

Н.Е. МОЛЕВИЧ

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

2007



САМАРА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

Н. Е. МОЛЕВИЧ

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

САМАРА
Издательство СГАУ
2007

УДК 537.86
ББК 22.33



**Инновационная образовательная программа
"Развитие центра компетенции и подготовка
специалистов мирового уровня в области
аэрокосмических и геоинформационных
технологий"**

Рецензенты: канд. ф.-м. наук, доц. А. П. З а и к и н
канд. техн. наук, доц. М. П. Ш л ы к о в а

Молевич Н.Е.

Нелинейная динамика: учеб. пособие / Н. Е. Молевич. –
Самара: Изд - во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2007. – 160 с. : ил.

ISBN 978-5-7883-0488-5

Представлено систематическое изложение основных разделов нелинейной динамики. Первая глава представляет собой элементарное введение в теорию динамических систем. Вторая глава подробно знакомит с качественными методами исследования поведения динамических систем в фазовом пространстве. В третьей главе излагаются основные понятия и методы, применяемые для исследования устойчивости динамических систем. Четвёртая глава посвящена теории бифуркаций с коразмерностью 1. Рассматриваются как непрерывные динамические системы (точечные и распределённые), так и дискретные отображения последования. Основное содержание пособия дополнено примерами решения задач. Предназначено для студентов обучающихся по направлениям "Прикладные математика и физика", "Физика" и др. Издание подготовлено на кафедре физики Самарского государственного аэрокосмического университета.

УДК 537.86
ББК 22.33

ISBN 978-5-7883-0488-5

© Молевич Н.Е., 2007
© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	6
1 ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ	7
1.1 Динамическая система и её математическая модель.....	7
1.2 Кинематическая интерпретация системы дифференциальных уравнений. Динамические переменные. Фазовая точка, фазовая траектория, фазовое пространство. Число степеней свободы.....	9
1.3 Классификация динамических систем: дифференциальные и дискретные системы, линейные и нелинейные, автономные и неавтономные, с конечным и бесконечным числом степеней свободы.....	10
1.4 Одномерный фазовый портрет.....	12
2 КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ.....	16
2.1 Матричная форма линейной динамической системы. Собственные значения и вектора матрицы коэффициентов. Характеристическое уравнение.....	16
2.2 Каноническая двумерная линейная система.....	19
2.3 Фазовые портреты для простых канонических систем на плоскости.....	23
2.4 Фазовые портреты простых линейных систем на плоскости.....	30
2.5 Классификация линейных систем.....	33
2.6 Непростые канонические системы.....	35
2.7 Классификация типов простых особых точек в многомерном пространстве.....	36
2.8 Локальное и глобальное поведение нелинейных систем на плоскости. Теорема о линеаризации. Простые особые точки нелинейных систем. Грубые (гиперболические) точки.....	40
2.9 Построение глобального фазового портрета на плоскости с помощью нуль - изоклин нелинейной системы.....	47
2.10 Построение глобального фазового портрета на плоскости с помощью метода изоклин.....	49
2.11 Предельные циклы.....	51
2.12 Теоремы Пуанкаре-Бендиксона.....	54
2.13 Точечные отображения. Метод отображений Пуанкаре. Функция последования.....	56

3	УСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ.....	58
3.1	Классификация предельных множеств динамических систем	58
3.2	Устойчивость по Ляпунову, асимптотическая и экспоненциальная устойчивость, орбитальная устойчивость, устойчивость по Пуассону и Лангранжу.....	59
3.3	Линейная теория устойчивости состояний равновесия.....	63
3.4	Критерий Рауса-Гурвица.....	64
3.5	Метод D – разбиений.....	66
3.6	Линейный анализ устойчивости по Ляпунову фазовых траекторий. Спектр ляпуновских характеристических показателей фазовой траектории динамической системы.....	69
3.6.1	Устойчивость состояний равновесия.....	73
3.6.2	Устойчивость периодических решений. Матрица монодромии. Мультипликаторы предельного цикла.....	74
3.6.3	Устойчивость квазипериодических решений.....	76
3.6.4	Устойчивость хаотических решений.....	76
3.6.5	Понятие о динамическом хаосе.....	77
3.6.6	Типы аттракторов.....	78
3.7	Монотонные отображения. Устойчивость неподвижных точек и циклов одномерных дискретных динамических систем.....	80
3.8	Второй (прямой) метод Ляпунова. Функция Ляпунова.....	84
4	БИФУРКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ.....	89
4.1	Структурная устойчивость, грубость системы. Бифуркационные значения параметров. Локальные и нелокальные, мягкие (внутренние) и жёсткие (кризисы) бифуркации. Бифуркационная и фазопараметрическая диаграммы.....	89
4.2	Бифуркации положения равновесия.....	95
4.2.1	Бифуркация седло-узел.....	95
4.2.2	Бифуркация «обмен устойчивостью» (транскритическая).....	97
4.2.3	Суперкритическая и субкритическая бифуркации типа вилки.....	97
4.3	Бифуркация рождения (уничтожения) предельного цикла Андропова-Хопфа.....	99
4.4	Основные типы бифуркаций периодических решений	105
4.4.1	Бифуркация рождения - исчезновения двух предельных циклов (седло-узловая бифуркация предельных циклов).....	107
4.4.2	Бифуркация удвоения периода цикла.....	107
4.4.3	Бифуркация рождения (гибели) двумерного тора.....	110
4.4.4	Бифуркация предельного цикла типа вилки.....	111
4.5	Нелокальные бифуркации.....	112
4.5.1	Бифуркация образования петли сепаратрисы седла и седла-фокуса. Гомо- и гетероклинические траектории. Седловые величины. Теорема Шильникова.....	113

4.5.2	Бифуркация образования петли сепаратрисы негрубой особой точки седло-узел.....	116
4.5.3	Возникновение гомоклинической траектории седлового предельного цикла. Гомоклиническая структура.....	117
4.6	Понятие о распределённых динамических системах.....	119
4.6.1	Устойчивость стационарного решения дифференциальных уравнений в частных производных. Бифуркация Андронова-Хопфа в распределённых системах.....	119
4.6.2	Стационарные волны. Волновые решения типа бегущего импульса и типа бегущего фронта.....	121
4.6.3	Пример исследования распределённой динамической системы. Акустические волны.....	123
4.6.4	Пример исследования распределённой динамической системы. Электромагнитные волны.....	133
4.7	Бифуркации состояний равновесия одномерных дискретных динамических моделей.....	139
4.8	Унимодальное отображение. Каскад бифуркаций удвоения периода в логистическом отображении.....	141
4.9	Теория универсальности Фейгенбаума. Сценарий перехода к хаосу через бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода.....	146
4.10	Иерархия циклов. Рождение хаоса и циклов через перемежаемость (сценарий Пома-Манневилля).....	149
4.11	Переход к хаосу по моделям Ландау и Рюэля-Такенса.....	156
	БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	158

ПРЕДИСЛОВИЕ

Нелинейная динамика является новой специальной дисциплиной. Целями настоящего учебного пособия являются

- 1) формирование у студентов универсального (синергетического) подхода к решению разнообразных задач нелинейной динамики,
- 2) ознакомление с математическими основами нелинейной динамики и их приложениями,
- 3) выработка навыков решения задач нелинейной динамики с использованием современных математических методов.

Для успешного усвоения материала необходимы предварительные знания в области теории нелинейных колебаний и волн, теории дифференциальных уравнений, а также в области информатики и математического моделирования.

Данное учебное пособие ориентировано прежде всего на студентов естественнонаучных специальностей университета, изучающих синергетику и теорию нелинейных процессов. Для этого контингента студентов нелинейная динамика является базовым курсом, без которого невозможно восприятие таких дисциплин, входящих в учебную программу, как «Синергетика», «Теория катастроф», «Фракталы и хаос», «Прикладные проблемы нелинейной динамики», «Математические модели в социальных и поведенческих науках», «Математические модели в экологии», «Нелинейная оптика», «Нелинейная акустика» и ряда других.

Кроме того, учебное пособие будет полезным и для студентов технических специальностей, изучающих проблемы устойчивости и возможных режимов функционирования сложных динамических систем, а также для аспирантов и молодых учёных, изучающих природу нелинейных явлений.

Пособие состоит из четырёх глав. Первая глава представляет собой введение в круг основных понятий и терминологии нелинейной динамики. Одна из задач этой главы - облегчить понимание оригинальной, в основном

математической литературы по этой тематике. В этой же главе проведена подробная классификация динамических систем.

Вторая глава посвящена методу качественного исследования линейных и нелинейных динамических систем на фазовой плоскости и в фазовом пространстве. Рассматриваются канонические фазовые портреты и способы сведения к ним, локальное и глобальное поведение нелинейных систем на плоскости и в трёхмерном пространстве, условия существования предельных циклов. Особое внимание уделено возможности (невозможности) судить о свойствах сложной нелинейной системы по её линеаризации.

В третьей главе рассматриваются вопросы устойчивости нелинейных динамических систем: типы устойчивости, методы линейного и нелинейного анализа, спектр ляпуновских характеристических показателей и сигнатура этого спектра для различных типов аттракторов. Вводится понятие странного аттрактора и сложного аperiodического движения на этом аттракторе (динамического хаоса).

В заключительной четвёртой главе рассмотрены типичные локальные и нелокальные бифуркации динамических систем (непрерывных и дискретных, точечных и распределённых) коразмерности 1; кратко обсуждаются различные сценарии перехода к хаосу: бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода Фейгенбаума, через перемежаемость, сценарии Ландау и Рюэля-Тakensа.

Содержание всех глав учебного пособия дополнено примерами подробного решения задач.

1 ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

1.1 Динамическая система и её математическая модель

Нелинейная динамика – междисциплинарная наука, занимающаяся исследованием эволюции нелинейных динамических систем.

Динамическая система – объект или процесс любой природы, для которого однозначно определено понятие состояния как совокупности некоторых величин в данный момент времени и задан закон, который описывает изменение (эволюцию) начального состояния с течением времени [1-3]. Этот закон позволяет по начальному состоянию прогнозировать будущее состояние динамической системы и его называют **законом** или **оператором эволюции**.

Например, если изменение во времени состояния системы описывается уравнением $\dot{x} = ax$, то в этом случае состояние системы в момент времени t определяется как $x(t) = \exp(at)x(0)$, так что действие оператора эволюции заключается просто в умножении на экспоненту.

Понятие динамической системы первоначально возникло в механике. Затем оно было распространено на объекты любой природы. В настоящее время нелинейная динамика имеет дело с физическими, биологическими, химическими, экологическими, экономическими, социальными, информационными, вычислительными и другими динамическими системами. Динамической системе сопоставляется её **математическая модель**. Чтобы ввести математическую модель динамической системы, надо определить мгновенное **состояние системы** в виде совокупности неких величин или функций и задать оператор эволюции, с помощью которого находится соответствие между состоянием системы в начальный момент времени и единственным состоянием в каждый последующий момент времени. Оператор эволюции может быть задан множеством различных способов: с помощью дифференциальных, интегральных или интегро-дифференциальных уравнений, дискретных (разностных) уравнений (отображений последования), с помощью матриц, графов и т.д. Выбор одного из способов описания определяет конкретный вид математической модели рассматриваемой системы.

Данное определение динамической системы является более широким, чем часто применяемое в математике. Математики понимают динамическую систему в узком смысле, как систему, которая описывается конечным числом дифференциальных уравнений.

Типична ситуация, когда системы совершенно различной природы в некотором приближении описываются одинаковыми математическими моделями, например моделью гармонического осциллятора. Поэтому в курсе нелинейной динамики под динамической системой будет пониматься именно её математическая модель. В зависимости от степени приближения и задачи исследования одной и той же реальной системе могут быть сопоставлены принципиально различные математические модели (например, маятник с учётом и без учёта трения, с учётом и без учёта нелинейности).

1.2 Кинематическая интерпретация системы дифференциальных уравнений. Динамические переменные. Фазовая точка, фазовая траектория, фазовое пространство. Число степеней свободы

Рассмотрим динамические системы, моделируемые конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений. Применительно к таким системам сохранились представления и терминология, первоначально возникшие в механике. Состояние системы определяется совокупностью некоторых величин $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, которые называются **динамическими переменными** или **переменными состояния**. Последнее название чаще используется в теориях бифуркаций и катастроф.

Динамические переменные непосредственно связаны с количественными характеристиками, наблюдаемыми и измеряемыми в реальных системах (ток, напряжение, скорость, температура, концентрация вещества, численность популяции и так далее), поэтому они должны быть вещественными.

Закон эволюции рассматриваемого класса динамических систем во времени описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.1)$$

или в векторном виде

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}), \quad (1.2.2)$$

где $\vec{f}(\vec{x})$ вектор скорости размерности n с компонентами $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ [1].

Если рассматривать величины x_i как координаты точки x в n -мерном пространстве ($x \in R^n$), то получится наглядное геометрическое представление состояния динамической системы в виде этой точки. Эту точку называют **изображающей** или **фазовой точкой**, а пространство состояний - **фазовым пространством** динамической системы. Термин «фаза» восходит к греческому слову «фазис», обозначающему появление светил (например, различные фазы Луны), и используется при описании состояния той или иной системы [14].

Изменению состояния системы во времени отвечает движение фазовой точки вдоль некоторой линии, называемой **фазовой траекторией**. Если

состояние системы не меняется со временем, то фазовая точка неподвижна, то есть вся фазовая траектория представляет собой одну точку. Фазовые траектории гладкой динамической системы не пересекаются, иначе было бы не возможно точное предсказание поведения: из одной точки начинались бы по крайней мере две различных фазовых траектории. **Гладкая динамическая система** - это система с непрерывно-дифференцируемой правой частью.

Совокупность фазовых траекторий, отвечающих различным начальным условиям, образуют **фазовый портрет** системы.

Система с N степенями свободы характеризуется фазовым пространством размерности в два раза большей ($n=2N$). Это связано с тем, что под числом степеней свободы понимается наименьшее число независимых координат, необходимых для однозначного определения состояния динамической системы. Под координатами первоначально понимались именно пространственные переменные, характеризующие пространственное расположение объектов. В тоже время для однозначного решения соответствующих уравнений движения необходимо, помимо координат, задать соответствующие начальные значения импульсов или скоростей.

1.3 Классификация динамических систем: дифференциальные и дискретные системы, линейные и нелинейные, автономные и неавтономные, с конечным и бесконечным числом степеней свободы

В основу классификации динамических систем положены тип динамических переменных, свойства и способ задания оператора эволюции [2]. Если динамические переменные являются величинами, а не функциями, и их число n конечно, то фазовое пространство R^n этой системы имеет конечную размерность. Число степеней свободы $N=n/2$ тоже конечно. Такие динамические системы часто называют **сосредоточенными** системами или **точечными** системами, так как их параметры не должны быть функциями пространственных координат. Сосредоточенные системы чаще всего описываются обыкновенными дифференциальными или дискретными уравнениями (отображениями последования).

Если динамические переменные являются функциями пространственных координат, то состояние моделируемой системы зависит от точки в пространстве. Число этих точек бесконечно, поэтому размерность фазового пространства тоже бесконечна. Такие системы называются **распределёнными** системами. Распределённые системы подобного типа описываются дифференциальными уравнениями в частных производных или интегральными уравнениями. Другой пример систем с бесконечной размерностью фазового пространства – системы, оператор эволюции которых содержит задержку по времени T_3 , в частности системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом. В этом случае состояние системы также задаётся бесконечным набором функций $x_i(t), t \in [0, T_3]$.

Одна и та же система в различных ситуациях может рассматриваться как распределённая либо точечная. В теории электрических колебаний систему рассматривают как точечную (сосредоточенную) в тех случаях, когда длина волны колебания существенно превышает геометрические размеры самой системы. Если размеры прибора соизмеримы с длиной волны, то систему необходимо рассматривать как распределённую.

Если состояние системы определено для любого момента времени, то это система с **непрерывным временем** или **поток**ом (по аналогии со стационарным течением жидкости).

Если же состояние определено только в отдельные, дискретные, моменты времени, то имеем динамическую систему с **дискретным временем** (дискретную систему, каскад). Для каскадов оператор эволюции обычно задаётся в виде дискретного уравнения.

В зависимости от свойств оператора эволюции можно выделить следующие классы динамических систем.

Если оператор предусматривает исключительно линейные преобразования начального состояния, то он и динамическая система называются **линейными**. Линейный оператор обладает свойством суперпозиции

$$\hat{T}[x(t) + y(t)] = \hat{T}x(t) + \hat{T}y(t).$$

Если оператор нелинейный, то и соответствующая динамическая система называется **нелинейной**.

Если оператор эволюции не зависит от времени явным образом, то система является **автономной**, то есть в ней отсутствуют внешние воздействия. В противном случае – неавтономной.

Если динамическая система обладает свойством сохранять элемент фазового объёма (хотя бы в среднем), то она **консервативна** (сохраняющая энергию). В механике их называют **гамильтоновыми**. Иначе – **неконсервативная** система. Сжатие элемента фазового объёма говорит о наличии потерь энергии. Системы с потерями энергии называются **диссипативными**. Рост элемента фазового объёма свидетельствует о добавлении энергии в систему. Такую систему тоже называют **диссипативной**, но с **отрицательными потерями**.

Важную группу динамических систем представляют системы, в которых возможны колебания. Большинство реальных колебательных систем неконсервативны. Среди них выделяется особый класс так называемых **автоколебательных** систем, которые принципиально неконсервативны и нелинейны. Автоколебательной называют динамическую систему, преобразующую энергию источника в энергию незатухающих колебаний, причём основные характеристики установившихся колебаний (амплитуда, частота, форма колебаний и т.д.) определяются параметрами системы и в некоторых пределах не зависят от выбора исходного начального состояния.

1.4 Одномерный фазовый портрет

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x). \quad (1.4.1)$$

В различных приложениях рассматриваемое уравнение моделирует изменение какого-либо параметра x некоторой динамической системы в зависимости от времени. Состояние системы определяется значением величины x .

Фазовое пространство этого уравнения представляет собой прямую. Фазовый портрет фиксирует только направление скорости фазовой точки и, следовательно, отражает лишь качественную картину динамики.

Фазовыми траекториями уравнения (1.4.1) могут быть [26]:

а) положения равновесия, то есть одноточечные траектории (состоящие

из одной точки). Положения равновесия динамической системы в литературе называют ещё **особыми точками**, стационарными точками (состояниями), точками покоя, неподвижными точками и критическими точками;

б) отрезки (интервалы), концевые точки которых представляют собой положения равновесия;

в) полупрямые, «ограниченные» состоянием равновесия с одной стороны и «точкой» $+\infty$ или $-\infty$ с другой;

с) траектории от $+\infty$ или $-\infty$ или наоборот.

Направление прохождения траектории определяется знаком функции f следующим образом:

Если $f(x) > 0$, то фазовая точка пробегает траекторию слева направо, если же $f(x) < 0$, то справа налево.

Для любой неподвижной точки в одномерном случае реализуется один из четырёх вариантов фазового портрета (рис.1.4.1). Соответственно неподвижная точка является аттрактором, шунтом или репеллером [31].

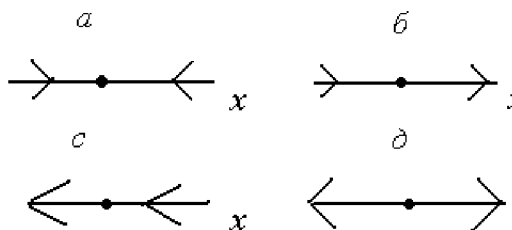


Рис. 1.4.1. Четыре типа неподвижных точек динамической системы (1.4.1). а) аттрактор, б) и в) шунт, д) репеллер

Фазовый портрет любого автономного уравнения полностью определяется видом его неподвижных точек. Два дифференциальных уравнения вида (1.4.1) **качественно эквивалентны**, если они имеют равное количество неподвижных точек одинакового типа, расположенных в одинаковом порядке на фазовой прямой.

Пример 1 [31]

Пусть уравнение

$$\dot{p} = ap ; p, a > 0 \quad (1.4.2)$$

моделирует рост популяции некоторого изолированного биологического вида. Состояние вида в момент времени t задаётся количеством индивидуумов $p(t)$, существующих в этот момент. Фазовый портрет (рис. 1.4.2а) показывает, что популяция растёт неограниченно. Это свойство выглядит неправдоподобно: та среда, в которой живёт этот вид, имеет свои ограничения и не может обеспечить ресурсами неограниченно растущую популяцию.

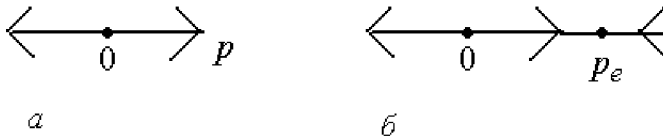


Рис 1.4.2. Фазовые портреты динамических систем (1.4.2) (а) и (1.4.3) (б)

Пусть окружающая среда может обеспечить существование популяции p_e . Как надо изменить уравнение с учётом этого обстоятельства? Очевидно, неограниченный рост p должен быть чем-то остановлен. Одна из возможностей - ввести аттрактор p_e (рис. 1.4.2б). Это значит, что популяции, большие чем p_e , уменьшаются, меньшие, чем p_e , растут, а равновесие достигается при $p = p_e$. Чтобы могли существовать две неподвижные точки при $p = 0$ и $p = p_e$, функция $f(x)$ должна быть нелинейной. Пример моделирующего уравнения:

$$\dot{p} = p(a - bp). \quad (1.4.3)$$

Здесь $p_e = a/b$. Уравнение (1.4.3) называется **логистическим законом** (уравнением) или **уравнением Ферхюльста**. Термин *логистическое* происходит от французского прилагательного *logistique*, относящегося к тыловым службам, занимающимся расквартированием и снабжением войск. Тот же смысл имеет англ. *Logistical* - тыловой, снабженческий. Уравнение Ферхюльста относится к классическим моделям математической экологии, учитывающим, что процесс роста популяции ограничен недостатком снабжения.

Решение (1.4.3) имеет вид

$$p(t) = p(0) \frac{p_e e^{at}}{p_e - p(0) + p(0)e^{at}}.$$

Пример 2 [26]

На рис. 1.4.3-1.4.4 построены соответствующие $f(x)$ и фазовые портреты динамических систем

а) $\dot{x} = x^2$; б) $\dot{x} = x^3$; в) $\dot{x} = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$; г) $\dot{x} = \sin x$.

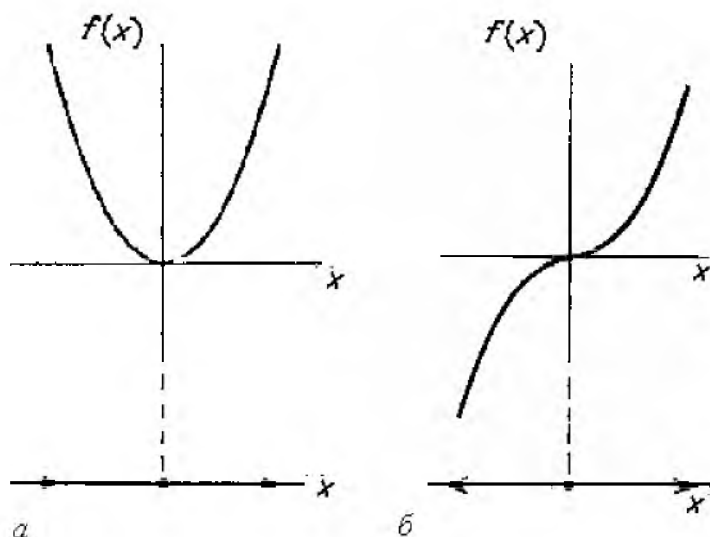


Рис. 1.4.3. Фазовые портреты уравнений а) $\dot{x} = x^2$ б) $\dot{x} = x^3$

Пример 3 [31]

Какие уравнения являются качественно эквивалентными

$$\dot{x} = (x+2)(x+1); \quad \dot{x} = \frac{1}{2}(x^2 - 1); \quad \dot{x} = -(x+2)(x+1)?$$

Решение: Уравнение $\dot{x} = (x+2)(x+1)$ эквивалентно $\dot{x} = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$. Оба уравнения имеют по две неподвижных точки, одна из которых аттрактор, а другая - репеллер, причём аттрактору соответствует меньшее значение x .

Уравнение $\dot{x} = -(x+2)(x+1)$ не является качественно эквивалентным, потому что аттрактор и репеллер идут в обратном порядке.

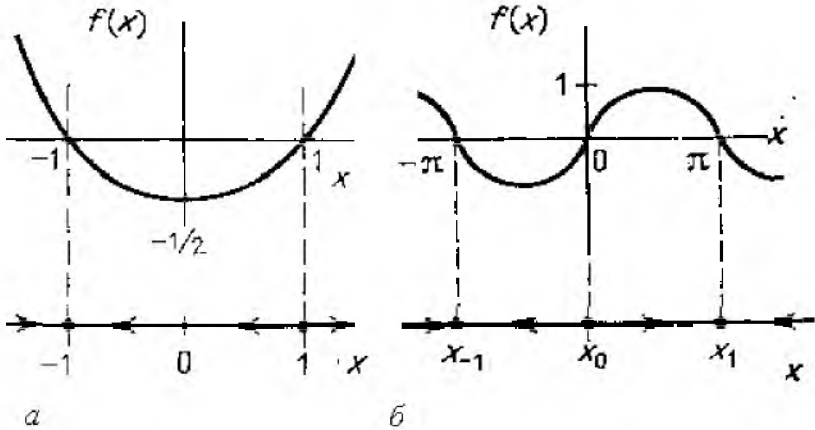


Рис. 1.4.4. Фазовые портреты уравнений а) $\dot{x} = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$, б) $\dot{x} = \sin x$

2 КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ

2.1 Матричная форма линейной динамической системы. Собственные значения и вектора матрицы коэффициентов. Характеристическое уравнение

Система

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}), \vec{x} \in R^n$$

называется линейной системой размерности n , если её правая часть линейна. Любую линейную однородную систему можно представить в матричной форме:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \equiv \tilde{A}\vec{x},$$

где \tilde{A} - матрица коэффициентов. Ниже рассматриваются только однородные системы.

Для изучения материала данной главы необходимо умение находить собственные значения и вектора матриц, а также обратную матрицу. Подробно этот материал изложен, например, в справочнике[6].

Собственные значения матрицы определяются в результате решения характеристического уравнения матрицы \tilde{A} :

$$\det(\tilde{A} - \lambda\tilde{E}) = 0,$$

где \tilde{E} - единичная матрица, λ - собственные значения.

Если λ_i - собственное значение \tilde{A} , то нетривиальные решения однородной системы линейных уравнений

$$(\tilde{A} - \lambda_i\tilde{E})\vec{x} = 0$$

являются **собственными векторами** матрицы \tilde{A} , принадлежащими собственному значению λ_i .

Пример 1 [6]

Собственные значения матрицы

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

определяются из характеристического уравнения

$$\det(\tilde{A} - \lambda\tilde{E}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0.$$

Откуда

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = -1.$$

Собственные вектора, принадлежащие λ_1 , определяются как нетривиальные решения системы

$$(\tilde{A} - \lambda_1 \tilde{E})\tilde{x} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

то есть собственные вектора имеют компоненты $(-1,1)r$, где r - действительное число.

Аналогично, собственные вектора, принадлежащие λ_2 определяются как нетривиальные решения системы

$$(\tilde{A} - \lambda_2 \tilde{E})\tilde{x} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

т.е. собственные вектора имеют компоненты $(1,2)r$, где r - действительное число.

Детерминант и след матрицы связаны с собственными значениями соотношениями

$$\det \tilde{A} = \prod_{i=1}^n \lambda_i, \quad (2.1.1)$$

$$tr \tilde{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Из (2.1.1) следует, что если хотя бы одно собственное значение равно нулю, то детерминант матрицы тоже равен нулю, т.е. матрица является **вырожденной**. Здесь $tr \tilde{A}$ - след матрицы (сумма её диагональных элементов), от английского слова trace. След часто также обозначается $Sp \tilde{A}$ (от немецкого Spur).

Обратная матрица \tilde{A}^{-1} это матрица, удовлетворяющая условию $\tilde{A}\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^{-1}\tilde{A} = \tilde{E}$.

Необходимым условием существования обратной матрицы является невырожденность матрицы \tilde{A} , т.е. условие $\det \tilde{A} \neq 0$.

Обратная матрица находится следующим образом:

$$\tilde{A}^{-1} = \frac{1}{\det \tilde{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

где A_{ik} -алгебраическое дополнение элемента a_{ik} матрицы \tilde{A} .

T -обозначает транспонирование, то есть $A_{ik}^T = A_{ki}$.

Пример 2[6]

Обратная матрица по отношению к матрице

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

определяется как

$$\tilde{A}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & -5 & 4 \\ 5 & 5 & -5 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.2. Каноническая двумерная линейная система

Любую двумерную линейную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

можно представить в матричном виде

$$\dot{\vec{x}} = \tilde{A}\vec{x}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Теорема

Двумерную линейную систему

$$\dot{\vec{x}} = \tilde{A}\vec{x}$$

с помощью замены

$$\vec{x} = \tilde{M}\vec{y},$$

где \tilde{M} - специальным образом составленная невырожденная матрица, можно свести к эквивалентной ей **канонической системе**

$$\dot{\vec{y}} = \tilde{J}\vec{y},$$

где $\tilde{J} = \tilde{M}^{-1}\tilde{A}\tilde{M}$ - так называемая **жорданова форма** матрицы \tilde{A} , принадлежащая к одному из четырёх типов:

$$\begin{aligned}
 \text{а)} \quad & \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_1 > \lambda_2; & \text{б)} \quad & \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}; \\
 \text{в)} \quad & \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}; \text{ г)} \quad & \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \beta > 0.
 \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Характеристическое уравнение системы (2.2.1) имеет вид

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$$

или

$$\lambda^2 - (\text{tr}\tilde{A})\lambda + \det\tilde{A} = 0,$$

где $\text{tr}\tilde{A} = a + d$.

Таким образом, собственные значения определяются как

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\text{tr}\tilde{A} + \sqrt{\Delta}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(\text{tr}\tilde{A} - \sqrt{\Delta}),$$

где $\Delta = (\text{tr}\tilde{A})^2 - 4\det\tilde{A}$.

Конкретный вид жордановой формы зависит от вида собственных значений следующим образом.

Форма (2.2.2а) соответствует матрице \tilde{A} с $\Delta > 0$, т.е. когда имеются два разных действительных собственных значения.

В этом случае матрица \tilde{M} - это матрица, столбцами которой являются два линейно независимых собственных вектора матрицы \tilde{A} .

Пример1 [31]

Рассмотрим матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

с собственными значениями вида $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

Соответствующая жорданова форма имеет вид

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Собственные вектора матрицы \tilde{A} находятся из условия

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_{1,2} & 2 \\ 1 & 1-\lambda_{1,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Откуда

$$\begin{pmatrix} \mp\sqrt{2} & 2 \\ 1 & \mp\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} \mp\sqrt{2}x_1 + 2x_2 \\ x_1 \mp\sqrt{2}x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Собственные вектора матрицы имеют вид $(\pm\sqrt{2}, 1)r$. Выбираем $r = 1$. Тогда

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{M}^{-1} = \frac{1}{\det \tilde{M}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Можно проверить, что удовлетворяется

$$\tilde{J} = \tilde{M}^{-1} \tilde{A} \tilde{M}.$$

Формы (2.2.2б) и (2.2.2в) реализуются при $\Delta = 0$, т.е. когда собственные значения совпадают

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2} \text{tr} \tilde{A} = \lambda_0.$$

В этом случае существуют две возможности.

1) Матрица \tilde{A} диагональная.

Она сразу имеет жорданову форму **(2.2.2б)**

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \lambda_0 \tilde{E}.$$

2) Матрица \tilde{A} недиагональная.

В этом случае у неё не существует двух линейно независимых собственных векторов. Пусть \vec{u}_0 - некоторый собственный вектор \tilde{A} . Если мы положим столбец $\vec{m}_1 = \vec{u}_0$ и выберем второй столбец \vec{m}_2 так, чтобы матрица $\tilde{M} = [\vec{u}_0 | \vec{m}_2]$ была невырожденной, то получим, что

$$\tilde{M}^{-1}\tilde{A}\tilde{M} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & c \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad c \neq 0.$$

Чтобы получить жорданову форму проведём простой переход от \tilde{M} к

$$\tilde{M}_1 = \tilde{M} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}, \quad c \neq 0.$$

Тогда получаем

$$\tilde{J} = \tilde{M}_1^{-1}\tilde{A}\tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

то есть форму (2.2.26).

Пример2 [31]

Рассмотрим матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь собственные значения совпадают $\lambda_0 = 2$, а исходная матрица не диагональная. Следовательно, соответствующая ей жорданова форма имеет вид (2.2.26)

$$\tilde{J} = \tilde{M}_1^{-1}\tilde{A}\tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Собственный вектор $\vec{u}_0 = (u_1, u_2)$ определится из условия

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda_0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Откуда

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ u_1 - u_2 \end{pmatrix} = 0.$$

В результате собственный вектор можно записать в форме (1,1), а матрицу взять, например, в форме

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

с удобным для последующих преобразований детерминантом

$$\det \tilde{M} = 1.$$

В этом случае

$$\begin{aligned}\tilde{M}^{-1}\tilde{A}\tilde{M} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ \tilde{M}_1 &= \tilde{M} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Жорданова форма (2.2.2г) соответствует $\Delta < 0$, т.е. комплексным собственными значениями $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

Здесь для матрицы

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

имеем

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} a - \alpha & -\beta \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 3[31]

Рассмотрим матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\lambda_{1,2} = 3 \pm i$. Откуда найдём

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{J} = \tilde{M}^{-1}\tilde{A}\tilde{M} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.3 Фазовые портреты для простых канонических систем на плоскости

Линейная система называется простой, если $\det \tilde{A}$ не равен нулю, т.е. матрица коэффициентов \tilde{A} не имеет нулевых собственных значений. Матрица \tilde{A} и соответствующая ей жорданова форма имеют одинаковые собственные значения, поэтому каноническая система, соответствующая простой линейной системе, также является простой.

Построим фазовые портреты простых канонических систем на

плоскости в зависимости от вида собственных значений. Возможны следующие случаи.

1. Различные действительные собственные значения одного знака.

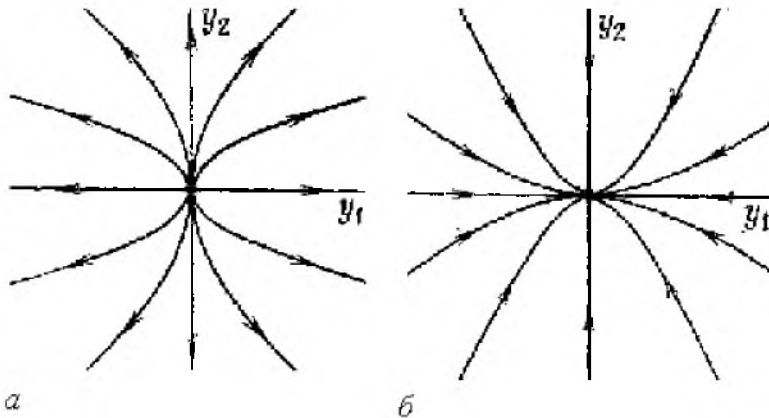


Рис.2.3.1. Неустойчивый (а) и устойчивый (б) узлы

В этом случае каноническая система описывается жордановой формой (2.2.2а). Тогда

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \quad \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2. \quad (2.3.1)$$

Особая точка в начале координат $(0,0)$ при $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ называется **устойчивым узлом**, а при $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ - **неустойчивым узлом**.

В (2.3.1) принято, что $\lambda_2 < \lambda_1$. Проинтегрировав уравнения (2.3.1), получим интегральные кривые в виде экспонент

$$y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Форма фазовых траекторий при $y_1 \neq 0$ определяется уравнением

$$\frac{dy_2}{dy_1} = k y_1^{\gamma-1},$$

где $k = \gamma C_2 / C_1^\gamma$, $\gamma = \lambda_2 / \lambda_1$. Откуда получаем параболы вида

$$y_2 = \frac{k}{\gamma} y_1^\gamma + const. \quad (2.3.2)$$

При построении фазовых портретов важными являются так называемые нуль-изоклины. Это кривые (или прямые для линейных систем), описываемые зависимостью $y_2(y_1)$, при которых $\dot{y}_1 = 0$ (y_1 -нуль-изоклина) или $\dot{y}_2 = 0$ (y_2 -нуль-изоклина). Любая фазовая траектория касается y_1 -нуль-изоклины перпендикулярно оси y_1 (т.к. $dy_2/dy_1 = \infty$), а y_2 -нуль-изоклины перпендикулярно оси y_2 (т.к. $dy_2/dy_1 = 0$). В системе (2.3.1) y_1 -нуль-изоклина описывается прямой $y_1 = 0$, т.е. это ось y_2 . Наоборот, y_2 -нуль-изоклина описывается прямой $y_2 = 0$, т.е. является осью y_1 . Таким образом, здесь нуль-изоклины сами являются фазовыми траекториями. Направления фазовых траекторий на нуль-изоклинах определяются с помощью оставшегося уравнения с ненулевой правой частью: при $\lambda < 0$ получаем убывание величины y (стрелки направлены к особой точке) (рис. 2.3.1б), при $\lambda > 0$ получаем нарастание величины y (стрелки направлены от особой точки) (рис. 2.3.1а).

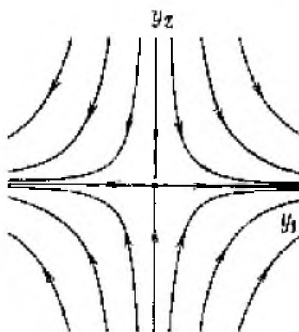


Рис. 2.3.2. Седло

Остальные траектории описываются уравнением (2.3.2). При отрицательных собственных значениях $|\lambda_2| > |\lambda_1|$, поэтому $\gamma > 1$. Фазовые траектории являются параболами относительно оси y_2 , причём $const = 0$, так как иначе фазовые траектории пересекли бы другую фазовую траекторию (ось y_2). Аналогично при положительных собственных

значениях фазовые траектории являются парабололами относительно оси y_1 .

2. Действительные собственные значения разного знака.

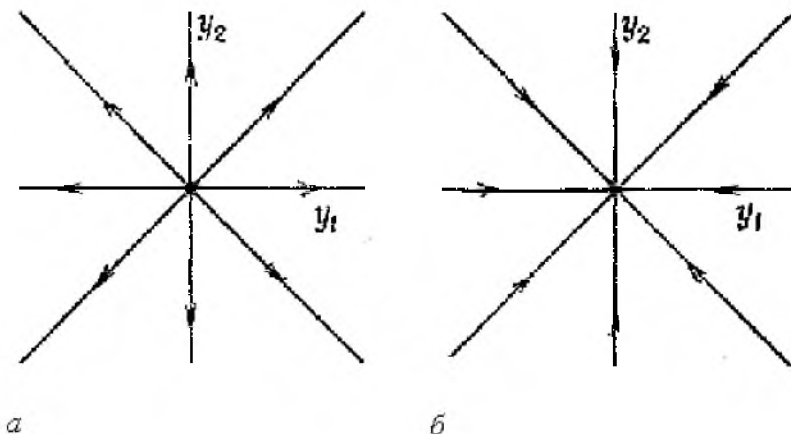


Рис.2.3.3 Звездные узлы: а)-неустойчивый; б)-устойчивый

Неподвижная точка в начале координат называется **седлом** (рис. 2.3.2).

Здесь те же нуль-изоклины на осях координат. Направление фазовых траекторий на осях изменилось. На осях координат (исключая начало) лежат особые траектории - сепаратрисы, имеющие вид радиальных лучей. На каждой координатной оси лежат две сепаратрисы. Эти сепаратрисы направлены к началу координат, если соответствующее собственное значение отрицательно. При $\lambda_2 < \lambda_1$ имеем $\lambda_2 < 0$ и устойчивое направление вдоль оси y_2 . Остальные траектории имеют сепаратрисы в качестве асимптот. Они представляют собой гиперболы.

3. Равные собственные значения. Матрица J диагональна.

Форма фазовых траекторий при $y_1 \neq 0$ определяется уравнением

$$\frac{dy_2}{dy_1} = k,$$

описывающим радиальные лучи. Это **звездный (дикритический) узел** (рис. 2.3.3).

4. Равные собственные значения. Матрица J недиагональна.

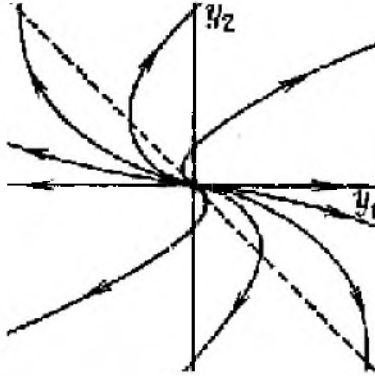


Рис. 2.3.4. Неустойчивый вырожденный узел

Тогда

$$\dot{y}_1 = \lambda_0 y_1 + y_2, \quad \dot{y}_2 = \lambda_0 y_2. \quad (2.3.3)$$

Второе уравнение имеет решение

$$y_2(t) = C_2 e^{\lambda_0 t}.$$

Подставляя это решение в первое уравнение системы (2.3.3), получаем

$$\dot{y}_1 = \lambda_0 y_1 + C_2 e^{\lambda_0 t}.$$

Это уравнение относится к дифференциальным уравнениям типа $\dot{x} + f(t)x = q(t)$, которые решаются с помощью простого преобразования к виду

$$\frac{d(xe^{\int f(t)dt})}{dt} = q(t)e^{\int f(t)dt}.$$

Откуда имеем решения вида

$$y_1(t) = (C_1 + tC_2)e^{\lambda_0 t}.$$

Легко увидеть, что y_2 - нуль-изоклина соответствует оси y_1 и является фазовой траекторией; y_1 - нуль-изоклина соответствует прямой $y_2 = -\lambda_0 y_1$. На этой прямой траектории меняют своё направление (геометрическое место точек экстремума для y_1).

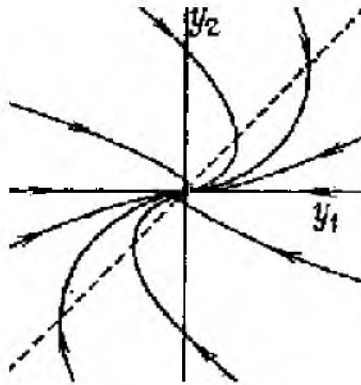


Рис. 2.3.5. Устойчивый вырожденный узел

Особая точка называется *вырожденным узлом*, неустойчивым при $\lambda_0 > 0$ (рис. 2.3.4) и устойчивым при $\lambda_0 < 0$ (рис. 2.3.5).

5. Чисто мнимые собственные значения

Жорданова матрица имеет здесь вид

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, \beta > 0,$$

так что каноническая система имеет вид

$$\dot{y}_1 = -\beta y_2, \quad \dot{y}_2 = \beta y_1.$$

Откуда

$$\frac{dy_2}{dy_1} = -\frac{y_1}{y_2}$$

или

$$y_2^2 + y_1^2 = c^2.$$

Таким образом, фазовые траектории составляют семейство концентрических окружностей с центром в начале координат (рис.2.3.6). Начало координат - особая точка типа **центр**.

Это единственный случай, когда в линейных системах возникает периодическое решение. Период определяется из уравнения $\ddot{y} + \beta^2 y = 0$, как $T = 2\pi / \beta$.

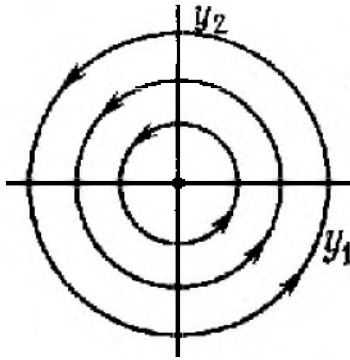


Рис.2.3.6. Центр

б. *Комплексные собственные значения*

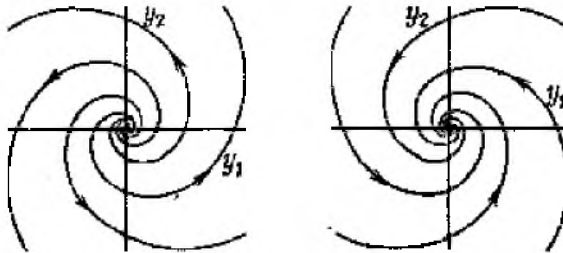
Каноническая система имеет вид

$$\dot{y}_1 = \alpha y_1 - \beta y_2, \quad \dot{y}_2 = \beta y_1 + \alpha y_2. \quad (2.3.4)$$

Здесь y_1 - нуль-изоклина соответствует $y_2 = \alpha y_1 / \beta$, y_2 - нуль-изоклина соответствует $y_2 = -\beta y_1 / \alpha$.

Систему (2.3.4) легко решить, перейдя к полярным координатам:

$$y_1 = r \cos \theta, \quad y_2 = r \sin \theta.$$



а

б

Рис.2.3.7. Невстойчивый (а) и устойчивый (б) фокусы

Откуда получаем

$$\dot{r} = \alpha r, \quad \dot{\theta} = \beta.$$

При $\alpha > 0$ имеем фазовые траектории в виде отталкивающих спиралей, и особая точка является **неустойчивым фокусом** (рис. 2.3.7а). При $\alpha < 0$ получаются притягивающие спирали. Особая точка является **устойчивым фокусом** (рис. 2.3.7б).

Итак, имеется всего 10 канонических фазовых портретов. Их можно расположить на плоскости значений $\det \tilde{A} - tr \tilde{A}$, как показано на рис. 2.3.8.

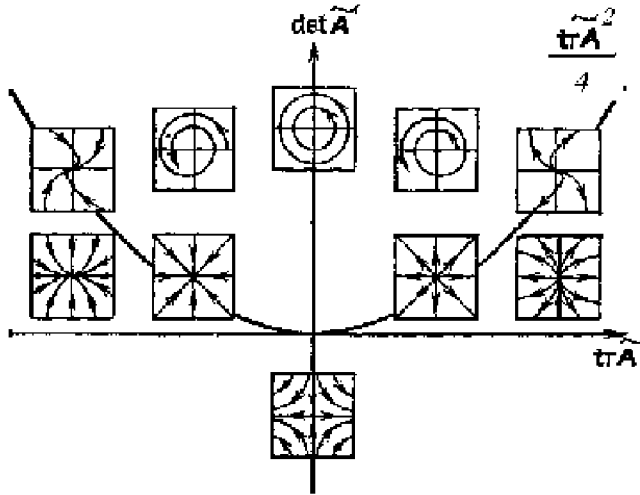


Рис. 2.3.8. Расположение особых точек на плоскости $\det \tilde{A} - tr \tilde{A}$ [31]

2.4 Фазовые портреты простых линейных систем на плоскости

Фазовый портрет произвольной линейной системы $\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x}$ можно получить из фазового портрета для канонической системы $\dot{\tilde{y}} = \tilde{J}\tilde{y}$ с помощью линейного преобразования

$$\tilde{x} = \tilde{M}\tilde{y}. \quad (2.4.1)$$

Линейные преобразования сохраняют качественное поведение решений. Оси y_1, y_2 после линейного преобразования (2.4.1) будут прямыми, проходящими через начало координат на плоскости x_1, x_2 и имеющими, соответственно, направления векторов \vec{m}_1, \vec{m}_2 , составленных

из столбцов матрицы \tilde{M} . Направления векторов \vec{m}_1, \vec{m}_2 называются главными направлениями.

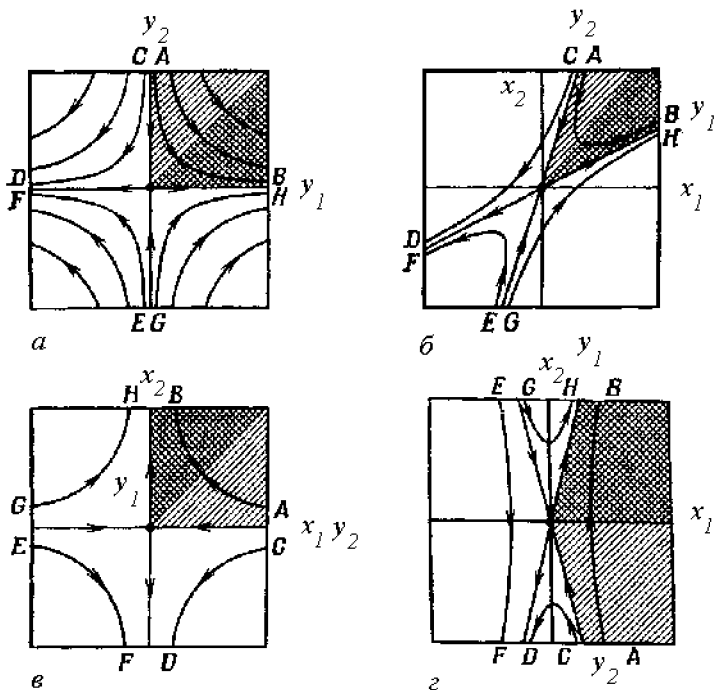


Рис.2.4.1. Влияния линейных преобразований вида $\vec{x} = \tilde{M}\vec{y}$ на фазовый портрет канонической системы $\dot{y}_1 = y_1, \dot{y}_2 = -y_2$.

(а) каноническая система;

(б) $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; (в) $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; (г) $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$

Пример 1[31]

Каноническая система

$$\dot{y}_1 = y_1, \dot{y}_2 = -y_2$$

имеет фазовый портрет, изображённый на рис. 2.4.1а.

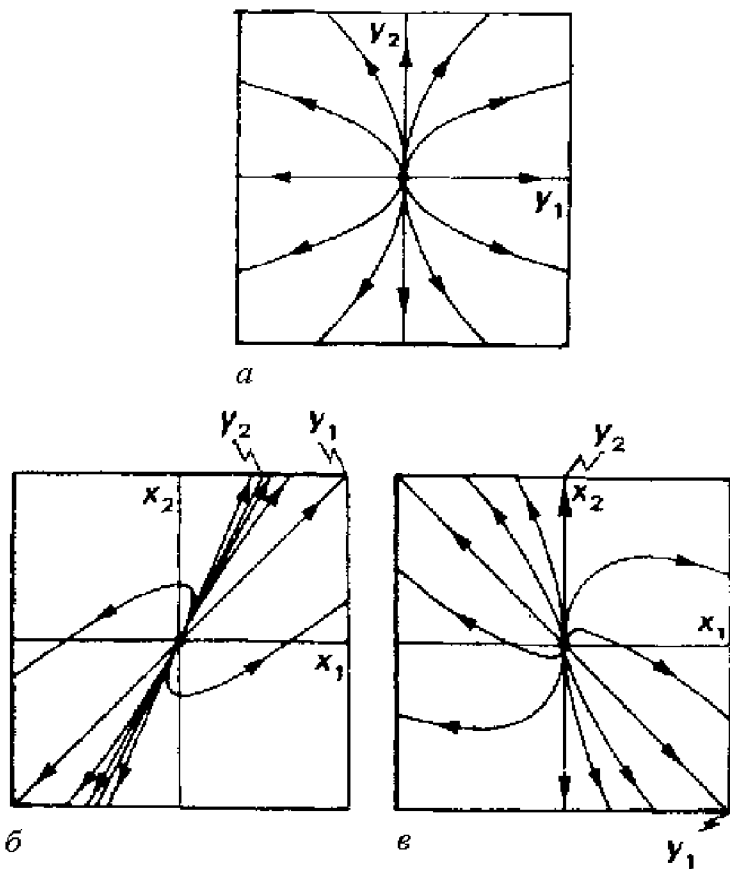


Рис. 2.4.2. Фазовые портреты канонической системы (2.4.2) (а) и после соответствующих преобразований этой системы (2.4.3) (б), (2.4.4)(в)

На рис. 2.4.1б- 2.4.1г показаны фазовые портреты для других линейных систем, каноническая система которых совпадает с (2.4.1). Несмотря на искажения фазовых портретов по сравнению с каноническим, начало координат по-прежнему является седловой точкой.

Пример 2[31]

Нарисовать фазовый портрет системы

$$\dot{y}_1 = 2y_1, \dot{y}_2 = y_2 \quad (2.4.2)$$

и соответствующие фазовые портреты на плоскости x_1, x_2 , где

$$x_1 = y_1 + y_2, \quad x_2 = y_1 + 2y_2, \quad (2.4.3)$$

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = -y_1 + y_2. \quad (2.4.4)$$

Решение

Матрицы преобразований здесь имеют вид

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Откуда получаем фазовые портреты, показанные на рис. 2.4.2 (а-в), соответственно.

2.5 Классификация линейных систем

Существует 10 алгебраических типов простых линейных систем, фазовые портреты которых изображены на рис. 2.3.8. Алгебраические типы группируются в четыре класса топологически (качественно) эквивалентных линейных систем.

Две системы дифференциальных уравнений первого порядка называются **топологически (качественно) эквивалентными**, если существует непрерывное взаимно однозначное преобразование, которое переводит фазовый портрет одной системы в фазовый портрет другой, так что сохраняется ориентация траектории. В таком смысле существует только четыре типа качественного поведения: устойчивость, центр, седло и неустойчивость, как показано на рис. 2.5.1.

Иногда для лучшего понимания топологической эквивалентности фазовую поверхность удобно представлять как бы резиновой, её можно **сжимать и изгибать, но нельзя перекручивать**. При таких преобразованиях все начальные точки будут однозначно переходить в точки деформированной «резиновой» поверхности, незамкнутые кривые – в незамкнутые, замкнутые – в замкнутые, связность множеств не будет

нарушаться. Недаром говорят, что топология - это «резиновая геометрия»[23].

Следует обратить внимание на то, что устойчивый (неустойчивый) узел топологически эквивалентен устойчивому (неустойчивому) фокусу. Их можно получать друг из друга «изгибая плоскость».

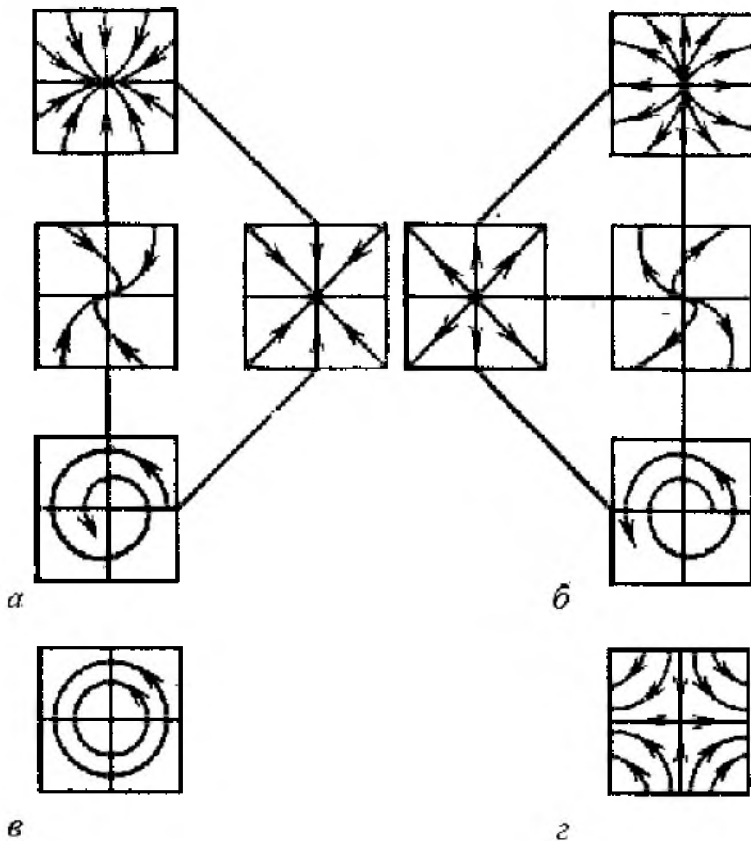


Рис. 2.5.1. Качественные типы фазовых портретов для простых линейных систем на плоскости: (а) устойчивые; (б) неустойчивые; (в) центр; (г) седло

2.6 Непростые канонические системы

Линейная система $\dot{\vec{x}} = \tilde{A}\vec{x}$ называется **непростой**, если $\det \tilde{A} = 0$, и, следовательно, хотя бы одно из собственных значений \tilde{A} равно нулю. Для линейных систем на плоскости существуют только две возможности: все точки плоскости являются неподвижными точками (в этом случае матрица \tilde{A} будет нулевой) или имеется прямая, состоящая из неподвижных точек, проходящая через начало координат.

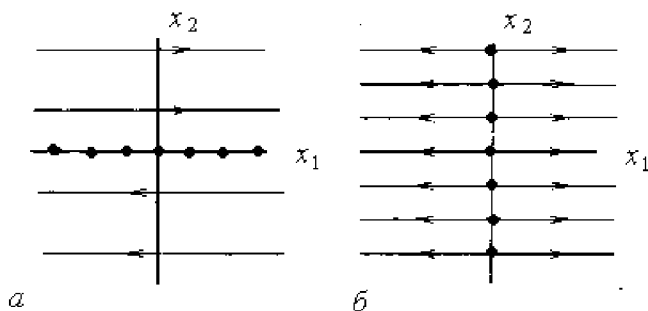


Рис. 2.6.1. Фазовые портреты непростых линейных канонических систем

Пример 1

Фазовый портрет системы с матрицей

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

показан на рис. 2.6.1 (а). Все точки оси x_1 являются неподвижными точками.

Пример 2

Фазовый портрет системы

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

показан на рис. 2.6.1 (б). Все точки оси x_2 являются неподвижными точками.

2.7 Классификация типов простых особых точек в многомерном пространстве

Тип особых точек определяется видом характеристических показателей (собственных значений) λ_i матрицы линеаризации \tilde{A} вблизи соответствующих точек [29]:

- Если все значения λ_i действительны и одного знака, то особая точка - это устойчивый ($\lambda_i < 0$) или неустойчивый ($\lambda_i > 0$) узел.
- Если значения λ_i являются набором комплексно сопряжённых величин и имеют реальную часть одного знака, то особая точка- это устойчивый ($\text{Re } \lambda_i < 0$) или неустойчивый ($\text{Re } \lambda_i > 0$) фокус.
- Если есть и комплексно сопряжённые, и действительные характеристические показатели, причём все находятся по одну сторону от мнимой оси, и ближайший к этой оси показатель чисто действительный, то особая точка - это устойчивый или неустойчивый узел в зависимости от того справа или слева находятся показатели. Иногда её называют **узел-фокус**.
- То же, что в предыдущем пункте, но комплексно-сопряжённые показатели являются ближайшими к мнимой оси. Такая особая точка - устойчивый или неустойчивый фокус.
- Если характеристические показатели лежат по обе стороны от мнимой оси, то особая точка является состоянием равновесия седлового типа. Различают **седло** при всех действительных значениях и **седло-фокус**, если есть комплексно-сопряжённые значения.

В качестве примера рассмотрим фазовые портреты вблизи особых точек трёхмерной системы (x, y, z) [29].

1. Рассмотрим случай, когда характеристические показатели действительные и все отрицательные $0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. Тогда соответствующая трёхмерная система приводится к виду

$$\dot{x} = \lambda_1 x, \quad \dot{y} = \lambda_2 y, \quad \dot{z} = \lambda_3 z \quad (2.7.1)$$

с матрицей

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы (2.7.1) имеет вид

$$x = x_0 e^{\lambda_1 t}, \quad y = y_0 e^{\lambda_2 t}, \quad z = z_0 e^{\lambda_3 t}. \quad (2.7.2)$$

Все траектории стремятся к точке $O(0,0,0)$ при $t \rightarrow \infty$, поэтому эта точка является устойчивым состоянием равновесия. Кроме того, все траектории вне **неведущей** плоскости (y,z) приближаются к точке O в **ведущем** направлении, совпадающем с осью x (Рис. 2.7.1.) Такое состояние равновесия является устойчивым узлом.

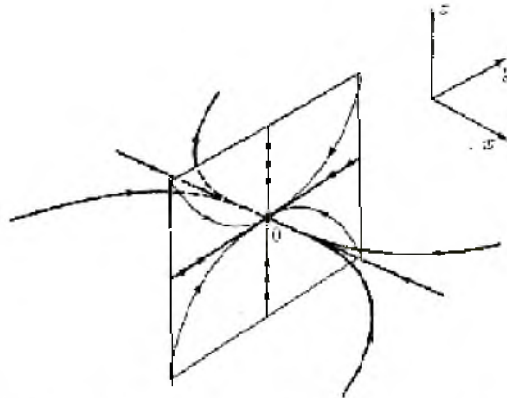


Рис. 2.7.1. Устойчивый узел в трёхмерном пространстве

2. Предположим теперь, что характеристические показатели действительные, но разного знака. Например, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 > 0$. Тогда соответствующая трёхмерная система приводится также к виду (2.7.1) с общим решением (2.7.2). В результате при $t \rightarrow \infty$ координаты x и y стремятся к нулю экспоненциально, а координата z стремится к бесконечности. В данном случае имеется двумерное устойчивое подпространство (плоскость $z = 0$), все траектории которого стремятся к седлу O при $t \rightarrow \infty$, и одномерное неустойчивое подпространство (ось z) (рис 2.7.2а). Такое седло в литературе иногда обозначается как седло $(2,1)$.

Аналогично, при $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$ особая точка O является седлом (1,2) с двумерным неустойчивым подпространством (плоскость $x = 0$) и одномерным устойчивым подпространством (ось x) (рис 2.7.2б). Траектории вне этих подпространств проходят вблизи седла, но минуют их.

3. Рассмотрим теперь случай, когда имеются комплексно - сопряжённые характеристические показатели $\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\beta$. Тогда соответствующая трёхмерная система приводится к виду

$$\dot{x} = \lambda_1 x, \quad \dot{y} = \alpha y - \beta z, \quad \dot{z} = \beta y + \alpha z \quad (2.7.3)$$

с матрицей

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

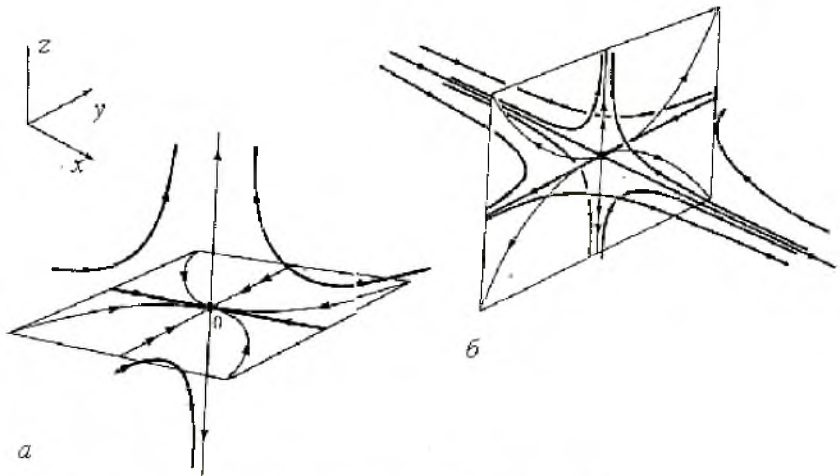


Рис. 2.7.2. Сёдла в трёхмерном пространстве а) (2,1); б) (1,2)

Общее решение системы (2.7.3) имеет вид

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 e^{\lambda_1 t}, \\
 y &= (y_0 \cos \beta t - z_0 \sin \beta t) e^{\alpha t}, \\
 z &= (y_0 \sin \beta t + z_0 \cos \beta t) e^{\alpha t}.
 \end{aligned}
 \tag{2.7.4}$$

Из уравнений (2.7.4) следует, что

$$\sqrt{y^2 + z^2} = e^{\alpha t} \sqrt{y_0^2 + z_0^2}.$$

Кроме того, для любой траектории, начинающейся вне плоскости (y,z) , справедливо

$$\sqrt{y^2 + z^2} = C |x|^\delta,$$

где $\delta = \alpha / \lambda_1$, $C = \sqrt{y_0^2 + z_0^2} / |x_0|^\delta$.

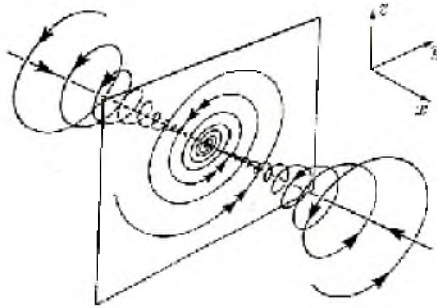


Рис. 2.7.3. Устойчивый узел в трёхмерном пространстве при наличии пары комплексно-сопряжённых показателей

При $\alpha < \lambda_1 < 0$ имеем $\delta > 1$. В результате на неведущей плоскости (y,z) точка O является устойчивым фокусом (рис. 2.7.3). Все траектории, начинающиеся вне неведущей плоскости (y,z) стремятся к точке $O(0,0,0)$ при $t \rightarrow \infty$ вдоль ведущей оси x . Это другой тип устойчивого узла в трёхмерном пространстве (узел-фокус).

4. При $\lambda_1 < \alpha < 0$ имеем $\delta < 1$. В этом случае все траектории, для которых начальные точки не лежат на оси x (то есть для которых $C \neq 0$), стремятся при $t \rightarrow \infty$ к точке O , касаясь плоскости (y,z) (рис. 2.7.4). Остальные траектории стремятся к точке O вдоль оси x . Здесь ось x называют неведущим направлением, а плоскость (y,z) – ведущей

плоскостью. Траектории на ведущей плоскости совпадают с (рис. 2.7.3). Состояние равновесия O является устойчивым фокусом.

5. При $\alpha > 0$, $\lambda_1 < 0$ состояние равновесия является седлом-фокусом (1, 2), то есть имеется одномерное устойчивое подпространство (ось x) и двумерное неустойчивое подпространство (плоскость $x=0$) (рис 2.7.4).

6. При $\alpha < 0$, $\lambda_1 > 0$ $\alpha > 0$, $\lambda_1 < 0$ состояние равновесия является седлом-фокусом (2, 1), то есть имеется двумерное устойчивое подпространство (плоскость $x=0$) и одномерное неустойчивое подпространство (ось x).

2.8 Локальное и глобальное поведение нелинейных систем на плоскости. Теорема о линеаризации. Простые особые точки нелинейных систем. Грубые (гиперболические) точки

При исследовании нелинейных систем часто приходится встречаться с сужениями полных, или глобальных фазовых портретов на некоторую окрестность точки x_0 , которую мы можем выбирать сколь угодно малой.

Такое сужение называется **локальным фазовым портретом** в точке x_0 . Нелинейные системы могут иметь более одной неподвижной точки. Для каждой из них можно построить локальный фазовый портрет. Особая точка нелинейной системы является **простой**, если соответствующая особая точка линеаризованной системы тоже простая.

Теорема о линеаризации устанавливает связь фазового портрета нелинейной системы в окрестности некоторой простой особой точки с фазовым портретом её линеаризации: в окрестности **простой особой точки**. Согласно этой теореме фазовые портреты нелинейной системы и её линеаризации качественно эквивалентны, *если только особая точка линеаризованной системы не является центром*.

Таким образом, если собственные значения линеаризованной системы имеют не нулевую действительную часть, то фазовые портреты нелинейной системы и её линеаризации качественно эквивалентны в окрестности особой точки. Такие особые точки называются **гиперболическими (или грубыми точками)**.

Отметим, что касательные к сепаратрисам линеаризованной системы в некоторой простой неподвижной точке являются касательными и к сепаратрисам нелинейной системы в этой точке.

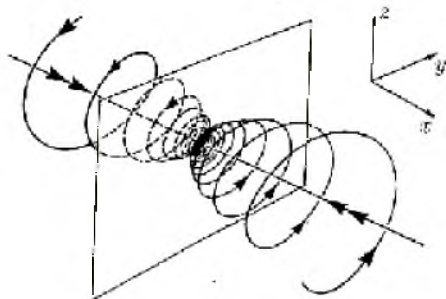


Рис. 2.7.4. Устойчивый фокус в трёхмерном пространстве

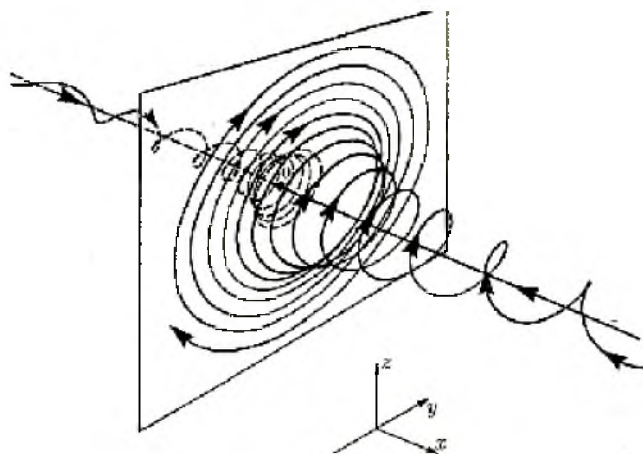


Рис. 2.7.5. Седло – фокус (1,2). Седло-фокус (2,1) получается заменой времени $t \rightarrow -t$

Неподвижная точка нелинейной системы является **непростой**, если соответствующая ей линеаризованная система является непростой. Теорема линеаризации неприменима для непростых точек.

Для непростых точек всегда хотя бы одно из собственных значений равно 0, то есть они являются негрубыми.

Приведём примеры линеаризации системы [31].

Пример 1

Показать, что система

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= e^{x_1+x_2} - x_2 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_1x_2 = f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

имеет только одну неподвижную точку. Найти линеаризацию системы в этой точке.

Решение

Неподвижная точка имеет координаты $(x_1, x_2) = (-1, 1)$. Введём локальные координаты \hat{x} (возмущения стационарного состояния): $x_1 = -1 + \hat{x}_1, x_2 = 1 + \hat{x}_2, \hat{x}_1, \hat{x}_2 \ll 1$ и линеаризуем систему при помощи разложения в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= e^{\hat{x}_1+\hat{x}_2} - 1 - \hat{x}_2 \approx \hat{x}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\hat{x}_2 + \hat{x}_1\hat{x}_2 \approx -\hat{x}_2\end{aligned}$$

Далее там, где это не приводит к неоднозначности, значок \wedge опускаем.

Линеаризованная система может быть представлена в следующем матричном виде $\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x}$, где матрица линеаризации (так называемая матрица Якоби) имеет вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}_{(x_1, x_2, \dots)}$$

Для нашего примера вблизи особой точки $(-1, 1)$ имеем

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} e^{x_1+x_2} & e^{x_1+x_2} - 1 \\ -1 + x_2 & x_1 \end{bmatrix}_{(-1,1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

то есть тот же результат.

Пример 2

Рассмотрим две нелинейные системы:

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

и

$$\dot{x}_1 = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2).$$

Линеаризация обеих систем в начале координат имеет одинаковый вид

$$\dot{x}_1 = -x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1.$$

Эта линейная система имеет центр в точке $x_1 = x_2 = 0$.

Для нелинейных систем перейдём к полярным координатам на плоскости по формулам

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta.$$

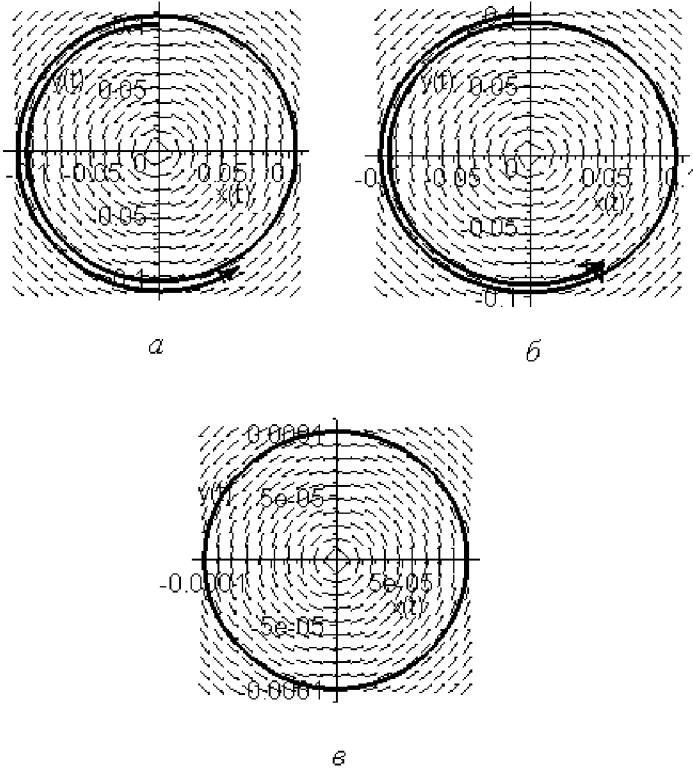


Рис. 2.8.1. Фазовые портреты нелинейных систем (2.8.1)(а), (2.8.2) (б) и их линеаризации (в)

Тогда из первой системы получаем

$$(\dot{r} - r^3) \cos \theta = r \sin \theta (\dot{\theta} - 1), \quad (\dot{r} - r^3) \sin \theta = -r \cos \theta (\dot{\theta} - 1).$$

Или, разделяя переменные, получаем

$$\frac{(\dot{r} - r^3)}{r} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} (\dot{\theta} - 1) = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} (\dot{\theta} - 1) = \text{const}.$$

Откуда

$$\dot{r} = r^3, \quad \dot{\theta} = 1. \quad (2.8.1)$$

Аналогично для второй системы

$$\dot{r} = -r^3, \quad \dot{\theta} = 1. \quad (2.8.2)$$

Из (2.8.1) следует $\dot{r} > 0$ для всех $r > 0$, поэтому фазовые траектории будут спиралями, раскручивающимися при возрастании t .

Из (2.8.2) следует $\dot{r} < 0$ для всех $r > 0$, поэтому фазовые траектории будут спиралями, закручивающимися вокруг начала координат при возрастании t .

Таким образом, имеем или неустойчивую особую точку (рис. 2.8.1а) или устойчивую особую точку (рис. 2.8.1б). Эти неподвижные точки качественно неэквивалентны. Однако векторные поля как той, так и другой системы в достаточной малой окрестности начала координат приближаются линейным векторным полем, соответствующему особой точке типа центр (рис. 2.8.1в). Этот пример показывает, что если неподвижная точка линейной системы является центром, то количественная близость векторного поля нелинейной системы и его линейной части не гарантируют качественной эквивалентности нелинейной системы и её линеаризации.

Пример 3

Рассмотрим систему $\dot{x}_1 = x_1^2, \dot{x}_2 = -x_2$. Особая точка (0,0) это негрубая точка равновесия, называемая **седло-узел** (рис. 2.8.2а). Фазовый портрет линеаризации этой системы $\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = -x_2$ представлен на рис 2.8.2б: вся ось x_1 состоит из неподвижных точек.

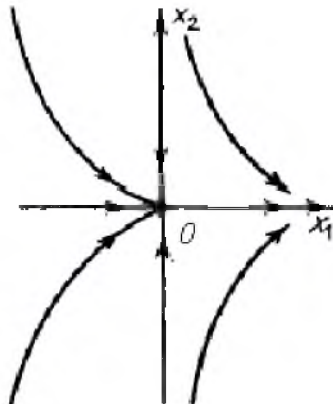
Пример 4 [31]

Построить локальный фазовый портрет системы

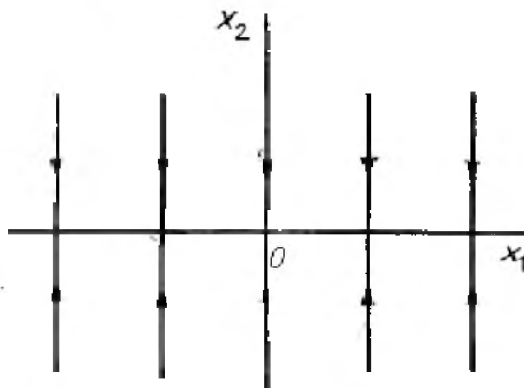
$$\dot{x}_1 = x_1 + 4x_2 + e^{-x_1} - 1$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 - x_2 e^{x_1}$$

в начале координат.



a



б

Рис. 2.8.2 Фазовый портрет нелинейной системы вблизи негрубой точки седло-узел (а) и фазовый портрет её линеаризации (б)

Решение.

Матрица линеаризации:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 + 4x_2 + e^{x_1} - 1) & \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1 + 4x_2 + e^{x_1} - 1) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(-x_2 - x_2 e^{x_1}) & \frac{\partial}{\partial x_2}(-x_2 - x_2 e^{x_1}) \end{pmatrix}_{0,0} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

то есть соответствующая линейная система имеет вид

$$\dot{x}_1 = 2x_1 + 4x_2, \quad \dot{x}_2 = -2x_2.$$

Это простая линейная система с седлом в начале координат ($\det \tilde{A} = -4 < 0$). Собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm 2$. Каноническая система имеет вид $\dot{\tilde{y}} = \tilde{J}\tilde{y}$, где

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Фазовый портрет канонической системы представлен на рис. 2.3.2. с устойчивыми сепаратрисами вдоль оси y_2 и неустойчивыми сепаратрисами вдоль оси y_1 . Фазовый портрет линейной системы $\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x}$ легко получить из фазового портрета для канонической системы с помощью преобразования $\tilde{x} = \tilde{M}\tilde{y}$, где

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Оси y_1, y_2 после этого линейного преобразования будут прямыми, проходящими через начало координат на плоскости x_1, x_2 и имеющими соответственно направления векторов \tilde{m}_1, \tilde{m}_2 , составленных из столбцов матрицы \tilde{M} . Направления векторов \tilde{m}_1, \tilde{m}_2 , называемые **главными направлениями**, определяют новые направления неустойчивых и устойчивых сепаратрис.

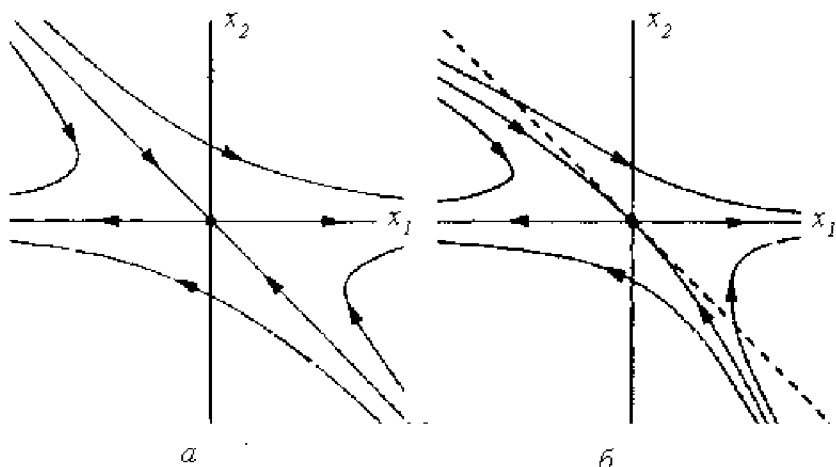


Рис. 2.8.3. Фазовый портрет нелинейной системы (б) и её линеаризации (а)

Итак, неустойчивые сепаратрисы лежат на прямой $x_2 = 0$ (ось x_1), а устойчивые - на прямой $x_2 = -x_1$ (рис. 2.8.3 а).

В общем случае нелинейные сепаратрисы только касаются этих главных направлений. Далее их направление вблизи неподвижной точки качественно можно определить с помощью производной

$$\begin{aligned} (dx_2 / dx_1)_{x_2=-x_1} &= [(-x_2 - x_2 e^{x_1}) / (x_1 + 4x_2 + e^{x_1} - 1)]_{x_2=-x_1} \approx \\ &\approx -(1 + x_1 / 2) / (1 - x_1 / 2) \approx -(1 + x_1). \end{aligned}$$

В области отрицательных x_1 сепаратриса отклоняется от главного направления к оси x_1 , а в области положительных x_1 - удаляется от оси x_1 (рис. 2.8.3 б). Аналогично находим, что $(dx_2 / dx_1)_{x_2=0} = 0$, поэтому ось x_1 остаётся неустойчивой сепаратрисой и для нелинейной системы.

2.9 Построение глобального фазового портрета на плоскости с помощью нуля - изоклин нелинейной системы

Локальные фазовые портреты не всегда определяют глобальный

фазовый портрет. Нахождение предельного цикла вообще всегда требует глобального подхода. Таким образом, рассмотрение нелинейных систем требует техники, пригодной для исследования как локального, так и глобального поведения. Иногда для качественного построения глобального портрета бывает достаточно установить вид локальных фазовых портретов в неподвижных точках, найти нуль-изоклины и направление фазовых траекторий на этих изоклинах.

В качестве примера рассмотрим следующую нелинейную систему:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 - x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1x_2. \end{aligned} \tag{2.9.1}$$

Определим сначала нуль - изоклины. Получаем две x_1 - нуль - изоклины (ось x_2 и прямая $x_1 = 2$) и две x_2 - нуль - изоклины (ось x_1 и прямая $x_1 = 1$).

Неподвижные точки системы (2.9.1) соответствуют (0,0) и (2, 0).

Линеаризация системы в этих точках имеет вид

$$\dot{x}_1 = 2x_1, \dot{x}_2 = -x_2 \tag{2.9.2}$$

и

$$\dot{x}_1 = -2x_1, \dot{x}_2 = x_2. \tag{2.9.3}$$

Обе неподвижные точки являются седлами, поэтому теорема о линеаризации применима. Собственные значения матриц линеаризации (2,-1) и (1,-2), соответственно. Линейная система (2.9.2) имеет канонический вид, поэтому оси x_1, x_2 будут соответствовать неустойчивым и устойчивым сепаратрисам. Система (2.9.3) будет канонической, если переставить местами оси. Поэтому для второй неподвижной точки оси x_1, x_2 будут, наоборот, соответствовать устойчивым и неустойчивым сепаратрисам. Поскольку сепаратрисы совпадают с нуль - изоклинами системы (2.9.1), то они останутся прямыми и на глобальном фазовом портрете (сепаратрисы линейной и нелинейной системы в данном примере совпадают). Учитывая направление траекторий на $x_1 = 1$ (x_2 - нуль-изоклине), получаем качественный вид глобального фазового портрета, показанный на рис. 2.9.1.

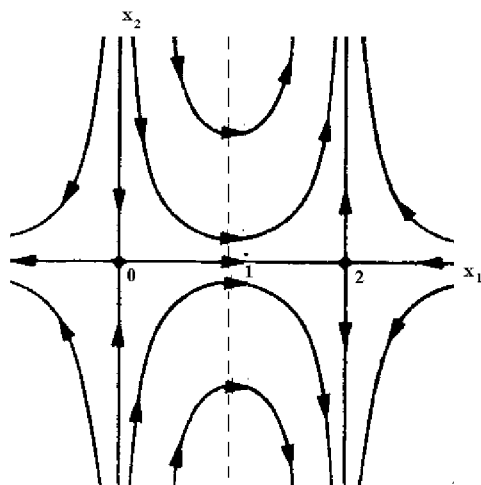


Рис. 2.9.1. Глобальный фазовый портрет системы (2.9.1).
 x_1 -нуль-изоклины : ось x_2 и прямая $x_1 = 2$; x_2 -
 нуль изоклины: ось x_1 и прямая $x_1 = 1$ (показана
 пунктиром)

2.10 Построение глобального фазового портрета на плоскости с помощью метода изоклин

Одним из методов построения глобальных фазовых портретов является метод изоклин. **Изоклиной** называется геометрическое множество точек, в которых касательные к фазовым траекториям имеют одинаковый наклон. Метод изоклин особенно эффективен при построении локальных и глобальных фазовых портретов в системах не имеющих неподвижных точек или с неподвижными точками, не удовлетворяющими теореме о линеаризации.

Рассмотрим, например, нелинейную систему вида [31]

$$\dot{x}_1 = x_1^2, \quad \dot{x}_2 = x_2(2x_1 - x_2). \quad (2.10.1)$$

Система (2.10.1) имеет единственную неподвижную точку — начало координат. Теорема о линеаризации неприменима, так как детерминант матрицы линеаризации равен нулю и система является не простой. Система

(2.10.1) инвариантна относительно преобразования $x_1 \rightarrow -x_1, x_2 \rightarrow -x_2$. Ось x_2 является x_1 -нуль-изоклиной. На ней выполняется соотношение $\dot{x}_2 = -x_2^2 < 0$. Это соотношение определяет направление двух фазовых траекторий, совпадающих с положительной и отрицательной полуосями x_2 .

Далее из (2.10.1) получаем

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2(2x_1 - x_2)}{x_1^2}, \quad x_1 \neq 0.$$

Уравнение изоклины, соответствующей постоянному наклону фазовых траекторий C , имеет вид

$$x_2(2x_1 - x_2) = x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 = Cx_1^2$$

или

$$x_2 = x_1[1 \pm (1 - C)^{1/2}], \quad C \leq 1.$$

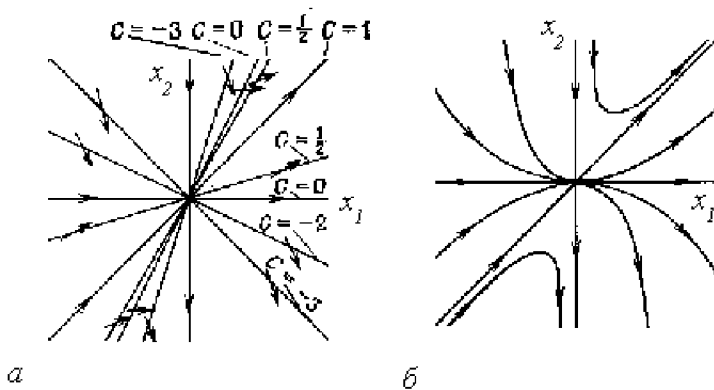


Рис. 2.10.1. Изоклины (а) и фазовый портрет (б) системы (2.10.1)

В результате, можно найти наклон на некоторых выбранных изоклинах. Например,

$C = 0$ на прямых $x_2 = 0$ и $x_2 = 2x_1$ (x_2 -нуль-изоклины);

$C = 1$ на $x_2 = x_1$;

$C = 0,5$ на $x_2 = (1 \pm 1/\sqrt{2})x_1$;

$$C = -3 \quad \text{на } x_2 = -x_1 \text{ и } x_2 = 3x_1;$$

$$C = -2 \quad \text{на } x_2 = (1 \pm \sqrt{3})x_1.$$

Ориентация траекторий определяется тем, что $\dot{x}_1 > 0$ при $x_1 \neq 0$.

Полученный фазовый портрет показан на рис. 2.10.1.

2.11 Предельные циклы

Колебательные режимы автономных систем описываются на фазовой плоскости замкнутыми траекториями, соответствующими либо центру, либо предельному циклу. Центр - структурно неустойчивая (негрубая) особая точка. Любое малое возмущение системы (например, учёт малого трения в модели гармонического осциллятора) приводит к его исчезновению. Структурно устойчивые колебательные режимы описываются на фазовой плоскости устойчивым предельным циклом.

Определение. Замкнутая траектория C на фазовом портрете называется предельным циклом, если она изолирована от всех остальных замкнутых траекторий; то есть, если существует трубчатая окрестность C , не содержащая других замкнутых траекторий.

Существует три типа предельных циклов:

(а) устойчивый (притягивающий) предельный цикл, или аттрактор. Здесь траектории навиваются на предельный цикл с обеих сторон при $t \rightarrow \infty$;

(б) неустойчивый (отталкивающий) предельный цикл, или репеллер. Здесь траектории являются спиралями, удаляющимися от предельного цикла с обеих сторон при $t \rightarrow \infty$;

(в) полуустойчивый предельный цикл, где траектории с одной стороны навиваются на замкнутую траекторию и удаляются от нее с другой стороны.

Устойчивый предельный цикл – замкнутая фазовая траектория, к которой стремятся все соседние траектории, - является образом периодических автоколебаний на фазовой плоскости. Размеры предельного цикла определяют амплитуду автоколебаний, время движения изображающей точки по циклу – их период, а форма предельного цикла – форму колебаний.

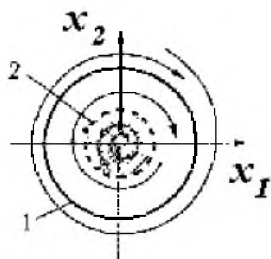


Рис. 2.11.1. Устойчивый (1) и неустойчивый (2) предельный циклы

Неустойчивые предельные циклы не соответствуют реальному периодическому процессу. Они служат границами между областями начальных условий, из которых система стремится к различным режимам движения. Например, на рис. 2.11.1 неустойчивый цикл представляет собой сепаратрису, отделяющую области притяжения к двум аттракторам (устойчивой особой точке и устойчивому предельному циклу). Неустойчивый цикл можно построить на фазовой плоскости, обратив

время в соответствующей системе и рассмотрев поведение траекторий при $t \rightarrow -\infty$.

Полуустойчивые циклы иногда называют двойными. Последнее название связано с тем, что обычно такие циклы при подходящем изменении параметра системы расщепляются на два цикла, один из которых устойчив, а другой неустойчив (рис. 2.11.2).

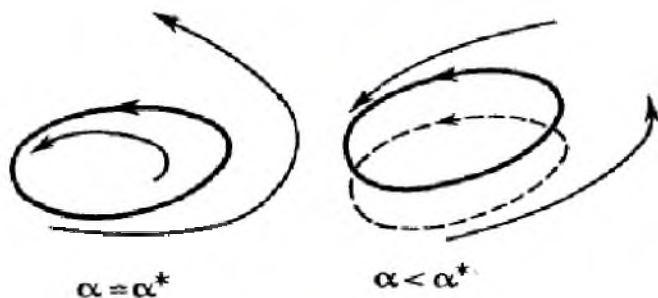


Рис. 2.11.2. Рождение двух циклов из полуустойчивого цикла при изменении параметра α

Пример 1 [31]

Покажем, что система

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1[1 - (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}] \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2[1 - (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}] \quad (2.11.1)$$

имеет предельный цикл $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Решение. Введем полярные координаты $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$. Тогда система (2.11.1) примет вид $\dot{r} = r(1-r)$, $\dot{\theta} = 1$. Откуда следует, что решение $r=1$ - это замкнутая траектория - окружность $x_1^2 + x_2^2 = 1$, пробегаемая против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью $\dot{\theta} = 1$. Если $r < 1$, то получаются раскручивающиеся против часовой стрелки спирали, стремящиеся к окружности $r=1$. Аналогично, при $r > 1$ получаем, что траектории скручиваются при возрастании времени к этой окружности. Таким образом, окружность $x_1^2 + x_2^2 = 1$ является устойчивым предельным циклом.

Предельные циклы не всегда имеют вид окружностей (например, цикл описывающий автоколебания в генераторе Ван-дер-Поля), и не всегда их можно обнаружить, просто перейдя к полярным координатам. Не существует общего метода для нахождения предельных циклов. Но есть некоторые условия, помогающие в ряде случаев ответить на вопрос о существовании или не существовании предельного цикла. Например, для систем с двумерным фазовым пространством на основании теории индексов Пуанкаре сразу следует, что предельные циклы обязательно должны окружать по крайней мере одну особую точку, причём она не является седлом (и, как совершенно очевидно, центром). Предельный цикл может окружать и несколько особых точек, но число узлов или фокусов должно быть больше, чем число седел.

Достаточные (но не необходимые) условия существования предельного цикла сформулированы для обобщенного уравнения Ван-дер-Поля [31]

$$\ddot{x} + g(x)\dot{x} + h(x) = 0. \quad (2.11.2)$$

Фазовый портрет этого уравнения содержит один устойчивый предельный цикл, окружающий неустойчивый фокус в начале координат, если

а) $G(x) = \int_0^x g(u) du$ является нечетной функцией, обращающейся в

нуль при $x=0$, $x = \pm \kappa$, $\kappa > 0$;

б) $G(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$, монотонно возрастает при $x > \kappa$;

в) $h(x)$ —нечетная функция и $h(x) > 0$ при $x > 0$.

Например, уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

удовлетворяет этим условиям при $\mu > 0$.

Если выполнены условия (а-в), то уравнение (2.11.2) называется также уравнением Льенара.

В ряде случаев выделить области содержащие (или не содержащие) предельный цикл помогает использование теорем Пуанкаре – Бендиксона, которые сформулированы в следующем разделе.

2. 12 Теоремы Пуанкаре-Бендиксона

Пусть задана система $\dot{\vec{x}} = \vec{X}(\vec{x})$.

Определение. Множество D называется **положительно инвариантным множеством** динамической системы $\dot{\vec{x}}$, если для любой точки $x_0 \in D$, фазовая траектория, начинающаяся в этой точке, остается в D для всех $t > 0$.

Теорема 1. Если замкнутая ограниченная область D является положительно инвариантным множеством, не содержащим неподвижных точек, то в D существует предельный цикл.

Теорема 2. Пусть D - односвязная область фазовой плоскости, в которой задано векторное поле $\vec{X}(\vec{x})$, и пусть дивергенция векторного поля

$$\operatorname{div}\vec{X} = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2}$$

имеет постоянный знак. Тогда система $\dot{\vec{x}} = \vec{X}(\vec{x})$ не имеет замкнутых траекторий, целиком лежащих в D .

Односвязная область на плоскости — это область, не имеющая «дыр» (рис. 2.12.1).

Пример 1[31]

Показать, что фазовый портрет уравнения

$$\ddot{x} - \dot{x}(1 - 3x^2 - 2\dot{x}^2) + x = 0$$

содержит предельный цикл.

Решение. Запишем уравнение в виде системы двух уравнений первого

порядка

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_2(1 - 3x_1^2 - 2x_2^2) - x_1 = 0$$

Перейдём к полярным координатам:

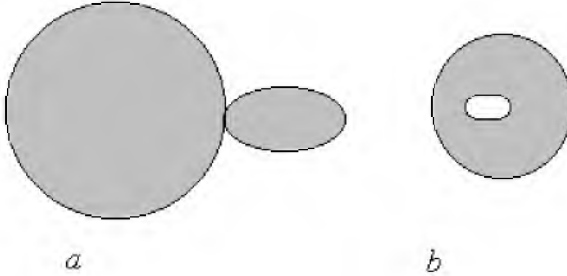


Рис. 2.12.1. Заптрихованная область *a* является односвязной. Заптрихованная область *b* имеет дыру, поэтому не односвязна

$$\dot{r} = r \sin^2 \theta (1 - 3r^2 \cos^2 \theta - 2r^2 \sin^2 \theta), \quad (2.12.1)$$

$$\dot{\theta} = -1 + 0,5 \sin 2\theta (1 - 3r^2 \cos^2 \theta - 2r^2 \sin^2 \theta).$$

При $r = 0,5$ получим

$$\dot{r} = 0,5 \sin^2 \theta (1 - 0,5 \cos^2 \theta) \geq 0.$$

Кроме того, из уравнения (2.12.1) следует, что

$$\dot{r} = r \sin^2 \theta (1 - r^2 \cos^2 \theta - 2r^2) \leq r \sin^2 \theta (1 - 2r^2).$$

Откуда, при $r > 1/\sqrt{2}$ имеем $\dot{r} \leq 0$, т. е. множество $1/2 < r < 1/\sqrt{2}$ положительно инвариантно. Особая точка системы соответствует началу координат и не принадлежит этому множеству. Отсюда согласно теореме 1 следует, что в кольце $1/2 < r < 1/\sqrt{2}$ имеется предельный цикл.

Пример 2 [31]

Доказать, что если система

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \quad \dot{x}_2 = x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) + x_1 + K$$

где K — некоторая постоянная, имеет замкнутую траекторию, то

- а) либо эта траектория окружает начало координат;
- б) либо она пересекает окружность $x_1^2 + x_2^2 = 0,5$.

Решение.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{X} &= (1 - 3x_1^2 - x_2^2) + (1 - x_1^2 - 3x_2^2) = \\ &= 2 - 4(x_1^2 + x_2^2) \begin{cases} > 0 & \text{при } x_1^2 + x_2^2 < 0,5 \\ < 0 & \text{при } x_1^2 + x_2^2 > 0,5. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, согласно теореме 2 в круге $x_1^2 + x_2^2 = 0,5$ не может находиться замкнутая траектория. Если замкнутая траектория существует, то она не должна содержать односвязную область. Таким образом, эта траектория либо пересекает границу круга, либо лежит за его пределами, окружая начало координат, что и требовалось доказать.

2.13 Точечные отображения. Метод отображений Пуанкаре. Функция последования

В некоторых случаях для моделирования динамики системы достаточно указать её состояние в заданные дискретные моменты времени.

Моделью такой динамической системы может служить следующее уравнение

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n).$$

В этом случае в качестве эволюционного оператора используется функция f , выражающая состояние системы в некоторый момент времени через её состояние в предыдущий момент. Она называется **функцией последования**.

Примеры

1. Дискретное эволюционное уравнение (точечное отображение) получается из дифференциального уравнения при замене производной на разделённую разность: переход к разностному уравнению от $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ получается как $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \vec{f}(\vec{x}_n)\Delta t$, где Δt - шаг по времени, а \vec{x}_n - значения параметров системы в момент времени $t = t_n$.

2. Одним из методов анализа нелинейных многомерных динамических систем является метод **отображений Пуанкаре** (метод точечных отображений). $(N - 1)$ - мерное отображение Пуанкаре $\vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n)$

получается при пересечении фазовой траектории в N -мерном фазовом пространстве с $(N-1)$ -мерной гиперплоскостью. Последовательность точек во времени обозначена через \bar{x}_n . Функция \bar{f} определяет связь $(n+1)$ пересечения траектории с секущей поверхностью с координатой предыдущего пересечения. Поскольку переменная \bar{x} здесь фиксируется лишь в дискретные моменты времени, то это дискретная эволюционная модель. Каждому фазовому потоку (то есть динамической системе, описываемой дифференциальным уравнением) соответствует вполне определённое отображение Пуанкаре. Если поток трёхмерный, то отображение двумерное (фазовая плоскость). Если двумерный, то секущая - просто линия.

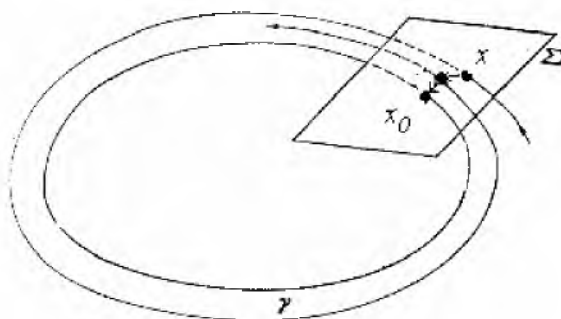


Рис. 2.13.1. Устойчивый предельный цикл γ и соответствующая ему неподвижная устойчивая точка x_0 в сечении Пуанкаре

Пусть γ - замкнутая траектория системы. Выберем точку $x_0 \in \gamma$ и проведём через неё сечение, представляющее достаточно малую часть плоскости Σ , которая трансверсально (под ненулевым углом) пересекает траекторию γ только в одной точке x_0 . Периодическое движение в сечении Пуанкаре выглядит как неподвижная точка x_0 , для которой выполняется $\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n$. Траектории системы, близкие к замкнутой траектории γ будут пересекать эту часть плоскости вблизи точки x_0 , приближаясь (устойчивая замкнутая траектория γ) или удаляясь от

неподвижной точки x_0 . Таким образом, устойчивая или неустойчивая неподвижная точка в сечении Пуанкаре соответствует устойчивому или неустойчивому предельному циклу (рис.2.13.1).

На рис. 2.13.1 рассмотрены траектории системы, близкие к исследуемой замкнутой траектории γ . Для более общей ситуации, когда исследуется глобальное поведение системы, в качестве сечения Пуанкаре Σ выбирают всю плоскость или её часть, находящуюся в изучаемой области фазового пространства.

3 УСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

3.1 Классификация предельных множеств динамических систем

Предельное множество - важное понятие нелинейной динамики.

Определение:

Пусть в момент времени t_0 состояние системы определяется вектором \vec{x}_0 , а в момент времени t - вектором $\vec{x}(t)$. Если существуют два множества в фазовом пространстве системы V и $L \in V$, такие, что для любого начального состояния $\vec{x}_0 \in V$ при $t \rightarrow \infty$ или $t \rightarrow -\infty$ имеем $\vec{x}(t) \in L$, тогда L называют предельным множеством динамической системы [1,2].

Возможные типы предельных множеств:

Если все точки множества V будут принадлежать L в пределе $t \rightarrow \infty$, то L является **притягивающим предельным множеством, т.е. аттрактором**. Соответственно V - **бассейн притяжения** аттрактора L .

Если все точки множества V будут принадлежать L в пределе $t \rightarrow -\infty$, то L является **отталкивающим предельным множеством, т.е. репеллером**.

Если множество V состоит из двух подмножеств, $V = W^s \cup W^u$, причём точки, принадлежащие W^s , стремятся к L в прямом времени, точки, принадлежащие W^u , стремятся к L в обратном времени, тогда L

называется **седловым предельным множеством или седлом**. Множества W^s и W^u - это соответственно **устойчивое и неустойчивое многообразия седла**.

При инверсии времени ($t \rightarrow -t$) регулярные аттракторы системы становятся репеллерами, репеллеры-аттракторами, а у седел меняются ролями устойчивое и неустойчивое многообразия.

Простейшее предельное множество динамической системы – это состояние равновесия (точка в фазовом пространстве). Возможны состояния равновесия, являющиеся аттракторами (устойчивый фокус, узел), репеллерами (неустойчивый фокус, узел), седлами (простое седло, седло-фокус, узел-седло-в фазовом пространстве с размерностью $N > 3$). Центр - особый случай предельного множества, для которого $V=L$. Точка типа «центр» не является ни аттрактором, ни репеллером, ни седлом, так как не существует множества точек, стремящихся к центру, в прямом или обратном времени.

Предельное множество в виде замкнутой кривой (**предельный цикл**) также может быть аттрактором, репеллером и седлом. Таким же образом подразделяются тороидальные предельные множества, соответствующие квазипериодическим колебаниям, и ещё более сложные хаотические предельные множества.

Множество называется инвариантным, если траектория целиком лежит в его пределах для любого $t = -\infty \leftrightarrow +\infty$.

3.2 Устойчивость по Ляпунову, асимптотическая и экспоненциальная устойчивость, орбитальная устойчивость, устойчивость по Пуассону и Лангранжу

В предыдущей главе подробно рассмотрены особые точки динамических систем. В частности, проводилось деление этих особых точек на устойчивые и неустойчивые. Легко представить себе устойчивое и неустойчивое состояние равновесия, вообразив шарик на дне ямки и на вершине горки. Однако устойчивостью или неустойчивостью характеризуются не только состояния равновесия, но любые траектории фазового пространства. **Устойчивость** системы - это её свойство слабо (в том или ином смысле) менять своё состояние и/или поведение под

действием возмущений. Мера измерения, отражаемая словом «слабо», в каждом конкретном случае определяется формулируемой задачей: то, что мало в одном смысле, может оказаться немалым в другом смысле. Совокупность представлений и методов, обобщающих и формализующих различные стороны устойчивости разнообразных систем, составляет предмет **теории устойчивости**.

Существует несколько различных понятий устойчивости [13-15].

1. Устойчивость по Ляпунову

Понятие устойчивости по Ляпунову характеризует траекторию с точки зрения поведения соседних траекторий, располагающихся в её окрестности.

Предположим, что динамическая система при старте из начальной точки \bar{x}_0 порождает траекторию L , при старте из близкой начальной точки \tilde{x}_0 порождает траекторию \tilde{L} . Если обе траектории остаются близкими в любой последующий момент времени, то траектория L называется устойчивой по Ляпунову.

Дадим более формальное определение. Обозначим $\rho = \rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ расстояние между точками \bar{x}_1 и \bar{x}_2 фазового пространства.

Траектория L устойчива по Ляпунову, если для любого сколь угодно малого ε можно найти такое δ , что для любой начальной точки \tilde{x}_0 , близкой к \bar{x}_0 , то есть при $\rho = \rho(\bar{x}_0, \tilde{x}_0) < \delta$, окажется, что в любой момент времени $t > 0$ последующие точки траекторий L, \tilde{L} удаляются друг от друга меньше чем на ε :

$$\rho(\bar{x}(t), \tilde{x}(t)) < \varepsilon.$$

Таким образом, для устойчивого по Ляпунову движения малое начальное возмущение не нарастает. Изначально близкие изображающие точки, принадлежащие разным фазовым траекториям, оказываются близкими и в последующие моменты времени.

2. Асимптотическая устойчивость. Экспоненциальная устойчивость

Система называется **асимптотически устойчивой**, если две фазовые точки, принадлежащие двум различным фазовым траекториям и достаточно близкие друг другу в начальный момент времени, неограниченно

сближаются по мере движения. Формально это определение означает, что существует такое $\delta > 0$, что

$$\text{если } \rho(\bar{x}(t_0), \tilde{x}(t_0)) < \delta, \text{ то } \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\bar{x}(t), \tilde{x}(t)) \rightarrow 0.$$

На языке фазовой жидкости асимптотическая устойчивость означает, что с течением времени размер фазовой капли неограниченно уменьшается по всем направлениям (фазовая капля сжимается в точку).

Асимптотическая устойчивость более сильное свойство устойчивости: всякое асимптотически устойчивое движение является устойчивым по Ляпунову, обратное в общем случае неверно.

Закон, по которому происходит уменьшение расстояния ρ , может быть неодинаковым. Важным частным случаем асимптотической устойчивости является так называемая **экспоненциальная устойчивость**, при которой расстояние между точками $\bar{x}(t)$ и $\tilde{x}(t)$ убывает не медленнее, чем $\exp(-\lambda t)$, $\lambda > 0$.

Более строгим является условие экспоненциальной устойчивости.

3. Орбитальная устойчивость

Орбитальная (орбитная) устойчивость характеризует не поведение системы в заданный момент времени, а структуру всей фазовой траектории в целом. Понятие орбитальной устойчивости на качественном уровне даётся следующим образом: если некоторая фазовая траектория находится в достаточной близости от какой-то траектории, то эта близость сохраняется с течением времени, однако при орбитальной устойчивости точки, находящиеся на разных траекториях и близкие в некоторый момент времени, с течением времени могут сколь угодно далеко разойтись друг от друга.

Пример 1

Динамическая система заданна эволюционными уравнениями в полярных координатах:

$$\dot{\varphi} = r, \quad \dot{r} = 0.$$

Семейство её фазовых траекторий состоит из концентрических окружностей с центром в точке O , причём на разных окружностях движение происходит с разной угловой скоростью. Траектории, близкие в начальный момент времени, остаются близкими при $t > 0$, однако значения

координаты φ на разных траекториях в заданный момент времени могут различаться на полпериода (рис. 3.2.1)

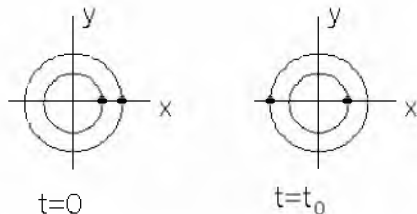


Рис. 3.2.1. Качественная иллюстрация орбитальной устойчивости

Определение орбитной устойчивости отличается от определения устойчивости по Ляпунову тем, что в нём рассматривается не расстояние между изображающими точками исследуемого и возмущённого движения в один момент времени, а минимальное расстояние от изображающей точки возмущённой траектории в данный момент времени до орбиты, соответствующей исследуемому движению. Если это расстояние с ростом времени стремится к нулю, то реализуется случай **асимптотической орбитальной устойчивости**. Если к тому же оно убывает не медленнее, чем $\exp(-\lambda t)$, $\lambda > 0$, то исследуемая траектория является **экспоненциально орбитально устойчивой**.

Требование орбитной устойчивости слабее, чем требование устойчивости по Ляпунову. Орбитно устойчивое движение в общем случае может быть неустойчивым по Ляпунову, однако движение, устойчивое по Ляпунову всегда орбитно устойчиво.

4. Устойчивость по Пуассону

Устойчивость по Пуассону характеризует поведение одной, отдельно взятой траектории (а не поведение фазовой капли). Устойчивость движения по Пуассону является ещё более слабым требованием, чем орбитальная устойчивость. Она предполагает только то, что соответствующая фазовая траектория не покидает ограниченной области фазового пространства. Находясь в этой области бесконечно долго, она неизбежно возвращается в сколь угодно малую окрестность начальной точки. То есть устойчивость по Пуассону - это воспроизводимость повторного появления траектории со

временем в малой окрестности начальной точки.

Простейший пример – это состояние равновесия. Ему соответствует фазовая траектория, состоящая из одной точки, и она, очевидно, устойчива по Пуассону.

Если рассматривается траектория, отличная от неподвижной точки, то устойчивой по Пуассону она будет в том случае, если обладает свойством возвращаться в сколь угодно малую окрестность каждой своей точки бесконечное число раз. Возврат траектории в ε -окрестность произвольно выбранной на ней начальной точки называется **возвратом Пуанкаре**.

Времена возврата могут соответствовать периоду или квазипериоду при регулярном движении, а могут представлять собой случайную последовательность, если движение отвечает режиму динамического хаоса.



Рис. 3.2.2. Качественные иллюстрации различных видов неустойчивости [15]

5. Устойчивость по Лагранжу

Устойчивость по Лагранжу характеризует, как и устойчивость по Пуассону, поведение отдельно взятой траектории. Фазовая траектория называется устойчивой по Лагранжу, если она при всех $t > 0$ остаётся в некоторой ограниченной области фазового пространства.

Наглядная качественная иллюстрация устойчивости по Лагранжу, Пуассону и Ляпунову приводится на рис. 3.2.2. Когда говорят просто об устойчивой траектории, то «по умолчанию» обычно имеется в виду устойчивость по Ляпунову.

3. 3 Линейная теория устойчивости состояний равновесия

Сформулируем необходимые и достаточные условия, при которых вопрос об устойчивости состояния равновесия исходной нелинейной

системы решается рассмотрением корней характеристического уравнения линеаризованной системы (системой уравнений первого приближения). Справедлива следующая теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению [9].

Теорема. *Если все корни характеристического уравнения линеаризованной системы имеют отрицательные действительные части, то состояние равновесия системы асимптотически устойчиво, каковы бы ни были нелинейные члены.*

Если среди корней характеристического уравнения линеаризованной системы имеется хотя бы один корень с положительной действительной частью, то состояние равновесия системы неустойчиво при любом выборе нелинейных членов.

Если характеристическое уравнение линеаризованной системы не имеет корней с положительными действительными частями, но имеет корни с действительными частями, равными нулю, то вопрос об устойчивости состояния равновесия решается именно нелинейными членами.

Теория устойчивости по первому приближению сводит вопрос об устойчивости к чисто алгебраической задаче - к анализу расположения корней характеристического уравнения в комплексной плоскости. Для этой цели разработаны различные стандартные приёмы, в том числе не требующие непосредственного решения характеристического уравнения. Они разделяются на две группы – на алгебраические и частотные. К первой группе относится критерий Рауса-Гурвица, ко второй – метод D – разбиений.

3.4 Критерий Рауса-Гурвица

Рассмотрим характеристическое уравнение $\det(\tilde{A} - \lambda\tilde{E}) = 0$, где \tilde{A} - матрица линеаризации динамической системы. Левая часть этого уравнения есть полином n - степени относительно λ , т.е. характеристическое уравнение имеет вид: $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_n\lambda^n + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$.

Далее будем всегда полагать старший коэффициент полинома положительным, т.е. $a_n > 0$.

Для целей качественного исследования достаточно установить, какое число характеристических показателей имеет отрицательную действительную часть, а какое – положительную.

Составим квадратную $n \times n$ матрицу

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{pmatrix},$$

называемую матрицей Гурвица. Структура матрицы Гурвица такова: по главной диагонали расположены коэффициенты (от a_{n-1} до a_0) характеристического уравнения. Строки (или, в другом возможном варианте, столбцы) содержат поочерёдно коэффициенты только с нечётными или только с чётными индексами (включая a_0). Все недостающие элементы (коэффициенты с индексами, меньшими нуля или большими n) заменяются нулями. Обозначим $\Delta_1 \dots \Delta_n$ диагональные миноры матрицы \tilde{H} , стоящие в левом верхнем углу и имеющие порядок $1 \dots n$. Эти миноры называются определителями Гурвица.

Теорема Рауса-Гурвица [14]

Если все определители Гурвица отличны от нуля, то число корней, лежащих в правой полуплоскости, равно числу перемен знака в ряду

$$a_n, \Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}. \quad (3.4.1)$$

Для нахождения числа корней, лежащих в левой полуплоскости, достаточно заменить λ на $-\lambda$ и применить изложенный алгоритм по отношению к характеристическому полиному $f(-\lambda)$.

Теорема Рауса-Гурвица позволяет сформулировать **критерий устойчивости** особой точки динамической системы, называемый **критерием Рауса-Гурвица**:

Для того, чтобы особая точка была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все определители Гурвица были положительны.

Смысл утверждения состоит в том, что в ряду (3.4.1) число перемен знака равно 0, следовательно, нет корней в правой полуплоскости.

Полезно также отметить, что необходимое условие отрицательности действительных частей всех корней характеристического уравнения (т.е. необходимое условие устойчивости) заключается в положительности всех коэффициентов $a_i, i = 0, n$ характеристического уравнения

Пример

Характеристическое уравнение для систем с одной степенью свободы имеет вид

$$\lambda^2 + a\lambda + c = 0.$$

Получаем матрицу Гурвица

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & c \end{pmatrix}.$$

Определители Гурвица равны:

$$\Delta_1 = a, \Delta_2 = ac.$$

Откуда, условие устойчивости $a > 0, c > 0$.

Ряд (3.4.1) имеет вид $1, a, c$. Для определения числа корней в левой полуплоскости используем ряд $1, -a, c$.

При $a < 0, c < 0$ или $a > 0, c < 0$ имеем один корень в правой полуплоскости и один в левой. Такая особая точка является седлом.

При $a < 0, c > 0$ имеем оба корня в левой полуплоскости.

Наличие у корней квадратного уравнения мнимой части определяется знаком дискриминанта

$$D(a, c) = 4c - a^2.$$

Оба корня действительны при $D \leq 0$.

3.5 Метод D – разбиений

Коэффициенты характеристического уравнения обычно зависят от

параметров системы, которые могут быть как действительными, так и комплексными. Ниже эта зависимость предполагается линейной. Разобьём пространство параметров на области, каждой точке которых соответствует характеристическое уравнение, имеющее k корней в правой полуплоскости ($0 \leq k \leq n$). Обозначим их символом $D(k)$. Область $D(0)$ есть область устойчивости.

Разбиение пространства параметров на области, соответствующие одному и тому же числу корней в правой полуплоскости, называется ***D*-разбиением** пространства параметров. D от французского слова Droit-правый.

Переходу в пространстве параметров через границы областей $D(k)$ соответствует переход корней через мнимую ось $\lambda = i\omega$ ($-\infty \leq \omega \leq \infty$). Таким образом, граница D -разбиения есть отображение мнимой оси плоскости корней на пространство параметров системы. Построение границы D -разбиения состоит в замене $\lambda = i\omega$ в характеристическом уравнении с последующим изменением действительного параметра ω от $-\infty$ до $+\infty$.

Пусть уравнение содержит один параметр α , линейно входящий в коэффициенты a_i . Считая α комплексным числом, положим $\lambda = i\omega$ и разделим действительную и мнимую части. В результате получим зависимости $\alpha'(\omega), \alpha''(\omega)$ ($\alpha = \alpha' + i\alpha''$), определяющие при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ границу D -разбиения на плоскости $\alpha'(\omega), \alpha''(\omega)$. При перемещении по этой D -кривой в направлении ω от $-\infty$ до $+\infty$ надо штриховать эту кривую слева. Переход из заштрихованной области в незаштрихованную соответствует переходу корня через мнимую ось из левой полуплоскости в правую. По этому правилу определяется претендент на область устойчивости $D(0)$. Для уточнения, надо знать расположение корней хотя бы в одной точке плоскости α [9,14,22].

Пример1

Провести D -разбиение значений действительного параметра α для уравнения

$$\lambda^2 + \lambda + \alpha = 0. \quad (3.5.1)$$

Решение

Положим $\lambda = i\omega$. Получаем уравнение

$$-\omega^2 + i\omega + \alpha = 0,$$

которое преобразуется к системе уравнений

$$\begin{aligned} -\omega^2 + \alpha &= 0, \\ i\omega &= 0, \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

откуда, $\omega_0 = 0$, и граница разбиения соответствует $\alpha = 0$. При $\alpha > 0$ находится область устойчивости $D(0)$, а при $\alpha < 0$ — область неустойчивости $D(1)$.

Пример 2

Провести D -разбиение плоскости комплексного параметра $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ для уравнения (3.3.2)

$$\lambda^2 + \lambda + \alpha = 0.$$

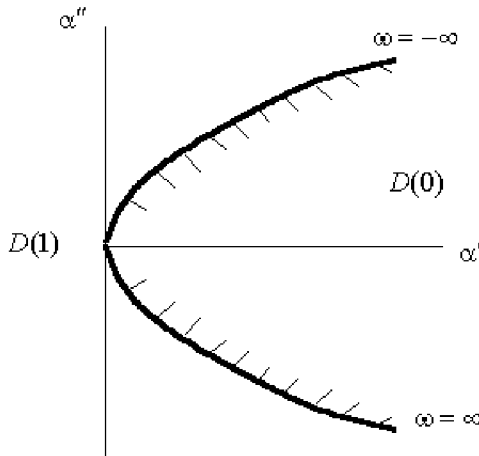


Рис. 3.5.1 D -разбиение плоскости комплексного параметра для уравнения (3.5.1). Штриховка нанесена в соответствии с правилом обхода границы от $\omega = -\infty$ до $\omega = \infty$

Решение

Вместо (3.5.2) здесь получаем

$$\begin{aligned} -\omega^2 + \alpha' &= 0, \\ \omega + \alpha'' &= 0, \end{aligned}$$

поэтому граница D – разбиения соответствует уравнениям $\alpha' = \omega^2$, $\alpha'' = -\omega$ или $\alpha' = \alpha''^2$ (Рис. 3.5.1). Таким образом, граница области неустойчивости - парабола, внутри неё $D(0)$, вне - $D(1)$.

3.6 Линейный анализ устойчивости по Ляпунову фазовых траекторий. Спектр ляпуновских характеристических показателей фазовой траектории динамической системы

Как уже отмечалось, устойчивость фазовой траектории по Ляпунову и асимптотическая устойчивость определяются поведением малого возмущения траектории во времени: будет ли возмущение убывать, нарастать или оставаться ограниченным. Введение малого возмущения позволяет линеаризовать систему в окрестности исследуемой траектории и провести линейный анализ её устойчивости.

Пусть имеется автономная динамическая система

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in R^N.$$

Пусть нас интересует устойчивость решения $\vec{x}^0(t)$. Введём малое возмущение $\vec{y} = \vec{x}(t) - \vec{x}^0(t)$. Для него можно записать

$$\dot{\vec{y}} = \vec{F}(\vec{x}^0 + \vec{y}) - \vec{F}(\vec{x}^0).$$

Раскладывая $\vec{F}(\vec{x}^0 + \vec{y})$ в ряд в окрестности \vec{x}^0 и учитывая малость возмущения, получаем линеаризованное уравнение относительно \vec{y} :

$$\dot{\vec{y}} = \tilde{A}(t)\vec{y},$$

где \tilde{A} -матрица линеаризации системы в окрестности решения $\vec{x}^0(t)$ с элементами $(\partial F_j / \partial x_k)_{\vec{x}^0}$.

Матрица \tilde{A} характеризуется собственными векторами \vec{e}_i и собственными значениями λ_i :

$$\tilde{A}\vec{e}_i = \lambda_i\vec{e}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Собственные значения λ_i являются корнями характеристического уравнения $\det[\tilde{A} - \lambda\tilde{E}] = 0$. Тогда любое начальное возмущение можно представить как разложение по собственным векторам. Начальное возмущение, заданное в момент t^* вдоль i -го собственного вектора, эволюционирует как

$$\bar{y}^i(t) = \bar{y}^i(t^*) \exp(t - t^*) \lambda_i. \quad (3.6.1)$$

Рост или уменьшение величины возмущения определяется знаком $\operatorname{Re} \lambda_i$. В общем случае матрица линеаризации - это матрица с переменными во времени элементами, т.к. фазовая траектория $\bar{x}^0(t) = \text{const}(t)$ только для состояний равновесия. Соответственно её собственные значения и собственные вектора тоже меняются. Поэтому (3.6.1), вообще говоря, выполняется только в пределе $t - t^* \rightarrow 0$, то есть локально, в окрестности точки $\bar{x}^0(t^*)$. При изменении t^* показатель экспоненты изменяется. Таким образом, в общем случае возможно, что в каких-то точках исследуемой траектории $\bar{x}^0(t^*)$ малое возмущение $\bar{y}(t) = \sum_{i=1}^N \bar{y}^i(t)$ будет экспоненциально расти, а в других точках - убывать. Чтобы охарактеризовать устойчивость траектории, надо выяснить, что же происходит с малым возмущением в пределе $t \rightarrow \infty$.

Пусть в момент t_0 имелось бесконечно малое начальное возмущение исследуемой траектории $\bar{y}^i(t_0)$ вдоль i -го собственного вектора матрицы \tilde{A} , а в произвольный момент t ему соответствует возмущение $\bar{y}^i(t)$. Характеристикой устойчивости исследуемой траектории по направлению собственного вектора $\bar{e}_i(t)$ является **характеристический показатель Ляпунова** Λ_i [1,2].

Определение. Характеристическим показателем Ляпунова, или просто характеристическим показателем функции $\Phi(t)$, называется действительное число, определяемое соотношением

$$\Lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} [t^{-1} \ln |\Phi(t)|],$$

где черта сверху означает верхний предел. Для экспоненты $\Phi(t) = \exp \alpha t$ получаем $\Lambda = \alpha$.

Понятие характеристического показателя даёт способ оценки степени роста функции в сравнении с экспонентой.

Для линейной системы

$$\Lambda_i = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{\ln \|\bar{y}^i(t)\|}{t - t_0} \right], \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.6.2)$$

Пояснение 1. Вообще говоря, правая часть (3.6.2) может и не сходиться при $t \rightarrow \infty$ к какому-то одному значению, поэтому необходимо выбирать максимальное из всех возможных значений, что и даёт использование верхнего предела.

Примеры верхнего и нижнего пределов.

Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, где $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$. При этом $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = 1$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = -1$.

Если исследуемая траектория $\bar{x}^0(t)$ принадлежит N -мерному фазовому пространству, то матрица линеаризации имеет N собственных векторов. В этом случае устойчивость траектории характеризуется набором из N ляпуновских показателей. **Спектром ляпуновских характеристических показателей (ЛХП)** фазовой траектории $\bar{x}^0(t)$ называется упорядоченная по убыванию (более точно по невозрастанию) совокупность N чисел $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \dots \geq \Lambda_N$. Последовательность знаков ЛХП, расположенных по невозрастанию, называется **сигнатурой спектра**.

Выясним, как связаны ляпуновские показатели с собственными значениями матрицы линеаризации. Рассмотрим соотношение (3.6.1) в начальный момент времени $t^* = t_0$, считая интервал $\Delta t = t - t_0$ малым. Затем переместимся в точку $\bar{x}(t_0 + \Delta t)$ и в качестве начального возмущения возьмём

$$\bar{y}^i(t_0 + \Delta t) = \bar{y}^i(t_0) \exp \lambda_i \Delta t.$$

Перемещаясь каждый раз вдоль кривой $\bar{x}^0(t)$ с малым шагом Δt , получаем приближённое выражение для эволюции малого возмущения в

направлении i – го собственного вектора

$$\bar{y}^i(t) \approx \bar{y}^i(t_0) \exp \sum_k \lambda_i(t_k) \Delta t.$$

Или при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем строгое равенство:

$$\bar{y}^i(t) \approx \bar{y}^i(t_0) \exp \int_{t_0}^t \lambda_i(t') dt'.$$

Откуда,

$$\Lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{t_0}^t \operatorname{Re} \lambda_i(t') dt'}{t - t_0}.$$

Таким образом, ляпуновский показатель можно трактовать как усреднённое вдоль исследуемой траектории значение действительной части собственного значения матрицы линеаризации. Он показывает, что происходит с соответствующей компонентой начального возмущения в среднем вдоль траектории.

Справедливы следующие утверждения:

1. Устойчивость траектории \bar{x}^0 по Ляпунову означает, что произвольное начальное возмущение $\bar{y}(t_0)$ в среднем вдоль траектории не возрастает. Для этого необходимо и достаточно, чтобы спектр ЛХП не содержал положительных показателей, то есть чтобы для любого $i = 1, \dots, N$ выполнялось условие $\Lambda_i \leq 0$.

2. Для произвольной ограниченной траектории $\bar{x}^0(t)$, не являющейся состоянием равновесия или сепаратрисой седла, всегда имеется, по крайней мере, один ляпуновский показатель равный 0.

3. Эволюция элемента фазового объёма определяется суммой ляпуновских показателей. Можно показать, что

$$\sum_{i=1}^N \Lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \operatorname{div} \bar{F}(t') dt'.$$

Для фазовых траекторий на аттракторе должно иметь место сжатие фазового объёма. Соответственно, дивергенция потока вдоль траектории на аттракторе отрицательна, а значит ляпуновские показатели удовлетворяют

неравенству

$$\sum_{i=1}^N \Lambda_i < 0.$$

4. Если сумма показателей спектра ЛХП равна нулю, то фазовый объём системы во времени не изменяется – система консервативна и аттракторов не содержит.

Рассмотрим локальную устойчивость траекторий, принадлежащих различным предельным множествам.

3.6.1 Устойчивость состояний равновесия

Если $\bar{x}^0(t)$ -состояние равновесия, то матрица линеаризации не зависит от времени. Поэтому её собственные вектора и собственные значения постоянны. Ляпуновские показатели совпадают с действительными частями собственных значений

$$\Lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{t_0}^t \operatorname{Re} \lambda_i(t') dt'}{t - t_0} = \operatorname{Re} \lambda_i.$$

Аттракторами являются состояния равновесия асимптотически устойчивые по всем направлениям. Спектр ЛХП состоит только из отрицательных показателей (устойчивые узел и фокус).

Репеллерами являются состояния равновесия неустойчивые по всем направлениям (неустойчивые узел и фокус). Спектр ЛХП состоит только из положительных показателей.

Если спектр ЛХП содержит и положительные, и отрицательные показатели, то состояние равновесия седлового типа. Причем число положительных показателей определяет размерность неустойчивого многообразия, а число отрицательных – размерность устойчивого многообразия.

Обращение в нуль старшего ляпуновского показателя соответствует негрубости состояния равновесия и требует особого (бифуркационного) анализа.

3.6.2 Устойчивость периодических решений. Матрица монодромии. Мультипликаторы предельного цикла

Любое периодическое решение $\bar{x}^0(t)$ удовлетворяет условию

$$\bar{x}^0(t) = \bar{x}^0(t + T),$$

где T - период решения. Матрица линеаризации, вычисляемая в точках замкнутой траектории, соответствующей периодическому решению, также является периодической $\tilde{A}(t) = \tilde{A}(t + T)$, и уравнение для возмущений $\dot{\bar{y}} = \tilde{A}(t)\bar{y}$ является линейным уравнением с периодическими коэффициентами. Для оценки устойчивости периодического решения важно знать, как меняется малое возмущение $\bar{y}(t_0)$ за период. Можно представить изменение возмущения за период как

$$y(t_0 + T) = \hat{M}_T y(t_0),$$

где \hat{M}_T - так называемая **матрица (оператор) монодромии** [1,2]. \hat{M}_T не зависит от времени t_0 . Собственные значения матрицы монодромии, то есть корни характеристического уравнения

$$\text{Det}[\tilde{M}_T - \mu \tilde{E}] = 0,$$

называются **мультипликаторами периодического решения** $\bar{x}^0(t)$ и определяют его устойчивость.

Можно показать, что действие оператора монодромии заключается в том, что проекции начального возмущения периодического решения на собственные вектора матрицы линеаризации через период умножаются на соответствующие мультипликаторы μ_i . Таким образом, для того чтобы периодическое решение было устойчиво по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы его мультипликаторы удовлетворяли требованию $|\mu_i| \leq 1, i = 1, 2, \dots, N$.

По крайней мере, один из мультипликаторов периодического решения равен +1, что соответствует сохранению компоненты возмущения, направленной по касательной к фазовой траектории.

Мультипликаторы, как собственные значения матрицы монодромии, удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^N \mu_i = Sp \tilde{M}_T, \quad \prod_{i=1}^N \mu_i = Det \tilde{M}_T.$$

Они связаны с ляпуновскими показателями периодического решения

$$\Lambda_i = \frac{1}{T} \ln |\mu_i|.$$

Один из показателей спектра ЛХП на предельном цикле равен нулю и отвечает единичному мультипликатору. Сигнатура спектра ЛХП устойчивого предельного цикла такова:

$$0, -, -, \dots, -.$$

Предельный цикл в этом случае является аттрактором.

При сигнатуре

$$+, +, \dots, +, 0$$

имеем неустойчивый предельный цикл (репеллер).

Если имеются показатели разных знаков, то предельный цикл является седловым.

Если в сигнатуре есть несколько нулей, то это признак негрубости периодического решения и соответствует бифуркационной ситуации.

Устойчивость предельного цикла в двумерном фазовом пространстве, соответствующего периодическому решению $x = \varphi(t), y = \Psi(t)$ с периодом T , определяется знаком величины [9]

$$\Lambda = \frac{1}{T} \int_0^T [X'_x(\varphi, \Psi) + Y'_y(\varphi, \Psi)] dt.$$

Предельный цикл устойчив при $\Lambda < 0$ и неустойчив при $\Lambda > 0$.

Пример

Система

$$\dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2);$$

$$\dot{y} = +x + y(1 - x^2 - y^2)$$

имеет периодическое решение

$$x = \cos t; \quad y = \sin t.$$

Предельный цикл удовлетворяет $x^2 + y^2 = 1$. Здесь $\Lambda = -2$, поэтому цикл устойчивый.

3.6.3 Устойчивость квазипериодических решений

С увеличением размерности фазового пространства системы $\dot{\bar{x}} = \bar{F}(\bar{x})$ до $N \geq 3$ становятся возможными решения $\bar{x}^0(t)$ в виде квазипериодических функций с k частотами $\omega_j, j = 1..k$, между которыми не существует рациональных соотношений. Такие решения $\bar{x}^0(t)$ называются **эргодическими квазипериодическими колебаниями**. Далее подразумеваются именно такие квазипериодические решения. Спектр ЛХП для квазипериодических решений содержит k нулевых показателей. Если решение асимптотически устойчиво, то k нулевых показателей спектра ЛХП будут старшими, а все оставшиеся строго отрицательными. Аттрактором системы в фазовом пространстве в этом случае будет тороидальная k мерная гиперповерхность, называемая **k -мерным тором** [1,2]. Если все остальные показатели положительны, то k -мерный тор будет репеллером. Если спектр ЛХП квазипериодических траекторий на торе имеет, кроме нулевых ляпуновских показателей, также положительные и отрицательные, то говорят о седловом торе.

3.6.4 Устойчивость хаотических решений

Если частное решение $\bar{x}^0(t)$ является аperiodическим, но ограниченным для любых $t \rightarrow \infty$, то оно отвечает режиму хаотических колебаний.

В спектре ЛХП такого решения появляется не менее одного положительного показателя и существует по крайней мере один нулевой (ограниченное решение!). В каком смысле можно говорить об устойчивости хаотического решения?

Аperiodическое решение, отвечающее режиму хаотических колебаний в диссипативной системе, соответствует притягивающему ограниченному предельному множеству траекторий в фазовом пространстве – **странному аттрактору**. С одной стороны, это множество траекторий характеризуется неустойчивостью по Ляпунову (поэтому есть положительные показатели). С другой стороны экспоненциальное разбегание близких фазовых траекторий и ограниченность размеров аттрактора с неизбежностью ведут к

тому, что траектория рано или поздно возвращается в сколь угодно малую, но конечную окрестность любого начального состояния в аттракторе. Поэтому траектории, принадлежащие странному аттрактору устойчивы по Пуассону.

Таким образом, хаотические траектории можно называть устойчивыми, если существует предельное множество – аттрактор с некоторой областью притяжения, внутри которого траектории неустойчивы по Ляпунову, но устойчивы по Пуассону.

Сигнатура спектра ЛХП странного аттрактора наиболее простой структуры имеет вид

$$+, 0, -, -, \dots, -.$$

При нескольких положительных показателях хаос называют гиперхаосом [1,2].

3.6.5 Понятие о динамическом хаосе

Движение на странном аттракторе получило название **динамического хаоса** [30].

Для трёхмерных динамических систем периодическим движениям соответствуют неподвижные точки в сечении Пуанкаре. При хаотических движениях на странном аттракторе плоскость сечения Пуанкаре плотно и нерегулярно заполнена точками пересечения. Эти заполненные области являются отображением Пуанкаре странного аттрактора.

Плотное заполнение сечения Пуанкаре следствие **эргодичности** движения на странном аттракторе. Эргодичность странного аттрактора следствие его ещё более сильного свойства - **перемешивания** хаотических фазовых траекторий.

Перемешивающие системы эргодичны, но не наоборот. Перемешивание - есть следствие наличия положительного показателя в сигнатуре ЛХП. В результате неустойчивости по Ляпунову малая начальная фазовая капля растягивается по одним направлениям, сжимается по другим и в виде сильнодеформированного образования заполняет исходное фазовое пространство или некоторую его часть. В ходе эволюции в системе с перемешиванием две сколь угодно близкие по начальным данным фазовые траектории могут оказаться в различных удалённых областях фазового пространства. Небольшие различия в начальных условиях рождают

огромные различия в конечном явлении. Отсюда непредсказуемость поведения системы на больших временах за счёт нарастания малых неопределённостей. В частности невозможность долговременного точного предсказания погоды. Лоренц назвал непредсказуемость динамики поведения сложных систем эффектом бабочки из рассказа Бредбери «И грянул гром»: гибель бабочки в далёком прошлом катастрофически изменяет мир будущего.

Следует различать понятия динамического хаоса и случайного движения. Термин случайный имеет другой смысл. Истинно случайное движение вообще непредсказуемо, либо предсказуемо с определённой вероятностью. Траектории случайного (стохастического) движения нельзя многократно и однозначно воспроизвести ни в численном, ни в физическом экспериментах. Пример: броуновское движение. Стохастические процессы требуют учёта флуктуаций в исходных динамических уравнениях.

В случае странного аттрактора вообще говоря имеется полная предсказуемость. Решение уравнений, описывающих поведение динамической системы, подчиняется условию единственности и однозначно воспроизводится при фиксированных начальных условиях. С другой стороны, наличие экспоненциального разбегания близких траекторий обеспечивает высокую чувствительность к малым изменениям начальных данных, а также перемешиванию. В результате в реальности имеется **горизонт предсказуемости** $T \sim 1/\Lambda_1$, где Λ_1 - старший положительный показатель в спектре ЛХП [18-20]. От этой величины зависит, на какое «в среднем» время можно предсказывать поведение системы.

Анализ механизмов перехода от порядка к динамическому хаосу в реальных системах и различных моделях выявил универсальность относительно немногих сценариев перехода к хаосу. В главе 4 кратко рассматриваются четыре из наиболее часто встречающихся сценариев: через бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода, через перемежаемость (сценарий Помо-Манневиля) и через последовательность бифуркаций Андронова-Хопфа (сценарии Ландау и Рюэля-Такенса).

3.6.6 Типы аттракторов

Аттрактор – это предельное множество, отвечающее конкретному типу устойчивого решения динамической системы и притягивающее к себе

фазовые траектории из некоторой области начальных условий.

Если фазовые траектории на аттракторе устойчивы и по Ляпунову, и по Пуассону – аттрактор **регулярный, или простой**.

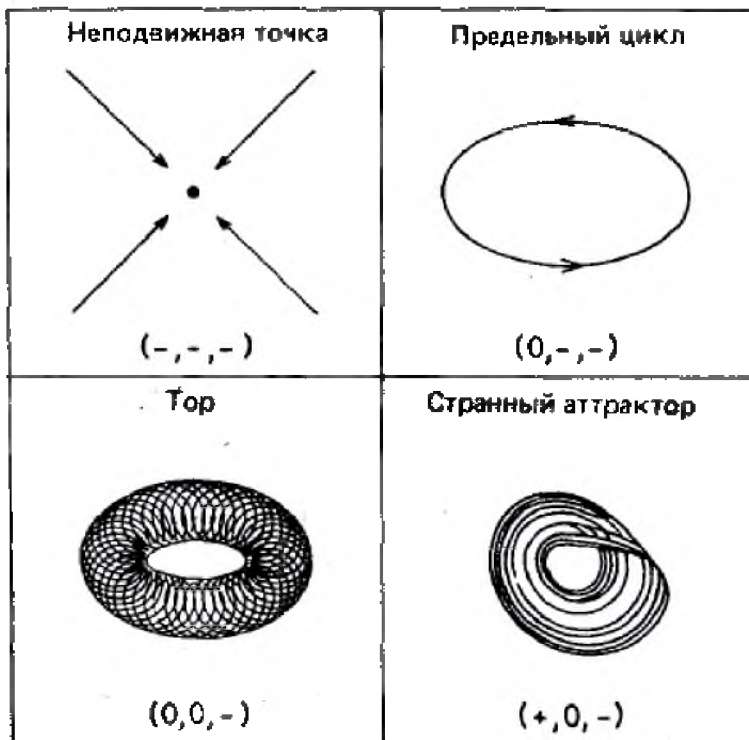


Рис. 3.6.1. Связь между размерностями простых аттракторов, вложенных в трёхмерное фазовое пространство, и видом сигнатуры ЛХП [30]

Если фазовые траектории на аттракторе устойчивы по Пуассону, но не устойчивы по Ляпунову, то **аттрактор странный**.

Регулярных аттракторов существует конечное число: состояния равновесия, периодические и квазипериодические движения. Все другие возможные типы аттракторов- странные.

В [30] приведена следующая логически оправданная цепочка усложняющихся явлений (рис. 3.6.1):

- стационарное состояние - фазовая точка неподвижна во времени;
- предельный цикл - фазовая траектория возвращается в любую точку аттрактора строго через период;
- квазипериодическое колебание - периода нет, но есть регулярная возвращаемость фазовой траектории в заданную окрестность начального состояния;
- странный аттрактор - есть возвращаемость, которая однако нерегулярна во времени и носит характер случайной последовательности.

3.7 Монотонные отображения. Устойчивость неподвижных точек и циклов одномерных дискретных динамических систем

Рассмотрим дискретную динамическую систему, описываемую одномерным отображением вида

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (3.7.1)$$

Для неподвижных точек одномерного отображения справедливо условие $x_{n+1} = x_n$. Если нарисовать зависимость $f(x)$, то неподвижные точки будут лежать на пересечении $f(x)$ с диагональю первой и третьей координатных четвертей. Динамику системы удобно проследить графически с помощью лестницы Ламерея [14].

Устойчивость неподвижной точки x^* в одномерном случае определяется простым условием: модуль мультипликатора должен быть меньше 1: $|\mu| = |f'(x^*)| < 1$. При $|\mu| > 1$ состояние равновесия будет неустойчиво. При $|\mu| = 1$ происходят бифуркации.

Рассмотрим простейший случай монотонных одномерных отображений, то есть отображений, задаваемых монотонно возрастающей или убывающей функцией $f(x)$.

Для монотонно возрастающей функции лестница Ламерея либо монотонно сходится к устойчивой неподвижной точке, если $|f'(x^*)| < 1$, либо монотонно расходится, если неподвижная точка неустойчива $|f'(x^*)| > 1$ или вовсе нет неподвижных точек (Рис. 3.7.1).

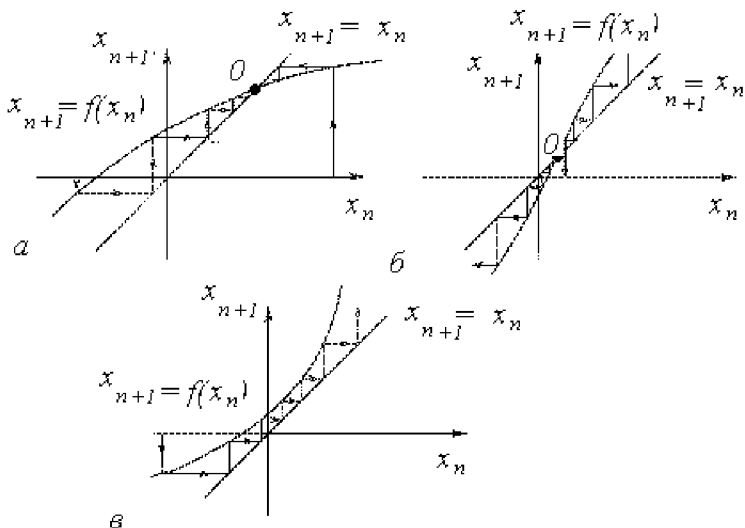


Рис. 3.7.1. Лестница Ламерея в случае монотонно возрастающей функции $f(x)$ вблизи устойчивой неподвижной точки $\theta(a)$, неустойчивой неподвижной точки $\theta(б)$ и в отсутствие неподвижных точек ($в$)

Для **монотонно убывающей функции** различаются следующие ситуации:

1. Неподвижная точка всегда существует и может быть как устойчивой, так и неустойчивой. Лестница Ламерея выглядит в этом случае как ломанная спираль (рис. 3.7.2). Отсюда название спираль Ламерея или паутиная диаграмма.

2. На достаточно большом расстоянии от неподвижной точки могут возникать так называемые **циклические точки**. В простейшем случае циклические точки представляют собой пару точек, удовлетворяющую соотношениям (рис. 3.7.3)

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_2) \\ x_2 &= f(x_1). \end{aligned}$$

Для существования пары циклических точек функция $f(x)$ где-то вдали от неустойчивой неподвижной точки должна быть достаточно пологой. Если функция имеет несколько чередующихся участков с большой и малой крутизной, то возможно существование нескольких пар циклических точек.

Для монотонных функций других динамических режимов нет.

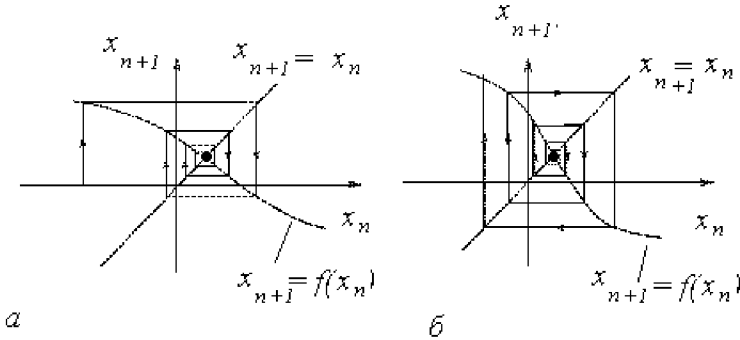


Рис. 3.7.2. Спираль Ламерея в случае монотонно убывающей функции $f(x)$ вблизи устойчивой неподвижной точки (а) и неустойчивой неподвижной точки (б)

Пара циклических точек представляет собой аналог предельного цикла в системах с непрерывным временем и называется 2-цикл (длина цикла или, по-другому, порядок цикла равны 2).

В более сложных отображениях может быть больше циклических точек, например k -точек. Такой цикл называется k -цикл:

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_k) \\ x_2 &= f(x_1) \\ &\dots \\ x_k &= f(x_{k-1}). \end{aligned}$$

Иногда неподвижную точку называют 1-цикл.

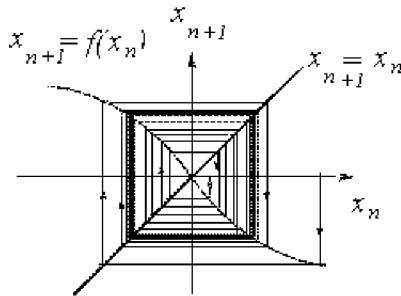


Рис. 3.7.3. Начало координат является неустойчивой неподвижной точкой. Спираль Ламерея наматывается на 2-цикл

При изучении сложных динамических систем часто оказывается удобным применение, наряду с отображением $x_{n+1} = f(x_n)$, производных от него, так называемых **итерированных отображений** $f^n(x) = f(f(\dots f(x)\dots))$.

Например, двукратно итерированное отображение

$$x_{n+2} = f(x_{n+1}) = f(f(x_n)).$$

Итерированные отображения обладают следующими **наследственными свойствами** (то есть свойствами, полученными от предыдущих отображений) [10]

1. Существование, устойчивость и неустойчивость неподвижных точек.
2. Свойство точек быть экстремумом (но не именно максимумом или именно минимумом) отображения.

Используя итерированные отображения, легко установить **критерий устойчивости k -циклов** [14].

Пусть, например, цикл состоит из двух точек

$$x_1 = f(x_2)$$

$$x_2 = f(x_1).$$

Каждая из точек есть неподвижная точка двукратно итерированного отображения

$$x_1 = f^2(x_1)$$

$$x_2 = f^2(x_2).$$

Точка является устойчивой точкой отображения $F_2(x) \equiv f^2(x)$, если в этой точке

$$\left| \frac{dF_2}{dx} \right| < 1.$$

Тогда по правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{dF_2}{dx} \Big|_{x=x_1} = \frac{d}{dx} f(f(x))_{x=x_1} = f'(f(x))f'(x)_{x=x_1} = f'(x_2)f'(x_1).$$

Откуда следует критерий устойчивости 2-цикла

$$|f'(x_2)f'(x_1)| < 1.$$

В силу симметрии выражения обе точки одновременно устойчивые или неустойчивые.

Аналогично для k -цикла получаем критерий устойчивости k -цикла $|f'(x_2)f'(x_1)\dots f'(x_k)| < 1$.

3.8 Второй (прямой) метод Ляпунова. Функция Ляпунова

До сих пор мы рассматривали устойчивость состояний равновесия с помощью линеаризации исходной системы. Это возможно только, если особая точка простая и не является центром. Второй метод Ляпунова является более универсальным методом исследования устойчивости. Он основан на построении функции Ляпунова. Рассмотрим простой пример исследования устойчивости особой точки в начале координат для системы

$$\dot{x}_1 = -x_1^3$$

$$\dot{x}_2 = -x_2^3.$$

Здесь нельзя применять теорему о линеаризации, так как линеаризованная система не будет простой. Однако можно показать, что начало координат асимптотически устойчиво, если рассмотреть поведение функции $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ на траекториях системы.

Определение 1:

Производная функции V вдоль параметрически заданной кривой

$$\dot{\vec{x}}(t) = (x_1(t), x_2(t) \dots) \text{ определяется как } \dot{V} = \sum_1^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i .$$

В данном случае $\dot{V} = -2(x_1^4 + x_2^4)$ отрицательна везде кроме начала координат, то есть V убывает с ростом времени. Поэтому $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, начало координат - асимптотически устойчивая точка.

Определение 2:

Действительнозначная функция V называется **положительно (отрицательно) определённой** в области N , где N – некоторая окрестность начала координат, если она больше 0 (меньше 0) везде в N и равна 0 в начале координат. Если она больше или равна 0 в N , то эта функция называется **положительно полуопределённой**.

В литературе встречаются другие названия этих функций: знакоопределённая и знакопостоянная [9], соответственно.

Теорема Ляпунова об устойчивости [31]:

Пусть динамическая система имеет особую точку в начале координат.

Если в некоторой окрестности N начала координат существует действительнозначная функция V такая, что

- а) частные производные $\partial V / \partial x_i$ существуют и непрерывны;
- б) V положительно определена;
- в) \dot{V} отрицательно **полуопределена**,

то начало координат является **устойчивой** неподвижной точкой системы.

Если вместо в) предполагается, что в) \dot{V} отрицательно **определена**, то начало координат **асимптотически устойчивая** особая точка.

Определение 3:

Функция V , удовлетворяющая предположениям а), б) и в), называется **слабой функцией Ляпунова**.

Функция V , удовлетворяющая предположениям а), б) и в') называется **сильной функцией Ляпунова**.

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости [31]:

Пусть начало координат является изолированной неподвижной точкой системы и в некоторой окрестности этой точки существует слабая функция Ляпунова. Тогда, если \dot{V} не обращается тождественно в нуль ни на какой траектории, кроме траектории, состоящей из неподвижной точки, то **начало координат асимптотически устойчиво**.

Теорема Ляпунова о неустойчивости [31]:

Пусть динамическая система имеет особую точку в начале координат. Если существует действительная непрерывная функция V такая, что

а) область определения V содержит некоторую окрестность вида $N\{\|\bar{x}\| \leq r\}$, $r > 0$;

б) сколь угодно близко к началу координат существуют точки, где $V > 0$;

в) \dot{V} положительно определена

г) $V(0) = 0$,

то начало координат **неустойчиво**.

Общего метода построения функции Ляпунова не существует. Часто в роли функции Ляпунова выступает полная энергия динамической системы.

Пример 1 [31]

Показать, что все траектории системы

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - (1 - x_1^2)x_2,$$

проходящие через точки (x_1, x_2) с $x_1^2 + x_2^2 < 1$, стремятся к началу координат при $t \rightarrow \infty$.

Решение

Выберем функцию Ляпунова в виде $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ и получим $\dot{V} = -2x_2^2(1 - x_1^2)$. Выбранная функция является слабой функцией Ляпунова в области $x_1^2 + x_2^2 < 1$, так как функция \dot{V} обращается в нуль не только в начале координат, но и на прямых $x_2 = 0$, $x_1 = \pm 1$. Однако не существует траекторий системы, лежащих на этих прямых, так как на $x_2 = 0$ справедливо $\dot{x}_2 = -x_1 \neq 0$, а на $x_1 = \pm 1$ выполняется $\dot{x}_1 = x_2 \neq 0$. Следовательно, по теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости начало координат асимптотически устойчиво.

Тот факт, что начало координат — асимптотически устойчивая неподвижная точка системы, можно было также получить с помощью теоремы о линеаризации. Однако приведенное доказательство отличается тем, что оно дает явное выражение для «области устойчивости» $x_1^2 + x_2^2 < 1$. Все траектории, проходящие через точки этой области, стремятся к началу координат при возрастании времени. Теорема о линеаризации утверждает только, что область устойчивости существует, но не дает понятия о ее размере.

Пример 2 [9]

Исследуем устойчивость нулевого решения системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -ax_1(1+x_1) + b(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2, \quad a > 0, b > 0.\end{aligned}$$

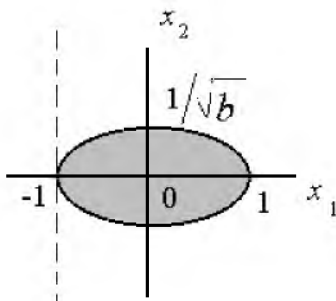


Рис. 3.8.1. Область притяжения точки (0,0)

Выберем функцию Ляпунова в виде $V(x_1, x_2) = x_1^2 + bx_2^2$ и получим $\dot{V} = -2ax_1^2(1+x_1) - 2b(x_1-x_2)^2$. Выбранная функция является сильной функцией Ляпунова в области $1+x_1 > 0$. Следовательно, начало координат асимптотически устойчиво. Часть полуплоскости $1+x_1 > 0$, ограниченная эллипсом $x_1^2 + bx_2^2 = 1$, принадлежит области притяжения точки $(0,0)$ (рис. 3.8.1).

Пример 3 [9]

Система

$$\dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2);$$

$$\dot{y} = +x + y(1 - x^2 - y^2)$$

имеет периодическое решение

$$x = \cos t; \quad y = \sin t.$$

Здесь предельный цикл удовлетворяет условию $x^2 + y^2 = 1$. Устойчивость этого цикла можно проверить с помощью функции Ляпунова: $V = x^2 + y^2$. Легко показать, что $\dot{V} < 0$ при $x^2 + y^2 > 1$ и $\dot{V} > 0$ при $x^2 + y^2 < 1$, следовательно, все фазовые траектории неограниченно приближаются к предельному циклу.

Сравнение второго метода Ляпунова и теории устойчивости по первому (линеаризованному) приближению [9]:

1. Теория устойчивости по первому приближению сводит вопрос об устойчивости к чисто алгебраической задаче - к анализу расположения корней характеристического уравнения в комплексной плоскости. Для этой цели разработаны различные стандартные приёмы. В практическом использовании второй метод Ляпунова значительно сложнее, чем способы исследования устойчивости по первому приближению, ибо общих рецептов построения функций Ляпунова не существует.

2. Теория первого приближения не решает вопроса об устойчивости сложной особой точки, а также при чисто мнимых корнях, в то время как второй метод Ляпунова пригоден и в этих случаях.

3. Вторым методом Ляпунова позволяет решить вопрос об устойчивости в большом, то есть позволяет оценить область притяжения положения равновесия. Теория первого приближения такой оценки не даёт.

Очевидно, что с помощью функций Ляпунова далеко не всегда выделяется полная область притяжения исследуемого состояния равновесия. Как правило, удаётся получить только часть её – большую или меньшую в зависимости от того, насколько удачно выбрана функция Ляпунова.

4 БИФУРКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

4.1 Структурная устойчивость, грубость системы. Бифуркационные значения параметров. Локальные и нелокальные, мягкие (внутренние) и жёсткие (кризисы) бифуркации. Бифуркационная и фазопараметрическая диаграммы

Понятие грубости впервые введено Андроновым и Понтрягиным. Оно эквивалентно понятию **структурной устойчивости** ДС. Фазовый портрет грубой системы **топологически** не меняется при малом изменении параметров системы (см. раздел 2.5). Не слишком строго топологическая тождественность означает, что картина на фазовой плоскости не меняется качественно, то есть сохраняются все основные элементы и их взаимосвязи. Если на фазовой плоскости был, например, предельный цикл, а состояние равновесия было неустойчивым, то в грубой системе при изменении параметра остаётся один цикл и одно неустойчивое состояние равновесия.

Необходимые и достаточные условия грубости двумерной системы заключаются в отсутствии:

1. положений равновесия, для которых выполняется $\det A = 0$ или $\text{tr} A = 0, \det A > 0$;
2. предельных циклов с двумя нулевыми характеристическими показателями;
3. сепаратрис, идущих из седла в седло.

Не при всяком изменении параметра сохраняется топологическая тождественность. Можно так поменять параметр, что произойдёт качественное изменение фазового портрета. Переход от одного грубого

портрета к другому происходит через негрубое состояние, называемое **бифуркационным**. Сам переход называется **бифуркацией** (от французского слова раздвоение, ветвление). Термин введён в 1885г. А. Пуанкаре. Значение параметра, при котором происходит этот переход, называется **точкой бифуркации** (**бифуркационным значением** параметра).

Итак, бифуркационным значением или точкой бифуркации называется значение параметра, при котором ДС является структурно неустойчивой.

Бифуркация характеризуется рождением или исчезновением состояний равновесий и предельных циклов, изменением их устойчивости, качественным изменением в расположении сепаратрис сёдел.

Поскольку структурная неустойчивость бывает локальной и глобальной, то выделяют, соответственно, **локальные и глобальные бифуркации** [1,2].

Локальные бифуркации связаны с локальной окрестностью траектории на предельном множестве. Они отражают изменение устойчивости отдельных траекторий и всего предельного множества в целом (например, когда аттрактор становится седлом или седло репеллером) или исчезновение предельного множества в результате слияния с другим предельным множеством (аттрактора с седлом или с репеллером). Все перечисленные явления диагностируются в рамках линейного анализа устойчивости. Нелокальные бифуркации связаны с поведением многообразий седловых предельных множеств: образование сепаратрисных петель, касание аттрактором сепаратрисных кривых или поверхностей. Их нельзя определить на базе линейного анализа окрестности стационарного состояния. Требуется учёт нелинейных свойств системы.

Иногда в литературе попадаете иное определение. Бифуркации положений равновесия называются локальными. Бифуркации предельных циклов и сепаратрис - нелокальными.

Пример 1

На рис. 4.1.1. показана бифуркация при изменении параметра a в динамической системе, описываемой уравнением $\dot{x} = ax$.

Пример 2

На рис. 4.1.2 показана бифуркация при изменении параметра a в динамической системе $\dot{x}_1 = ax_1; \dot{x}_2 = -x_2$.

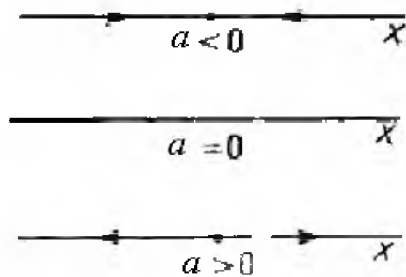


Рис. 4.1.1. Точка $x = 0$ является аттрактором при $a < 0$, репеллером при $a > 0$. Точка бифуркации $a = 0$.

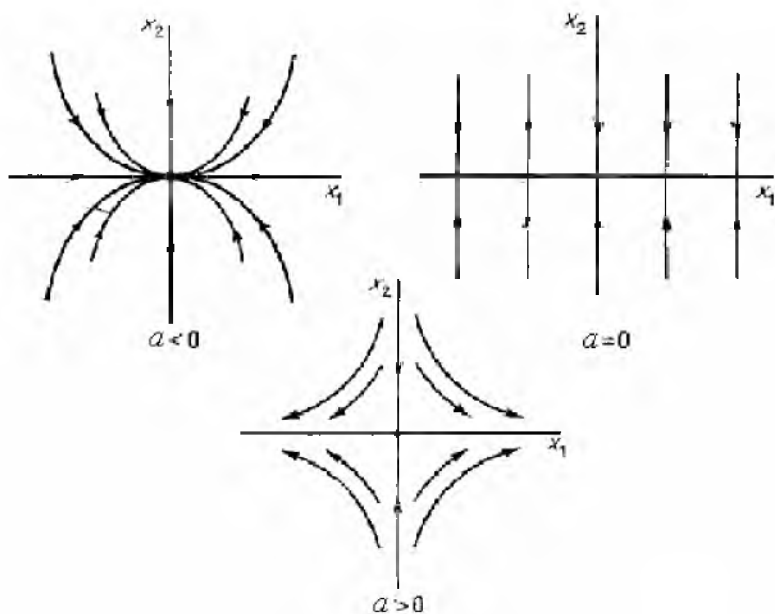


Рис. 4.1.2. Точка $x = 0$ является устойчивым узлом при $a < 0$, седлом при $a > 0$. Точка бифуркации $a = 0$.

В точке бифуркации $a = 0$ образуется непростое состояние равновесия (вся ось x_1).

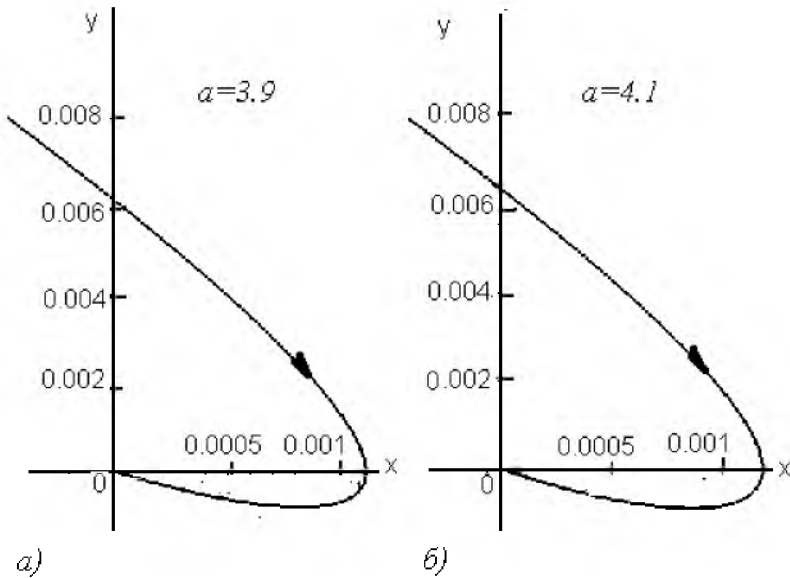


Рис. 4.1.3. Топологически эквивалентные фазовые портреты. Точка $x = 0$ является а) устойчивым фокусом ; б) устойчивым узлом

Пример 3

Рассмотрим модель математического маятника с затуханием

$$\ddot{x} + a \dot{x} + 4x = 0 .$$

Здесь $y = \dot{x} = 0; x = 0$ - состояние равновесия. Решения соответствующего характеристического уравнения имеют вид

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - 4} .$$

При $a = 4$ начало координат является вырожденным узлом. На рис. 4.1.3 показаны фазовые портреты при $a \approx 4$, соответствующие устойчивому

узлу и устойчивому фокусу. Превращение устойчивого (неустойчивого) фокуса в устойчивый (неустойчивый) узел не является бифуркацией, так как переход узел-фокус (без смены устойчивости) приводит к топологически эквивалентному фазовому портрету. Вырожденный узел – грубое состояние равновесия.

Для оценки «сложности» бифуркации вводится понятие **коразмерности бифуркации**. Коразмерность совпадает с числом параметров, при независимой вариации которых эта бифуркация происходит. В системе происходит бифуркация коразмерности k (*codim k*), если в ней выполняются k условий (равенств). Так $k=0$ соответствует отсутствию бифуркации в данной точке, $k=1$ означает, что имеется только одно бифуркационное условие.

Бифуркации происходят с любыми предельными множествами (аттракторами, репеллерами, седлами), но наибольший интерес представляют бифуркации аттракторов, так как они приводят к изменениям наблюдаемых в реальных экспериментах установившихся режимов. Бифуркации аттракторов принято подразделять на **внутренние (мягкие) бифуркации** и **кризисы (жёсткие бифуркации)**. Внутренние бифуркации приводят к топологическим изменениям самих притягивающих множеств, не затрагивая их **бассейнов притяжения** – областей, из которых фазовые траектории сходятся к данному аттрактору [1,2].

Кризисы - это бифуркации аттракторов, сопровождающиеся качественной перестройкой границ областей (бассейнов) притяжения. Пример, бифуркация слияния устойчивого узла с седлом, в результате чего аттрактор исчезает. Если устойчивое положение равновесия описывает установившийся режим в какой-либо реальной системе (физической, химической, экономической и так далее), то при его слиянии с неустойчивым состоянием равновесия система должна совершить скачок, переключиться на иной режим. Скачки такого рода при малых изменениях параметров изучает так называемая теория катастроф [4].

Динамическая система характеризуется не только фазовым пространством, но и **пространством параметров**. В первом случае по осям координат откладываются динамические переменные системы, а во втором – параметры. Движение изображающей точки по траектории в фазовом пространстве – это результат собственной динамики системы. Траектория

же в пространстве параметров задается исследователем, желающим знать, как эволюционирует при соответствующем изменении параметров динамическое поведение системы.

Конкретному набору значений параметров сопоставляется радиус вектор в этом пространстве. В многомерном пространстве параметров системы бифуркационным значениям могут соответствовать множества, представляющие собой точки, линии, поверхности и т.д. Анализ бифуркаций динамической системы при вариации её параметров позволяет построить бифуркационную диаграмму системы. **Бифуркационной (параметрической) диаграммой** называют множество точек, линий, поверхностей в пространстве параметров, соответствующих тем или иным бифуркациям предельных множеств системы. Используют также **фазопараметрические диаграммы**. В этом случае по одним осям откладывают значения параметров, а по другим – стационарные значения динамических переменных или связанные с ними величины [1-3].

В литературе встречаются и другие определения. Часто фазопараметрические диаграммы называют бифуркационной диаграммой или диаграммой стационарных состояний.

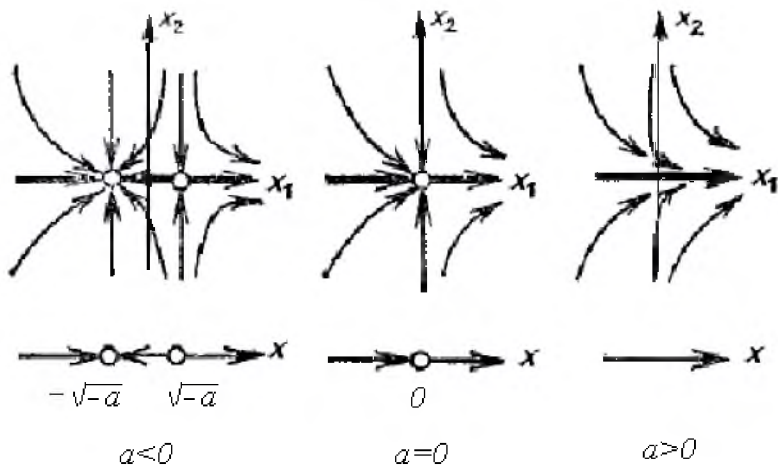


Рис. 4.2.1. Бифуркация седло-узел

4.2 Бифуркации положения равновесия

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся локальные бифуркации состояния равновесия с коразмерностью 1. Здесь достаточно использовать один управляющий параметр a .

Для описания событий, происходящих вблизи бифуркационной границы, удобно использовать системы самых простых уравнений, обычно полиномиальных, которые описывают качественные особенности процесса. Такие системы называются модельными и активно используются в теории бифуркаций и в теории катастроф.

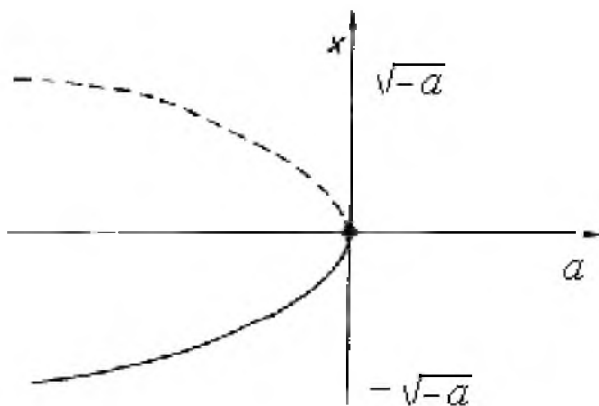


Рис. 4.2.2. Фазопараметрическая диаграмма бифуркации седло-узел

4.2.1 Бифуркация седло-узел

Бифуркация седло-узел описывается модельной системой

$$\dot{x}_1 = x_1^2 + a, \quad \dot{x}_2 = -x_2.$$

При $a < 0$ система имеет два положения равновесия, одно из которых есть седло, а другое – устойчивый узел (рис. 4.2.1). Эти точки при $a \rightarrow -0$ приближаются друг другу и при $a = 0$ сливаются вместе в негрубое

состояние седло-узел. Отсюда и возникло название бифуркации седло-узел. Затем состояние равновесия исчезает.

Как показано на рис. 4.2.1, перестройка фазового портрета при этой бифуркации является, в сущности, одномерной: вдоль оси абсцисс x_1 происходят те же явления, что и в одномерной системе

$$\dot{x} = x^2 + a,$$

а вдоль оси ординат x_2 перестройки нет вовсе [4,26]. Таким образом, перестройка через состояние равновесия седло-узел получается из одномерной перестройки «надстраиванием» оси ординат. Вообще все перестройки положений равновесия в общих однопараметрических системах получаются из одномерных перестроек аналогичным надстраиванием. Поэтому ниже будут рассмотрены бифуркации состояний равновесия в одномерных системах.

Фазопараметрическая диаграмма, соответствующая бифуркации седло-узел, представлена на рис. 4.2.2.

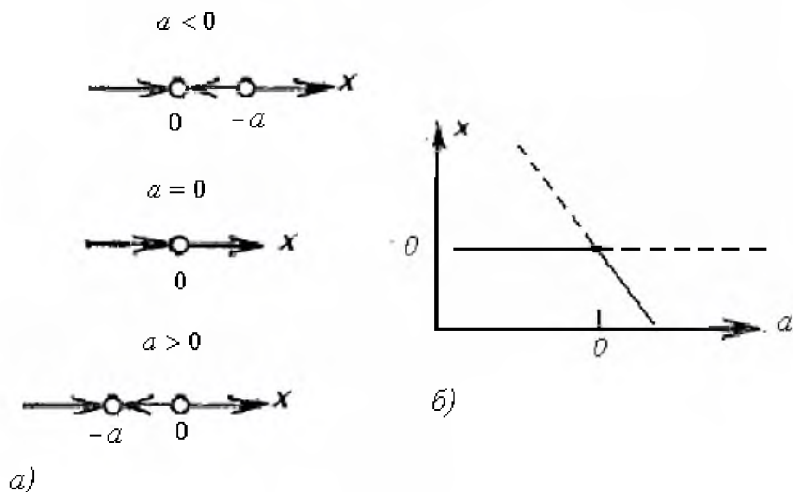


Рис. 4.2.3. Бифуркация «обмен устойчивостью». а) Перестройка фазового портрета при изменении параметра; б) фазопараметрическая диаграмма

Точки параболы $a = -x^2$ изображают состояния равновесия. Верхняя часть параболы представляет собой ветвь неустойчивых положений равновесия, нижняя ветвь – устойчивых.

В случае реальной системы система стабилизируется в устойчивом состоянии равновесия, так что о существовании другого, неустойчивого состояния ничего не знает. При переходе через бифуркационное значение $a=0$ происходит либо внезапное исчезновение либо внезапное появление состояния равновесия. Это жёсткая бифуркация (кризис, катастрофа) - аттрактор исчезает (появляется), границы бассейна притяжения аттрактора качественно перестраиваются.

4.2.2 Бифуркация «обмен устойчивостью» (транскритическая)

Бифуркация «обмен устойчивостью» (или транскритическая бифуркация) описывается модельным уравнением

$$\dot{x} = x^2 + ax.$$

При этой бифуркации устойчивое и неустойчивое положение равновесия после слияния (при $a = 0$) не исчезают, а просто меняются местами (Рис. 4.2.3).

4.2.3 Суперкритическая и субкритическая бифуркации типа вилки

Суперкритическая (надкритическая) бифуркация типа вилки описывается модельным уравнением

$$\dot{x} = -x^3 + ax.$$

При положительном параметре a новые устойчивые решения плавно отходят от старого решения. Это мягкая бифуркация (рис. 4.2.4).

Субкритическая (подкритическая) бифуркация типа вилки описывается модельным уравнением

$$\dot{x} = x^3 + ax.$$

При отрицательном параметре a устойчивое решение исчезает, а нового устойчивого решения в его окрестности не возникает (рис. 4.2.5). Это жёсткая бифуркация.

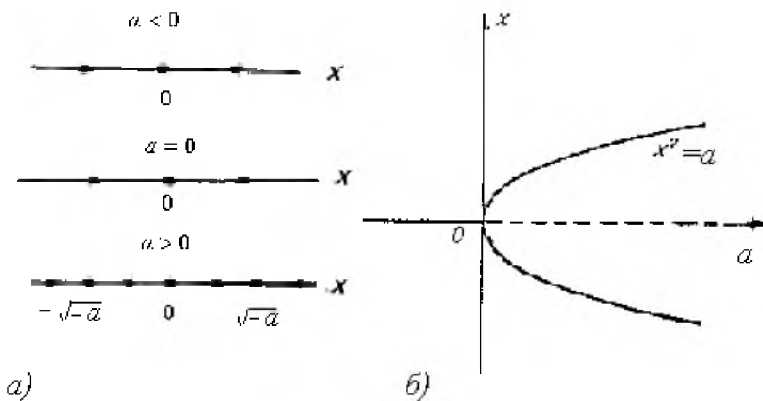


Рис. 4.2.4. Суперкритическая (мягкая) бифуркация типа вилки.
 а) Перестройка фазового портрета при изменении параметра;
 б) фазопараметрическая диаграмма

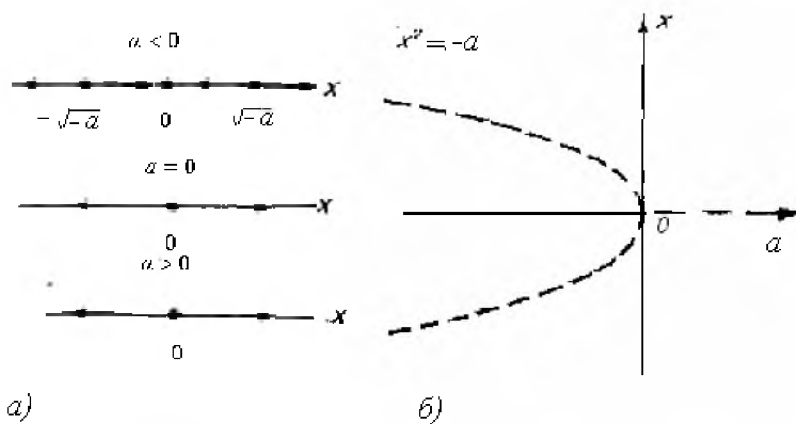


Рис. 4.2.5. Субкритическая (жёсткая) бифуркация типа вилки. а) Перестройка фазового портрета при изменении параметра; б) фазопараметрическая диаграмма

4.3. Бифуркация рождения (уничтожения) предельного цикла Андронова-Хопфа

Потеря устойчивости состояния равновесия при изменении параметра может происходить не только при столкновении с другим состоянием равновесия, но и самостоятельно [4] в результате бифуркации Андронова-Хопфа.

Бифуркация Андронова – Хопфа является одной из основных бифуркаций положения равновесия. Эта бифуркация была впервые исследована Андроновым для двумерного случая и обобщена Хопфом для систем с произвольной размерностью $n \geq 2$.

Достаточные (но не необходимые) условия возникновения бифуркации Андронова-Хопфа в 1 – параметрической n - мерной системе дифференциальных уравнений даются следующей теоремой [4,17,27,31]

Теорема

Пусть система

$$\dot{x} = \bar{f}(x, a), \quad x \in R^n, a \in R^1 \quad n \geq 2$$

имеет изолированное состояние равновесия в начале координат при любых значениях действительного параметра a . Далее, пусть матрица линеаризации при значениях $a = a_0$ имеет пару комплексно сопряжённых чисто мнимых собственных чисел

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0,$$

причём

$$g = \frac{d}{da} \{\operatorname{Re}[\lambda_{1,2}(a)]\} |_{a=a_0} \neq 0.$$

Кроме того, предположим, что остальные $n-2$ собственных чисел имеют строго отрицательные вещественные части при $a = a_0$.

Тогда при $a = a_0$ от нулевого положения равновесия ответвляется однопараметрическая система замкнутых траекторий, отвечающих периодическим решениям периода $T(a) \rightarrow 2\pi/\omega_0$ при $a \rightarrow a_0$.

Замкнутые траектории могут ответвляться либо при $a > a_0$, либо при $a < a_0$.

Существуют два вида бифуркации Андронова-Хопфа: **суперкритическая**, или **мягкая** бифуркация, и **субкритическая**, или **жёсткая** бифуркация.

Обе бифуркации Андронова-Хопфа определяются единственным бифуркационным условием, поэтому имеют коразмерность 1.

При $g > 0$ положение равновесия соответствует устойчивому фокусу при $a < a_0$ и неустойчивому фокусу при $a > a_0$.

При $g < 0$, наоборот, при $a > a_0$ фокус будет устойчив, а при $a < a_0$ неустойчив.

Для определённости ниже будем считать

$$g > 0.$$

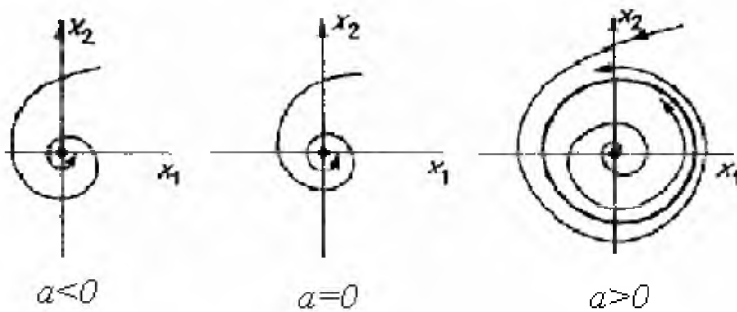


Рис. 4.3.1. Суперкритическая (мягкая) бифуркация Андронова – Хопфа

При $g > 0$ **суперкритическая бифуркация** Андронова-Хопфа состоит в следующем.

При $a < a_0$ состояние равновесия является устойчивым фокусом. В точке бифуркации $a = a_0$ образуется негрубое состояние равновесия (так называемый сложный фокус). При этом имеется пара чисто мнимых собственных значений. При $a > a_0$ фокус становится неустойчивым, но в его близкой окрестности рождается устойчивый предельный цикл (рис. 4.3.1, точка бифуркации $a_0 = 0$).

При такой бифуркации система под действием постоянно

присутствующих малых возмущений переходит сначала из неустойчивого состояния равновесия на «малую» устойчивую периодическую траекторию, так что изменение поведения системы оказывается постепенным, мягким. Именно с суперкритической бифуркацией Андронова-Хопфа связано возникновение автоколебаний в осцилляторе Ван дер Поля и многих других автоколебательных системах.

При субкритической бифуркации Андронова-Хопфа устойчивый при $a < a_0$ фокус теряет устойчивость в результате «влипания» в него неустойчивого предельного цикла при $a = a_0$, после чего цикл больше не существует, а фокус становится неустойчивым (Рис. 4.3.2. Точка бифуркации $a_0 = 0$). Из него система под действием малого возмущения переходит в некоторый более отдалённый стационарный режим (часто периодический) и, следовательно, в окрестности бифуркации происходит жёсткая потеря устойчивости.

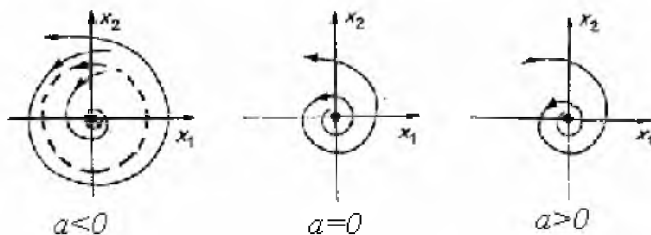


Рис. 4.3.1. Субкритическая (жёсткая) бифуркация Андронова – Хопфа

Пример1

Модельная система уравнений, описывающая суперкритическую бифуркацию Андронова-Хопфа, имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 - \omega_0 x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= \omega_0 x_1 + ax_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{aligned}$$

Система имеет изолированное положение равновесия в начале координат при любом значении параметра a . Исследуем его устойчивость при различных значениях параметра.

Матрица линеаризации имеет комплексные собственные числа

$\lambda_{1,2}(a) = a \pm i\omega_0$. Следовательно, при $a < a_0$ состояние равновесия есть устойчивый фокус. При $a > a_0$ - неустойчивый фокус. При $a = a_0$ об устойчивости системы нельзя судить по линеаризованной системе.

Для построения фазового портрета системы преобразуем её к полярным координатам. Положим $x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi$. Получаем

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(a - r^2) \\ \dot{\varphi} &= \omega_0. \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Из второго уравнения следует, что переменная $\varphi = \omega_0 t + t_0$. Наиболее существенная информация о структуре траекторий содержится в первом уравнении. Оно описывает состояния системы с $r = 0$ и $r = \sqrt{a}$. Первое соответствует положению равновесия системы в начале координат и существует при любом значении параметра. Другое существует только при $a > 0$ и описывает периодическое движение с периодом $2\pi/\omega_0$. На фазовой плоскости ему соответствует окружность радиуса $r = \sqrt{a}$. Фазопараметрическая диаграмма приведена на рис. 4.3.3а.

Поскольку (4.3.1) точно соответствует суперкритической бифуркации типа вилки, то это движение устойчиво.

Пример2

Модельная система уравнений, описывающая субкритическую бифуркацию Андронова-Хопфа имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 - \omega_0 x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= \omega_0 x_1 + ax_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{aligned}$$

Аналогично примеру 1, эта система приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(a + r^2) \\ \dot{\varphi} &= \omega_0. \end{aligned}$$

Здесь типичный случай подкритической бифуркации типа вилка, при котором при $a > 0$ есть устойчивое состояние с $r = 0$ и неустойчивое с $r = \sqrt{-a}$, а при $a < 0$ только неустойчивое состояние с $r = 0$. Фазопараметрическая диаграмма приведена на рис. 4.3.3б.

Модельная система для бифуркации Андронова-Хопфа часто

записывается в виде следующего одного уравнения [2,19]

$$\dot{A} = (a + i\omega_0)A + L_1 A |A|^3,$$

где $A = x_1 + ix_2 = r \exp i\phi$ - мгновенная комплексная амплитуда, представляющая состояние системы точкой на комплексной плоскости L_1 , называется **первой ляпуновской величиной** состояния равновесия. Откуда получаем

$$\dot{r} = ar + L_1 r^3, \quad \dot{\phi} = \omega_0.$$

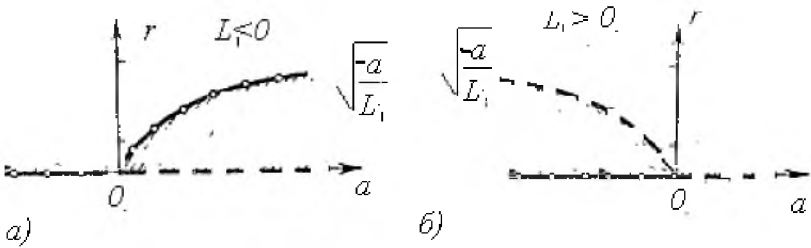


Рис. 4.3.3. Фазопараметрические диаграммы мягкой (а) и жёсткой бифуркаций Андронова-Хопфа [2]

При $L_1 < 0$ -бифуркация суперкритическая, при $L_1 > 0$ -субкритическая. При $L_1 = 0$ характер бифуркации нуждается в дополнительном анализе с учётом высших степеней A .

В рассмотренных выше примерах 1,2 (рис. 4.3.3) имеем $L_1 = -1$ и $+1$, соответственно.

Пример 3

Рассмотрим пример ещё одной модельной системы, описывающей рождение устойчивого предельного цикла при жёстком возбуждении [23]

$$\dot{r} = r(a + r^2 - r^4)$$

$$\dot{\phi} = \omega_0.$$

Радиальные стационарные состояния здесь

$$r = 0, \quad r^2 = 0.5 \pm 0.5(1 + 4a)^{0.5}$$

Состояние $r = 0$ (неподвижная точка) устойчиво при $a < 0$ и не устойчиво при $a > 0$.

Периодические решения существуют только при $a > -0.25$ (точка поворота на фазопараметрической диаграмме), причём цикл меньшего периода существует только при $-0.25 < a < 0$.

В области $-0.25 < a < 0$ цикл меньшего периода неустойчив, а большего периода устойчив. При $a > 0$ остаётся один устойчивый цикл большого периода.

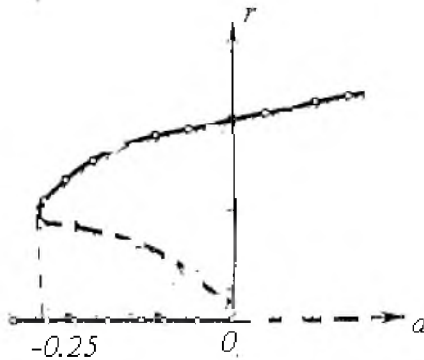


Рис. 4.3.4. Фазопараметрическая диаграмма динамической системы с гистерезисом

Нарисуем фазопараметрическую диаграмму (рис. 4.3.4). При $a < 0$ имеется единственное устойчивое стационарное состояние $r = 0$, колебаний нет. При увеличении параметра в области $-0.25 < a < 0$ существует уже два аттрактора: устойчивый предельный цикл и устойчивое состояние равновесия. Таким образом, система становится бистабильной. Реализация конкретного типа устойчивого поведения зависит от предыстории системы (начального состояния). Такой феномен называется **эффектом гистерезиса**. Если система находилась в состоянии равновесия, то малые возмущения (в пределах бассейна притяжения данного аттрактора) не смогут перевести её в периодический режим. При дальнейшем увеличении параметра и его переходе через ноль происходит жёсткая бифуркация Андронова-Хопфа. Состояние равновесия становится

неустойчивым, и система переходит скачкообразным образом в автоколебательный режим конечной амплитуды. Если теперь опять уменьшить параметр a , то в области $-0.25 < a < 0$ автоколебательный режим сохранится. Срыв автоколебательного режима возможен только при сильных возмущениях, переводящих систему в бассейн притяжения устойчивого состояния равновесия. При этом бассейн притяжения устойчивого состояния равновесия иногда образно называется **чёрной дырой** [8]. Подобные явления наблюдаются, например, в медицине (внезапная смерть).

Заметим, что в точке суперкритической бифуркации начало координат является асимптотически устойчивой неподвижной точкой.

Знание этого факта помогает при определении типа бифуркации (суперкритическая или субкритическая), когда сложно найти первую ляпуновскую величину.

Пример 4

Для системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 - \omega_0 x_2 - \omega_0 x_1 (x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= \omega_0 x_1 + ax_2 - x_2 (x_1^2 + x_2^2) \quad \omega_0 > 0 \end{aligned}$$

бифуркация Андронова-Хопфа происходит в точке $a = 0$. Асимптотическую устойчивость состояния равновесия (начало координат) в точке бифуркации легко установить с помощью функции Ляпунова $V = x_1^2 + x_2^2$. Это сильная функция, так как $\dot{V} = -2(x_1^2 + x_2^2)(\omega_0 x_1^2 + x_2^2) < 0$ везде, кроме начала координат.

4.4 Основные типы бифуркаций периодических решений

Рассмотрим локальные бифуркации коразмерности 1, возможные для предельных циклов [1,2,26].

Расположим мультипликаторы в порядке убывания по модулю, исключив мультипликатор, тождественно равный единице. Тогда бифуркации предельного цикла будут связаны с одним или двумя (комплексно сопряжёнными) первыми мультипликаторами этой

последовательности - $\mu_{1,2}$. Поскольку коразмерность 1 означает наличие только одного бифуркационного условия, а смена устойчивости цикла определяется равенством $|\mu_1|=1$, возможны всего три случая, соответствующие различным локальным бифуркациям предельного цикла в точке бифуркации $a = a_0$: $\mu_1 = +1$, $\mu_1 = -1$, $\mu_{1,2} = \exp(\pm i\varphi)$.

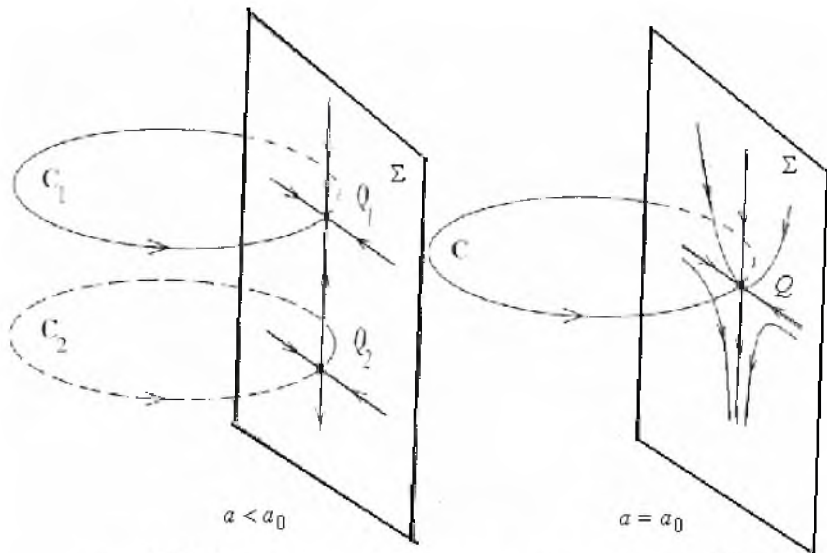


Рис. 4.4.1. Седло - узловая бифуркация предельных циклов [1]

Одним из наиболее удобных методов анализа бифуркаций предельных циклов является метод **отображений Пуанкаре** (раздел 2.13).

Теорема

Собственные значения матрицы линеаризации k - цикла отображения (их $(N - 1)$), дополненные единичным мультипликатором, строго совпадают с мультипликаторами соответствующего предельного цикла непрерывной системы.

На этом основании устойчивость периодических колебаний в N - мерных дифференциальных системах количественно характеризуется

мультипликаторами соответствующего k -цикла в отображении Пуанкаре. При ($N = 2$) мультипликатор одномерного отображения единственен и просто совпадает с производной от функции последования df/dx в неподвижной точке.

4.4.1 Бифуркация рождения - исчезновения двух предельных циклов (седло-узловая бифуркация предельных циклов)

При этой бифуркации происходит слияние устойчивого цикла с седловым циклом (неустойчивым циклом в двумерном пространстве) или, наоборот, рождение этой пары циклов из сгущения фазовых траекторий (рис. 4.4.1). В точке бифуркации образуется негрубая замкнутая траектория (седло-узловой цикл или в двумерном пространстве полуустойчивый цикл). При этом старший мультипликатор (не считая единичного) $\mu_1 = +1$.

Это жёсткая бифуркация, аналогичная рассмотренной в 4.2.1 седло-узловой бифуркации состояния равновесия. Рассмотрим для наглядности данную бифуркацию цикла в трёхмерном фазовом пространстве (рис. 4.4.1). При $a < a_0$ имеются два цикла: устойчивый C_1 и седловой C_2 . В двумерном сечении Пуанкаре плоскостью Σ им соответствуют устойчивая Q_1 и седловая Q_2 неподвижные точки. В точке бифуркации $a = a_0$ циклы сливаются, образуя негрубую замкнутую траекторию C седло-узлового типа. Неподвижные точки в сечении Пуанкаре также сливаются в негрубую неподвижную точку Q называемую седло-узел. При $a > a_0$ циклы и неподвижные точки отображения исчезают. При обратном изменении управляющего параметра наблюдается рождение пары циклов C_1 и C_2 (рождение пары точек отображения, соответственно) из сгущения фазовых траекторий.

4.4.2 Бифуркация удвоения периода цикла

Бифуркация удвоения периода цикла происходит, если в точке бифуркации ($a = a_0$) старший (не считая единичного) мультипликатор $\mu_1 = -1$, причём $d\mu_1/da|_{a_0} \neq 0$. Эта бифуркация возможна только в системах с фазовым пространством $N \geq 3$. Бифуркация удвоения периода

цикла может быть суперкритической (мягкой) и субкритической (жесткой). Для определённости будем считать $d|\mu_1|/da|_{a_0} > 0$.

Тогда при мягкой бифуркации происходит следующее. Устойчивый при $a < a_0$ предельный цикл C_1 с периодом T_1 при $a > a_0$ становится седловым, а в его окрестности мягко рождается устойчивый предельный цикл C_2 с периодом $T_2 \approx 2T_1$ (асимптотически при $a \rightarrow a_0$ рождаемый цикл имеет точно двойной период и ту же амплитуду), который замыкается после двух обходов (рис. 4.4.2, рис. 4.4.3). Седловой цикл C_1 пересекает сечение Пуанкаре Σ в единственной точке \bar{x}_0 , которая является седловой неподвижной точкой отображения. Цикл с удвоенным периодом пересекает Σ дважды, в точках \bar{x}_1 и \bar{x}_2 , причём с помощью функции последования \bar{f} можно записать

$$\bar{x}_2 = \bar{f}(\bar{x}_1) = \bar{f}^2(\bar{x}_2); \quad \bar{x}_1 = \bar{f}(\bar{x}_2) = \bar{f}^2(\bar{x}_1).$$

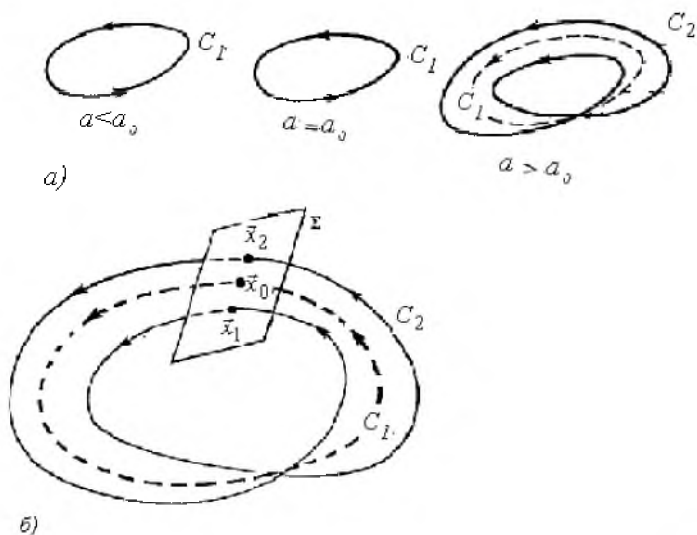


Рис. 4.4.2. а) Мягкая бифуркация удвоения периода цикла; б) 2-цикл (\bar{x}_1, \bar{x}_2) в сечении Пуанкаре Σ

Таким образом, мягкой бифуркации удвоения периода цикла соответствует бифуркация неподвижной точки \bar{x}_0 отображения Пуанкаре, при которой от \bar{x}_0 ответвляется 2-цикл, состоящий из двух неподвижных точек второй итерации (\bar{x}_1 и \bar{x}_2).

При жёсткой бифуркации удвоения периода цикла происходит следующее. При $a < a_0$ существует устойчивый предельный цикл C_1 с периодом T_1 и седловой предельный цикл C_2 с периодом $T_2 \approx 2T_1$. В точке бифуркации происходит их слияние, а затем при $a > a_0$ остаётся только цикл C_1 , ставший седловым.

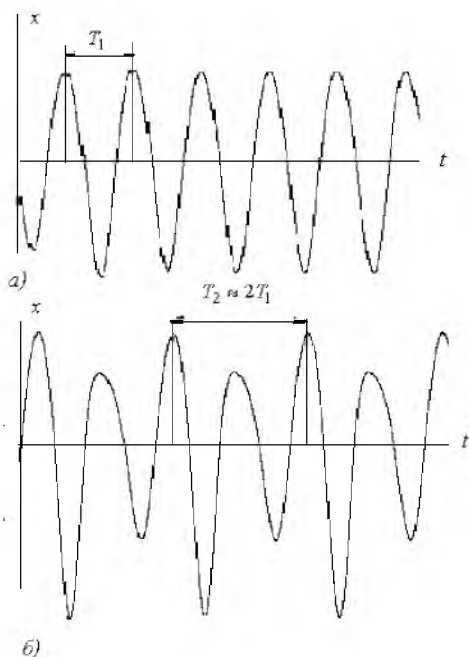


Рис. 4.4.3. Качественная форма устойчивых колебаний до мягкой бифуркации удвоения периода цикла (а) и после бифуркации (б)

4.4.3 Бифуркация рождения (гибели) двумерного тора

Условием этой бифуркации является появление пары комплексно-сопряжённых мультипликаторов $\mu_{1,2}(a = a_0) = \exp(\pm i\varphi)$, где $\varphi \in [0, 2\pi]$, причём $\varphi(a_0) \neq 0, 2\pi, 2\pi/3$ [2]. Бифуркация может быть суперкритической (мягкой) и субкритической (жёсткой). Минимальная размерность фазового пространства $N = 3$.

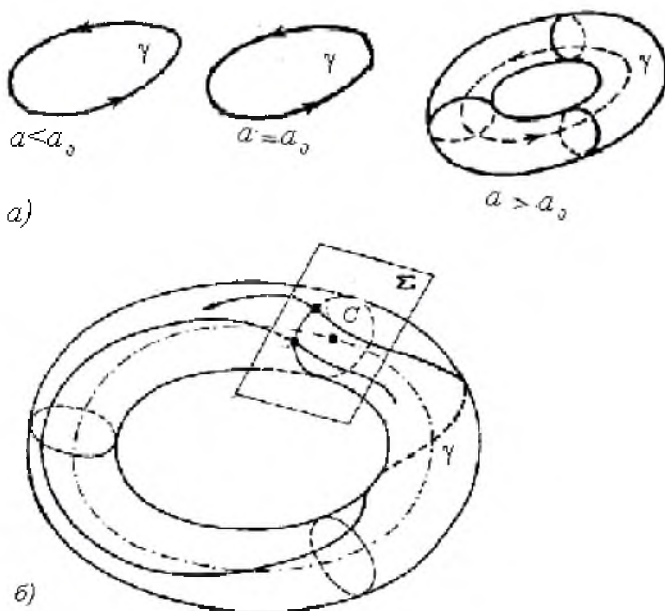


Рис. 4.4.4. а) Бифуркация рождения двумерного тора из предельного цикла; б) Траектория на торе и в сечении Пуанкаре Σ

При жёсткой бифуркации в устойчивый цикл влипают неустойчивый (в общем случае седловой) двумерный тор, в результате чего цикл теряет устойчивость.

При мягкой бифуркации из устойчивого предельного цикла γ рождается устойчивый инвариантный двумерный тор, заполненный фазовыми траекториями системы, а сам цикл становится неустойчивым

(рис. 4.4.4). Дальнейшее «разбухание» тора можно сравнить с накачкой автомобильной шины. При этом в сечении Пуанкаре происходит бифуркация неподвижной точки x_0 , при которой от точки x_0 ответвляется инвариантная окружность C . Радиус инвариантной окружности увеличивается с ростом управляющего параметра как $r \sim \sqrt{a - a_0}$. Таким образом, бифуркация рождения тора, представленная в сечении Пуанкаре, аналогична бифуркации Андронова-Хопфа для состояния равновесия потоковой (непрерывной) системы, поэтому её часто называют бифуркацией Андронова-Хопфа в отображении.

Тор имеет правильную форму только вблизи точки бифуркации. При удалении от этой точки форма тора обычно искажается. Соответственно в сечении Пуанкаре будет не окружность, а инвариантная замкнутая кривая, топологически эквивалентная окружности.

Если угол φ в момент бифуркации оказывается целочисленным кратным 2π , то точки пересечения траекторий системы с плоскостью Пуанкаре Σ образуют периодическую последовательность, k – цикл на C . Траектории, сделав k – оборотов на поверхности тора, всё-таки замыкаются. В результате образуется так называемый резонансный предельный цикл на торе. В результате наблюдается сложное, но периодическое движение.

Если отношение $\varphi/2\pi$ в момент бифуркации оказывается иррациональным, то любая траектория на торе не замыкается и родившийся тор является эргодическим. Движение называется эргодичным, если фазовая траектория всюду плотно заполняет некоторый доступный фазовый объём в фазовом пространстве. Это означает, что траектории возвращаются бесконечное число раз в сколь угодно малую окрестность любой точки аттрактора (устойчивость по Пуассону).

Двумерный эргодический тор соответствует квазипериодическому движению с иррациональным соотношением двух частот.

4.4.4 Бифуркация предельного цикла типа вилки

При мягкой бифуркации предельного цикла типа вилки (вилообразная бифуркация) устойчивый предельный цикл C_0 в точке бифуркации $a = a_0$ не исчезает, а становится седловым. Одновременно от него ответвляются

два устойчивых цикла C_1, C_2 того же периода (рис. 4.4.5). При этом старший мультипликатор (не считая единичного) $\mu_1 = +1$, как при седло-узловой бифуркации. При жёсткой вилообразной бифуркации с устойчивым циклом C_0 сливается пара седловых циклов C_1, C_2 , и в результате образуется один седловой цикл C_0 .

Мягкой вилообразной бифуркации соответствует бифуркация неподвижной точки отображения Пуанкаре, при которой от этой точки ответвляются две другие неподвижные точки отображения Пуанкаре.

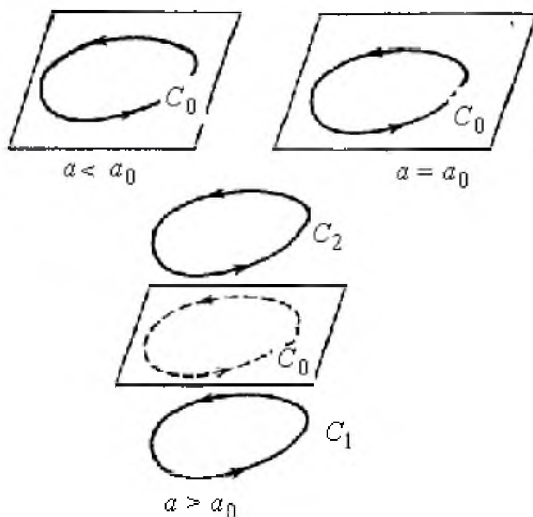


Рис.4.4.5. Мягкая бифуркация предельного цикла типа вишки

4.5 Нелокальные бифуркации

Нелокальные бифуркации связаны с поведением многообразий седловых предельных множеств. Они не приводят к топологическим изменениям самих седловых множеств, но могут оказывать принципиальное влияние на динамику системы. Для исследования нелокальных бифуркаций линейного анализа вблизи точки бифуркации

недостаточно. Рассмотрим основные изученные на сегодняшний день нелокальные бифуркации.

4.5.1 Бифуркация образования петли сепаратрисы седла и седла-фокуса.

Гомо- и гетероклинические траектории. Седловые величины.

Теорема Шильникова

Эта бифуркация возможна при размерности фазового пространства $N \geq 2$.

1). Рассмотрим сначала эту бифуркацию при $N = 2$. Пусть имеется седловое состояние равновесия Q , устойчивое (W_Q^S) и неустойчивое (W_Q^U) многообразия которого при увеличении параметра a сближаются, а при $a = a_0$ касаются друг друга с образованием петли сепаратрисы Γ (рис. 4.5.1). Петля сепаратрисы седла представляет собой пример негрубой двояко-асимптотической **гомоклинической (гомоклинной)** траектории [1,26]. По определению, гомоклинические траектории - это траектории входящие и выходящие из одной и той же особой точки (типа седло, седло-фокус, негрубая особая точка седло-узел), а также траектории, образуемые при касании или пересечении устойчивого и неустойчивого многообразий седлового цикла. В отличие от них **гетероклинические траектории** - это траектории, которые выходят из одной особой точки и входят в другую особую точку, а также траектории, возникающие при касании и пересечении неустойчивого многообразия одного седлового цикла с устойчивым многообразием другого седлового цикла.

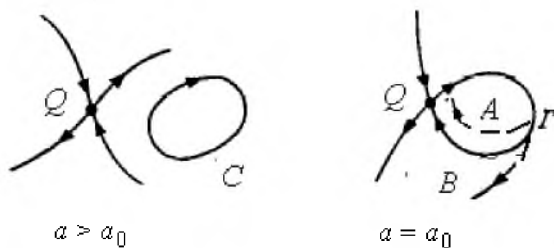


Рис. 4. 5. 1. Бифуркация образования петли сепаратрисы седла

В диссипативной системе петля сепаратрисы является негрубым образованием, то есть структурно неустойчивым, так как разрушается при любом малом шевелении параметра. Периодическое движение по петле сепаратрисы соответствует периоду равному бесконечности, причём оно не устойчиво и не реализуется в системе с сосредоточенными параметрами (точечной системе). Что произойдёт при $a > a_0$ зависит от того, какова седловая величина σ_Q состояния равновесия в точке бифуркации и в каком направлении пойдут сепаратрисы седла после их расщепления (то есть после разрушения петли). Определение направления разрушения петли сепаратрисы требует нелинейного анализа.

Седловая величина определяется как $\sigma_Q(a) = \lambda_1(a) + \lambda_2(a)$, где $\lambda_{1,2}$ - собственные значения матрицы линеаризации в точке Q .

Возможны следующие ситуации

1. $\sigma_Q(a_0) < 0$ и разрушение петли в сторону A .

В этом случае из петли рождается устойчивый предельный цикл C (рис. 4. 5. 1).

2. $\sigma_Q(a_0) < 0$ и разрушение петли в сторону B .

Цикл не рождается.

3. $\sigma_Q(a_0) > 0$.

Петля Γ называется неустойчивой, и рождение устойчивого предельного цикла не возможно.

Рассмотренная в обратном порядке бифуркация образования сепаратрисной петли может трактоваться как кризис (жёсткая бифуркация) предельного цикла C в результате его касания седла Q . В момент касания образуется петля сепаратрисы Γ . При приближении к точке бифуркации период цикла стремится к бесконечности по закону $T(\varepsilon) = c \ln(\varepsilon^{-1}) + c_0, \varepsilon = a - a_0$, а мультипликаторы цикла - к нулю. Приодическое движение вблизи точки бифуркации выглядит как некоторая последовательность импульсов, частота следования которых стремится к нулю при подходе к бифуркационному значению. В теории точечных систем (например, в теории колебаний) импульс, соответствующий движению по сепаратрисе получить не возможно. В физических

экспериментах фиксируется только увеличение периода колебаний и вблизи точки бифуркации колебания жестко срываются, сменяясь каким-либо иным режимом, так как петля сепаратрисы является негрубой траекторией.

2). В пространстве $N \geq 3$ возможен более сложный случай нелокальной бифуркации подобного типа. Рассмотрим его для $N = 3$.

Пусть Q - седло-фокус с одномерным неустойчивым $\lambda_3 > 0$ и двумерным устойчивым многообразиями $\text{Re}\lambda_{1,2} < 0$.

Введём в рассмотрение **первую и вторую седловые величины**

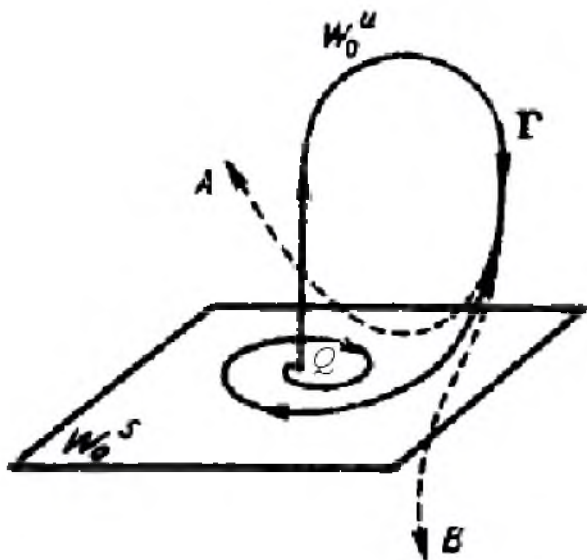


Рис.4.5.2. Петля сепаратрисы седло-фокуса и возможные направления её разрушения (A и B)[1]

$$\sigma_1(a) = \text{Re}\lambda_{1,2} + \lambda_3, \sigma_2(a) = 2\text{Re}\lambda_{1,2} + \lambda_3.$$

Предположим, что в точке бифуркации $a = a_0$ в системе существует гомоклиническая траектория Γ , которая выходит из особой точки Q и при $t \rightarrow \infty$ возвращается в Q . То есть имеется петля сепаратрисы седло - фокуса (рис.4.5.2).

Пусть седловые величины в точке бифуркации отличны от нуля. При сделанных предположениях справедлива **теорема Шильникова**[1], утверждающая следующее.

1. В случае **неопасной петли** $\sigma_1(\alpha^*) < 0$ и разрушении петли в сторону *A* из петли Γ рождается устойчивый цикл, аналогично рис. 4.5.1.

2. В случае **неопасной петли** $\sigma_1(\alpha^*) < 0$ и разрушении петли в сторону *B* рождения цикла не происходит.

3. В случае **опасной петли** $\sigma_1(\alpha^*) > 0$ в окрестности петли Γ в момент её существования, а также при её разрушении как в сторону *A*, так и в сторону *B*, может существовать так называемое **нетривиальное гиперболическое множество**. Это сложная структура фазовых траекторий, состоящая из счётного множества периодических аттракторов, репеллеров и сёдел, а также хаотических траекторий. При некоторых условиях это множество может быть странным аттрактором, однако этот факт надо исследовать самостоятельно.

Если исследуемая система имеет седло-фокус с одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым многообразиями, то для применения теоремы Шильникова нужно просто произвести инверсию времени ($t \rightarrow -t$).

4.5.2 Бифуркация образования петли сепаратрисы негрубой особой точки седло-узел

Эта бифуркация возможна уже при $N = 2$. Она состоит в следующем (рис. 4.5.3).

Пусть при $a < a_0$ существуют два состояния равновесия: седло Q_1 и устойчивый узел Q_2 , причём неустойчивые сепаратрисы седла, замыкаясь на узел, образуют сепаратрисный контур Γ . В точке бифуркации $a = a_0$ происходит седлоузловая бифуркация состояний равновесия с образованием негрубого состояния равновесия Q типа седло - узел. Но в отличие от рассмотренного ранее случая такой бифуркации, седло-узел имеет двоякоасимптотическую гомоклиническую траекторию Γ , т.е. сепаратрисную петлю. При $a > a_0$ особая точка седло - узел исчезает, а из петли рождается предельный цикл C .

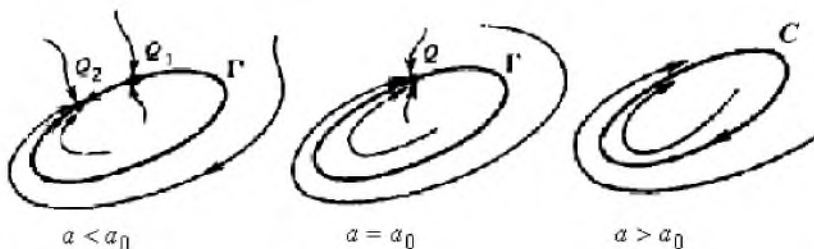


Рис. 4.5.3. Бифуркация образования петли сепаратрисы негрубой особой точки седло-узел [1]

Рассмотренная в обратном порядке, эта бифуркация представляет собой бифуркацию исчезновения цикла в результате образования на нём негрубой особой точки седло-узел. Период цикла при $a \rightarrow a_0$ стремится к бесконечности по закону $T(\varepsilon) = c(\varepsilon^{-1/2})$, $\varepsilon = a - a_0$, мультипликаторы стремятся к нулю.

Данная бифуркация является мягкой.

4.5.3. Возникновение гомоклинической траектории седлового предельного цикла. Гомоклиническая структура

Такая бифуркация возможна только при $N \geq 3$. В этом случае могут существовать седловые предельные циклы с двумерными устойчивым и неустойчивым многообразиями (W^s, W^u). Пример фазового портрета в окрестности седлового предельного цикла в трёхмерном фазовом пространстве приведён на рис. 4.5.4а [1]. Любая траектория, принадлежащая W^s , асимптотически стремится к седловому циклу C при $t \rightarrow \infty$, а по W^u удаляется от цикла (асимптотически стремится к C при $t \rightarrow -\infty$). В сечении Пуанкаре такому циклу соответствует седловая неподвижная точка x_0 (рис. 4.5.4 б). Её устойчивая Γ^s и неустойчивая Γ^u сепаратрисы одномерны. Предположим, что с ростом параметра a многообразия цикла сближаются и при $a = a_0$ происходит их касание, что

соответствует бифуркации образования негрубой двойкоасимптотической гомоклинической кривой Γ . При $a > a_0$ устойчивое и неустойчивое многообразия пересекаются и образуется грубая гомоклиническая траектория, в сечении Пуанкаре которой появляется счётное множество точек пересечения (гомоклинических точек) Q_1, Q_2, \dots, Q_n . Приближаясь к седлу, x_0 они уплотняются, но стремятся к седлу лишь в пределе $n \rightarrow \infty$.

В результате в окрестности гомоклинической траектории седлового цикла образуется сложное множество траекторий, называемое **гомоклинической структурой**. Оно подобно нетривиальному гиперболическому подмножеству вблизи петли сепаратрисы седло-фокуса.

Аналогичную гомоклиническую структуру имеет окрестность **гетероклинической траектории**, возникающей при касании и пересечении неустойчивого многообразия одного седлового цикла с устойчивым многообразием другого седлового цикла.

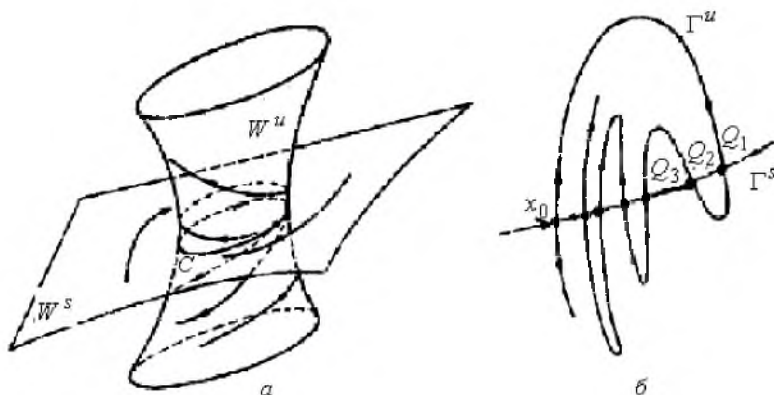


Рис. 4.5.4. Устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия седлового цикла (а) и их взаимопересечение в сечении Пуанкаре (б) [1,2]

Наличие гомоклинической структуры в нелинейных диссипативных системах является необходимым условием возникновения динамической

стохастичности[1,2]. Но для реализации режима странного аттрактора этого ещё недостаточно. Нужно, чтобы для значений параметров системы, отвечающих области существования гомоклинической структуры, регулярные аттракторы либо отсутствовали, либо потеряли устойчивость. Если это условие выполнено и все траектории на аттракторе седловые, то возникает в строгом смысле динамический хаос, математическим образом которого является странный аттрактор.

4.6 Понятие о распределённых динамических системах

4.6.1 Устойчивость стационарного решения дифференциальных уравнений в частных производных. Бифуркация Андронова-Хопфа в распределённых системах

Если динамические переменные системы являются функциями пространственных координат, то размерность фазового пространства бесконечна. Такие системы называются системами с **распределёнными параметрами** или просто **распределёнными системами**. Распределённые системы чаще всего описываются дифференциальными уравнениями в частных производных или интегральными уравнениями. Ограничим наше рассмотрение уравнениями в частных производных.

Если решение уравнения в частных производных имеет вид $u(z, t) = u_0(z)$, то есть не зависит от времени, то оно называется **стационарным решением**. Стационарное решение является устойчивым лишь в том случае, если профили возмущённого стационарного решения сходятся при $t \rightarrow \infty$ к стационарному решению $u_0(z)$.

Пример 1

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (4.6.1)$$

с граничными условиями вида

$$u(0, t) = u(L, t) = 0.$$

Стационарными решениями уравнения (4.6.1) являются решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 u_0}{dz^2} = 0,$$

то есть $u_0(z) = C_1 z + C_2$. С учётом граничных условий получаем единственное стационарное решение в виде $u_0(z) = 0$.

Для рассматриваемого простейшего примера оператор $\hat{F} = d^2 / dz^2$ в правой части (4.6.1) является линейным и можно уже непосредственно найти его собственные числа λ , такие, что $\hat{F}u = \lambda u$, где u не равная нулю ограниченная функция, удовлетворяющая граничным условиям, то есть

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dz^2} - \lambda u &= 0, \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0. \end{aligned}$$

Оператор \hat{F} имеет в данном случае только вещественные значения. При $\lambda \geq 0$ решение уравнения записывается в виде

$$u(z) = C_1 e^{\sqrt{\lambda z}} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda z}}.$$

С учётом первого граничного условия получаем

$$u(z) = C_1 (e^{\sqrt{\lambda z}} - e^{-\sqrt{\lambda z}}).$$

Таким образом, $u(z) = 0$ при $\lambda = 0$. Учёт второго граничного условия при $\lambda > 0$ также приводит к $u(z) \equiv 0$. Таким образом, оператор не имеет неотрицательных собственных чисел.

При $\lambda < 0$ решение имеет вид

$$u(z) = C \sin \sqrt{|\lambda|} z.$$

Из второго граничного условия следует $\sqrt{|\lambda|} = k\pi / L$, то есть $\lambda_k = -k^2 \pi^2 / L^2, k = 1, 2, \dots$.

Так как все собственные числа располагаются слева от мнимой оси, то стационарное решение $u_0(z) = 0$ уравнения (4.6.1) устойчиво.

Решение $u(z, t)$ уравнения с частными производными, удовлетворяющее условию $u(z, t+T) = u(z, t)$ при любом $t \geq 0$ и $z \in [0, L]$ называется **периодическим** с периодом T .

Стационарные состояния распределённых систем претерпевают бифуркации точно так же, как и положения равновесия точечных систем. В частности в случае **бифуркации Андронова-Хопфа** от стационарного решения ответвляется периодическое решение этого уравнения с периодом $T = 2\pi/\omega_0$. Условия возникновения бифуркации Андронова-Хопфа те же: в точке бифуркации $a = a_0$ пара взаимно сопряжённых комплексных собственных чисел линеаризованного уравнения трансверсально пересекают мнимую ось в точках $\pm i\omega_0$, а остальные собственные числа имеют отрицательную реальную часть [26].

4.6.2 Стационарные волны. Волновые решения типа бегущего импульса и типа бегущего фронта

Ограниченные решения уравнения в частных производных типа **стационарной бегущей волны** $u(z, t) = \phi(z - ct) = \phi(\xi)$ представляют собой некоторый стационарный профиль, движущийся вдоль оси z с постоянной скоростью c без изменения формы. Исходное уравнение в частных производных при постановке решения в виде стационарной волны приводится к так называемому автомодельному уравнению [26]. Например, из уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f(u),$$

рассматривая его при $t \geq 0, z \in (-\infty, +\infty)$, получаем

$$-c \frac{d\phi}{d\xi} = D \frac{d^2\phi}{d\xi^2} + f(\phi).$$

Его можно переписать в виде системы двух уравнений, положив $x_1 = \phi, x_2 = \phi'$: $x_1' = x_2, x_2' = -\frac{c}{D}x_2 - f(x_1)$.

Здесь штрихом обозначена производная $d/d\xi$.

Эту автомодельную систему уравнений можно исследовать стандартным образом на фазовой плоскости x_1, x_2 . Стационарным волнам на фазовой плоскости соответствуют только гомо- и гетероклинические траектории, а также предельные циклы.

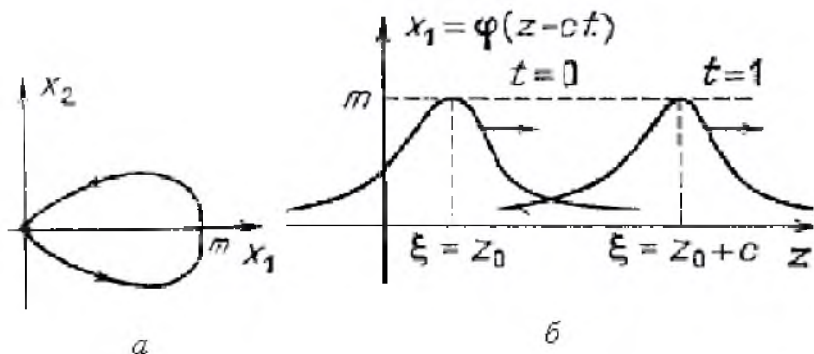


Рис. 4.6.1. Гомоклиническая траектория (а) и соответствующая ей стационарная волна типа бегущего импульса (б)[26]

Предельному циклу на фазовой плоскости соответствует **периодическая** стационарная волна. Гомоклинической траектории (петле сепаратрисы), выходящей из и входящей в одну и ту же особую точку, соответствует стационарная волна типа **бегущего импульса** (рис. 4.6.1).

Гетероклинической траектории, выходящей из одного состояния равновесия и входящей в другое состояние равновесия, соответствует волна типа **бегущего фронта** (волна перепада) (рис. 4.6.2).

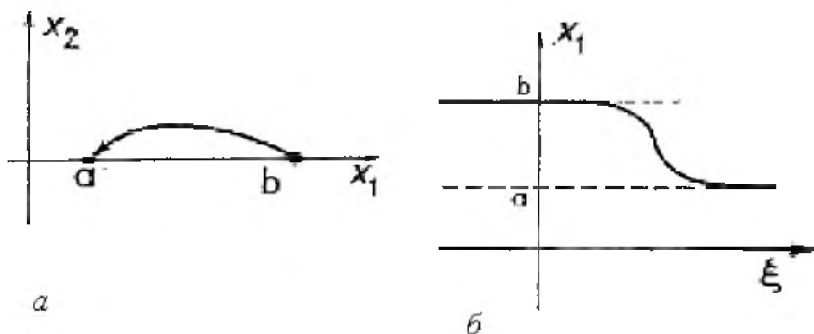


Рис. 4.6.2. Гетероклиническая траектория (а) и соответствующая ей стационарная волна типа бегущего фронта (б)[26]

Для фазовых пространств с

$$N \geq 3$$

могут возникать и более сложные по форме волны, например, бегущие импульсы с различным числом больших всплесков и осциллирующими «хвостами» или непериодические хаотические волны.

Возникает вопрос об устойчивости стационарных волн или более общий – об **эволюционности** таких структур, то есть возможности их формирования из более широкого класса начальных возмущений. Естественно, что фазовое пространство стационарных волн – всего лишь «вершина айсберга», множество меры ноль по отношению ко всему множеству решений исходных нестационарных уравнений [21]. Поэтому устойчивость траектории (например, предельного цикла) на фазовой плоскости вовсе не гарантирует реальной устойчивости волны, а неустойчивость её – истинной неустойчивости во времени [21,22].

Среди фазовых траекторий на волновой фазовой плоскости особого внимания заслуживают сепаратрисы. На них особенно ясно выявляются различия в роли аналогичных типов решений в случаях колебаний и волн. Для точечных систем сепаратриса – негрубое образование, в сущности, нереализуемое решение, граница между областями фазового пространства с топологически разными типами траекторий. В распределённых же системах «сепаратрисные» волны, к которым относятся ударные волны, солитоны, ряд автоволн, не только существуют, но и принадлежат к наиболее характерным структурам [21,22].

4.6.3. Пример исследования распределённой динамической системы. Акустические волны [16]

Нелинейная эволюция акустического возмущения $v(x, t) \sim \theta \ll 1$ произвольного спектрального состава в неравновесном газе со слабой дисперсией (выражаемой малостью параметра $m = (c_0^2 - c_\infty^2) / c_\infty^2 \sim \theta$) и малой диссипацией ($\eta_\infty, \eta_0 \ll 1$) описывается следующим уравнением в частных производных

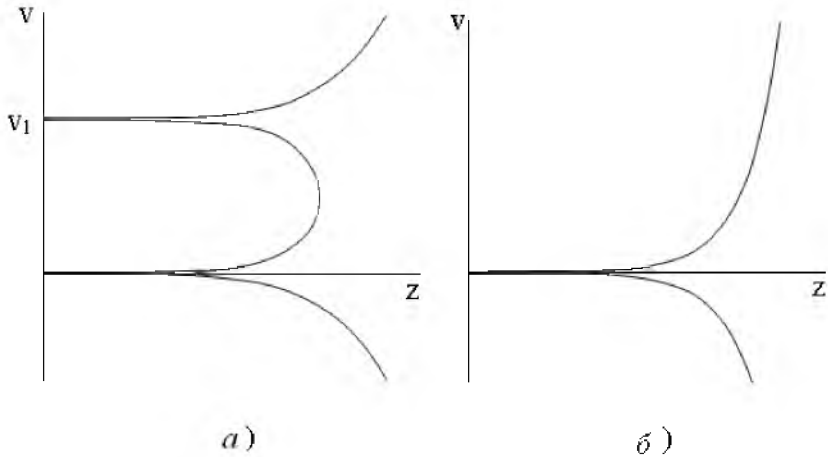


Рис. 4.6.3. Интегральные кривые, описываемые уравнением (4.6.4) при разных значениях величины v_1 : а) $0 < v_0 < v_1$; б) $v_0 = v_1$

$$(v_{tt} - c_\infty^2 v_{xx} - \Psi_\infty v_{xx}^2 - 2\eta_\infty v_{xxt})_t + (v_{tt} - c_0^2 v_{xx} - \Psi_0 v_{xx}^2 - 2\eta_0 v_{xxt}) = 0.$$

Для волн, бегущих в одном направлении, это уравнение преобразуется к виду

$$(v_y + \frac{\Psi_\infty}{2} v_\zeta^2 - \eta_\infty v_{\zeta\zeta})_\zeta - (v_y + \frac{m}{2} v_\zeta + \frac{\Psi_0}{2} v_\zeta^2 - \eta_0 v_{\zeta\zeta}) = 0, \quad (4.6.2)$$

где $\zeta = x - c_\infty t$, $y = \theta t$, $\theta \ll 1$ (метод медленно изменяющегося профиля, широко используемый в теории нелинейных волн).

Преобразуем (4.6.2) к стационарной форме, используя автомодельную замену ($z = \zeta - w y$, w – скорость стационарной волны):

$$v_{zz} + v_z \left[\left(\frac{w}{\eta_\infty} - \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right) - \frac{\Psi_\infty}{\eta_\infty} v \right] + \frac{[-(w - \frac{m}{2})v + \frac{\Psi_0}{2} v^2]}{\eta_\infty} = c, \quad (4.6.3)$$

где c – константа интегрирования. Ниже полагается $c=0$, что всегда справедливо для возмущений (и их производных), обращающихся в нуль при $z \rightarrow \infty$. При $\eta_\infty = \eta_0 = 0$ уравнение (4.6.3) сводится к виду

$$\frac{dv}{dz} = \frac{v(v-v_1)}{\sigma(v-v_0)}. \quad (4.6.4)$$

Таким образом, решение уравнения в неявном виде будет

$$z = z_0 + \frac{\sigma v_0}{v_1} \ln |v| + \frac{\sigma(v_1 - v_0)}{v_1} \ln |v - v_1|,$$

где z_0 - произвольная постоянная,

$$\sigma = \frac{2\Psi_\infty}{\Psi_0}, \quad v_0 = \frac{w}{\Psi_\infty}, \quad v_1 = \frac{2w - m}{\Psi_0}.$$

На рис. 4.6.3 представлены интегральные кривые уравнения (4.6.4) при условиях $v_0 < v_1$ и $v_0 = v_1$. Им соответствуют три типа разрывных решений, вид которых приведён на рис. 4.6.4.

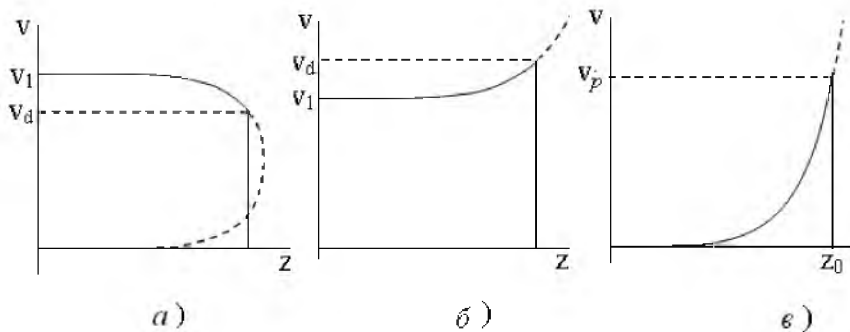


Рис. 4.6.4. Форма стационарных газодинамических возмущений при нулевых вязкостно-теплопроводностных коэффициентах: а) ударная волна с плавным увеличением амплитуды за разрывом; б) ударная волна с плавным уменьшением амплитуды; в) стационарный ударно – волновой импульс

Решения, показанные на рис. 4.6.4,а,б, описываются интегральной кривой с разрывами на средней ($v_1 > v_d$, рис. 4.6.4,а) или верхней ветви

($v_1 < v_d$, рис. 4.6.4,б). Место разрыва определяется величиной скачка газодинамического возмущения

$$v_d = \frac{2w}{\Psi_\infty} = 2v_0. \quad (4.6.5)$$

Выражение (4.6.5) получается после интегрирования уравнения (4.6.3) вблизи разрыва.

Значение v_1 определяет величину возмущения при $z \rightarrow -\infty$, скорость распространения стационарной волны

$$w = \frac{\Psi_\infty}{2} v_d = \frac{\Psi_0}{2} v_1 + \frac{m}{2} \quad (4.6.6)$$

и условие существования данных типов решения. Согласно (4.6.6) получаем

$$v_d = \frac{\Psi_0 v_1 - 2v_0 \xi}{\Psi_\infty}.$$

Откуда следует, что решение, приведённое на рис. 4.6.4,а (плавное нарастание возмущения за разрывом), существует при $v_1 > v_{cr} = m/(\Psi_\infty - \Psi_0)$. Здесь и ниже полагается $\Psi_\infty > \Psi_0 > 0$. Легко показать, что при $v_1 > v_{cr}$ высокочастотные возмущения конечной амплитуды обгоняют низкочастотные: $\Psi_\infty c_\infty v_1 / 2 + c_\infty > \Psi_0 c_\infty v_1 / 2 + c_0$.

В равновесных релаксирующих средах $m < 0$ и условие $v_1 > v_{cr}$ выполняется всегда, а скачок (4.6.6) существует только при $v_1 > -m/\Psi_0$.

В неравновесной среде при $m > 0$ условие $v_1 > v_{cr}$ может нарушаться. При $v_0 < v_1 < v_{cr}$ появляется возможность существования стационарной волны иного типа (рис. 4.6.4,б): за разрывом происходит плавное уменьшение амплитуды возмущения от v_d (4.6.6) до v_1 .

Рассмотрим теперь решение уравнения (4.6.4) при $v_1 \leq v_0$, соответствующее интегральной кривой уравнения, показанной на рис. 4.6.3,б. Оно существует только при $m > 0$ и имеет вид бегущего импульса с экспоненциальным уменьшением возмущения после разрыва (фронта)

$$v_p \exp\left[\frac{(z - z_0)\Psi_0}{2\Psi_\infty}\right], \quad z < z_0,$$

где z_0 - соответствует положению фронта (4.6.4,в). Этот импульс распространяется со скоростью $w_p = m\Psi_\infty / (2\Psi_\infty - \Psi_0)$, а его амплитуда

$$v_p = \frac{2w_p}{\Psi_\infty} = \frac{2m}{2\Psi_\infty - \Psi_0}. \quad (4.6.7)$$

Учитывая вид v_p, w_p , условие существования стационарных ударных волн не импульсного типа $v_1 > v_0$ можно записать в полезных для приложений формах $v_1 > v_p / 2$, $w > w_p$.

Анализ решений стационарного уравнения (4.6.3) с учётом не нулевых значений диссипативных коэффициентов $\eta_\infty, \eta_0 \neq 0$ проведём на фазовой плоскости v_z, v . На этой плоскости имеются две стационарные точки: $(0, 0)$ и $(0, v_1)$.

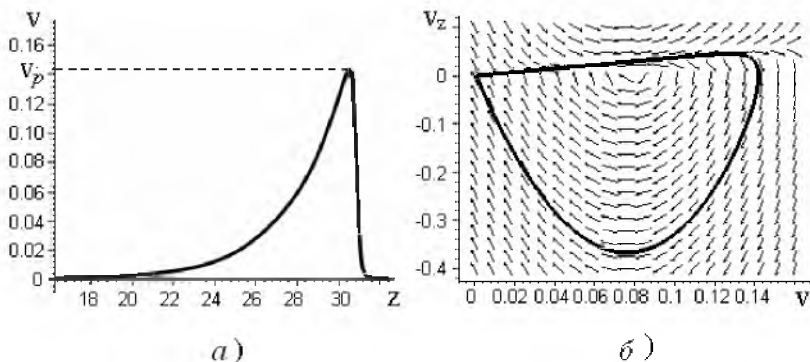


Рис. 4.6.5. Стационарный импульс (а) и соответствующая ему гомоклиническая фазовая траектория (петля сепаратрисы) (б).

Скорость импульса $w = 0,093$

При $w > m/2$ первая точка всегда является седлом, а вторая, в зависимости от скорости стационарной волны w , может быть узлом или фокусом. Для определённости ниже будем использовать следующие параметры уравнения (4.6.3): $m = 0,1$, $\Psi_0 = 1,1$, $\Psi_\infty = 1,2$, $\eta_0 \sim \eta_\infty \sim 10^{-5}$.

1) $m/2 \leq w < w_{bif}$

Вторая стационарная точка в этом случае - устойчивый узел или устойчивый фокус. Фinitное стационарное решение соответствует волне перепада $v(z \rightarrow -\infty) = 0$, $v(z \rightarrow \infty) = v_1$, которая имеет монотонную или немонотонную структуру фронта. Подобное решение не имеет физического смысла и является эволюционно неустойчивым.

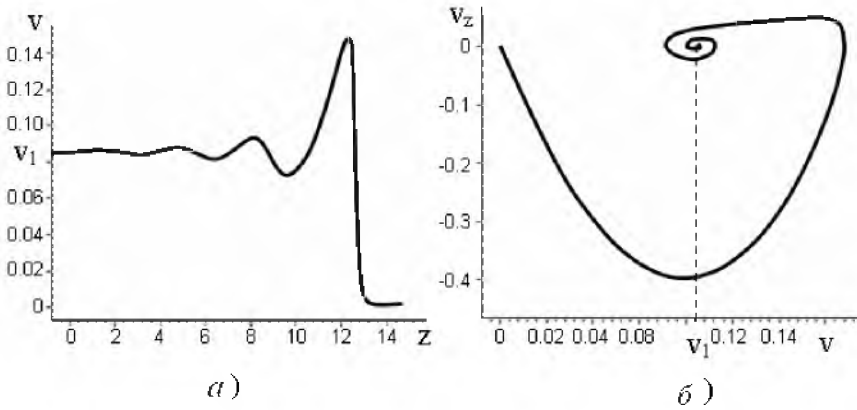


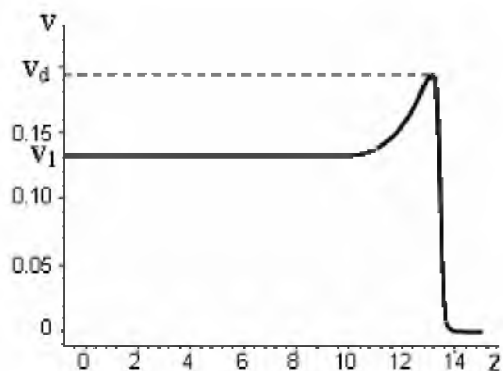
Рис. 4.6.6 Стационарная волна с осцилляциями за фронтом (а) и соответствующая ей фазовая траектория (б), идущая из седла в устойчивый фокус. Скорость стационарной волны $w = 0,096$

$$2) w \geq w_{bif}$$

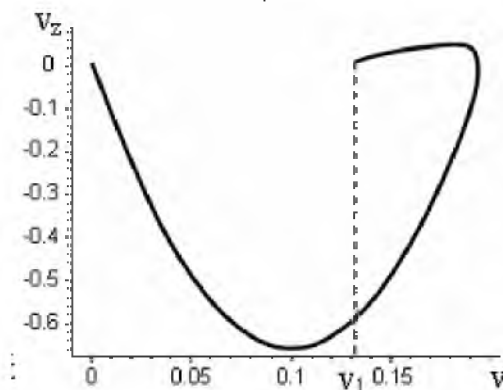
Стационарная точка теперь или неустойчивый фокус (при выполнении условия

$$(2\Psi_\infty - \Psi_0)^2 (w - w_{bif})^2 < 4\eta_\infty \Psi_0^2 (w - m/2),$$

или неустойчивый узел. При малом диссипативном коэффициенте $\eta_\infty \ll 1$ область существования фокуса значительно уже области существования узла.



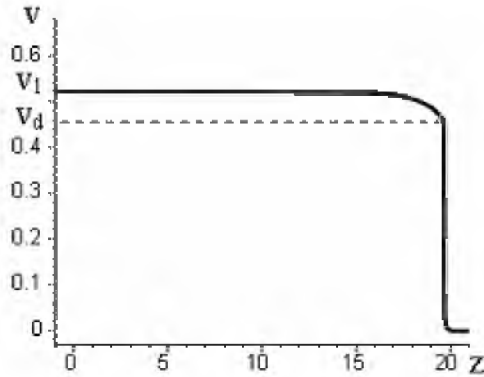
а)



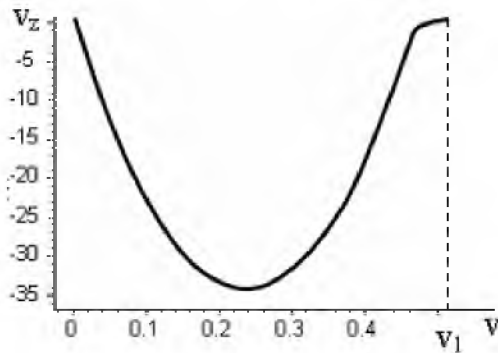
б)

Рис. 4.6.7. Стационарная волна с плавным уменьшением амплитуды за фронтом (а) и соответствующая ей фазовая траектория (б), идущая из седла в узел. Скорость стационарной волны $w = 0,12$

При $w = w_{bif}$ происходит рождение устойчивого предельного цикла (мягкая бифуркация Андронова–Хопфа) с соответствующим ему автоколебательным режимом. С ростом w предельный цикл приближается к сепаратрисе, а период автоколебаний возрастает. При $w = w_s$ происходит



а)



б)

Рис. 4.6.8. Стационарная волна с плавным увеличением амплитуды за фронтом (а) и соответствующая ей фазовая траектория (б), идущая из седла в узел. Скорость стационарной волны $w = 0,29$

нелокальная бифуркация образования петли сепаратрисы. Стационарная волна имеет вид сильно несимметричного уединённого импульса (рис. 4.6.5). Асимметрия уединённой волны следует из вида асимптотик уравнения (4.6.3) $v(z \rightarrow -\infty) \sim \exp \lambda_1 z$, $v(z \rightarrow \infty) \sim \exp \lambda_2 z$, где инкременты нарастания определяются в виде

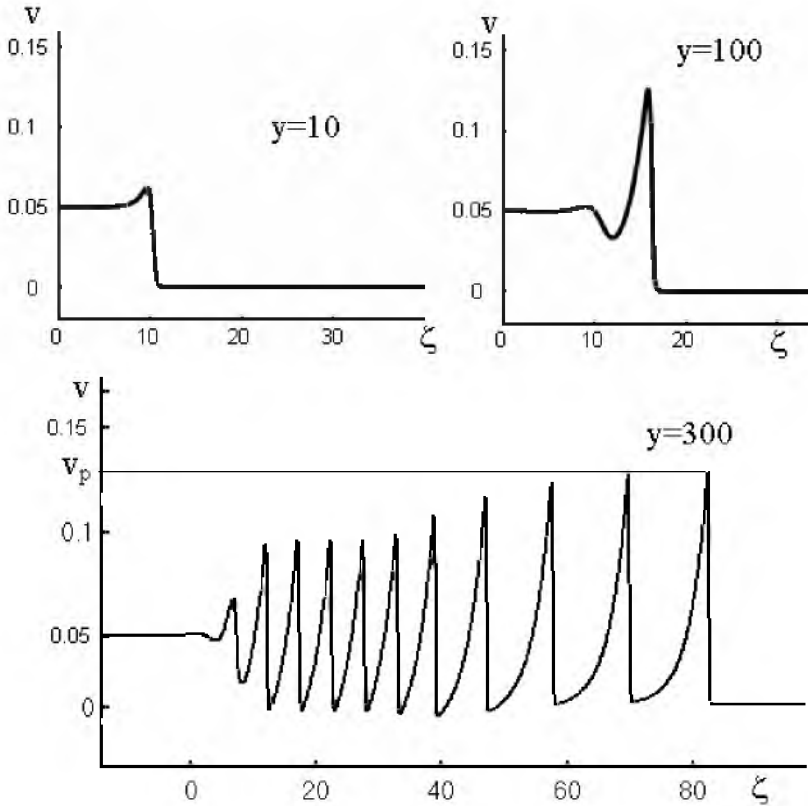


Рис. 4.6.9. Эволюция возмущения типа «колокол» с образованием автоволнового импульса с амплитудой v_p

$$\lambda_1 = \frac{\Psi_0}{2\Psi_\infty}, \lambda_2 = \frac{m\Psi_\infty}{\eta_\infty(2\Psi_\infty - \Psi_0)} \gg \lambda_1.$$

Значение w_s и амплитуду импульса при произвольных значениях η_∞ , η_0 точно аналитически записать не удаётся. При $\eta_\infty \rightarrow 0$ имеем $w_s \approx w_{bif} \approx w_p$.

Конечные значения коэффициента η_∞ приводят к слабому увеличению скорости импульса. Например, при $\eta_\infty = 0.01$, 0.1 и указанных

выше значениях остальных параметров имеем $w_s \approx 0.093, 0.099$, соответственно, что не значительно отличается от $w_{bif} = 0.090$. Амплитуда импульса также практически не зависит от η_∞ и η_0 и хорошо аппроксимируется величиной (4.6.7).

При дальнейшем увеличении скорости распространения стационарной волны $w > w_s$ происходит разрушение петли сепаратрисы и появление гетероклинической фазовой траектории, соответствующей волне перепада $v(z \rightarrow -\infty) = v_1, v(z \rightarrow \infty) = 0$, где $v_1 > v_p / 2$. На рис. 4.6.6-4.6.8 представлены формы волн перепада и соответствующие им фазовые траектории, получаемые при разных скоростях распространения стационарной волны, удовлетворяющих условию $w > w_s$. При $\eta_\infty, \eta_0 \rightarrow 0$ область существования неустойчивого фокуса на фазовой плоскости и волны перепада с осцилляциями за фронтом (рис. 4.6.6) стремится к нулевой. Стационарные структуры, показанные на рис. 4.6.7, 4.6.8, качественно совпадают с соответствующими структурами на рис. 4.6.4. Наличие конечного вязкостно-диссипативного коэффициента η_0 приводит здесь к слабому изменению амплитуды скачка. Наличие конечного вязкостно-диссипативного коэффициента η_∞ приводит к сглаживанию переднего фронта $\sim \eta_\infty$.

Эволюция возмущений типа «ступенька» и «колокол» при $m > 0$ исследовалась численно.

“Ступеньки” с амплитудами v_1 , удовлетворяющими условиям $v_1 > v_{cr}$ или $0.5v_p < v_1 < v_{cr}$ в ходе эволюции трансформировались в стационарные структуры, показанные на рис. 4.6.8а, 4.6.7а, соответственно.

При $v_1 \leq v_p / 2 \approx 0.07$ “ступенька” становилась неустойчивой и при $y > 100$ распадалась на периодическую последовательность стационарных импульсов (рис. 4.6.9), вид которых найден ранее (рис. 4.6.5а). Эти импульсы являются автоволнами, так как их форма и амплитуда не зависела от начальных значений амплитуды (в пределах условия существования уединённого импульса).

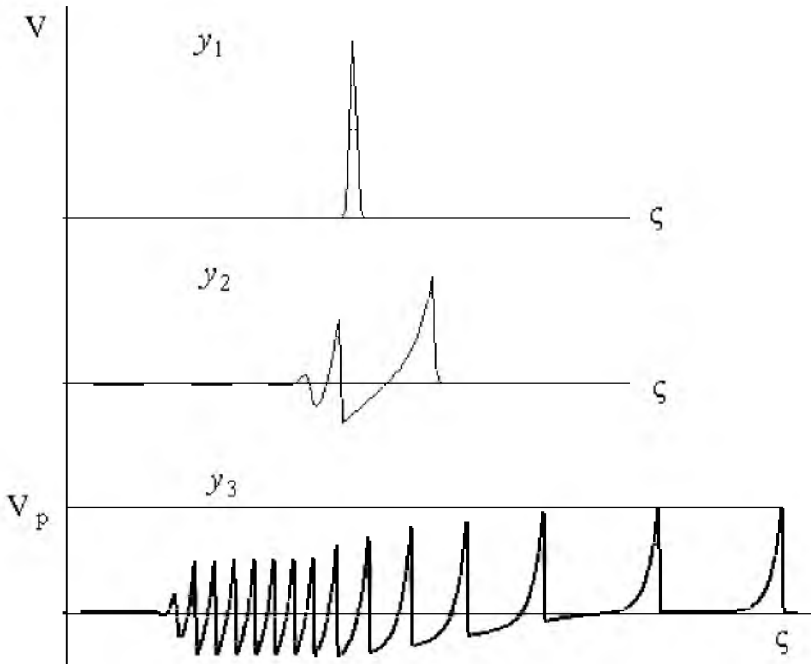


Рис. 4.6.10. Эволюция возмущения типа «колокол» с образованием автоволнового импульса

На рис. 4.6.10 показано образование той же последовательности автоимпульсов при эволюции первоначального возмущения в форме «колокола».

4.6.4 Пример исследования распределённой динамической системы. Электромагнитные волны [11, 12]

Рассмотрим систему уравнений, описывающую динамику излучения широкоапертурного лазера

$$\frac{\partial E}{\partial t} - i \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\nu}{2} E \left(\frac{N}{1 + \Delta_a^2} - 1 \right) + \frac{i\nu E}{2} \left(\Delta_a - \frac{\Delta_a}{1 + \Delta_a^2} N \right), \quad (4.6.8)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = N_e - N \left(1 + \frac{J}{1 + \Delta_a^2} \right), \quad (4.6.9)$$

где $J = |E|^2$. Система уравнений (4.6.8), (4.6.9) имеет два однородных состояния равновесия. Первое состояние равновесия соответствует отсутствию генерации ($E = 0$, $N = N_e$). Второе состояние равновесия ($E = E_c$, $N = N_c = 1 + \Delta_a^2$) соответствует режиму стационарной генерации с интенсивностью $J_c \equiv |E_c|^2 = N_e - 1 - \Delta_a^2$. Исследуем характер потери устойчивости этого состояния равновесия при отрицательной отстройке частоты $\Delta_a < 0$. Будем искать решения системы уравнений ((4.6.8), (4.6.9) в автомодельном виде $E = E_c [1 + e(\xi)]$, $N = N_c [1 + n(\xi)]$, где $e \ll 1$, $n \ll 1$; $\xi = t - \beta x$ – автомодельная переменная; $w = 1 / \beta$ – скорость распространения автоволны, распространяющейся в поперечном к оси резонатора направлении.

Характеристическое уравнение, соответствующее линеаризованной системе уравнений (4.6.8), (4.6.9), имеет вид

$$(\lambda + 1 + I_c)(a_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) = 0, \quad I_c = \frac{J_c}{1 + \Delta_a^2}, \quad (4.6.10)$$

где $a_4 = \beta^4$; $a_3 = \beta^4(1 + I_c)$; $a_2 = 1$; $a_1 = (1 + I_c + \beta^2 v \Delta_a I_c)$; $a_0 = v I_c$.

Согласно уравнению (4.6.10) критерий устойчивости Раунса-Гурвица стационарного состояния нарушается при

$$\beta^2 \Delta_a (1 + I_c + \beta^2 v \Delta_a I_c) + \beta^4 (1 + I_c)^2 > 0 \quad (4.6.11)$$

Таким образом, если частотная отстройка $\Delta_a \leq 0$, то режим стационарной генерации теряет свою устойчивость только для волн, у которых согласно (4.6.11)

$$\beta > \beta_{cr} = \left[\frac{-(1 + I_c) \Delta_a}{(1 + I_c)^2 + \Delta_a^2 v I_c} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.6.12)$$

Причем при $\beta = \beta_{cr}$ два корня характеристического уравнения оказываются чисто мнимыми

$$\lambda_{1,2} = \pm i \omega_0; \quad \omega_0 = \frac{1}{\beta_{cr}} \sqrt{\frac{(1 + I_c)}{|\Delta_a|}}. \quad (4.6.13)$$

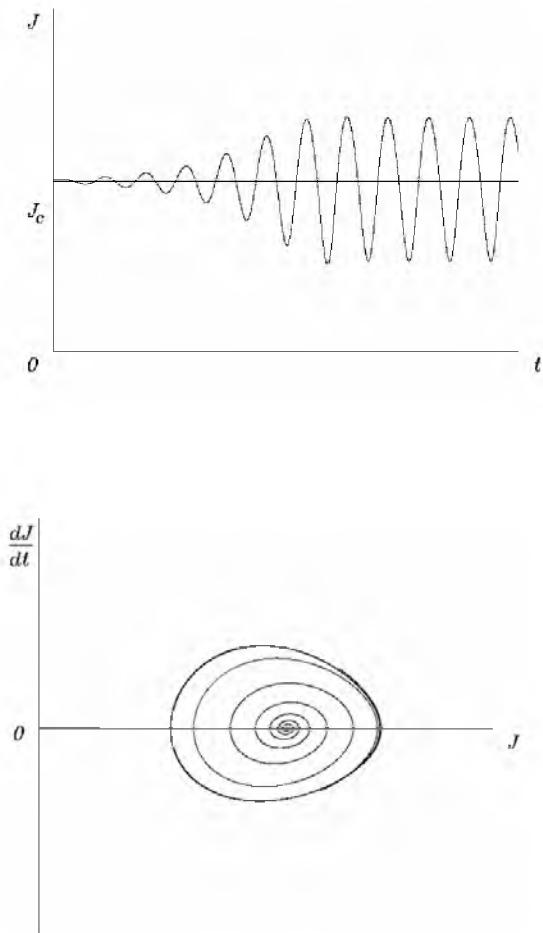


Рис. 4.6.11 Автоколебательный режим
при $\varepsilon = 0.04$

Три других корня имеют отрицательные действительные части, т.е. выполняется первая часть бифуркационной теоремы Андронова-Хопфа о рождении предельного цикла:

$$\operatorname{Re} \lambda_{1,2}(\beta_{\text{cr}}) = 0, \quad \operatorname{Re} \lambda_{3,4,5}(\beta_{\text{cr}}) < 0.$$

Докажем, что выполняется и второе требование

$$\left[\frac{d}{d\beta} \operatorname{Re} \lambda_{1,2}(\beta) \right]_{\beta_{cr}} \neq 0 . \quad (4.6.14)$$

Для этого найдем $\lambda_{1,2}$ в малой окрестности бифуркационного параметра $\beta = \beta_{cr}(1 + \varepsilon)$, где $\varepsilon \ll 1$.

Получаем

$$\operatorname{Re} \lambda = g\varepsilon ,$$

$$g = \frac{\nu I_c (1 + I_c)^3 \Delta_a^2}{\beta_{cr}^4 \left\{ (1 + I_c)^6 + \omega_0^2 \left[(1 + I_c)^2 - \nu \Delta_a^2 I_c \right]^2 \right\}} . \quad (4.6.15)$$

Такой вид действительной части λ удовлетворяет требованию (4.6.14). Оба условия теоремы Андронова-Хопфа о рождении предельного цикла оказываются выполненными. Из этого сразу следует возможность существования семейства периодических волн малой амплитуды, параметризованных при помощи β . Таким образом, при $\Delta_a < 0$ возможна потеря устойчивости режима однородной стационарной генерации с рождением волн малой амплитуды, распространяющихся со скоростью $w_0 = 1 / \beta_{cr}$ поперек апертуры лазера. Их длина волны $\Lambda_0 = 2\pi w_0 / \omega_0$ и определяется с помощью формул (4.6.12), (4.6.13) как

$$\Lambda_0 = 2\pi \sqrt{\frac{|\Delta_a|}{(1 + I_c)}} . \quad (4.6.16)$$

Нелинейная стадия развития возмущений режима однородной стационарной генерации, возникающих в результате бифуркации Андронова-Хопфа при $\Delta_a < 0$, исследовалась методами численного моделирования системы уравнений (4.6.8), (4.6.9), записанной в автомодельном виде. Результаты этого моделирования представлены на рис. 4.6.11-4.6.13, где параметры лазерной среды соответствовали $N_e = 5$, $\nu = 4.4$, $\Delta_a = -1$.

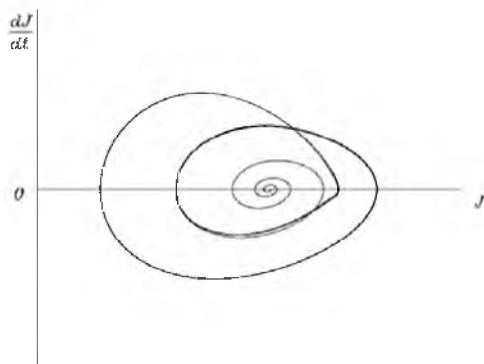
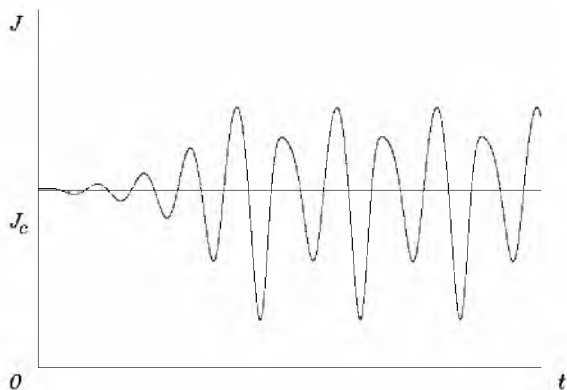


Рис. 4.6.12. Удвоение периода при $\varepsilon = 0.072$

При

$$\varepsilon = \frac{(\beta - \beta_c)}{\beta_c} < 0$$

режим однородной стационарной генерации был устойчивым. Установившиеся периодические решения появлялись только при $\varepsilon > 0$ (рис. 4.6.11). На фазовой плоскости им соответствовал предельный цикл. Амплитуда возмущений сначала увеличивалась

$\sim \sqrt{\varepsilon}$, то есть потеря устойчивости состояния равновесия осуществлялась в "мягком" режиме. Частота возмущений малой амплитуды совпадала с ее бифуркационным значением ω_0 , а скорость установления периодических возмущений определялась инкрементом $\text{Re } \lambda$ (4.6.15).

При дальнейшем увеличении ε наблюдались бифуркации удвоения периода (рис. 4.6.12) и переход в хаотический режим (рис. 4.6.13).

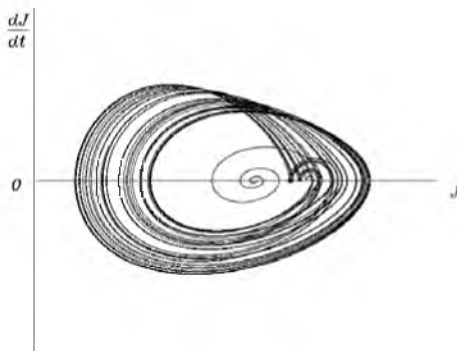
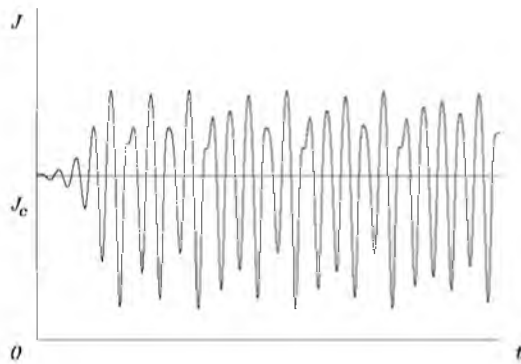


Рис. 4.6.13. Хаотический режим генерации при $\varepsilon = 0.081$

4.7 Бифуркации состояний равновесия одномерных дискретных динамических моделей

Моделью одномерной дискретной динамической системы служит следующее уравнение

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Как показано в разделе 3.7 устойчивость неподвижной точки x^* в одномерном случае определяется простым условием: модуль мультипликатора должен быть меньше 1: $|\mu| = |f'(x^*)| < 1$. При $|\mu| > 1$ состояние равновесия будет неустойчиво. При $|\mu| = 1$ происходят бифуркации.

Если при $a = a_0$, мультипликатор $\mu(a_0) = \exp i\varphi$, то происходит бифуркация Андронова - Хопфа в отображении (рис. 4.4.4) [19]. Её описание требует как минимум двумерной дискретной модели и здесь не рассматривается.

При $\mu(a_0) = -1$ происходит бифуркация удвоения периода, при которой рождается 2-цикл в отображении (рис. 4.4.2).

Ниже приведены примеры бифуркаций дискретной системы при $\mu(a_0) = +1$.

Пример1

Для уравнения

$$x_{n+1} = x_n + a - x_n^2, \quad |a| \ll 1 \quad (4.7.1)$$

требуется определить все стационарные состояния, область значений a , при которых они устойчивые, и тип бифуркации, возникающей при потере устойчивости.

Решение

Из условия $x_n^* = x_n^* + a - x_n^{*2}$ получаем две неподвижные точки $x_{1,2}^* = \pm\sqrt{a}$. При $a > 0$ точка $x_1^* = \sqrt{a}$ будет устойчивой, так как мультипликатор $\mu = df/dx = 1 - 2\sqrt{a} < 1$. Точка $x_2^* = -\sqrt{a}$ будет неустойчивой, так как мультипликатор $\mu = df/dx = 1 + 2\sqrt{a} > 1$. В точке

$a = 0$ неподвижные точки сливаются в одну негрубую точку $x^* = 0$ типа седло-узел. При $a < 0$ неподвижных точек не существует вовсе. Таким образом в точке $a = 0$ происходит бифуркация седло-узел. Фазопараметрическая диаграмма представлена на рис. 4.7.1.

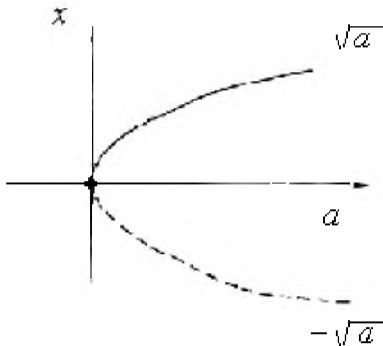


Рис. 4.7.1. Фазопараметрическая диаграмма бифуркации седло-узел при изменении параметра a в уравнении (4.7.1)

Пример 2

Определим тип бифуркации, возникающей при потере устойчивости стационарных состояний уравнения

$$x_{n+1} = (1+a)x_n - x_n^2 \tag{4.7.2}$$

при $|a| \ll 1$.

Решение

Неподвижные точки уравнения (4.7.2) соответствуют $x_1^* = 0$, $x_2^* = a$. При $a < 0$ первая неподвижная точка устойчивая ($\mu = df/dx = 1+a < 1$), а вторая - является неустойчивой ($\mu = 1-a > 1$). При $a > 0$ всё будет наоборот, первая неподвижная точка станет неустойчивой, а вторая станет устойчивой. Фазопараметрическая диаграмма представлена на рис. 4.7.2. Это типичная бифуркация обмена устойчивостью.

Пример 3

Для дискретного уравнения $x_{n+1} = (1+a)x_n - x_n^3$ имеем три неподвижных точки $x^*_{1,2,3} = 0, \pm\sqrt{a}$.

При $|a| \ll 1$ фазопараметрическая диаграмма происходящей в рамках этого уравнения мягкой бифуркации типа вилка представлена на рис. 4.2.4 б.

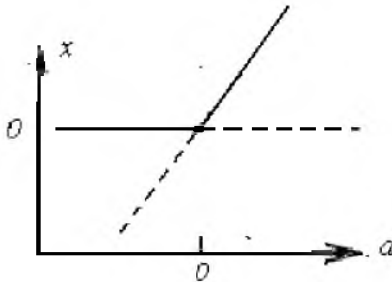


Рис. 4.7.2. Фазопараметрическая диаграмма бифуркации «обмен устойчивостью» при изменении параметра a в уравнении (4.7.2)

4.8. Унимодальное отображение. Каскад бифуркаций удвоения периода в логистическом отображении

Отображение $x_{n+1} = f(x_n)$ с единственным максимумом называется **унимодальным отображением**. Примером логистического отображения с гладким максимумом является так называемое **логистическое отображение**[14]

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n). \quad (4.8.1)$$

При $0 \leq a \leq 4$ логистическое отображение задаёт отображение отрезка $[0,1]$ в себя (рис. 4.8.1). В противном случае происходит неограниченное расхождение элементов последовательности. Правая часть (4.8.1), то есть функция последования $f(x)$, достигает максимума, равного $0,25a$, при $x = 0,5$ (рис. 4.8.1). Отображение (4.8.1) имеет две неподвижные точки $x_1^* = 0, x_2^* = 1 - 1/a$.

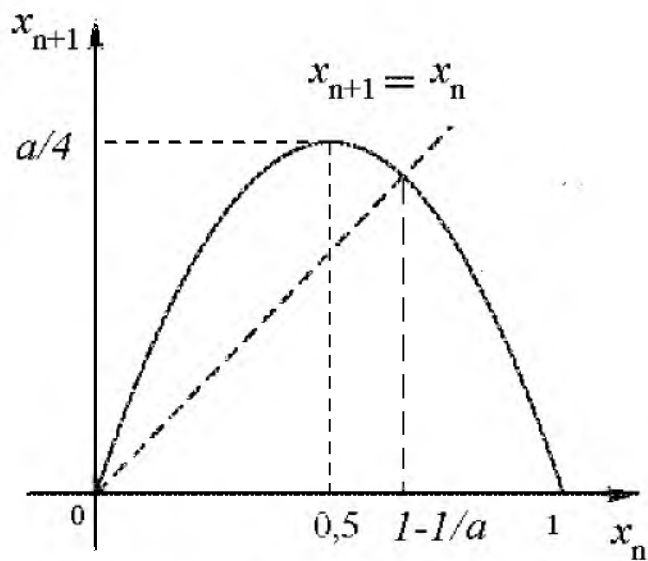


Рис. 4.8.1. Логистическое отображение при $a > 1$

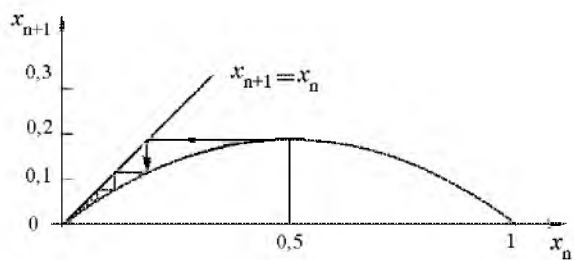


Рис. 4.8.2. Лестница Ламерея для логистическое отображения при $0 < a < 1$

Рассмотрим уравнение (4.8.1) на интервале значений $0 \leq x < 1$ при $0 \leq a < 4$. Рассмотрим устойчивость этих точек при разных значениях параметра a ($0 \leq a \leq 4$).

1) Область $0 < a < 1$

Внутри рассматриваемого интервала x имеется только одна неподвижная точка $x_1^* = 0$. Она устойчива, так как $\partial f / \partial x|_{x_1^*} = a < 1$.

Лестница Ламерея сходится к неподвижной точке (рис. 4.8.2).

2) Область $1 \leq a < 3$

При $a = 1$ две неподвижные точки сливаются в одну негрубую точку $x^* = 0$. При $a > 1$ в рассматриваемом интервале x существует две неподвижных точки (рис. 4.8.1).

Точка $x_1^* = 0$ является неустойчивой точкой. Для второй неподвижной точки справедливо $\partial f / \partial x|_{x_2^*} = 2 - a < 1$, поэтому она при $1 < a < 3$ устойчива. Сходящаяся к этой точке спираль Ламерея показана на рис. 4.8.3.

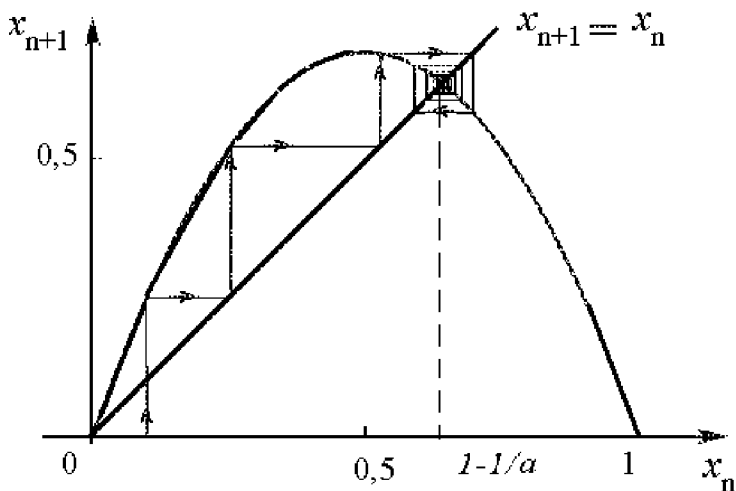


Рис. 4.8.3. Лестница Ламерея для логистического отображения при $1 < a < 3$

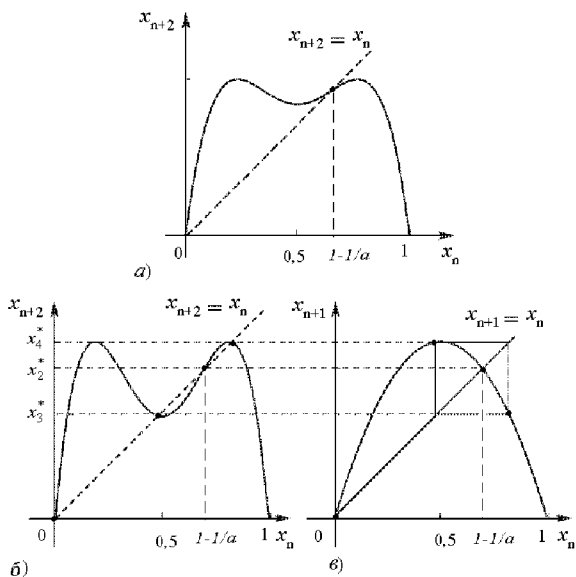


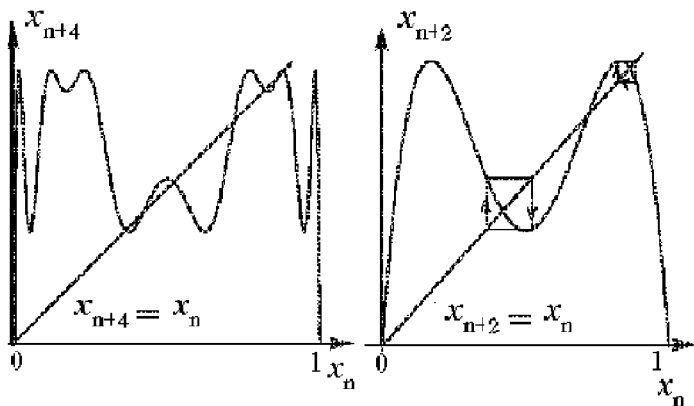
Рис.4.8.4 Образование 2-цикла (x_3^*, x_4^*) в исходном отображение (в) вблизи точки бифуркации $a = a_1$. а) $a < a_1$; б), в) $a > a_1$ [14]

3) Область $3 \leq a < 4$

В точке бифуркации $a = a_1 = 3$ мультипликатор $\partial f / \partial x|_{x_2^*} = -1$ и происходит бифуркация удвоения периода (рождение 2-цикла).

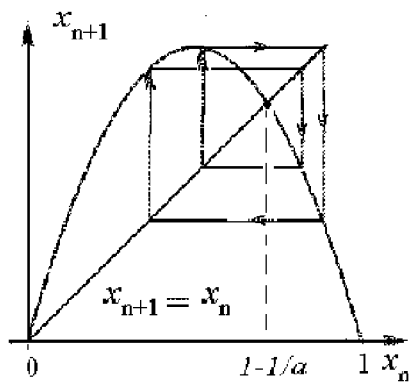
Рассмотрим двукратно итерированное отображение

$$\begin{aligned}
 x_{n+2} &= f^2(x_n) = ax_{n+1}(1-x_{n+1}) \\
 &= a^2x_n(1-x_n)(1-ax_n+ax_n^2).
 \end{aligned}$$



а)

б)



в)

Рис. 4.8.5. Четырёхкратно, двухкратно итерированные отображения (а,б) и образование 4-цикла в исходном отображении (в) после точки бифуркации $a = a_2$ [14]

Неподвижные точки итерированного отображения определяются из условия

$$x_n = a^2 x_n (1 - x_n)(1 - ax_n + ax_n^2).$$

Таким образом, имеются четыре неподвижных точки. Две из них (обе неустойчивые) являются наследственными от предыдущего отображения $x_1^* = 0, x_2^* = 1 - 1/a$. Кроме этого, двухкратно итерированное отображение имеет при небольшом превышении параметром a бифуркационного значения $a_1 = 3$ две устойчивые точки:

$$x_{3,4}^* = \frac{1}{2a^2} [a(a+1) \pm \sqrt{a^2(a+1)(a-3)}].$$

Они и составляют 2-цикл в исходном отображении (рис. 4.8.4).

При дальнейшем увеличении параметра в точке $a = a_2$ происходит новая бифуркация, при которой неподвижные точки второй итерации $x_{3,4}^*$ в свою очередь потеряют устойчивость. Возьмём за основу отображение $F_2 \equiv f^2$ и рассмотрим двукратно итерируемое отображение $F_2^2 \equiv f^4$. Каждая из точек $x_{3,4}^*$ расщепится на три неподвижных точки четырёхкратно итерированного изображения, две из которых устойчивы. Это означает рождение 2-цикла для второй итерации и 4-цикла для основного отображения (рис. 4.8.5).

Последующий рост параметра a приводит к следующей бесконечной последовательности рождения 2^n - циклов:

$$2^0 \rightarrow 2^1 \rightarrow 2^2 \rightarrow \dots \rightarrow 2^n \rightarrow \dots$$

Эта последовательность называется **каскадом бифуркаций удвоения периода**. Бесконечная последовательность бифуркационных значений a_n сходится как геометрическая прогрессия к значению $a_\infty \approx 3,58$.

Область параметров $a_\infty < a \leq 4$ рассматривается в следующих разделах.

4.9. Теория универсальности Фейгенбаума. Сценарий перехода к хаосу через бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода

Согласно теории универсальности Фейгенбаума [14,25,30], все гладкие унимодальные отображения $f(x)$, заданные на отрезке $[1,0]$ и удовлетворяющие условию отрицательности производной Шварца

функции f на этом отрезке

$$Sf \equiv \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 < 0,$$

ведут себя подобно логистическому отображению и обладают следующими универсальными свойствами:

1). Расстояние между двумя последовательными точками каскада бифуркаций удвоения периода $a_{n+1} - a_n$ с ростом номера n уменьшается, причём

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+2} - a_{n+1}} = \delta, \quad \delta = 4,669\dots,$$

где δ называется **универсальной константой Фейгенбаума**.

2). Бифуркационные значения параметров a_n сходятся к параметру a_∞ . Скорость схождения определяется универсальной константой Фейгенбаума:

$$a_n = a_\infty - \text{const} \delta^{-n}, \quad n \gg 1.$$

При $a = a_\infty$ число периодических точек становится бесконечным. Это значение зависит от конкретного вида отображения. Для логистического отображения $a_\infty = 3,57$.

3). 2^n циклы, содержащие точку x_m , при которой унимодальная функция имеет максимум ($x_m = 0,5$ для логистического отображения) называются **сверхустойчивыми циклами**. Для таких циклов показатель Ляпунова $\Lambda = -\infty$, так как мультипликатор равен нулю ($f'(x_m) = 0$). Расстояния d_n от точки x_m до ближайшей к ней точки на сверхустойчивом 2^n -цикле подчиняются соотношению:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = -\alpha, \quad \alpha = 2,5029\dots,$$

где α - **универсальный масштабный множитель**.

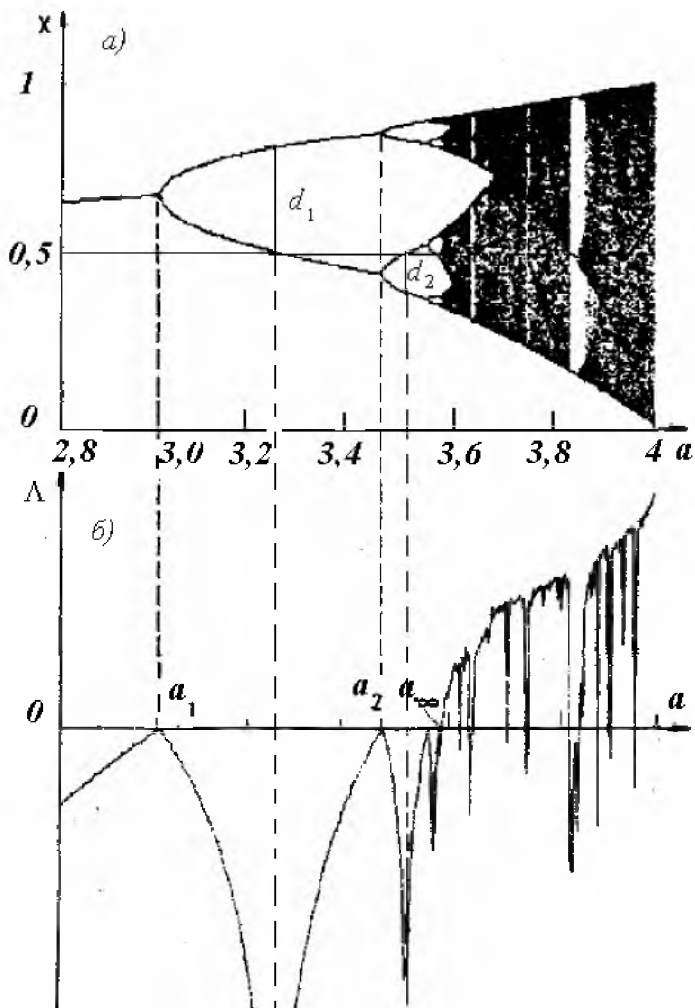


Рис. 4.9.1. Фазопараметрическая диаграмма бифуркаций в логистическом отображении (а) и зависимость характеристического показателя Ляпунова от управляющего параметра (б)[30]

Фазопараметрическая диаграмма, происходящих в таких отображениях бифуркаций, представлена на рис. 4.9.1. По оси ординат откладываются точки, лежащие на устойчивых 2^n циклах (неустойчивые точки для облегчения восприятия диаграммы здесь не указываются), а по оси абсцисс – значения параметра a . Подобную диаграмму иногда образно называют **поваленным фиговым деревом** [24].

Как показано на рис. 4.9.1 б, за точкой бифуркации $a = a_\infty$ характеристический показатель Ляпунова Λ для большинства значений a положительный, поэтому в силу ограниченности движения ($0 \leq x \leq 1$) при

$$\lambda_\infty < \lambda \leq 4$$

реализуется хаотический режим. Таким образом, согласно **сценарию перехода к хаосу Фейгенбаума**, динамический хаос получается как предел каскада удвоения периода: хаос есть 2^∞ - цикл.

4.10. Иерархия циклов. Рождение хаоса и циклов через перемежаемость (сценарий Помо-Манневиля)

Как видно из рис. 4.9.1, в хаотической области $\lambda_\infty < \lambda \leq 4$ плотность точек по вертикали различна. Количественно это различие определяется **распределением плотности вероятности $P(x)$** (рис.4.10.1). Величина $P(x)dx$ представляет собой вероятность того, что элементы последовательности попадают в интервал $x + dx$. Если выполняется условие

$$P(x) = f(P(x)),$$

то функция $P(x)$ называется **инвариантным распределением (инвариантной мерой)**.

На рис. 4.10.1 приведены распределения $P(x)$ для трех характерных значений параметра a .

1). При $a = 3,6$ (рис. 4.10.1 а) видны пустоты распределения, отвечающие значениям x , которые не возникают в квазислучайной последовательности при этом значении параметров. Резкие подъёмы в распределении $P(x)$ соответствуют наиболее часто "посещаемым"

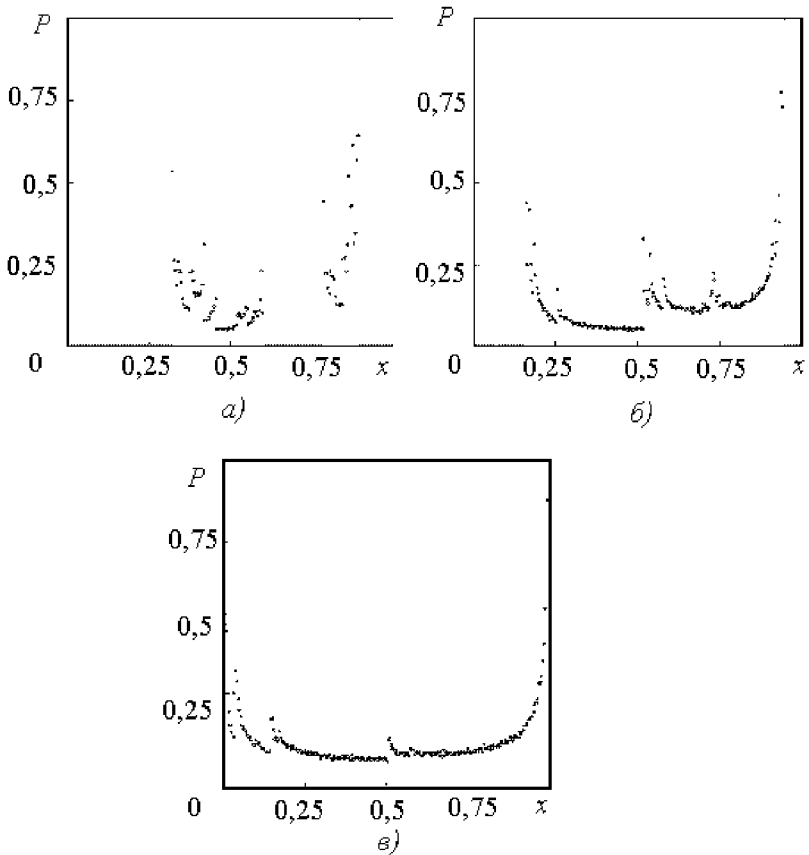


Рис. 4.10.1. Распределение плотности вероятности значений элементов последовательности x_n логистического отображения при значениях управляющего параметра $a = 3,6$ (а), $a = 3,82$ (б), $a = 3,99$ (в)[14]

областям отрезка $[0, 1]$. Именно этим областям на рис. 4.9.1а отвечают наиболее густо затушенные места («острова»). Эти острова, плотно заполненные элементами квазислучайной последовательности x_n , обходятся при каждой итерации отображения $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$ в строго определённом порядке, то есть регулярно. Только конкретные места посещения острова меняются случайным образом. Такой колебательный

режим называют **шумящим циклом** χ^n , где n - число островов. Рис. 4.10.1а отвечает шумящему циклу χ^2 .

2). При $a = 3,82$ (рис. 4.10.1б) видно наличие трех хорошо выделенных максимумов распределения плотности вероятности. Это значение параметра близко к широкой светлой вертикальной полосе на рис. 4.9.1, где существует регулярный цикл периода 3 (S^3 -цикл).

3). При приближении параметра a к предельному значению (рис. 4.10.1б, $a = 3,99$) распределение $P(x)$ становится все более и более гладкой функцией с экстремумами на краях интервала.

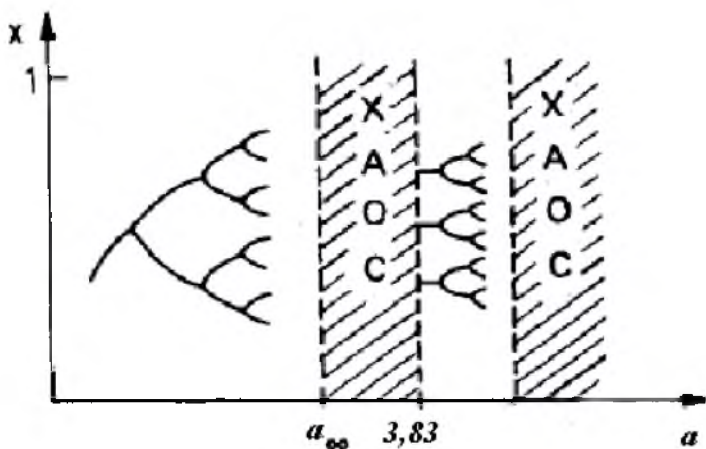


Рис. 4.10.2. Бифуркация удвоения периода 3-цикла в окне регулярного поведения

Согласно рис. 4.9.1а,б в области $a > a_\infty$ имеются светлые вертикальные полосы (окна), в которых характеристический показатель Ляпунова отрицателен. Здесь существуют регулярные циклы с конечным периодом.. Например, самая широкая полоса начинается при $a = a_c = 1 + \sqrt{8} \approx 3,83$. В самом начале этой полосы реализуется 3-цикл, в начале остальных светлых полос реализуются 3, 5, 7-циклы. Эти **циклы рождаются скачком из**

хаоса, а затем претерпевают стандартную последовательность бифуркаций удвоения периода (рис. 4.10.2) с теми же универсальными константами Фейгенбаума:

$$3 \rightarrow 3 \cdot 2 \rightarrow 3 \cdot 2^2 \rightarrow 3 \cdot 2^n \rightarrow \dots$$

$$5 \rightarrow 5 \cdot 2 \rightarrow 5 \cdot 2^2 \rightarrow 5 \cdot 2^n \rightarrow \dots$$

и т.д.

Существует определенная **иерархия циклов (порядок Шарковского)** [14], такая, что наличие какого-то цикла свидетельствует об обязательном наличии всех предыдущих циклов (устойчивых или неустойчивых) более низкого ранга. Самым старшим циклом в иерархии циклов является 3-цикл:

$$3, 5, 7, 9, \dots$$

$$2 \bullet (3, 5, 7, 9, \dots)$$

$$2^2 \bullet (3, 5, 7, 9, \dots)$$

$$\dots$$

$$\dots, 2^n, \dots, 2^2, 2^1, 1.$$

Описанное сосуществование циклов не означает их одновременной наблюдаемости в силу неустойчивости большинства из них.

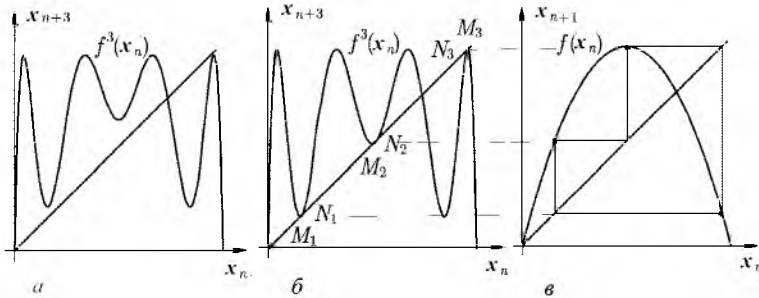


Рис. 4.10.3. Рождение 3-цикла из хаоса в логистическом отображении.

a) $a = 3,76$; *б*), *в*) $a = 3,83$ [14]

Рассмотрим теперь, каким образом из хаоса рождается регулярный 3-цикл (рис. 4.10.3*в*). Точки, принадлежащие этому циклу, являются неподвижными точками трёхкратно итерированного отображения

$$x_{n+3} = f^3(x_n). \quad (4.10.1)$$

При $a < a_c$ устойчивых точек отображение (4.10.1) не имеет (рис. 4.10.3а). В точке бифуркации $a = a_c \approx 3,83$ диагональ $x_{n+3} = x_n$ пересекает кривую трёхкратно итерированного отображения в шести точках. Три из них образуют неустойчивый предельный цикл (N_1, N_2, N_3) . Три устойчивых точки (M_1, M_2, M_3) образуют устойчивый 3-цикл (рис. 4.10.3б). Аналогичным образом рождаются из хаоса в окнах регулярности 5-, 7- и тому подобные циклы.

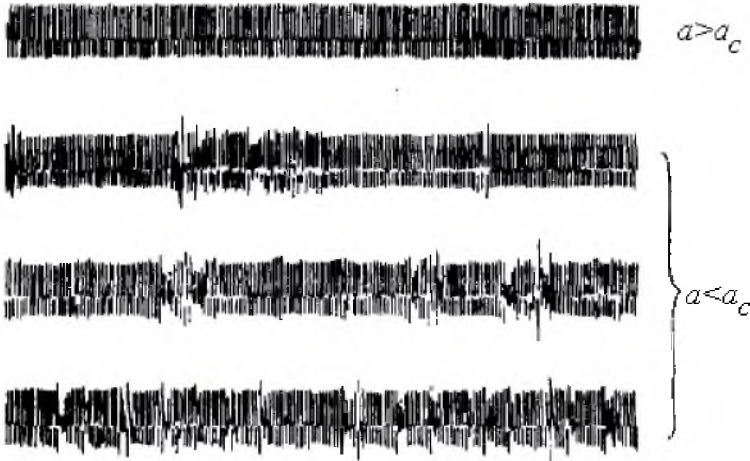


Рис. 4.10.4.Переход к хаосу через перемежаемость [30]

При рассмотрении бифуркации рождения цикла из хаоса в обратном порядке получаем, что переход от периодических колебаний к хаосу может происходить не только в результате бесконечного каскада удвоения периода, но и в результате одной единственной бифуркации. Такой механизм возникновения хаоса называют переход к хаосу через перемежаемость. Под **перемежаемостью** понимается такой вид сигнала, в котором случайным образом чередуются длинные регулярные (ламинарные) фазы (так называемые окна) и относительно короткие

нерегулярные всплески (турбулентная фаза) (рис. 4.10.4) Такие сигналы обнаруживаются во многих экспериментах. Число хаотических всплесков нарастает при изменении управляющего параметра a .

На рис. 4.10.5 в увеличенном масштабе показано поведение трёхкратно итерированного логистического отображения в окрестности одного из минимумов вблизи точки бифуркации $a_c = 3,83$ рождения 3-цикла из хаоса.

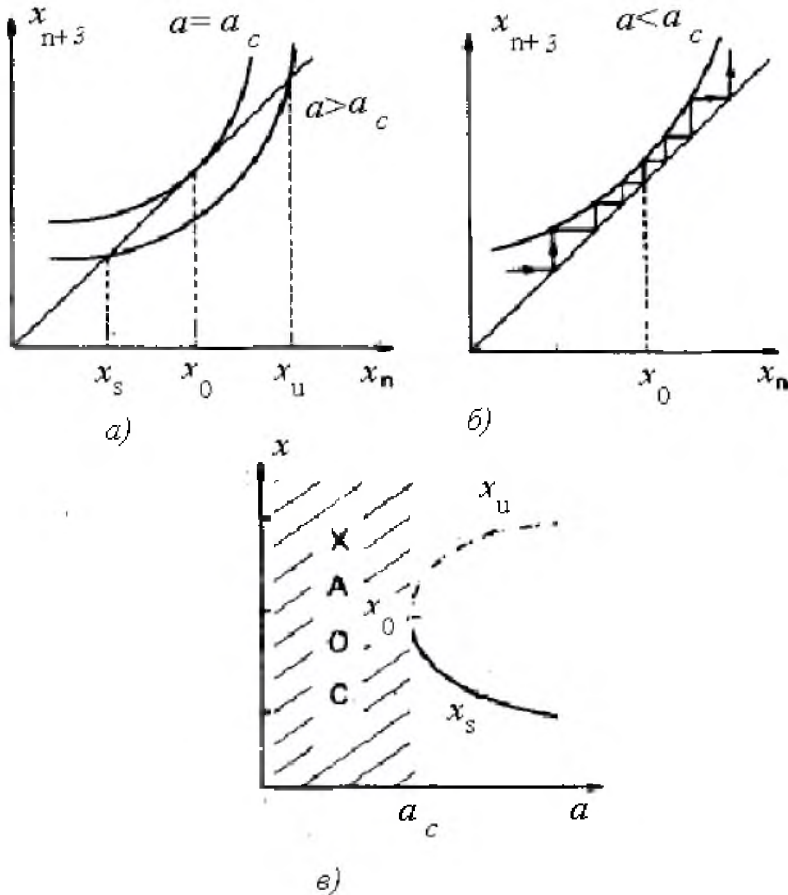


Рис.4.10.5. Седло-узловая бифуркация неподвижной точки трёхкратной итерации логистического отображения

При переходе к хаосу через **перемежаемость первого рода** (сценарий

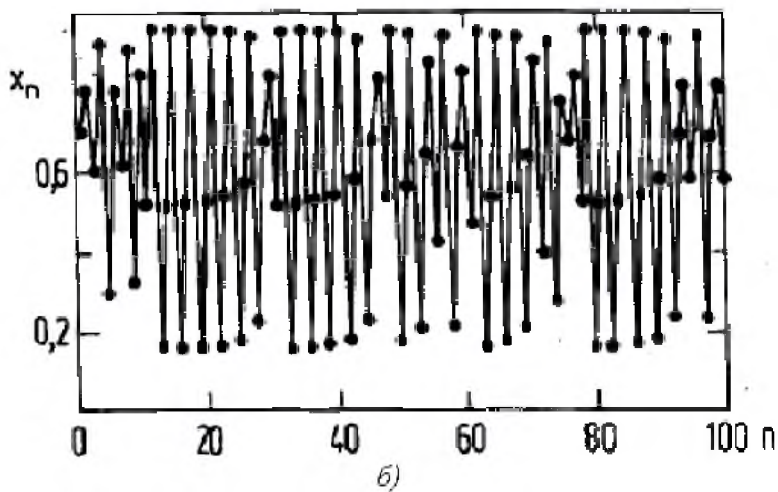
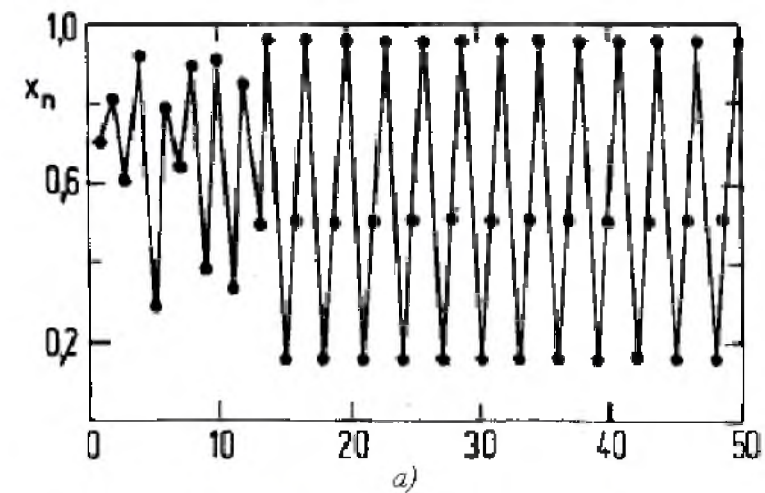


Рис. 4.10.6. Последовательность итераций логистического отображения, начинающаяся с $x = 0,7$. а) область устойчивого 3-цикла при $a_c - a = -0,02$; б) в области перемежаемости при $a_c - a = 0,002$ [30]

Помо-Манневиля) происходит седлоузловая бифуркация, когда две неподвижные точки (устойчивая x_s и неустойчивая x_u) сливаются в точку $x = x_0$ при $a = a_c$ (рис. 4.10.5a, в). и аннигилируют при $a < a_c$ (рис. 4.10.5б). Однако существует некоторая «память» об исчезнувшей неподвижной точке x_0 , так как движение вблизи неё сильно замедляется. В этой области образуется узкий канал между кривой отображения и биссектрисой, в котором помещается большое число мелких ступенек лестницы Ламерея.

Это и приводит к появлению длинных регулярных (ламинарных) областей при небольшом отклонении параметра от бифуркационного ($a < a_c$). После выхода траектории из канала начинается хаотический всплеск (турбулентная фаза), который опять сменяется регулярной фазой при попадании траектории вновь в окрестность «призрака» неподвижной точки x_0 (рис. 4.10.6).

4.11. Переход к хаосу по моделям Ландау и Рюэля-Такенса

Существует ряд других универсальных сценариев перехода к хаосу, кроме рассмотренных выше (через бесконечный каскад удвоения периода и через перемежаемость). Приведём в качестве примера два из них, наиболее известных

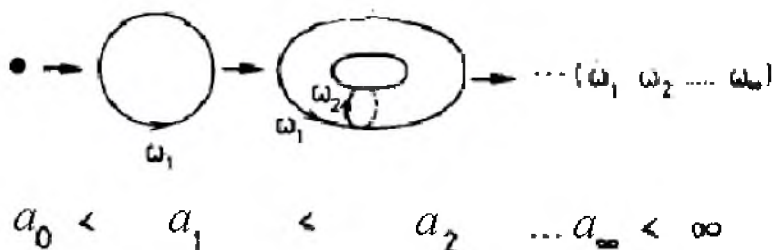


Рис. 4.11.1. Сценарий перехода к хаосу Ландау[30]

В 1944 г. Ландау предложил сценарий перехода к турбулентности от ламинарной фазы, согласно которому хаотическое состояние достигается бесконечной последовательностью бифуркаций Хопфа (рис. 4.11.1). При

этом спектр мощности сигнала содержит всё большее число несоизмеримых частот и стремится к непрерывному пределу.

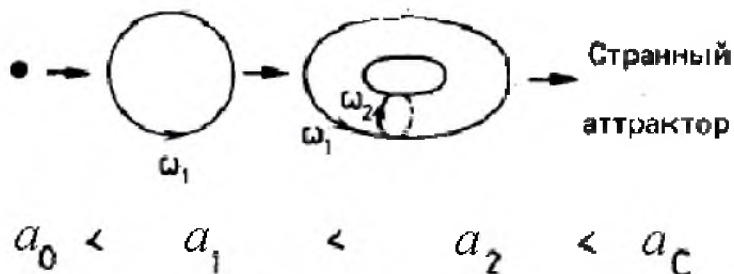


Рис. 4.11.2. Сценарий перехода к хаосу Рюэля и Такенса [30]

В 1971 г. Рюэль и Такенс предложили сценарий перехода к хаосу значительно более короткий, чем сценарий Ландау. Они показали, что уже после двух бифуркаций Хопфа регулярное движение может стать сильно неустойчивым и перейти в хаотическое поведение на странном аттракторе (рис. 4.11.2).

Подробнее сценарии перехода к динамическому хаосу и свойства движения на странных аттракторах будут изучаться в курсах «Динамический хаос и фракталы», «Прикладная нелинейная динамика».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Анищенко, В.С. Сложные колебания в простых системах / В.С. Анищенко. - М.: Наука, 1990. - 312 с.
2. Анищенко, В.С. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Фундаментальные основы и избранные проблемы / В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, В.В. Астахов. - Саратов: Изд-во СГУ, 1999. - 368 с.
3. Анищенко, В.С. Знакомство с нелинейной динамикой. Лекции соровского профессора / В.С. Анищенко. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. - 144 с.
4. Арнольд, В.И. Теория катастроф / В.И. Арнольд. - М.: Изд-во МГУ, 1983. - 127 с.
5. Баутин, Н.Н. Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. - М.: Наука, 1976. - 488 с.
6. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. - М.: Наука, 1980. - 718 с.
7. Брур, Х.В. Структуры в динамике / Х.В. Брур, Ф. Дюмортье, С. Стрин, Ф. Такенс. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. - 336 с.
8. Глас, Л. От часов к хаосу. Ритмы жизни / Л. Глас, М. Мэки. - М.: Мир, 1991. - 248 с.
9. Горяченко, В.Д. Элементы теории колебаний / В.Д. Горяченко. - М.: Высшая школа, 2001. - 395 с.
10. Данилов, Ю.А. Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение / Ю.А. Данилов. - М.: Постмаркет, 2001. - 184 с.
11. Заикин, А.П. Периодические автоволновые структуры в широкоапертурном лазере с отстройкой частоты. Части I, II Бифуркационный анализ. Распределённая модель / А.П. Заикин, А.А. Кургузкин, Н.Е. Молевич // Квантовая электроника. - Ч. I, II. - 1999. - Т. 27. - № 3. - С. 246-248; 249-252.
12. Заикин, А.П. Влияние отстройки частоты на пространственно-временную структуру оптического поля широкоапертурного лазера / А.П. Заикин, А.А. Кургузкин, Н.Е. Молевич // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. - 1999. - Т. 7. - № 5. - С. 87-96.
13. Йосс, Дж. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций / Дж. Йосс, Д.Л. Джозеф. - М.: Мир, 1983. - 300 с.
14. Карлов, Н.В. Колебания, волны, структуры / Н.В. Карлов, Н.А. Кириченко. - М.: Физматлит, 2001. - 496 с.
15. Кузнецов, С.П. Динамический хаос / С. П. Кузнецов. - М.: Физматлит, 2001. - 296 с.
16. Макарян, В.Г. Структура газодинамического возмущения в термодинамически неравновесной среде с экспоненциальной моделью релаксации / В.Г. Макарян, Н.Е. Молевич // Изв. РАН. Сер. Механика жидкости и газа. - 2004. - № 5. - С. 181-191.
17. Марсен, Дж. Бифуркация рождения цикла и её приложения / Дж. Марсен, М. Мак-Кракен. - М.: Мир, 1980. - 368 с.
18. Малинецкий, Г.Г. Современные проблемы нелинейной динамики / Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов. - М.: Эдиториал УРСС, 2000. - 336 с.
19. Малинецкий, Г.Г. Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. Введение в

- нелинейную динамику / Г.Г. Малинецкий. - М.: Едиториал УРСС, 2002. - 256 с.
20. Малинецкий, Г.Г. Нелинейная динамика и хаос: основные понятия / Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов. - М.: КомКнига, 2006. - 237 с.
 21. Нелинейные волны. Динамика и эволюция / под ред. А.В. Гапонова-Грехова, М.И. Рабиновича. - М.: Наука, 1989. - 400 с.
 22. Рабинович, М.И. Введение в теорию колебаний и волн / М.И. Рабинович, Д.И. Трубецков. - М.: РХД, 2000. - 560 с.
 23. Ризниченко, Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Описание процессов в живых системах во времени / Г.Ю. Ризниченко. - М.: РХД, 2002. - 232 с.
 24. Трубецков, Д.И. Введение в синергетику. Хаос и структуры / Д.И. Трубецков. - М.: Едиториал УРСС, 2004. - 240 с.
 25. Фейгенбаум, М. Универсальность в поведении нелинейных систем / М. Фейгенбаум // УФН. - 1983. - Т.141. - №2. - С. 343-374.
 26. Холодниок, М. Методы анализа нелинейных динамических моделей / М. Холодниок, А. Клич, М. Кубичек, М. Марек. - М.: Мир, 1991. - 368 с.
 27. Хэссард, Б. Теория и приложения бифуркации рождения цикла/ Б. Хэссард, Н. Казаринов, И. Вэн. - М.: Мир, 1985. - 280 с.
 28. Чуличков, А.И. Математические модели нелинейной динамики / А.И. Чуличков. - М.: Физматлит, 2003. - 296 с.
 29. Шильников, Л.П. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 1 / Л.П. Шильников, А.Л. Шильников, Д.В. Тураев, Л. Чуа - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. - 416 с.
 30. Пуустер, Г. Детерминированный хаос / Г. Пуустер. - М.: Мир, 1988. - 450 с.
 31. Эрроусмит, Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями / Д. Эрроусмит, К. Плейс - М.: Мир, 1986. - 243 с.

Учебное издание

Молевич Нонна Евгеньевна

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

Учебное пособие

Технический редактор Н. Л. К а з а н с к и й
Редакторская обработка А. В. Я р о с л а в ц е в а
Корректорская обработка А. В. Я р о с л а в ц е в а
Доверстка А. В. Я р о с л а в ц е в а

Подписано в печать 26.09.07. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 10,0.

Тираж 120 экз. Заказ . ИП-118/2007

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.