились на базе традиционных методов, использованных еще на самых первых КА дистанционного зондирования Земли отечественного производства. Ретроспективный анализ этих методов показывает [1]: для того, чтобы сформировать программу сканирования с трехосным управлением КА, необходимо составить три уравнения связи, в соответствии с которыми однозначно могут быть получены функциональные зависимости угловых скоростей от времени и, следовательно, после интегрирования – углы, а после дифференцирования – угловые ускорения вращения КА. В частности, для съемки с отклонением линии визирования только по крену на фиксированный угол два уравнения связи имеют следующую форму: 1) $\alpha=0$ и 2) $\beta=\text{const}$. Третье уравнение связи для традиционной съемки представляет собой условие компенсации поперечной составляющей скорости движения изображения (СДИ) в центре фотоприёмной структуры: $V_z(x=0, z=0)$, которое выполняется, как мы уже видели в параграфе 3.3, путем разворота съемочной аппаратуры на определенный компенсационный угол по рысканию.

Для ОЭТК нового поколения, по мнению авторов работы [1], целесообразно сохранить требование компенсации поперечной составляющей скорости движения оптического изображения в центре фотоприёмной структуры (ОЭП), откуда следует первое уравнение

связи: $V_z(x=0, z=0)$. Второе уравнение связи для системы с регулировкой СДИ определяет требование к величине продольной составляющей скорости движения в центре фотоприёмной структуры: $V_x(x=0, z=0) = V_{x\text{зад}} = V_x^*$, где $V_{x\text{зад}}$ - заданное значение продольной составляющей СДИ.

Третье уравнение связи может быть получено из условия обеспечения постоянства продольной составляющей СДИ по всей длине линейки ОЭП. Третье уравнение связи может быть выражено в дифференциальной форме: $\frac{dV_x}{dz} = 0$ при $x=0, z=0$ (условие выравнивания продольной составляющей СДИ по длине линейки ОЭП). Это означает равенство нулю угла наклона касательной к годографу продольной скорости в центре линейки ОЭП.

В рамках настоящего пособия будем называть метод формирования программы углового движения КА при сканировании, основанный на приведенных выше условиях связи, эвристическим, поскольку он базируется на основе простых инженерных соображений и является результатом удачных находок и соответствующих им решений.

К настоящему времени известно несколько вариантов эвристического метода формирования программы углового движения КА. Некоторые из них можно перечислить:

- сканирование с нулевым углом тангажа и постоянным заданным углом крена;
- сканирование с постоянными заданными углами тангажа и крена;
- управление с тангажным отслеживанием движения подстилающей поверхности Земли;
- сканирование с произвольно заданным начальным азимутом средней линии маршрута;
- сканирование с произвольно заданным постоянным азимутом средней линии маршрута;
- сканирование с выравниванием продольной составляющей скорости движения изображения по длине линейки ОЭП.

В качестве примера в следующих двух параграфах рассматриваются первый и последний из перечисленных вариантов формирования программы углового движения КА при сканировании с целью анализа характеристик этих вариантов.

Последний вариант является вершиной достижений эвристического метода, поэтому в настоящем пособии он будет исследован более подробно. В дальнейшем, в связи с разработкой теории оптимального сканирования, будут определены место и значение эвристического метода в теории оптимального сканирования.

4.2. Сканирование с нулевым углом тангажа и постоянным заданным углом крена

Для формирования этого варианта достаточно задать следующие три условия связи:

1. $\alpha_{\text{пр}} \equiv 0$;
2. $\beta_{\text{пр}} = \text{const} = \beta_{\text{зад}}$;
3. $V_z(x=0, z=0) = 0$.

Первое условие определяет нулевой программный угол тангажа в орбитальной системе координат (ОСК), вращающейся с орбитальной угловой скоростью относительно начального положения оси OZ фотограмметрической системы координат OXYZ (рис. 1.7). Учитывая, что в момент начала и в фиксированные моменты времени в процессе съемки оси фотограмметрической системы координат принимаются параллельными осям текущей ОСК, угол отклонения линии визирования ОЭТК в фотограмметрической системе координат в эти моменты времени также равен нулю: $\alpha_{\text{пр}} = 0$. В то же время в процессе съемки скорость его изменения в инерциальном пространстве определяется соотношением

$$\dot{\alpha}_{\text{пр}} = -\frac{W_0}{r}, \quad (4.2)$$

где W_0 – продольная (трансверсальная) составляющая скорости движения центра масс КА, определяемая первым членом у W_x (3.19):

$$W_0 = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 + e \cdot \cos \psi).$$

В соответствии со вторым условием связи производная по времени $\dot{\beta} = 0$. С учетом этого кинематические уравнения (3.15) упрощаются и имеют вид:

$$\begin{aligned}\omega_{T\text{ пр}} &= -\frac{W_0}{r} \cos\beta_{\text{пр}} \cos\psi_{\text{пр}}; \\ \omega_{K\text{ пр}} &= \frac{W_0}{r} \cos\beta_{\text{пр}} \sin\psi_{\text{пр}}; \\ \omega_{P\text{ пр}} &= -\frac{W_0}{r} \sin\beta_{\text{пр}} + \dot{\psi}_{\text{пр}}.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Эти уравнения и есть закон (программа) управления линией визирования в рассматриваемом варианте. В самом деле, все соотношения в правой части известны на любой момент съемки. Константа $\beta_{\text{пр}}$ задана условием 2: $\beta_{\text{пр}} = \beta_{\text{зад}}$. Угол разворота КА по рысканию $\psi_{\text{пр}}$ определяется соотношением (3.22). При этом входящий в него угол α тождественно равен нулю (выполняется условие 1).

Итак, в рассмотренном варианте применения эвристического метода формирования программы сканирования связанные оси охуз отклонены от осей текущей орбитальной системы координат на постоянный на всем интервале съемки угол крена $\beta_{\text{пр}}$, и в таком положении они вращаются в инерциальном пространстве вместе с текущей орбитальной системой координат, совершая гармонические колебания по углу рыскания $\psi_{\text{пр}}$.

Рассмотренный вариант отличают следующие особенности программного движения КА: поперечные скорости движения оптического изображения (V_z) во всех точках центрального ОЭП отсутствуют, продольные (V_x) переменны по длине ОЭП, имеют наибольшие по величине отклонения на краях линейки ОЭП по сравнению с центром и эти отклонения имеют противоположные знаки. Это положение ОЭП соответствует положению 4 на рис. 3.2 и положению 1 на рис. 3.3, 3.4 и 3.5.

Для того, чтобы оценить степень различия продольной составляющей СДИ на левом и правом краях линейки ОЭП, приведем численный пример. Возьмем для простоты круговую орбиту с высотой $H=350$ км с наклоном $i=90^\circ$. Если съемку проводить в точке $u=90^\circ$, то в соответствии с (3.19) будем иметь:

$$W_0 = W_x = \sqrt{\frac{\mu}{p}} = 7,701 \frac{\text{км}}{\text{с}}; \quad W_y = 0; \quad W_z = 0.$$

В рассматриваемом варианте сканирования КА при $\beta=45^\circ$ ($\alpha_{\text{оск}}=0$, $\psi=0$), при максимальной относительной величине половины

длины центральной ($x=0$) линейки ОЭП $\frac{\lambda}{f} = 0,01215$, дальности до точек наблюдения от левого и правого края линейки ОЭП в соответствии с (2.6) и с учётом (3.2) будут равны $\left(\frac{z_{1л}}{f} = -0,01215; \frac{z_{1п}}{f} = 0,01215\right)$:

$$D_{1л} = \left(\cos\beta - \sin\beta \frac{z_{1л}}{f}\right) r = 4809,54 \text{ км};$$

$$D_{1п} = \left(\cos\beta - \sin\beta \frac{z_{1п}}{f}\right) r = 4693,95 \text{ км};$$

$$D_{2л} = \left\{D_{1л}^2 + R_3^2 - r^2\right\}^{\frac{1}{2}} = 4306,9 \text{ км};$$

$$D_{2п} = \left\{D_{1п}^2 + R_3^2 - r^2\right\}^{\frac{1}{2}} = 4177,4 \text{ км};$$

$$D_{л} = D_{1л} - D_{2л} = 502,64 \text{ км};$$

$$D_{п} = D_{1п} - D_{2п} = 516,55 \text{ км}.$$

При $\beta = +45^\circ$ след линии визирования отклонён от плоскости орбиты влево по полёту в соответствии с рис. 1.7.

Теперь воспользуемся уравнением (3.10) для вычисления продольной составляющей скорости движения изображения на левом и правом краях линейки ОЭП. При $\psi = 0$ и $\dot{\psi} \approx 0$ при $u=90^\circ$, $x=0$ (центральная линейка ОЭП), то есть при $\omega_T = -\frac{W_0}{r} \cos\beta$, $\omega_P = -\frac{W_0}{r} \sin\beta$ в соответствии с (3.2) и (3.3) с точностью до члена $\frac{z}{f} \omega_P$, равного

$$0,01215 \cdot \frac{7,701}{6721} \cdot 0,707 = 9,84 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}, \text{ получим:}$$

$$\frac{V_{xл}}{f} = \frac{W_0}{D_{л}} - \frac{W_0}{r} \cos\beta = \frac{7,701}{502,64} - \frac{7,701}{6721} \cdot 0,707 = 0,0145 \text{ с}^{-1};$$

$$\frac{V_{xп}}{f} = \frac{W_0}{D_{п}} - \frac{W_0}{r} \cos\beta = \frac{7,701}{516,55} - \frac{7,701}{6721} \cdot 0,707 = 0,0141 \text{ с}^{-1},$$

откуда следует, что разность относительных скоростей на краях линейки ОЭП составляет

$$\frac{V_{xл}}{f} - \frac{V_{xп}}{f} = 0,0004 \text{ с}^{-1}.$$

При большой величине фокусного расстояния разность фактических скоростей движения изображения на краях линейки ОЭП может достигать десятка $\frac{\text{мм}}{\text{с}}$. Для получения высокого качества информации такие разности в ряде случаев просто недопустимы.

Для того, чтобы уменьшить влияние этого фактора на качество информации применяют меры конструктивного и методического характера.

В первом случае всю длину линейки ОЭП разбивают на отдельные одинаковой длины участки, называемые зонами компенсации, каждая из которых управляется как самостоятельная, не зависящая от других линейка ОЭП, а именно: скорость (частота) передачи зарядовых пакетов от строки к строке в каждой из этих зон компенсации соответствует расчетной скорости движения изображения в центральной точке этой зоны. Таким конструктивным решением (рис. 4.1) удается существенно снизить остаточные продольные составляющие скорости движения изображения теперь уже на краях каждой из зон компенсации ОЭП. При этом остаточные составляющие снижаются пропорционально числу введенных зон компенсации. Методический подход изложен в следующем параграфе.

4.3. Сканирование с выравниванием продольной составляющей скорости движения изображения по длине линейки ОЭП

Некоторые из изложенных ранее вариантов эвристического метода формирования программы сканирования, в том числе изложенный в предыдущем параграфе, обладают одним существенным недостатком: продольная составляющая скорости движения изображения непостоянна по длине линейки ОЭП (рис. 4.1).

Используя понятие интегральной кривой, этому явлению дано объяснение в параграфе 3.2. Повторим, что в общем случае положения линейки ОЭП ее центральная точка, левый и правый края располагаются на различных интегральных кривых, так что скорости движения изображения в этих точках различны. Причем различны в общем случае (рис. 3.2) как проекции скорости на продольное направление (ox), так и проекции на поперечное направление (oz).

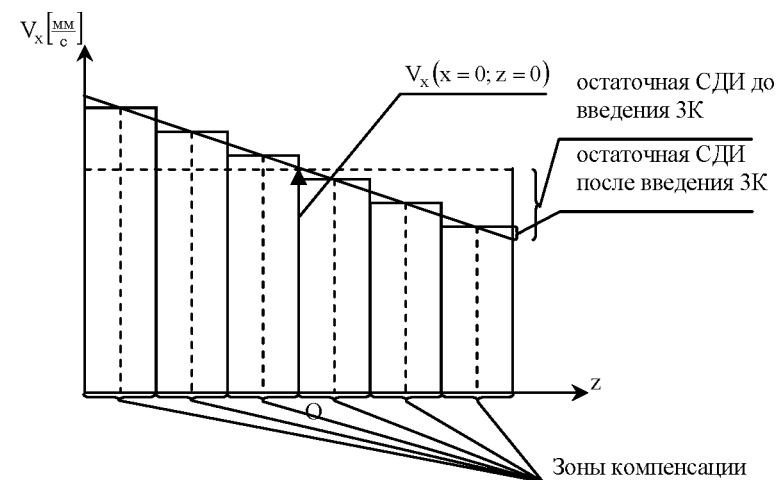


Рис. 4.1. Снижение продольных составляющих СДИ при введении зон компенсации (ЗК) ОЭП

Вместе с тем, для узкопольных оптических систем с высокой точностью можно считать, что изменение продольной составляющей СДИ (как, впрочем, и поперечной составляющей) носит линейный характер по длине линейки ОЭП, что отражено в принятом положении 2.2.1.

Как уже упоминалось в параграфе 3.1, для выравнивания продольной составляющей СДИ по длине линейки ОЭП предложены следующие три уравнения связи:

1. $V_z(x=0, z=0) = 0;$
2. $V_x(x=0, z=0) = V_x^*;$
3. $\frac{dV_x}{dz}(x=0, z=0) = 0.$

(4.4)

Последнее из этих условий определяет равенство нулю угла наклона касательной к годографу продольной составляющей СДИ в центре линейки ОЭП.

Учитывая линейный характер изменения продольной составляющей СДИ вдоль линейки ОЭП (положение 2.2.1), переформулируем два последних условия в виде равенства продольных состав-

ляющих СДИ на левом и правом краях линейки ОЭП заданной величине V_x^* . В этом случае условия связи примут вид:

$$\begin{aligned} 1. & V_z(x=0, z=0) = 0; \\ 2. & V_x(x=0, z=z_{\text{л}}) = V_x^*; \\ 3. & V_x(x=0, z=z_{\text{п}}) = V_x^*. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Подставим выражения для скоростей движения изображения (3.13) в условия (4.5). Учитывая, что на левом краю $z_{\text{л}} = -\lambda$, а на правом $z_{\text{п}} = +\lambda$, получим (после перестановки уравнений):

$$\begin{aligned} \frac{f}{D_{\text{л}}} (W_x a_{11} + W_y a_{21} + W_z a_{31}) + f\omega_{\text{Т}} + \lambda\omega_{\text{П}} &= V_x^*; \\ \frac{f}{D_{\text{п}}} (W_x a_{11} + W_y a_{21} + W_z a_{31}) + f\omega_{\text{Т}} - \lambda\omega_{\text{П}} &= V_x^*; \\ \frac{f}{D_0} (W_x a_{13} + W_y a_{23} + W_z a_{33}) - f\omega_{\text{К}} &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь параметр D_0 в третьем уравнении есть дальность вдоль центральной линии визирования, параметры $D_{\text{л}}$ и $D_{\text{п}}$ – дальности до точек наблюдения, проектирующихся на левый и правый края линейки ОЭП соответственно.

Полученная система уравнений (4.6) полностью определяет угловые скорости $\omega_{\text{Т}}$, $\omega_{\text{К}}$, $\omega_{\text{П}}$.

Для определения составляющей $\omega_{\text{Т}}$ сложим первые два уравнения (4.6), для вычисления составляющей $\omega_{\text{П}}$ вычтем первое из уравнений (4.6) из второго, а из третьего непосредственно определяется составляющая $\omega_{\text{К}}$.

В итоге получим:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{Т}} &= \frac{V_x^*}{f} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{D_{\text{п}}} + \frac{1}{D_{\text{л}}} \right) (W_x a_{11} + W_y a_{21} + W_z a_{31}); \\ \omega_{\text{К}} &= \frac{1}{D_0} (W_x a_{13} + W_y a_{23} + W_z a_{33}); \\ \omega_{\text{П}} &= \frac{f}{2\lambda} \left(\frac{1}{D_{\text{п}}} - \frac{1}{D_{\text{л}}} \right) (W_x a_{11} + W_y a_{21} + W_z a_{31}). \end{aligned}$$

Используя полученные ранее соотношения (2.19) и (2.20) при $x=0, z=0$, окончательно будем иметь искомую для рассматриваемого варианта эвристического метода программу формирования управления при сканировании:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{Т}} &= \frac{V_x^*}{f} - \frac{1}{D_0} (W_x a_{11} + W_y a_{21} + W_z a_{31}); \\ \omega_{\text{К}} &= \frac{1}{D_0} (W_x a_{13} + W_y a_{23} + W_z a_{33}); \\ \omega_{\text{П}} &= a_{23} \frac{r}{D_0 D_{20}} (W_x a_{11} + W_y a_{21} + W_z a_{31}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

В итоге получена программа управления угловым движением космического аппарата при сканировании поверхности Земли на любой момент времени сканирования. Она обеспечивает выравнивание продольной составляющей СДИ по длине линейки ОЭП.

В следующей главе при разработке основ теории оптимального сканирования будет показано, что этот вариант эвристического метода формирования программы управления при сканировании является оптимальным при некоторых частных предположениях о положении рабочей части ОЭП в фокальной плоскости объектива ОЭТК.

В связи с изложенным возникает вопрос: возможно ли дальнейшее улучшение качества управления КА при использовании эвристического подхода для формирования этого управления?

Совершенно очевидно, что для того, чтобы раз и навсегда закрыть этот вопрос, необходимо поставить и решить задачу определения оптимальной программы управления. Для этого необходимо показать, что возможна формулировка задачи формирования программы управления угловым движением КА в строгой математической постановке, а именно, как задача минимизации некоторого функционала качества. В результате минимизации этого функционала можно было бы определить параметры оптимальной программы сканирования. Этот подход мы назовем формированием оптимальной программы сканирования. Решению этой задачи посвящена следующая, заключительная глава настоящего пособия.

5. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ СКАНИРОВАНИЯ

5.1. Постановка задачи формирования оптимальной программы сканирования

Рассмотренные в предыдущей главе варианты эвристического метода формирования программы управления угловым движением КА при сканировании, за исключением варианта с выравниванием продольной составляющей СДИ по длине линейки ОЭП, не предусматривают непосредственно необходимости минимизации остаточных составляющих СДИ. Повторим, что здесь под остаточными (методическими) составляющими СДИ понимаются скорости в каждой точке линейки ОЭП, остающиеся после вычитания из истинной СДИ компенсационной скорости движения зарядовых пакетов по столбцам линейки ОЭП. Поскольку в матрицах ФПЗС, входящих в линейку ОЭП, как правило, отсутствует боковой перенос зарядовых пакетов из столбца в столбец и имеется лишь перенос зарядовых пакетов вдоль столбца, в общем случае компенсироваться могут лишь продольные составляющие СДИ. Поперечные составляющие СДИ при этом не изменяются. Оставшиеся нескомпенсированными продольные и поперечные составляющие СДИ приводят к сдвигу изображения (называемому иногда "смазом") и, как следствие, к ухудшению качества изображения (главным образом, его разрешения).

Для получения представления о величинах остаточных составляющих скорости сдвига изображения произведены расчеты на персональном компьютере (ПК) для варианта сканирования с выравниванием продольной составляющей СДИ по длине линейки ОЭП, рассмотренного в параграфе 4.3, при круговой орбите КА с высотой $H=350$ км. На рис. 5.1 и 5.2 представлены результаты этих расчетов для диапазона углов α и β отклонения линии визирования $\pm 70^\circ$, для центральной линейки ОЭП ($x=0, z=0$) и для правой крайней точки линейки ОЭП с относительной координатой $\frac{\lambda}{f} = 0,01215$. (Для левой крайней точки ОЭП результаты получаются аналогичными, но с другим знаком). Графики представлены в виде изолиний равных остаточных составляющих СДИ в мм/с.

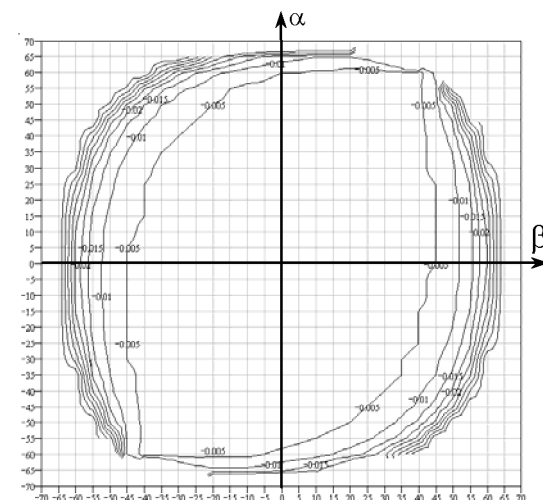


Рис. 5.1. График изменения остаточных продольных составляющих скорости сдвига изображения при $\frac{\lambda}{f} = 0,01215$

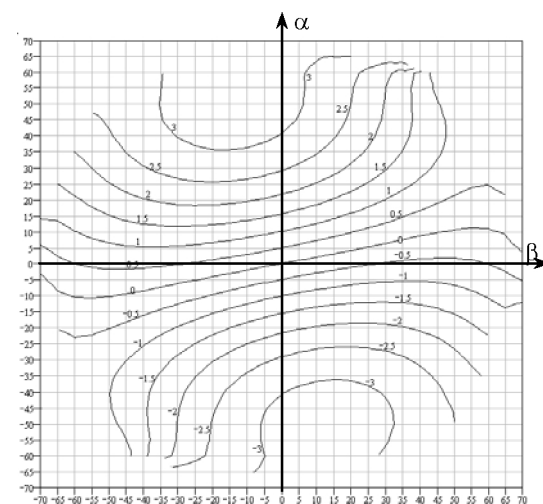


Рис.5.2. График изменения остаточных поперечных составляющих скорости сдвига изображения при $\frac{\lambda}{f} = 0,01215$

Из рис. 5.1 следует, что продольные составляющие СДИ действительно хорошо скомпенсированы и их остаточные величины ΔV_x не превышают $0,05 \text{ мм/с}$. В то же время из рис. 5.2 следует, что поперечные составляющие ΔV_z компенсируются не столь хорошо и их остаточные величины достигают 3 мм/с . Причем, если в интересах решения задачи получения высокого разрешения необходимо ограничиться величиной остаточной поперечной составляющей сдвига, равной, например, $0,1 \text{ мм/с}$, то придется съемку проводить в ограниченной полосе углов α и β , примыкающей к изолинии "0".

Из практики применения эвристических методов формирования программы управления угловым движением КА при сканировании известно, что поперечные составляющие СДИ могут быть в какой-то степени уменьшены выбором начального азимута сканирования (угла разворота КА по рысканию).

В связи с изложенным возникает следующий вопрос: возможна ли постановка задачи формирования оптимальной программы управления угловым движением КА при сканировании как классической математической задачи оптимизации и возможно ли получение аналитического решения этой задачи, т.е. получение конечных формул, позволяющих однозначно определять программу углового движения КА, минимизирующую остаточные продольные и поперечные составляющие СДИ?

Если такая постановка задачи и такое аналитическое решение ее возможны, то насколько это решение эффективнее вариантов эвристического подхода и в чем преимущество этого решения?

Постановка новой задачи оптимизации может состоять в следующем. При заданных углах отклонения центральной линии визирования по тангажу α и крену β найти значения составляющих вектора угловой скорости КА $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ и угол поворота по рысканию ψ , минимизирующие квадратичный функционал качества:

$$\mathfrak{F} = \Delta V_{xл}^2 + \Delta V_{xп}^2 + \Delta V_{zл}^2 + \Delta V_{zп}^2, \quad (5.1)$$

где

$$\Delta V_{xл} = \frac{f}{D_{л}} \left[(W_x a_{11} + W_y a_{21} + W_z a_{31}) - \frac{x}{f} (W_x a_{12} + W_y a_{22} + W_z a_{32}) \right] + f\omega_x - z_{л} \omega_p - \frac{x \cdot z_{л}}{f} \omega_k - V_x^*,$$

$$\Delta V_{xп} = \frac{f}{D_{п}} \left[(W_x a_{11} + W_y a_{21} + W_z a_{31}) - \frac{x}{f} (W_x a_{12} + W_y a_{22} + W_z a_{32}) \right] + f\omega_x - z_{п} \omega_p - \frac{x \cdot z_{п}}{f} \omega_k - V_x^*,$$

$$\Delta V_{zл} = \frac{f}{D_{л}} \left[(W_x a_{13} + W_y a_{23} + W_z a_{33}) - \frac{z_{л}}{f} (W_x a_{12} + W_y a_{22} + W_z a_{32}) \right] - f\omega_k + x\omega_p + \frac{x \cdot z_{л}}{f} \omega_x,$$

$$\Delta V_{zп} = \frac{f}{D_{п}} \left[(W_x a_{13} + W_y a_{23} + W_z a_{33}) - \frac{z_{п}}{f} (W_x a_{12} + W_y a_{22} + W_z a_{32}) \right] - f\omega_k + x\omega_p + \frac{x \cdot z_{п}}{f} \omega_x,$$

где $\Delta V_{xл}, \Delta V_{xп}, \Delta V_{zл}, \Delta V_{zп}$ – остаточные продольные и поперечные составляющие СДИ на левом и правом краях рабочей части линейки ОЭП в соответствии с (3.13).

Здесь V_x^* – заданное значение продольной составляющей СДИ, которое должно выдерживаться при сканировании. Оно определяется светотехническими характеристиками объекта наблюдения. Выражения для остаточных составляющих СДИ соответствуют (3.10) и (3.11) с точностью до членов второго порядка малости относительно $\frac{x}{f}, \frac{z}{f}$ (положение 2.2.4). Индексы "л" и "п" относятся к левому и правому краям рабочей части линейки ОЭП соответственно; для них выполняется: $z_{л} = z + \lambda, z_{п} = z - \lambda$ (рис.1.6). Здесь x и z – координаты центра рабочей части ОЭП.

Выскажем несколько соображений в пользу именно такой постановки задачи.

Во-первых, как уже неоднократно упоминалось, для узкопольных систем наблюдения графики остаточных продольных и поперечных составляющих скорости сдвига изображения с высокой степенью точности являются линейными. Поэтому минимизация квадратов остаточных скоростей сдвига изображения на левом и правом краях линейки ОЭП автоматически минимизирует и квадраты остаточных скоростей сдвига изображения в центральной точке линейки ОЭП.

Во-вторых, в отличие от всех рассмотренных выше вариантов эвристического метода в данной формулировке постановки задачи впервые ставится вопрос о минимизации квадратов поперечных составляющих скорости сдвига изображения.

Поскольку в эвристическом варианте сканирования с выравниванием продольной составляющей по длине линейки ОЭП все три составляющие вектора угловой скорости КА $\bar{\omega}$ определялись для обеспечения обнуления лишь остаточных продольных составляющих скорости сдвига изображения, для состоятельности новой задачи оптимизации целесообразно положить оптимизирующим параметром угол рыскания ψ наряду с составляющими вектора $\bar{\omega}$.

В-третьих, поставленная задача сформулирована в самом общем виде, настолько общем, насколько это вообще возможно. Поэтому можно ожидать, что полученное решение этой задачи будет содержать все основные достижения эвристического подхода, приведенные в предыдущей главе.

5.2. Формирование оптимальной программы сканирования

Перейдем к решению задачи, сформулированной в предыдущем параграфе. При этом в общем случае будем полагать, что линейка ОЭП является нецентральной, то есть она смещена вдоль оси ox (рис.1.6), причем таким образом, что координаты x , z центра рабочей части линейки ОЭП не равны нулю: $x \neq 0$, $z \neq 0$. Тогда $z_{\pi} = z + \lambda$, $z_{\tau} = z - \lambda$, и уравнения (5.2) запишем в виде:

$$\begin{aligned} \Delta V_{\pi\tau} &= \frac{f}{D_{\pi}} \left[(W_x a_{11} + W_y a_{21} + W_z a_{31}) - \frac{x}{f} (W_x a_{12} + W_y a_{22} + W_z a_{32}) \right] + \\ &+ f \omega_{\tau} - (z - \lambda) \omega_p - \frac{x(z - \lambda)}{f} \omega_k - V_x^*; \\ \Delta V_{\tau\pi} &= \frac{f}{D_{\pi}} \left[(W_x a_{11} + W_y a_{21} + W_z a_{31}) - \frac{x}{f} (W_x a_{12} + W_y a_{22} + W_z a_{32}) \right] + \\ &+ f \omega_{\tau} - (z + \lambda) \omega_p - \frac{x(z + \lambda)}{f} \omega_k - V_x^*; \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_{\pi\tau} &= \frac{f}{D_{\pi}} \left[(W_x a_{13} + W_y a_{23} + W_z a_{33}) - \frac{(z - \lambda)}{f} (W_x a_{12} + W_y a_{22} + W_z a_{32}) \right] - \\ &- f \omega_k + x \omega_p + \frac{x(z - \lambda)}{f} \omega_{\tau}; \\ \Delta V_{\tau\pi} &= \frac{f}{D_{\pi}} \left[(W_x a_{13} + W_y a_{23} + W_z a_{33}) - \frac{(z + \lambda)}{f} (W_x a_{12} + W_y a_{22} + W_z a_{32}) \right] - \\ &- f \omega_k + x \omega_p + \frac{x(z + \lambda)}{f} \omega_{\tau}. \end{aligned}$$

Подставим соотношения (5.3) в функционал (5.1). Для нахождения оптимальных значений угловых скоростей сканирования необходимо приравнять нулю частные производные от полученного выражения для функционала по угловым скоростям тангажа (ω_{τ}), крена (ω_k) и рыскания (ω_p):

$$\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \omega_{\tau}} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \omega_k} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \omega_p} = 0,$$

а для нахождения оптимального значения угла рыскания – соответственно приравнять нулю производную по этому углу:

$$\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \psi} = 0.$$

Подстановка составляющих (5.3) в форму (3.13) - для компактности записей - в функционал (5.1) с учётом введённых обозначений (3.12) и с точностью до членов второго порядка малости даёт выражение для функционала:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \left\{ \frac{f}{D_{\pi}} \left(W_{xp} - \frac{x}{f} W_{yp} \right) + f \omega_{\tau} - (z - \lambda) \omega_p - \frac{x(z - \lambda)}{f} \omega_k - V_x^* \right\}^2 + \\ &+ \left\{ \frac{f}{D_{\pi}} \left(W_{xp} - \frac{x}{f} W_{yp} \right) + f \omega_{\tau} - (z + \lambda) \omega_p - \frac{x(z + \lambda)}{f} \omega_k - V_x^* \right\}^2 + \\ &+ \left\{ \frac{f}{D_{\pi}} \left(W_{zp} - \frac{z - \lambda}{f} W_{yp} \right) - f \omega_k + x \omega_p + \frac{x(z - \lambda)}{f} \omega_{\tau} \right\}^2 + \\ &+ \left\{ \frac{f}{D_{\pi}} \left(W_{zp} - \frac{z + \lambda}{f} W_{yp} \right) - f \omega_k + x \omega_p + \frac{x(z + \lambda)}{f} \omega_{\tau} \right\}^2. \end{aligned} \quad (5.4)$$

5.2.1. Определение оптимального вектора угловой скорости КА при сканировании

Вычислим первую производную от функционала (5.4) по угловой скорости КА по тангажу:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \omega_{\tau}} = 0.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} & 2 \left\{ \frac{f}{D_{\pi}} \left(W_{xp} - \frac{x}{f} W_{yp} \right) + f \omega_{\tau} - (z - \lambda) \omega_p - \frac{x(z - \lambda)}{f} \omega_k - V_x^* \right\} f + \\ & + 2 \left\{ \frac{f}{D_{\pi}} \left(W_{xp} - \frac{x}{f} W_{yp} \right) + f \omega_{\tau} - (z + \lambda) \omega_p - \frac{x(z + \lambda)}{f} \omega_k - V_x^* \right\} f + \\ & + 2 \left\{ \frac{f}{D_{\pi}} \left(W_{zp} - \frac{z - \lambda}{f} W_{yp} \right) - f \omega_k + x \omega_p + \frac{x(z - \lambda)}{f} \omega_{\tau} \right\} \frac{x(z - \lambda)}{f} + \\ & + 2 \left\{ \frac{f}{D_{\pi}} \left(W_{zp} - \frac{z + \lambda}{f} W_{yp} \right) - f \omega_k + x \omega_p + \frac{x(z + \lambda)}{f} \omega_{\tau} \right\} \frac{x(z + \lambda)}{f} = 0. \end{aligned}$$

После деления этого соотношения на $2f^2$ обнаруживается, что третья и четвёртая строки и коэффициенты при ω_k в первой и второй строках с точностью до членов второго порядка малости относительно $\frac{x}{f}, \frac{z}{f}, \frac{\lambda}{f}$ равны нулю. В результате приведения подобных членов получим:

$$\omega_{\tau} - \frac{z}{f} \omega_p = \frac{V_x^*}{f} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{D_{\pi}} + \frac{1}{D_{\pi}} \right) \left(W_{xp} - \frac{x}{f} W_{yp} \right). \quad (5.5)$$

Вычислим первую производную от функционала по угловой скорости КА по крену:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \omega_k} = 0.$$

$$\begin{aligned} & 2 \left\{ \frac{f}{D_{\pi}} \left(W_{xp} - \frac{x}{f} W_{yp} \right) + f \omega_{\tau} - (z - \lambda) \omega_p - \frac{x(z - \lambda)}{f} \omega_k - V_x^* \right\} \left(-\frac{x(z - \lambda)}{f} \right) + \\ & + 2 \left\{ \frac{f}{D_{\pi}} \left(W_{xp} - \frac{x}{f} W_{yp} \right) + f \omega_{\tau} - (z + \lambda) \omega_p - \frac{x(z + \lambda)}{f} \omega_k - V_x^* \right\} \left(-\frac{x(z + \lambda)}{f} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + 2 \left\{ \frac{f}{D_{\pi}} \left(W_{zp} - \frac{z - \lambda}{f} W_{yp} \right) - f \omega_k + x \omega_p + \frac{x(z - \lambda)}{f} \omega_{\tau} \right\} (-f) + \\ & + 2 \left\{ \frac{f}{D_{\pi}} \left(W_{zp} - \frac{z + \lambda}{f} W_{yp} \right) - f \omega_k + x \omega_p + \frac{x(z + \lambda)}{f} \omega_{\tau} \right\} (-f) = 0. \end{aligned}$$

После деления этого соотношения на $(-2f^2)$ с точностью до членов второго порядка малости имеем:

$$\omega_k - \frac{x}{f} \omega_p = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{D_{\pi}} + \frac{1}{D_{\pi}} \right) \left(W_{zp} - \frac{z}{f} W_{yp} \right). \quad (5.6)$$

Наконец, вычислим первую производную от функционала по угловой скорости КА по рысканию:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \omega_p} = 0.$$

Получим:

$$\begin{aligned} & 2 \left\{ \frac{f}{D_{\pi}} \left(W_{xp} - \frac{x}{f} W_{yp} \right) + f \omega_{\tau} - (z - \lambda) \omega_p - \frac{x(z - \lambda)}{f} \omega_k - V_x^* \right\} (-z + \lambda) + \\ & + 2 \left\{ \frac{f}{D_{\pi}} \left(W_{xp} - \frac{x}{f} W_{yp} \right) + f \omega_{\tau} - (z + \lambda) \omega_p - \frac{x(z + \lambda)}{f} \omega_k - V_x^* \right\} (-z - \lambda) + \\ & + 2 \left\{ \frac{f}{D_{\pi}} \left(W_{zp} - \frac{z - \lambda}{f} W_{yp} \right) - f \omega_k + x \omega_p + \frac{x(z - \lambda)}{f} \omega_{\tau} \right\} x + \\ & + 2 \left\{ \frac{f}{D_{\pi}} \left(W_{zp} - \frac{z + \lambda}{f} W_{yp} \right) - f \omega_k + x \omega_p + \frac{x(z + \lambda)}{f} \omega_{\tau} \right\} x = 0. \end{aligned}$$

После деления на $2f$, раскрытия круглых скобок в первых двух членах и приведения подобных с точностью до членов второго порядка малости получим:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{D_{\pi}} + \frac{1}{D_{\pi}} \right) (-W_{xp} z + W_{zp} x) + \left(\frac{1}{D_{\pi}} - \frac{1}{D_{\pi}} \right) \left(W_{xp} - \frac{x}{f} W_{yp} \right) \lambda - \\ & - 2z \left(\omega_{\tau} - \frac{z}{f} \omega_p \right) - 2x \left(\omega_k - \frac{x}{f} \omega_p \right) + \frac{2}{f} \lambda^2 \omega_p + 2 \frac{z}{f} V_x^* = 0. \end{aligned}$$

После подстановки в это соотношение выражений (5.5) и (5.6) имеем:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{D_{л}} + \frac{1}{D_{п}} \right) \left(-W_{xp} z + W_{zp} x \right) + \left(\frac{1}{D_{л}} - \frac{1}{D_{п}} \right) \left(W_{xp} - \frac{x}{f} W_{yp} \right) \lambda - \\ & - 2z \left[\frac{V_x^*}{f} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{D_{л}} + \frac{1}{D_{п}} \right) \left(W_{xp} - \frac{x}{f} W_{yp} \right) \right] - \\ & - 2x \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{D_{л}} + \frac{1}{D_{п}} \right) \left(W_{zp} - \frac{z}{f} W_{yp} \right) \right] + \frac{2}{f} \lambda^2 \omega_p + 2 \frac{z}{f} V_x^* = 0. \end{aligned}$$

После приведения подобных членов обнаруживается, что все члены с множителями $\left(\frac{1}{D_{л}} + \frac{1}{D_{п}} \right)$ и V_x^* взаимно уничтожаются так, что в результате имеем:

$$\left(\frac{1}{D_{л}} - \frac{1}{D_{п}} \right) \left(W_{xp} - \frac{x}{f} W_{yp} \right) \lambda + \frac{2}{f} \lambda^2 \omega_p = 0,$$

откуда

$$\omega_p = -\frac{1}{2} \frac{f}{\lambda} \left(\frac{1}{D_{л}} - \frac{1}{D_{п}} \right) \left(W_{xp} - \frac{x}{f} W_{yp} \right).$$

Используя соотношение (2.20) для разности обратных величин для $D_{л}$ и $D_{п}$, получим окончательное выражение для оптимальной скорости КА по каналу рыскания:

$$\omega_{p \text{ opt}} = a_{23} \frac{r}{D_0 D_{20}} \left(W_{xp} - \frac{x}{f} W_{yp} \right). \quad (5.7)$$

Подставляя это выражение в (5.5) и (5.6), с учётом (2.19) будем иметь:

$$\begin{aligned} \omega_r - \frac{z}{f} a_{23} \frac{r}{D_0 D_{20}} \left(W_{xp} - \frac{x}{f} W_{yp} \right) &= \\ = \frac{V_x^*}{f} - \frac{1}{2} \frac{2}{D_0} \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right] \left(W_{xp} - \frac{x}{f} W_{yp} \right); \\ \omega_k - \frac{x}{f} a_{23} \frac{r}{D_0 D_{20}} \left(W_{xp} - \frac{x}{f} W_{yp} \right) &= \\ = \frac{1}{2} \frac{2}{D_0} \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right] \left(W_{zp} - \frac{z}{f} W_{yp} \right). \end{aligned}$$

Подводя в этих выражениях подобные члены, с точностью до членов второго порядка малости будем иметь окончательные выра-

жения для оптимальных значений угловых скоростей по каналам тангажа и крена:

$$\omega_{r \text{ opt}} = \frac{V_x^*}{f} - \frac{1}{D_0} \left[1 + \frac{x}{f} a_{21} \frac{r}{D_{20}} \right] W_{xp} + \frac{x}{f D_0} W_{yp}; \quad (5.8)$$

$$\omega_{k \text{ opt}} = \frac{x}{f} a_{23} \frac{r}{D_0 D_{20}} W_{xp} + \frac{1}{D_0} \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right] W_{zp} - \frac{z}{f D_0} W_{yp}. \quad (5.9)$$

Повторим, что при выводе этих выражений использованы вспомогательные кинематические параметры, полученные в параграфе 2.4.

Выражения (5.7), (5.8), (5.9) представляют собою искомую программу оптимального сканирования. В них входят составляющие скорости движения центра масс КА относительно точки наблюдения, представленные в программной системе координат.

С использованием соотношений (3.12) выражения (5.7), (5.8), (5.9) могут быть представлены составляющими скорости движения центра масс КА относительно точки наблюдения в орбитальной системе координат:

$$\begin{aligned} \omega_{r \text{ opt}} &= \frac{V_x^*}{f} - \frac{1}{D_0} \left(1 + a_{21} \frac{x}{f} \frac{r}{D_{20}} \right) (W_x a_{11} + W_y a_{21} + W_z a_{31}) + \\ &+ \frac{x}{f \cdot D_0} (W_x a_{12} + W_y a_{22} + W_z a_{32}); \\ \omega_{k \text{ opt}} &= a_{23} \frac{x}{f} \frac{r}{D_0 D_{20}} (W_x a_{11} + W_y a_{21} + W_z a_{31}) + \\ &+ \frac{1}{D_0} \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right] (W_x a_{13} + W_y a_{23} + W_z a_{33}) - \\ &- \frac{z}{f D_0} (W_x a_{12} + W_y a_{22} + W_z a_{32}); \\ \omega_{p \text{ opt}} &= a_{23} \frac{r}{D_0 D_{20}} \left[(W_x a_{11} + W_y a_{21} + W_z a_{31}) - \frac{x}{f} (W_x a_{12} + W_y a_{22} + W_z a_{32}) \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Рассмотрим частный случай этой программы применительно к центральному несмещенному симметрично расположенному в фокальной плоскости ОЭП, обозначенному на рис. 1.6 через ОЭП-2. Для него имеют место равенства: $x=0$, $z=0$. Подставляя эти равенства в выражения (5.10), соответственно получим:

$$\begin{aligned}\omega_{r \text{ opt}} &= \frac{V_x^*}{f} - \frac{1}{D_0} (W_x a_{11} + W_y a_{21} + W_z a_{31}); \\ \omega_{k \text{ opt}} &= \frac{1}{D_0} (W_x a_{13} + W_y a_{23} + W_z a_{33}); \\ \omega_{p \text{ opt}} &= a_{23} \cdot \frac{r}{D_0 \cdot D_{20}} \cdot (W_x a_{11} + W_y a_{21} + W_z a_{31}).\end{aligned}\quad (5.11)$$

Представляется интересным сравнить это частное решение для центрального ОЭП с решением (4.7) для эвристической программы сканирования с выравниванием продольной составляющей СДИ по длине линейки ОЭП. Факт полного совпадения этих решений объясняет успех применения эвристической программы сканирования для случая центрального расположения ОЭП в фокальной плоскости объектива ОЭТК.

Вместе с тем, здесь важно подчеркнуть, что для эвристического подхода задача формирования программы управления угловым движением КА для случая нецентрального ОЭП не была решена.

5.2.2. Функционал качества, соответствующий оптимальному вектору угловой скорости

Нетрудно заметить, что после подстановки оптимальных значений угловых скоростей КА (5.7), (5.8), (5.9) в функционал (5.4) квадраты остаточных продольных составляющих сдвига изображения $\Delta V_{xл}^2$ и $\Delta V_{xп}^2$ становятся тождественно равными нулю, а функционал (5.4) приобретает остаточный вид:

$$\mathfrak{S}_2 = \Delta V_{zл}^2 + \Delta V_{zп}^2. \quad (5.12)$$

Докажем это утверждение. Имеем:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_1 &= \Delta V_{xл}^2 + \Delta V_{xп}^2 = \\ &= \left\{ \frac{f}{D_{п}} \left(W_{xp} - \frac{x}{f} W_{yp} \right) + f \omega_r - (z - \lambda) \omega_p - \frac{x(z - \lambda)}{f} \omega_k - V_x^* \right\}^2 + \\ &+ \left\{ \frac{f}{D_{п}} \left(W_{xp} - \frac{x}{f} W_{yp} \right) + f \omega_r - (z + \lambda) \omega_p - \frac{x(z + \lambda)}{f} \omega_k - V_x^* \right\}^2.\end{aligned}$$

Подставим сюда выражения для оптимальных значений угловых скоростей КА (5.7), (5.8), (5.9). Приближённо (пренебрегая членами второго порядка малости с ω_k) получим:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_1 &= \left\{ \frac{f}{D_{п}} \left(W_{xp} - \frac{x}{f} W_{yp} \right) + f \left[\frac{V_x^*}{f} - \frac{1}{D_0} \left(1 + \frac{x}{f} a_{21} \frac{r}{D_{20}} \right) \left(W_{xp} - \frac{x}{f} W_{yp} \right) \right] \right\} - \\ &- (z - \lambda) a_{23} \frac{r}{D_0 D_{20}} \left(W_{xp} - \frac{x}{f} W_{yp} \right) - V_x^* \Big\}^2 + \\ &+ \left\{ \frac{f}{D_{п}} \left(W_{xp} - \frac{x}{f} W_{yp} \right) + f \left[\frac{V_x^*}{f} - \frac{1}{D_0} \left(1 + \frac{x}{f} a_{21} \frac{r}{D_{20}} \right) \left(W_{xp} - \frac{x}{f} W_{yp} \right) \right] \right\} - \\ &- (z + \lambda) a_{23} \frac{r}{D_0 D_{20}} \left(W_{xp} - \frac{x}{f} W_{yp} \right) - V_x^* \Big\}^2.\end{aligned}$$

Приводя подобные члены и вынося $f \left(W_{xp} - \frac{x}{f} W_{yp} \right)$ за знак суммы, с точностью до членов второго порядка малости будем иметь:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_1 &= f^2 \left(W_{xp} - \frac{x}{f} W_{yp} \right)^2 \left\{ \left\{ \frac{1}{D_{п}} - \frac{1}{D_0} \left[1 + \frac{x}{f} a_{21} \frac{r}{D_{20}} + \frac{z - \lambda}{f} a_{23} \frac{r}{D_{20}} \right] \right\}^2 + \right. \\ &\left. + \left\{ \frac{1}{D_{п}} - \frac{1}{D_0} \left[1 + \frac{x}{f} a_{21} \frac{r}{D_{20}} + \frac{z + \lambda}{f} a_{23} \frac{r}{D_{20}} \right] \right\}^2 \right\}.\end{aligned}$$

С учётом соотношений (2.17) и (2.18) выражения в фигурных скобках равны нулю. Отсюда следует, что и $\mathfrak{S}_1 = 0$.

Отсюда следует важный вывод о том, что оптимизация суммы квадратов остаточных продольных составляющих СДИ на левом и правом краях линейки ОЭП обеспечивается выбором одних лишь значений составляющих вектора угловой скорости КА в инерциальном пространстве и, следовательно, оставшийся функционал (5.12) оптимизируется одним оставшимся параметром – углом разворота КА по рысканию. В результате задача оптимизации оказалась декомпозированной на две независимые подзадачи: подзадачу оптимизации угловых скоростей и подзадачу оптимизации угла рыскания. Этот важный вывод объясняет успех применения эвристического метода формирования программы углового движения КА при сканировании при отсутствии теоретического обоснования этого метода.

Вычислим далее остаточное значение функционала качества (5.12):

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_2 &= \Delta V_{\text{зи}}^2 + \Delta V_{\text{зи}}^2 = \\ &= \left\{ \frac{f}{D_{\text{л}}} \left(W_{\text{зп}} - \frac{z-\lambda}{f} W_{\text{yp}} \right) - f \omega_{\text{к}} + x \omega_{\text{п}} + \frac{x(z-\lambda)}{f} \omega_{\text{т}} \right\}^2 + \\ &+ \left\{ \frac{f}{D_{\text{п}}} \left(W_{\text{зп}} - \frac{z+\lambda}{f} W_{\text{yp}} \right) - f \omega_{\text{к}} + x \omega_{\text{п}} + \frac{x(z+\lambda)}{f} \omega_{\text{т}} \right\}^2.\end{aligned}$$

Для его вычисления подставим сюда оптимальные значения угловых скоростей КА $\omega_{\text{т opt}}$, $\omega_{\text{к opt}}$, $\omega_{\text{п opt}}$ из (5.7), (5.8), (5.9).

Получим:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_2 &= \left\{ \frac{f}{D_{\text{л}}} \left(W_{\text{зп}} - \frac{z-\lambda}{f} W_{\text{yp}} \right) - f \left\langle \frac{x}{f} a_{23} \frac{r}{D_0 D_{20}} \left(W_{\text{xp}} - \frac{x}{f} W_{\text{yp}} \right) + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{1}{D_0} \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right] \left(W_{\text{зп}} - \frac{z}{f} W_{\text{yp}} \right) \right\rangle + x a_{23} \frac{r}{D_0 D_{20}} \left(W_{\text{xp}} - \frac{x}{f} W_{\text{yp}} \right) + \\ &+ \left. \frac{x(z-\lambda)}{f} \left\langle \frac{V_x^*}{f} - \frac{1}{D_0} \left[1 + a_{21} \frac{r}{D_{20}} \right] \left(W_{\text{xp}} - \frac{x}{f} W_{\text{yp}} \right) \right\rangle \right\}^2 + \\ &+ \left\{ \frac{f}{D_{\text{п}}} \left(W_{\text{зп}} - \frac{z+\lambda}{f} W_{\text{yp}} \right) - f \left\langle \frac{x}{f} a_{23} \frac{r}{D_0 D_{20}} \left(W_{\text{xp}} - \frac{x}{f} W_{\text{yp}} \right) + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{1}{D_0} \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right] \left(W_{\text{зп}} - \frac{z}{f} W_{\text{yp}} \right) \right\rangle + x a_{23} \frac{r}{D_0 D_{20}} \left(W_{\text{xp}} - \frac{x}{f} W_{\text{yp}} \right) + \\ &+ \left. \frac{x(z+\lambda)}{f} \left\langle \frac{V_x^*}{f} - \frac{1}{D_0} \left[1 + a_{21} \frac{r}{D_{20}} \right] \left(W_{\text{xp}} - \frac{x}{f} W_{\text{yp}} \right) \right\rangle \right\}^2.\end{aligned}$$

Учитывая малость самих коэффициентов $\frac{x(z-\lambda)}{f}$ и $\frac{x(z+\lambda)}{f}$ при $\omega_{\text{т}}$, упростим выражение для $\omega_{\text{т}}$, оставив в нём лишь наибольший значащий член с W_{xp} . Используя соотношения (2.17) и (2.18) при очевидном условии $z < \lambda$ и приводя подобные члены, можно записать:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_2 &= \left\{ \frac{f}{D_0} \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z-\lambda}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right] \left(W_{\text{зп}} - \frac{z-\lambda}{f} W_{\text{yp}} \right) - \right. \\ &- \left. \frac{f}{D_0} \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right] \left(W_{\text{зп}} - \frac{z}{f} W_{\text{yp}} \right) + \frac{x\lambda}{f D_0} W_{\text{xp}} \right\}^2 + \\ &+ \left\{ \frac{f}{D_0} \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z+\lambda}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right] \left(W_{\text{зп}} - \frac{z+\lambda}{f} W_{\text{yp}} \right) - \right. \\ &- \left. \frac{f}{D_0} \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right] \left(W_{\text{зп}} - \frac{z}{f} W_{\text{yp}} \right) - \frac{x\lambda}{f D_0} W_{\text{xp}} \right\}^2.\end{aligned}$$

Или, после выделения членов, содержащих λ :

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_2 &= \left\{ \frac{f}{D_0} \left\langle \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right] - \frac{\lambda}{f} a_{23} \frac{r}{D_{20}} \right\rangle \left[\left(W_{\text{зп}} - \frac{z}{f} W_{\text{yp}} \right) + \frac{\lambda}{f} W_{\text{yp}} \right] - \right. \\ &- \left. \frac{f}{D_0} \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right] \left(W_{\text{зп}} - \frac{z}{f} W_{\text{yp}} \right) + \frac{x\lambda}{f D_0} W_{\text{xp}} \right\}^2 + \\ &+ \left\{ \frac{f}{D_0} \left\langle \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right] + \frac{\lambda}{f} a_{23} \frac{r}{D_{20}} \right\rangle \left[\left(W_{\text{зп}} - \frac{z}{f} W_{\text{yp}} \right) - \frac{\lambda}{f} W_{\text{yp}} \right] - \right. \\ &- \left. \frac{f}{D_0} \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{z}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right] \left(W_{\text{зп}} - \frac{z}{f} W_{\text{yp}} \right) - \frac{x\lambda}{f D_0} W_{\text{xp}} \right\}^2.\end{aligned}$$

После приведения подобных членов и исключения $\frac{\lambda}{D_0} \neq 0$ с точ-

ностью до членов второго порядка малости будем иметь

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_2 &= \left\{ \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{2z}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right] W_{\text{yp}} - a_{23} \frac{r}{D_{20}} W_{\text{зп}} + \frac{x}{f} W_{\text{xp}} \right\}^2 + \\ &+ \left\{ - \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{2z}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right] W_{\text{yp}} + a_{23} \frac{r}{D_{20}} W_{\text{зп}} - \frac{x}{f} W_{\text{xp}} \right\}^2 = \\ &= 2 \left\{ - \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{2z}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right] W_{\text{yp}} + a_{23} \frac{r}{D_{20}} W_{\text{зп}} - \frac{x}{f} W_{\text{xp}} \right\}^2.\end{aligned}$$

После сокращения на 2 в итоге окончательно имеем:

$$\mathfrak{S}_2 = \left\{ a_{23} \frac{r}{D_{20}} W_{zp} - \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + \frac{2z}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right] W_{yp} - \frac{x}{f} W_{xp} \right\}^2.$$

Это и есть соотношение (5.12) в сокращённой записи. В развернутой форме оно имеет вид:

$$\mathfrak{S}_2 = \left\{ a_{23} \frac{r}{D_{20}} (W_x a_{13} + W_y a_{23} + W_z a_{33}) - \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + 2 \frac{z}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right] \cdot (W_x a_{12} + W_y a_{22} + W_z a_{32}) - \frac{x}{f} \cdot (W_x a_{11} + W_y a_{21} + W_z a_{31}) \right\}^2. \quad (5.13)$$

5.2.3. Определение оптимального начального угла рыскания КА для случая центрального расположения ОЭП в фокальной плоскости объектива ОЭТК

Для определения оптимального начального угла рыскания ψ вычислим первую производную по этому углу от функционала (5.13) и приравняем полученную производную нулю. Заметим, что в функционале (5.13) только элементы a_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) матрицы A , определяемые (3.2), являются функциями угла ψ .

При этом учтем, что в соответствии с (3.2) имеют место равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{11}}{\partial \psi} &= -a_{13}; & \frac{\partial a_{21}}{\partial \psi} &= -a_{23}; & \frac{\partial a_{31}}{\partial \psi} &= -a_{33}; \\ \frac{\partial a_{12}}{\partial \psi} &= 0; & \frac{\partial a_{22}}{\partial \psi} &= 0; & \frac{\partial a_{32}}{\partial \psi} &= 0; \\ \frac{\partial a_{13}}{\partial \psi} &= a_{11}; & \frac{\partial a_{23}}{\partial \psi} &= a_{21}; & \frac{\partial a_{33}}{\partial \psi} &= a_{31}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Дифференцируя полученное выражение для функционала по углу ψ и приравнявая производную нулю, с использованием значений (5.14) получим:

$$\begin{aligned} & \left\{ a_{23} \frac{r}{D_{20}} (W_x a_{13} + W_y a_{23} + W_z a_{33}) - \left[1 + \left(\frac{x}{f} a_{21} + 2 \frac{z}{f} a_{23} \right) \frac{r}{D_{20}} \right] \right\} \times \\ & \times (W_x a_{12} + W_y a_{22} + W_z a_{32}) - \frac{x}{f} (W_x a_{11} + W_y a_{21} + W_z a_{31}) \Big\} \times \\ & \times \left\{ a_{21} \frac{r}{D_{20}} (W_x a_{13} + W_y a_{23} + W_z a_{33}) + a_{23} \frac{r}{D_{20}} \times \right. \\ & \times (W_x a_{11} + W_y a_{21} + W_z a_{31}) + \left(\frac{x}{f} a_{23} - 2 \frac{z}{f} a_{21} \right) \frac{r}{D_{20}} \times \\ & \left. \times (W_x a_{12} + W_y a_{22} + W_z a_{32}) + \frac{x}{f} (W_x a_{13} + W_y a_{23} + W_z a_{33}) \right\} = 0. \quad (5.15) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что оптимальное значение угла рыскания ψ определяется двумя уравнениями, записанными в симметричном относительно $\frac{x}{f}$, $\frac{z}{f}$ виде:

$$\begin{aligned} & a_{23} (W_x a_{13} + W_y a_{23} + W_z a_{33}) - (W_x a_{12} + W_y a_{22} + W_z a_{32}) \frac{D_{20}}{r} - \\ & - \frac{x}{f} \left[a_{21} (W_x a_{12} + W_y a_{22} + W_z a_{32}) + (W_x a_{11} + W_y a_{21} + W_z a_{31}) \frac{D_{20}}{r} \right] - \\ & - 2 \frac{z}{f} a_{23} (W_x a_{12} + W_y a_{22} + W_z a_{32}) = 0; \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} & a_{21} (W_x a_{13} + W_y a_{23} + W_z a_{33}) + a_{23} (W_x a_{11} + W_y a_{21} + W_z a_{31}) + \\ & + \frac{x}{f} \left[a_{23} (W_x a_{12} + W_y a_{22} + W_z a_{32}) + (W_x a_{13} + W_y a_{23} + W_z a_{33}) \frac{D_{20}}{r} \right] - \\ & - 2 \frac{z}{f} a_{21} (W_x a_{12} + W_y a_{22} + W_z a_{32}) = 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

В соответствии с теорией квадратичных форм первое из этих уравнений (5.16) определяет наличие глобального минимума в решении задачи, если он существует, поскольку определяется членом в фигурных скобках (5.13), возводимым в квадрат.

Соответственно второе из этих уравнений (5.17) определяет наличие локального экстремума в решении задачи, если он существует.

При этом одновременное существование обоих решений исключается, что будет подтверждено в ходе дальнейшего решения задачи.

Для дальнейшего решения введем следующие обозначения.

$$\begin{aligned}
b_1 &= W_x \sin 2\alpha + W_y 2\sin^2\alpha; \\
b_2 &= W_x \sin\alpha \cos\beta - W_y \cos\alpha \cos\beta - W_z \sin\beta; \\
b_3 &= W_x \cos 2\alpha \sin\beta + W_y \sin 2\alpha \sin\beta - W_z \sin\alpha \cos\beta; \\
b_4 &= W_x \sin 2\alpha \sin^2\beta - 2W_y \cos^2\alpha \sin^2\beta + W_z \cos\alpha \sin 2\beta; \\
b_5 &= W_x \sin\alpha \cos\beta - W_y \cos\alpha \cos\beta - W_z \sin\beta; \\
b_6 &= W_x \frac{1}{2} \sin 2\alpha \sin 2\beta - W_y \cos^2\alpha \sin 2\beta - W_z 2\cos\alpha \sin^2\beta; \\
b_7 &= W_x \sin\alpha \sin\beta - W_y \cos\alpha \sin\beta + W_z \cos\beta; \\
b_8 &= W_x 2\sin^2\alpha \cos\beta - W_y \sin 2\alpha \cos\beta - W_z 2\sin\alpha \sin\beta; \\
b_9 &= W_x \cos\alpha + W_y \sin\alpha; \\
b_{10} &= W_x \sin 2\alpha (1 + \sin^2\beta) + W_y 2(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha \sin^2\beta) + W_z \cos\alpha \sin 2\beta; \\
b_{11} &= W_x \left(-\sin^2\alpha \cos\beta + \cos\alpha \frac{D_{20}}{r} \right) + W_y \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos\beta + \sin\alpha \frac{D_{20}}{r} \right) + \\
&+ W_z \sin\alpha \sin\beta; \\
b_{12} &= W_x \left(\frac{1}{4} \sin 2\alpha \sin 2\beta + \sin\alpha \sin\beta \frac{D_{20}}{r} \right) + \\
&+ W_y \left(-\frac{1}{2} \cos^2\alpha \sin 2\beta - \cos\alpha \sin\beta \frac{D_{20}}{r} \right) + W_z \left(-\cos\alpha \sin^2\beta + \cos\beta \frac{D_{20}}{r} \right).
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Они позволяют делать записи более компактными.

Расчет оптимального угла рыскания КА начнем с первого уравнения (5.16), то есть с поиска глобального минимума в решении задачи.

Подставим в него значения элементов a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) из (3.2), разделим на $\cos^2\psi$, учтём равенство $\frac{1}{\cos\psi} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\psi}$ и приведём

подобные члены. В результате после умножения на 2 получим:

$$\begin{aligned}
&2(\sin\alpha \operatorname{tg}\psi - \cos\alpha \sin\beta) [W_x (\cos\alpha \operatorname{tg}\psi + \sin\alpha \sin\beta) + \\
&+ W_y (\sin\alpha \operatorname{tg}\psi - \cos\alpha \sin\beta) + W_z \cos\beta] \\
&- 2[W_x (-\sin\alpha \cos\beta) + W_y \cos\alpha \cos\beta + W_z \sin\beta] (1 + \operatorname{tg}^2\psi) \frac{D_{20}}{r} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- 2 \frac{x}{f} \{ (\sin\alpha + \cos\alpha \sin\beta \operatorname{tg}\psi) [W_x (-\sin\alpha \cos\beta) + W_y \cos\alpha \cos\beta + \\
&+ W_z \sin\beta] \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\psi} \\
&+ [W_x (\cos\alpha - \sin\alpha \sin\beta \operatorname{tg}\psi) + W_y (\sin\alpha + \cos\alpha \sin\beta \operatorname{tg}\psi) + \\
&+ W_z (\cos\beta \operatorname{tg}\psi)] \frac{D_{20}}{r} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\psi} \} \\
&- 2 \frac{2z}{f} (\sin\alpha \operatorname{tg}\psi - \cos\alpha \sin\beta) W_x (-\sin\alpha \cos\beta) + W_y \cos\alpha \cos\beta + \\
&W_z \sin\beta] \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\psi} = 0.
\end{aligned}$$

Приведём подобные члены. При этом приведение подобных членов произведём отдельно для основных членов и малых членов, содержащих $\frac{x}{f}$, $\frac{z}{f}$.

Получим:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}^2\psi \left[(W_x 2\sin\alpha \cos\alpha + 2W_y \sin^2\alpha) (W_x \sin\alpha \cos\beta - W_y \cos\alpha \cos\beta - \right. \\
&- W_z \sin\beta) \frac{D_{20}}{r} \left. \right] + 2\operatorname{tg}\psi \left[W_x (\sin^2\alpha \sin\beta - \cos^2\alpha \sin\beta) - \right. \\
&W_y (\sin\alpha \cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\alpha \sin\beta) + W_z \sin\alpha \cos\beta \left. \right] \\
&- 2(W_x \sin\alpha \cos\alpha \sin^2\beta - W_y \cos^2\alpha \sin^2\beta + W_z \cos\alpha \sin\beta \cos\beta) + \\
&+ 2(W_x \sin\alpha \cos\beta - W_y \cos\alpha \cos\beta - W_z \sin\beta) \frac{D_{20}}{r} + \\
&+ \frac{x}{f} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\psi} \left\{ \operatorname{tg}\psi \left[(W_x 2\sin\alpha \cos\alpha \sin\beta \cos\beta - W_y 2\cos^2\alpha \sin\beta \cos\beta - \right. \right. \\
&- W_z 2\cos\alpha \sin^2\beta) + 2(W_x \sin\alpha \sin\beta - W_y \cos\alpha \sin\beta + W_z \cos\beta) \frac{D_{20}}{r} \left. \right] + \\
&+ \left[(W_x 2\sin^2\alpha \cos\beta - W_y 2\sin\alpha \cos\alpha \cos\beta - W_z 2\sin\alpha \sin\beta) - \right. \\
&- 2(W_x \cos\alpha + W_y \sin\alpha) \frac{D_{20}}{r} \left. \right] \left. \right\} + \frac{2z}{f} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\psi} \left\{ \operatorname{tg}\psi (W_x 2\sin^2\alpha \cos\beta - \right. \\
&- W_y 2\sin\alpha \cos\alpha \cos\beta - W_z 2\sin\alpha \sin\beta) -
\end{aligned}$$

$$-\left(W_x 2\sin\alpha \cos\alpha \sin\beta \cos\beta - W_y 2\cos^2\alpha \sin\beta \cos\beta - W_z 2\cos\alpha \sin^2\beta\right) \Big\} = 0.$$

Используя введенные обозначения (5.18), полученное выражение в итоге можно записать в более компактном виде:

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}^2\psi \left(b_1 + 2b_2 \frac{D_{20}}{r} \right) - 2\operatorname{tg}\psi b_3 - \left(b_4 - 2b_5 \frac{D_{20}}{r} \right) + \\ & + \frac{x}{f} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\psi} \left[\operatorname{tg}\psi \left(b_6 + 2b_7 \frac{D_{20}}{r} \right) + \left(b_8 - 2b_9 \frac{D_{20}}{r} \right) \right] + \quad (5.19) \\ & + \frac{2z}{f} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\psi} (\operatorname{tg}\psi \cdot b_8 - b_6) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично проведем расчет оптимального угла рыскания для второго уравнения (5.17), то есть определение локального экстремума в решении задачи.

Подставим значения элементов a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) в соответствии с (3.2) и разделим на $\cos^2\psi$. Получим:

$$\begin{aligned} & (\sin\alpha + \cos\alpha \sin\beta \operatorname{tg}\psi) [W_x (\cos\alpha \operatorname{tg}\psi + \sin\alpha \sin\beta) + \\ & + W_y (\sin\alpha \operatorname{tg}\psi - \cos\alpha \sin\beta) + W_z \cos\beta] + \\ & + (\sin\alpha \operatorname{tg}\psi - \cos\alpha \sin\beta) [W_x (\cos\alpha - \sin\alpha \sin\beta \operatorname{tg}\psi) + \\ & + W_y (\sin\alpha + \cos\alpha \sin\beta \operatorname{tg}\psi) - W_z \cos\beta \operatorname{tg}\psi] + \\ & + \frac{x}{f} \left\{ (\sin\alpha \operatorname{tg}\psi - \cos\alpha \sin\beta) [-W_x \sin\alpha \cos\beta + W_y \cos\alpha \cos\beta + \right. \\ & + W_z \sin\beta \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\psi} + [W_x (\cos\alpha \operatorname{tg}\psi + \sin\alpha \sin\beta) + \\ & + W_y (\sin\alpha \operatorname{tg}\psi - \cos\alpha \sin\beta) + W_z \cos\beta] \frac{D_{20}}{r} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\psi} \Big\} - \\ & - \frac{2z}{f} (\sin\alpha + \cos\alpha \sin\beta \operatorname{tg}\psi) [-W_x \sin\alpha \cos\beta + \\ & + W_y \cos\alpha \cos\beta + W_z \sin\beta \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\psi}] = 0. \end{aligned}$$

После приведения подобных членов отдельно для основных членов и малых членов, содержащих $\frac{x}{f}$ и $\frac{z}{f}$, будем иметь:

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}^2\psi [W_x \cos^2\alpha \sin\beta + W_y \sin\alpha \cos\alpha \sin\beta - W_x \sin^2\alpha \sin\beta + \\ & + W_y \sin\alpha \cos\alpha \sin\beta - W_z \sin\alpha \cos\beta] + \operatorname{tg}\psi [2W_x \sin\alpha \cos\alpha + \\ & + 2W_y \sin^2\alpha + 2W_x \sin\alpha \cos\alpha \sin^2\beta - 2W_y \cos^2\alpha \sin^2\beta + 2W_z \cos\alpha \sin\beta \cos\beta] + \\ & + [W_x \sin^2\alpha \sin\beta - W_y \sin\alpha \cos\alpha \sin\beta + W_z \sin\alpha \cos\beta - W_x \cos^2\alpha \sin\beta - \\ & - W_y \sin\alpha \cos\alpha \sin\beta] + \frac{x}{f} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\psi} \left\{ \operatorname{tg}\psi \left[(-W_x \sin^2\alpha \cos\beta + W_y \sin\alpha \cos\alpha \cos\beta + \right. \right. \\ & + W_z \sin\alpha \sin\beta) + (W_x \cos\alpha + W_y \sin\alpha) \frac{D_{20}}{r} \Big] + (W_x \sin\alpha \cos\alpha \sin\beta \cos\beta - \\ & - W_y \cos^2\alpha \sin\beta \cos\beta - W_z \cos\alpha \sin^2\beta) + (W_x \sin\alpha \sin\beta - W_y \cos\alpha \sin\beta + \\ & + W_z \cos\beta) \frac{D_{20}}{r} \Big\} + \frac{2z}{f} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\psi} \left[\operatorname{tg}\psi (W_x \sin\alpha \cos\alpha \sin\beta \cos\beta - W_y \cos^2\alpha \sin\beta \cos\beta - \right. \\ & - W_z \cos\alpha \sin^2\beta) + (W_x \sin^2\alpha \cos\beta - W_y \sin\alpha \cos\alpha \cos\beta - W_z \sin\alpha \sin\beta) \Big] = 0. \end{aligned}$$

Используя введенные обозначения (5.18), полученное выражение в итоге можно также записать в более компактном виде:

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}^2\psi b_3 + \operatorname{tg}\psi b_{10} - b_3 + \frac{x}{f} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\psi} (\operatorname{tg}\psi b_{11} + b_{12}) + \\ & + \frac{z}{f} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\psi} (\operatorname{tg}\psi b_6 + b_8) = 0. \quad (5.20) \end{aligned}$$

Соотношения (5.19) и (5.20) для получения решения в случаях наличия глобального минимума или локального экстремума соответственно являются, во-первых, квадратными уравнениями относительно $\operatorname{tg}\psi$ и, во-вторых, содержат малые члены с малыми коэффициентами $\frac{x}{f}, \frac{z}{f}$. Поэтому точное решение этих уравнений невозможно, а возможно лишь их приближенное решение. В общем случае эти уравнения имеют 8 решений для ψ .

Вначале рассмотрим решение этих уравнений в отсутствии малых членов, то есть при $x=0$ и $z=0$. Это соответствует случаю центрального расположения ОЭП в фокальной плоскости объектива. В этом частном случае уравнения (5.19) и (5.20) соответственно имеют вид:

$$\operatorname{tg}^2\psi \left(b_1 + 2b_2 \frac{D_{20}}{r} \right) - 2\operatorname{tg}\psi b_3 - \left(b_4 - 2b_5 \frac{D_{20}}{r} \right) = 0; \quad (5.21)$$

$$\operatorname{tg} 2 \psi = 2 \frac{b_3}{b_{10}}. \quad (5.22)$$

Первое из этих уравнений является квадратным уравнением и имеет два корня относительно $\operatorname{tg} \Psi$, а второе, полученное также из квадратного уравнения, имеет два кратных корня относительно $\operatorname{tg} 2 \Psi$.

С учетом равенств $b_1 = b_{10} - b_4$ и $b_2 = b_5$ корни этих уравнений, обозначим их чертой сверху, определяются из соотношений:

$$\operatorname{tg} \bar{\psi}_{1,2} = \frac{b_3 \pm \sqrt{b_3^2 + \left(b_4 - 2b_5 \frac{D_{20}}{r}\right) b_{10} - \left(b_4 - 2b_5 \frac{D_{20}}{r}\right)^2}}{b_{10} - \left(b_4 - 2b_5 \frac{D_{20}}{r}\right)}, \quad (5.23)$$

$$\operatorname{tg} 2 \bar{\psi}_0 = 2 \frac{b_3}{b_{10}}. \quad (5.24)$$

Здесь черта сверху у углов ψ указывает на принадлежность этого решения для случая центрального расположения ОЭП, а нижние индексы у углов ψ определяют вариант получаемого решения: 0-два кратных корня локального экстремума, 1,2-два различных корня глобального минимума.

По найденным действительным значениям тангенсов без труда находятся все значения угла рыскания, имеющие действительное значение.

Таким образом, в случае центрального расположения ОЭП в фокальной плоскости объектива ОЭТК удастся получить аналитическое решение задачи определения оптимального значения начального угла рыскания КА.

5.2.4. Определение оптимального начального угла рыскания КА для общего случая расположения ОЭП в фокальной плоскости объектива ОЭТК

В отличие от рассмотренного выше частного случая (5.21) и (5.22), в общем случае нецентрального ОЭП точно разрешить уравнения (5.19) и (5.20) относительно $\operatorname{tg} \psi$ не удастся. Причина состоит в нелинейности этих уравнений. Однако в этом случае удастся полу-

чить приближённое оптимальное решение задачи, если воспользоваться методом вариаций. Приведём следующее обоснование применения этого метода.

Структура левых частей уравнений (5.19) и (5.20) такова, что к одной части входящих в неё членов прибавляется другая с малыми коэффициентами $\frac{x}{f}$, $\frac{z}{f}$. Это указывает на то, что решения этих уравнений относительно ψ формулируют в основном члены, не содержащие малых коэффициентов $\frac{x}{f}$ и $\frac{z}{f}$, а члены, содержащие эти коэффициенты, лишь незначительно меняют это решение.

Таким образом, представляется целесообразным каждое из оптимальных решений уравнений (5.19) и (5.20) искать в виде суммы неоптимального решения, полученного для случая центрального ОЭП, и некоторой его малой вариации:

$$\Psi_{\text{opt}1,2} = \bar{\psi}_{1,2} + \Delta_{1,2}, \quad \Psi_{\text{opt}0} = \bar{\psi}_0 + \Delta_0. \quad (5.25)$$

Здесь $\bar{\psi}_{1,2}$ - решение уравнения (5.23), $\bar{\psi}_0$ - решение уравнения (5.24), а $\Delta_{1,2}$, Δ_0 - искомые малые поправки (вариации), для которых выполняются условия:

$$\operatorname{tg} \Delta_{1,2} = \Delta_{1,2}; \quad \operatorname{tg} \Delta_0 = \Delta_0. \quad (5.26)$$

Проварьируем в (5.19) и (5.20) параметры, содержащие $\operatorname{tg} \psi$. С использованием формулы для бинома Ньютона (2.10) с точностью до членов второго порядка малости относительно $\Delta_{1,2}$ и Δ_0 получим:

для $\Psi_{\text{opt}1,2}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Psi_{\text{opt}1,2} &= \operatorname{tg}(\bar{\psi}_{1,2} + \Delta_{1,2}) = \operatorname{tg} \bar{\psi}_{1,2} + (1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_{1,2}) \Delta_{1,2}; \\ \operatorname{tg}^2 \Psi_{\text{opt}1,2} &= \operatorname{tg}^2(\bar{\psi}_{1,2} + \Delta_{1,2}) = \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_{1,2} + 2 \operatorname{tg} \bar{\psi}_{1,2} (1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_{1,2}) \Delta_{1,2}; \\ \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Psi_{\text{opt}1,2}} &= \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\bar{\psi}_{1,2} + \Delta_{1,2})} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_{1,2}} (1 + \operatorname{tg} \bar{\psi}_{1,2} \Delta_{1,2}); \\ \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Psi_{\text{opt}1,2}} \cdot \operatorname{tg} \Psi_{\text{opt}1,2} &= \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\bar{\psi}_{1,2} + \Delta_{1,2})} \cdot \operatorname{tg}(\bar{\psi}_{1,2} + \Delta_{1,2}) = \\ &= \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_{1,2}} \cdot [\operatorname{tg} \bar{\psi}_{1,2} + (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_{1,2}) \Delta_{1,2}], \end{aligned} \quad (5.27)$$

для $\psi_{\text{opt}0}$:

$$\begin{aligned} \text{tg}\psi_{\text{opt}0} &= \text{tg}(\bar{\psi}_0 + \Delta_0) = \text{tg}\bar{\psi}_0 + (1 + \text{tg}^2\bar{\psi}_0)\Delta_0; \\ \text{tg}^2\psi_{\text{opt}0} &= \text{tg}^2(\bar{\psi}_0 + \Delta_0) = \text{tg}^2\bar{\psi}_0 + 2\text{tg}\bar{\psi}_0(1 + \text{tg}^2\bar{\psi}_0)\Delta_0; \\ \sqrt{1 + \text{tg}^2\psi_{\text{opt}0}} &= \sqrt{1 + \text{tg}^2(\bar{\psi}_0 + \Delta_0)} = \sqrt{1 + \text{tg}^2\bar{\psi}_0(1 + \text{tg}^2\bar{\psi}_0\Delta_0)}; \\ \sqrt{1 + \text{tg}^2\psi_{\text{opt}0}} \cdot \text{tg}\psi_{\text{opt}0} &= \sqrt{1 + \text{tg}^2(\bar{\psi}_0 + \Delta_0)} \cdot \text{tg}(\bar{\psi}_0 + \Delta_0) = \\ &= \sqrt{1 + \text{tg}^2\bar{\psi}_0} \cdot [\text{tg}\bar{\psi}_0 + (1 + 2\text{tg}^2\bar{\psi}_0)\Delta_0]. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Подставляя полученные выражения (5.27) и (5.28) в (5.19) и (5.20) соответственно и приводя подобные члены с $\Delta_{1,2}$ и Δ_0 , с учетом (5.21) и (5.22) получим каждую из искоемых вариаций $\Delta_{1,2}$ и Δ_0 с точностью до членов второго порядка малости относительно $\frac{x}{f}$, $\frac{z}{f}$ и самих вариаций в виде дробей:

$$\Delta_{1,2} = \frac{A(\alpha, \beta, \psi_{1,2})}{B(\alpha, \beta, \psi_{1,2})}, \quad \Delta_0 = \frac{C(\alpha, \beta, \psi_0)}{D(\alpha, \beta, \psi_0)}, \quad (5.29)$$

где

$$\begin{aligned} A(\alpha, \beta, \bar{\psi}_{1,2}) &= -\frac{x}{f}\sqrt{1 + \text{tg}^2\bar{\psi}_{1,2}} \left[\text{tg}\bar{\psi}_{1,2} \left(b_6 + 2b_7 \frac{D_{20}}{r} \right) + (b_8 - 2b_9) \frac{D_{20}}{r} \right] - \\ &\quad - \frac{2z}{f}\sqrt{1 + \text{tg}^2\bar{\psi}_{1,2}} (\text{tg}\bar{\psi}_{1,2} \cdot b_8 - b_6); \end{aligned}$$

$$B(\alpha, \beta, \bar{\psi}_{1,2}) = 2\text{tg}\bar{\psi}_{1,2} (1 + \text{tg}^2\bar{\psi}_{1,2}) \left(b_1 + 2b_2 \frac{D_{20}}{r} \right) - 2(1 + \text{tg}^2\bar{\psi}_{1,2})b_3; \quad (5.30)$$

$$C(\alpha, \beta, \bar{\psi}_0) = -\frac{x}{f}\sqrt{1 + \text{tg}^2\bar{\psi}_0} (\text{tg}\bar{\psi}_0 \cdot b_{11} + b_{12}) - \frac{z}{f}\sqrt{1 + \text{tg}^2\bar{\psi}_0} (\text{tg}\bar{\psi}_0 \cdot b_6 + b_8);$$

$$D(\alpha, \beta, \bar{\psi}_0) = 2\text{tg}\bar{\psi}_0 (1 + \text{tg}^2\bar{\psi}_0)b_3 + (1 + \text{tg}^2\bar{\psi}_0)b_{10}.$$

Покажем это. Начнем с уравнения (5.19).

Подставим в него вместо параметра $\psi_{\text{opt}1,2}$ его выражение через приближённое значение $\bar{\psi}_{1,2}$ и поправку (вариацию) $\Delta_{1,2}$ (5.26). С учётом выражений (5.27) для функций $\text{tg}\psi_{\text{opt}1,2}$ получим:

$$\begin{aligned} & \left[\text{tg}^2\bar{\psi}_{1,2} + 2\text{tg}\bar{\psi}_{1,2} (1 + \text{tg}^2\bar{\psi}_{1,2})\Delta_{1,2} \right] \left(b_1 + 2b_2 \frac{D_{20}}{r} \right) - \\ & - 2 \left[\text{tg}\bar{\psi}_{1,2} + (1 + \text{tg}^2\bar{\psi}_{1,2})\Delta_{1,2} \right] b_3 - \left(b_4 - 2b_5 \frac{D_{20}}{r} \right) + \\ & + \frac{x}{f} \left\{ \sqrt{1 + \text{tg}^2\bar{\psi}_{1,2}} \left\{ \left[\text{tg}\bar{\psi}_{1,2} + (1 + 2\text{tg}^2\bar{\psi}_{1,2})\Delta_{1,2} \right] \left(b_6 + 2b_7 \frac{D_{20}}{r} \right) + \right. \right. \\ & + (1 + \text{tg}\bar{\psi}_{1,2} \Delta_{1,2}) \left(b_8 - 2b_9 \frac{D_{20}}{r} \right) \left. \right\} \left. \right\} + \frac{2z}{f} \left\{ \sqrt{1 + \text{tg}^2\bar{\psi}_{1,2}} \left\{ \left[\text{tg}\bar{\psi}_{1,2} + \right. \right. \right. \\ & + (1 + 2\text{tg}^2\bar{\psi}_{1,2})\Delta_{1,2} \left. \right\} b_8 - (1 + \text{tg}\bar{\psi}_{1,2} \Delta_{1,2})b_6 \left. \right\} \left. \right\} = 0. \end{aligned}$$

Учтём, что здесь $\bar{\psi}_{1,2}$ есть решение уравнения (5.21). Поэтому после раскрытия скобок в полученном выражении и вычитания из него выражения (5.21) будем иметь:

$$\begin{aligned} & 2\text{tg}\bar{\psi}_{1,2} (1 + \text{tg}^2\bar{\psi}_{1,2})\Delta_{1,2} \left(b_1 + 2b_2 \frac{D_{20}}{r} \right) - 2(1 + \text{tg}^2\bar{\psi}_{1,2})\Delta_{1,2} b_3 + \\ & + \frac{x}{f} \left\{ \sqrt{1 + \text{tg}^2\bar{\psi}_{1,2}} \left[\text{tg}\bar{\psi}_{1,2} \left(b_6 + 2b_7 \frac{D_{20}}{r} \right) + \left(b_8 - 2b_9 \frac{D_{20}}{r} \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{x}{f} \left\{ \sqrt{1 + \text{tg}^2\bar{\psi}_{1,2}} \left[(1 + 2\text{tg}^2\bar{\psi}_{1,2})\Delta_{1,2} \left(b_6 + 2b_7 \frac{D_{20}}{r} \right) + \right. \right. \\ & + \text{tg}\bar{\psi}_{1,2}\Delta_{1,2} \left(b_8 - 2b_9 \frac{D_{20}}{r} \right) \left. \right] \right\} + \frac{2z}{f} \left\{ \sqrt{1 + \text{tg}^2\bar{\psi}_{1,2}} \left[\text{tg}\bar{\psi}_{1,2} b_8 - b_6 \right] \right\} + \\ & + \frac{2z}{f} \left\{ \sqrt{1 + \text{tg}^2\bar{\psi}_{1,2}} \left[(1 + 2\text{tg}^2\bar{\psi}_{1,2})\Delta_{1,2} b_8 - \text{tg}\bar{\psi}_{1,2} \Delta_{1,2} b_6 \right] \right\} = 0. \end{aligned}$$

Приводя подобные члены с $\Delta_{1,2}$ и оставляя их в левой части уравнения и перенося члены, не содержащие $\Delta_{1,2}$, в правую часть, получим

$$\begin{aligned} & \left\{ 2\text{tg}\bar{\psi}_{1,2} (1 + \text{tg}^2\bar{\psi}_{1,2}) \left(b_1 + 2b_2 \frac{D_{20}}{r} \right) - 2(1 + \text{tg}^2\bar{\psi}_{1,2})b_3 + \right. \\ & + \frac{x}{f} \left\{ \sqrt{1 + \text{tg}^2\bar{\psi}_{1,2}} \left[(1 + 2\text{tg}^2\bar{\psi}_{1,2}) \left(b_6 + 2b_7 \frac{D_{20}}{r} \right) + \text{tg}\bar{\psi}_{1,2} \left(b_8 - 2b_9 \frac{D_{20}}{r} \right) \right] \right\} \left. \right\} + \\ & + \frac{2z}{f} \left\{ \sqrt{1 + \text{tg}^2\bar{\psi}_{1,2}} \left[(1 + 2\text{tg}^2\bar{\psi}_{1,2})b_8 - \text{tg}\bar{\psi}_{1,2} b_6 \right] \right\} \Delta_{1,2} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{x}{f} \left\{ \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_{1,2}} \left[\operatorname{tg} \bar{\psi}_{1,2} \left(b_6 + 2b_7 \frac{D_{20}}{r} \right) + \left(b_8 - 2b_9 \frac{D_{20}}{r} \right) \right] \right\} -$$

$$-\frac{2z}{f} \left\{ \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_{1,2}} (\operatorname{tg} \bar{\psi}_{1,2} b_8 - b_6) \right\}.$$

Отсюда без труда находится искомая поправка $\Delta_{1,2}$:

$$\Delta_{1,2} = \frac{A(\alpha, \beta, \bar{\psi}_{1,2})}{B(\alpha, \beta, \bar{\psi}_{1,2})},$$

где

$$A(\alpha, \beta, \bar{\psi}_{1,2}) = -\frac{x}{f} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_{1,2}} \left[\operatorname{tg} \bar{\psi}_{1,2} \left(b_6 + 2b_7 \frac{D_{20}}{r} \right) + \left(b_8 - 2b_9 \frac{D_{20}}{r} \right) \right] -$$

$$-\frac{2z}{f} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_{1,2}} (\operatorname{tg} \bar{\psi}_{1,2} \cdot b_8 - b_6);$$

$$B(\alpha, \beta, \bar{\psi}_{1,2}) = 2 \operatorname{tg} \bar{\psi}_{1,2} (1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_{1,2}) \left(b_1 + 2b_2 \frac{D_{20}}{r} \right) - 2(1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_{1,2}) b_3.$$

Здесь при выборе выражения для параметра $B(\alpha, \beta, \bar{\psi}_{1,2})$ исключены члены, содержащие малые коэффициенты x/f и z/f , ввиду малости самой искомой поправки $\Delta_{1,2}$ (параметр $A(\alpha, \beta, \bar{\psi}_{1,2})$ содержит только члены с малыми коэффициентами x/f и z/f).

Расчёт поправки Δ_0 проведём аналогично расчёту поправки $\Delta_{1,2}$.

Представим $\psi_{\text{opt}0}$ в форме (5.25). С учётом выражений (5.28) уравнение (5.20) представим в виде:

$$\left[\operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_0 + 2 \operatorname{tg} \bar{\psi}_0 (1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_0) \Delta_0 \right] b_3 + \left[\operatorname{tg} \bar{\psi}_0 + (1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_0) \Delta_0 \right] b_{10} - b_3 +$$

$$+ \frac{x}{f} \left\{ \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_0} \left\{ \left[\operatorname{tg} \bar{\psi}_0 + (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_0) \Delta_0 \right] b_{11} + (1 + \operatorname{tg} \bar{\psi}_0 \Delta_0) b_{12} \right\} \right\} +$$

$$+ \frac{z}{f} \left\{ \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_0} \left\{ \left[\operatorname{tg} \bar{\psi}_0 + (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_0) \Delta_0 \right] b_6 + (1 + \operatorname{tg} \bar{\psi}_0 \Delta_0) b_8 \right\} \right\} = 0.$$

Учитывая, что $\bar{\psi}_0$ есть решение уравнения (5.22), раскроем скобки в полученном выражении и вычтем из него (5.22). В результате получим:

$$2 \operatorname{tg} \bar{\psi}_0 (1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_0) \Delta_0 b_3 + (1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_0) \Delta_0 b_{10} +$$

$$+ \frac{x}{f} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_0} \left[\operatorname{tg} \bar{\psi}_0 b_{11} + b_{12} \right] + \frac{z}{f} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_0} \left[(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_0) \Delta_0 b_{11} +$$

$$+ \operatorname{tg} \bar{\psi}_0 \Delta_0 b_{12} \right] + \frac{z}{f} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_0} \left[\operatorname{tg} \bar{\psi}_0 b_6 + b_8 + \right.$$

$$\left. + \frac{z}{f} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_0} \left[(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_0) \Delta_0 b_6 + \operatorname{tg} \bar{\psi}_0 \Delta_0 b_8 \right] \right] = 0.$$

Приведём подобные члены с Δ_0 . Имеем:

$$\left\{ 2 \operatorname{tg} \bar{\psi}_0 (1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_0) b_3 + (1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_0) b_{10} + \frac{x}{f} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_0} \left[(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_0) b_{11} \right] + \right.$$

$$\left. + \operatorname{tg} \bar{\psi}_0 b_{12} \right] + \frac{z}{f} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_0} \left[(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_0) b_6 + \operatorname{tg} \bar{\psi}_0 b_8 \right] \Delta_0 =$$

$$= -\frac{x}{f} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_0} (\operatorname{tg} \bar{\psi}_0 b_{11} + b_{12}) - \frac{z}{f} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_0} (\operatorname{tg} \bar{\psi}_0 b_6 + b_8).$$

Откуда находится искомая поправка Δ_0 :

$$\Delta_0 = \frac{C(\alpha, \beta, \bar{\psi}_0)}{D(\alpha, \beta, \bar{\psi}_0)}, \quad \text{где}$$

$$C(\alpha, \beta, \bar{\psi}_0) = -\frac{x}{f} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_0} (\operatorname{tg} \bar{\psi}_0 \cdot b_{11} + b_{12}) - \frac{z}{f} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_0} (\operatorname{tg} \bar{\psi}_0 \cdot b_6 + b_8);$$

$$D(\alpha, \beta, \bar{\psi}_0) = 2 \operatorname{tg} \bar{\psi}_0 (1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_0) b_3 + (1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\psi}_0) b_{10}.$$

Таким образом, оптимальным решением задачи является одно из решений (5.25), находящееся в поле действительных (не мнимых) чисел, если иметь в виду возможность получения в (5.23) отрицательного значения подкоренного выражения.

5.3. Анализ основных характеристик оптимальной программы управления угловым движением КА при сканировании

Разработка и применение в своё время на практике эвристических методов формирования программы управления при сканировании обеспечили создание высокоэффективных систем дистанционного зондирования Земли. Однако при этом с неизбежностью возникал вопрос о том, нельзя ли эти законы улучшить? Последним таким улучшением явился вариант с выравниванием продольной составляющей СДИ (см. параграф 4.3).

Получение оптимальной программы управления в принципе прекращает поиски в этом направлении.

Более того, в процессе получения оптимальной программы управления было обнаружено, что задача получения оптимального решения является декомпозированной на две подзадачи: подзадачу оптимизации продольных составляющих СДИ и подзадачу оптимизации поперечных составляющих СДИ. Именно этот теоретический результат позволяет объяснить успех применения эвристических программ управления. При этом показано, что оптимальные значения угловых скоростей минимизируют лишь продольные составляющие СДИ по длине линейки ОЭП. Минимизация поперечных составляющих СДИ обеспечивается однократным выбором оптимального угла рыскания, который возможен на любой момент времени сканирования маршрута. При малых продолжительностях сканирования оптимальный угол рыскания можно выбирать на начало сканирования, при больших продолжительностях – на середину интервала сканирования, а для определения начального угла рыскания в этом последнем случае необходимо интегрирование уравнений движения осуществлять с середины интервала в его начало в обратном времени.

Постановка и решение задачи формирования оптимальной программы управления КА при сканировании позволили получить аналитические выражения для оптимальных параметров управления – угловых скоростей по трём каналам (тангажу, крену и рысканию) и оптимальному углу рыскания.

Важность получения аналитических выражений нельзя переоценить. Казалось бы, в наш век всеобъемлющего применения компьютеров в принципе возможно решение любой задачи численным методом, и нет необходимости в поиске аналитических решений. Но на самом деле это не так. Всегда останется приоритет за аналитическим решением задачи, если оно возможно, поскольку оно, во-первых, более глубоко раскрывает закономерности и свойства самого рассматриваемого процесса, а во-вторых, является, как правило, источником постановок новых задач и дальнейших исследований.

Так, задача оптимального сканирования решена для общего случая смещения центра рабочей части ОЭП относительно центра фокальной плоскости по координатам x и z . При этом оптимальные параметры сканирования (5.10) и (5.25) содержат добавочные члены, пропорциональные величинам смещения x и z . Нетрудно дать оценку этим величинам, имея указанные формулы. И было бы весьма сложно дать такую оценку, располагая лишь результатами численных расчётов.

Для анализа эффективности оптимальной программы сканирования рассмотрен пример. Выбрана модель движения центра масс КА в соответствии с (3.19). Орбита КА эллиптическая с параметрами: высота перигея $H_{\Pi}=350$ км, высота апогея $H_{\text{А}}=700$ км, наклонение орбиты $i=60^{\circ}$. Пусть съёмка начинается в точке с $u=0$, то есть на экваторе в восходящем узле орбиты, при этом истинная аномалия $\nu=90^{\circ}$. Выберем также параметры смещения ОЭП: $\frac{x}{f}=0,006$,

$$\frac{z}{f}=0,006, \text{ относительная половина длины рабочей части ОЭП равна } \frac{\lambda}{f}=0,00615.$$

На рис.5.3, 5.4 и 5.5 представлены графики зависимости оптимальных углов $\Psi_{\text{opt}0}$, $\Psi_{\text{opt}1}$ и $\Psi_{\text{opt}2}$ в градусах от углов α и β в плоскости $\alpha\beta$ в виде изолиний равных углов рыскания.

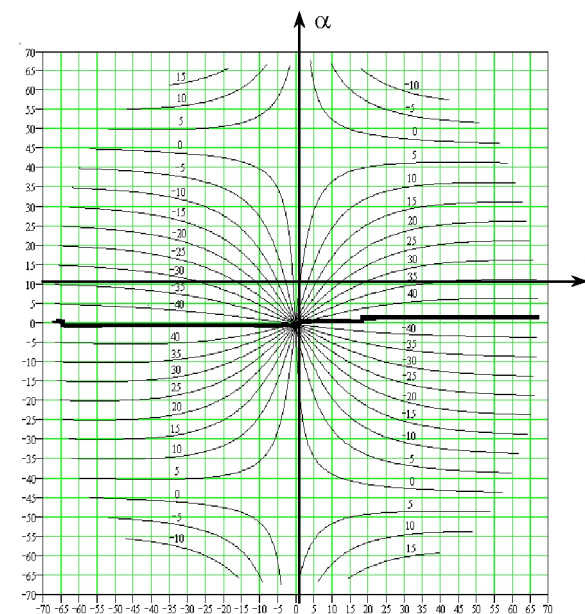


Рис.5.3. График значений оптимального угла $\Psi_{\text{opt}0}$

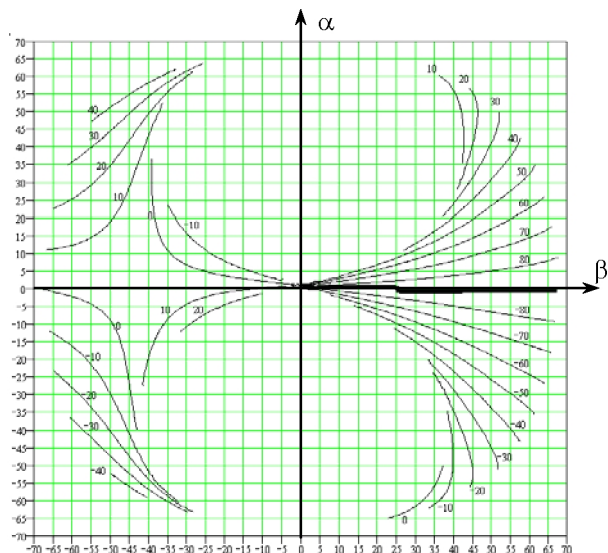


Рис.5.4. График значений оптимального угла ψ_{opt1}

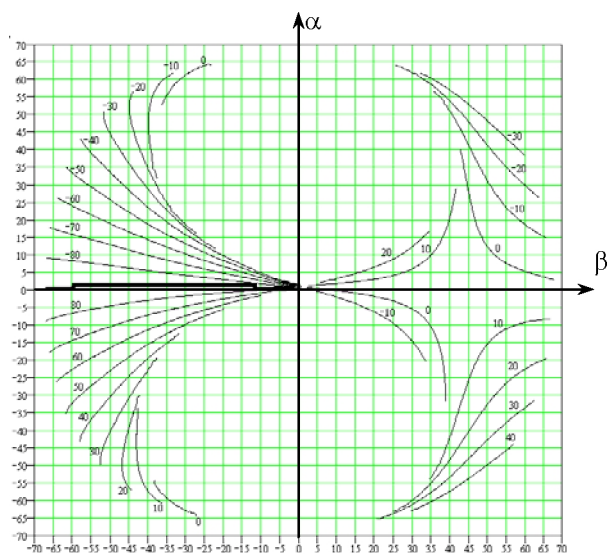


Рис.5.5. График значений оптимального угла ψ_{opt2}

Из рассмотрения графика на рис.5.3 можно сделать два важных вывода. Во-первых, ось β изменения углов крена β (при $\alpha = 0$) является вырожденной (сингулярной) линией графика решений, так как при переходе из положительных углов α в отрицательные значения ψ_{opt0} скачком меняется с $+45^\circ$ на -45° для положительных углов β и наоборот – с -45° на $+45^\circ$ – для отрицательных. Отсюда следует нецелесообразность использования решения ψ_{opt0} для съёмки объектов, расположенных в зоне угла тангажа $\alpha = 0$, поскольку при возможном естественном и незначительном изменении истинного угла тангажа на маршруте может измениться его знак. Следовательно, скачком может измениться знак у оптимального угла рыскания ψ_{opt0} . А поскольку истинное значение угла рыскания будет значительно (\approx на 90°) отличаться от оптимального, возможно возрастание остаточной поперечной составляющей скорости движения оптического изображения. В этом случае целесообразно пользоваться решениями ψ_{opt1} и ψ_{opt2} .

Во-вторых, съёмка вдоль оси тангажа α с нулевым углом крена ($\beta = 0$) должна производиться с оптимальным углом рыскания, близким к нулю и учитывающим лишь вращение Земли. А это означает, что поперечные составляющие скорости сдвига изображения в рассматриваемом оптимальном варианте при $\beta = 0$ будут такими же, как и при обычном неоптимальном управлении. Другими словами, оптимальное решение ψ_{opt0} в этом случае является малоэффективным.

Из графиков на рис.5.4 и 5.5 следует также наличие вырожденностей на положительной части оси β ($\beta > 0$) для ψ_{opt1} и на отрицательной части оси β ($\beta < 0$) ψ_{opt2} соответственно. Здесь имеет место скачок по оптимальному углу рыскания на 180° .

Таким образом, из рассмотрения этих трёх графиков видно, что при $\alpha = 0$ оптимальное значение угла рыскания следует выбирать в соответствии с решением ψ_{opt1} при $\beta < 0$ и в соответствии с решением ψ_{opt2} при $\beta > 0$.

Обращает на себя внимание также и тот факт, что решения ψ_{opt1} и ψ_{opt2} существуют не во всей области возможных изменений углов α и β . Отсюда следует, что в областях, в которых отсутствуют решения $\psi_{opt1,2}$, необходимо пользоваться решением ψ_{opt0} .

В результате может быть предложен примерный график использования решений ψ_{opt0} , ψ_{opt1} и ψ_{opt2} , приведённый на рис.5.6.

На этом рисунке вся область возможного изменения углов α и β разбита на следующие четыре области:

- центральная верхняя область с Ψ_{opt0} ограничена снизу двумя отрезками прямых, первый из которых соединяет точку ($\alpha = +5^\circ$, $\beta = -22,5^\circ$) с точкой ($\alpha = -5^\circ$, $\beta = +22,5^\circ$), а второй соединяет точку ($\alpha = -5^\circ$, $\beta = -22,5^\circ$) с точкой ($\alpha = +5^\circ$, $\beta = +22,5^\circ$). Далее с боков эта область ограничена эллипсом с центром в точке $\alpha = +40^\circ$, $\beta = 0$ и уравнением эллипса, имеющим вид:

$$\frac{\alpha^2}{(40^\circ)^2} + \frac{\beta^2}{(47^\circ)^2} = 1; \quad (5.31)$$

- центральная нижняя область также с решением Ψ_{opt0} , ограниченная сверху двумя отрезками тех же прямых и далее с боков эллипсом с тем же уравнением (4.32) и с центром в точке $\alpha = -40^\circ$, $\beta = 0$;

- левая область с решением Ψ_{opt1} расположена слева от центральной верхней и центральной нижней областей;

- правая область с решением Ψ_{opt2} расположена справа от центральной верхней и центральной нижней областей.

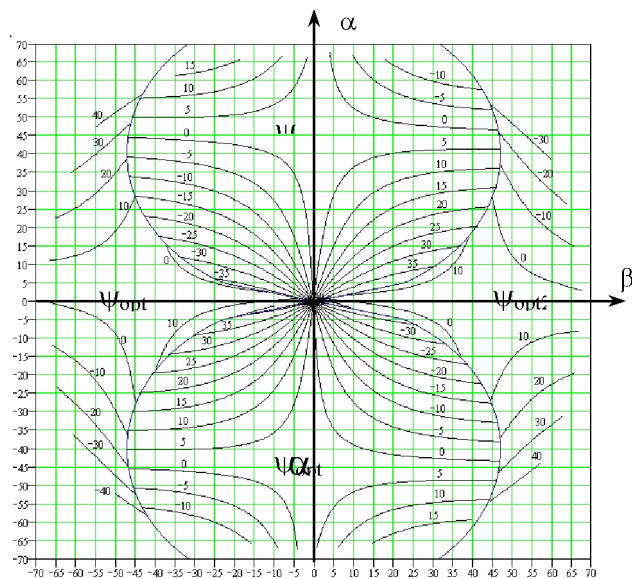


Рис.5.6. Примерный график разделения зон выбора оптимальных углов Ψ_{opt0} , Ψ_{opt1} , Ψ_{opt2}

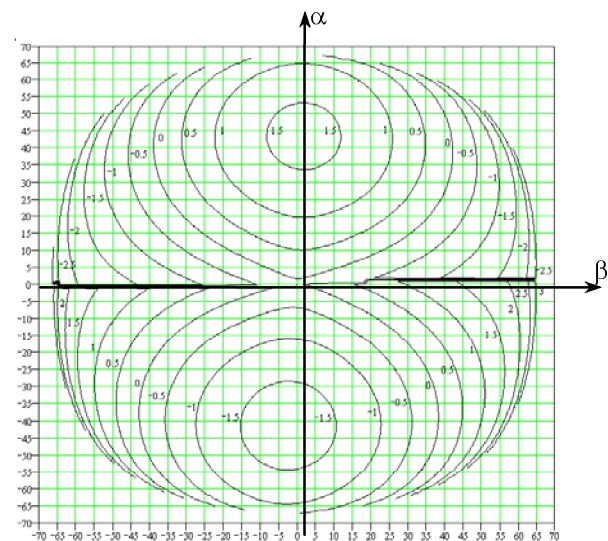


Рис.5.7. График изменения составляющих скорости сдвига изображения для Ψ_{opt0}

при $\frac{Z}{f} = 0,01215$, $\frac{X}{f} = 0,006$

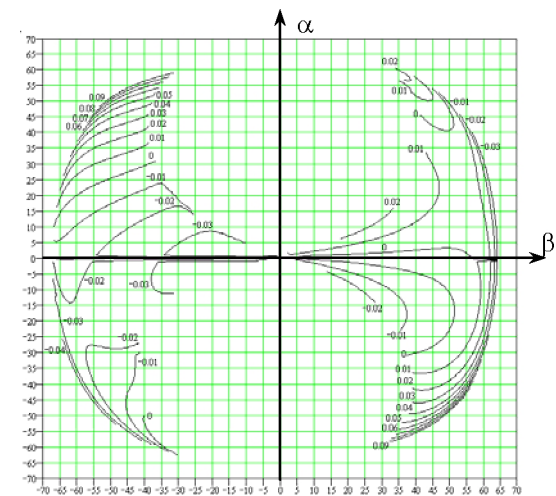


Рис. 5.8. График изменения поперечных составляющих скорости сдвига изображения для Ψ_{opt1} при $\frac{Z}{f} = 0,01215$, $\frac{X}{f} = 0,006$

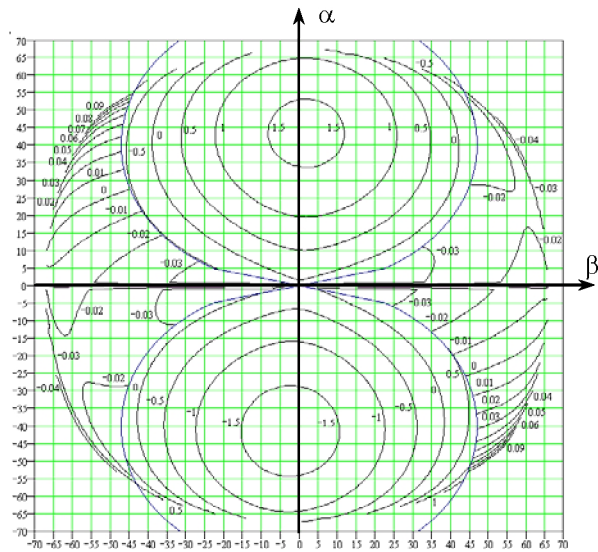


Рис.5.9. График изменения поперечных составляющих скорости сдвига изображения для Ψ_{opt2} при $\frac{z}{f} = 0,01215$, $\frac{x}{f} = 0,006$

На рис.5.7, 5.8, 5.9 приведены графики значений поперечных составляющих скорости сдвига изображения в мм/с также в виде изолиний равных скоростей сдвига для решений Ψ_{opt0} , Ψ_{opt1} , Ψ_{opt2} соответственно, а на рис. 5.10 – суммарный график поперечных скоростей сдвига, соответствующий примерному графику использования решений Ψ_{opt0} , Ψ_{opt1} , Ψ_{opt2} , представленному на рис.5.6.

В отличие от графика, представленного на рис.5.2, для полученного оптимального решения, представленного на рис.5.10, имеют место обширные области с решениями Ψ_{opt1} и Ψ_{opt2} , в которых поперечные составляющие скорости движения изображения не превышают величины $0,05 \div 0,1$ мм/с. Это области существования локального экстремума в решении задачи оптимизации.

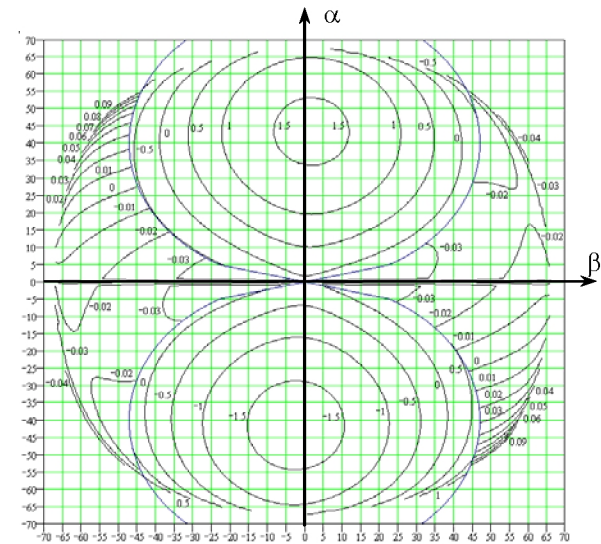


Рис.5.10. Суммарный график изменения поперечных составляющих скорости сдвига при $\frac{z}{f} = 0,01215$, $\frac{x}{f} = 0,006$

При этом очевидно, что дальнейшее снижение величины остаточной скорости поперечного сдвига практически невозможно, если не рассматривать возможность их исключения при наземной обработке полученных при съёмке изображений. А такая возможность есть [12], поскольку остаточные составляющие скорости сдвига являются систематическими величинами, описываемыми известными выражениями.

Достоинством предложенного оптимального решения является возможность выбора линии визирования, относительно которой осуществляется оптимальное управление КА при сканировании. Это означает, что мы создаём идеальные, с точки зрения остаточных сдвигов, изображения условия в точке фокальной плоскости с координатами x и z , через которую проходит дополнительная линия визирования. Именно в этом смысле используется выражение о «линии визирования, относительно которой осуществляется оптимальное управление». Для этого можно координату z в формулах для оптимальных скоростей (5.10) и оптимальных углов рыскания (5.25) воспринимать не как центр рабочей части ОЭП, а только как точку, относительно которой необходимо вести управление.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Оптические схемы объективов космических телескопов / [А.И. Лысенко и др.] // Оптический журнал. - 2002. - № 9. - С.21-25.
2. Пресс, Ф.П. Фоточувствительные приборы с зарядовой связью / Ф.П. Пресс // Радио и связь, 1991. - 262 с.
3. Анатольев, А.Ю. Оценка информационных возможностей космических оптико-электронных систем дистанционного зондирования / А.Ю. Анатольев, А.С. Батраков, А.М. Федына // Оптический журнал. - 2000. - № 7. - С.12 - 18.
4. Батраков, А.С. Прогнозирование скорости сдвига оптического изображения при съёмке земной поверхности / А.С. Батраков // Исследование Земли из космоса. - 1984. - № 1. С.79 - 85.
5. Батраков А.С. Общая модель для расчёта и анализа скорости сдвига оптического изображения при съёмке земной поверхности / А.С. Батраков // Исследование Земли из космоса. - 1989, - № 4. - С.99 - 106.
6. Корн Г., Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн // М.: Наука, 1970. - 720 с.
7. Мельканович, А.Ф. Фотографические средства и их эксплуатация / А.Ф. Мельканович // Министерство обороны СССР, 1984. - 576 с.
8. Петрищев В.Ф. Оптимальная программа сканирования оптико-электронного телескопического комплекса дистанционного зондирования Земли / В.Ф. Петрищев // Труды международной академии информатизации. Отделение микроэлектроники и информатики. – М.: Зеленоград, 2003. - С.20 - 38.
9. Петрищев, В.Ф. Оптимальная программа сканирования оптико-электронного телескопического комплекса дистанционного зондирования Земли. Случай эллиптической орбиты и сферической вращающейся Земли / В.Ф. Петрищев // Труды международной академии информатизации. Отделение микроэлектроники и информатики. –М.: Зеленоград, 2003. - С.101 - 122.
10. Петрищев, В.Ф. Оптимальная программа сканирования оптико-электронного телескопического комплекса дистанционного зондирования Земли для общего случая расположения оптико-электронного преобразователя в фокальной плоскости объектива / В.Ф. Петрищев // Сб. трудов XI Всероссийского научно-технического семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. - Самара, 2003. - С.149 - 156.
11. Петрищев, В.Ф. Программа сканирования земной поверхности, минимизирующая продольные и поперечные методические сдвиги оптического изображения / В.Ф. Петрищев // Сб. научных трудов ФГУП ГНПРКЦ «ЦСКБ-Прогресс». Вып.3. - Самара, 2004. - С.9 - 19.
12. Петрищев, В.Ф. Способ компенсации поперечных методических сдвигов изображения в оптико-электронных системах дистанционного зондирования Земли / В.Ф. Петрищев // Сб. научно-технических статей по ракетно-космической тематике. -Самара: ФГУП ГНПРКЦ «ЦСКБ-Прогресс», 1999. - С.157 - 165.

Учебное издание

**ОПТИМАЛЬНОЕ СКАНИРОВАНИЕ КОСМИЧЕСКИМ
АППАРАТОМ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ**

Учебное пособие

Редактор Ю. Н. Литвинова
Компьютерная верстка О. А. Ананьев

Подписано в печать 20.12.2007 г. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Печ. л. 6,0.

Тираж 200 экз. Заказ Арг. С – 5(Д2)/2007

Самарский государственный аэрокосмический
университет. 443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного аэрокосмического
университета. 443086, Самара, Московское шоссе, 34.