

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

Ю.Л. ФАЙНИЦКИЙ

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

САМАРА
Издательство СГАУ
2006

УДК 517.1 (075)

ББК

Ф



**Инновационная образовательная программа
"Развитие центра компетенции и подготовка
специалистов мирового уровня в области аэрокос-
мических и геоинформационных технологий"**

Рецензенты: проф., доктор техн. наук Б. А. Г о р л а ч
доц., канд. физ.-мат. наук Е. Я. Г о р е л о в а

Файницкий Ю.Л.

Ф **Методы вычисления интегралов** : учеб. пособие по самостоя-
тельной работе / Ю.Л. Файницкий. – Самара : Изд-во Самар. гос.
аэрокосм. ун-та, 2006. – 41 с.

ISBN 5-7883-0432-6

Предназначено для студентов всех специальностей СГАУ. Содержит материалы по математике, предлагаемые для самостоятельного изучения во втором семестре. Рассматриваются методы интегрирования рациональных и иррациональных функций, некоторые методы вычисления определенного интеграла, несобственные интегралы в смысле главного значения.

Определения, утверждения и приемы решения задач, рассматриваемые на лекционных и практических занятиях, здесь не дублируются. Предполагается, что студент уже ознакомился с указанным материалом. Учебное пособие представляет собой руководство, помогающее студенту продолжить изучение методов решения задач по данному разделу математики.

Учебное пособие выполнено на кафедре высшей математики в рамках инновационной образовательной программы «Развитие центра компетенции и подготовка специалистов мирового уровня в области аэрокосмических и геоинформационных технологий».

УДК 517.1 (075)

ББК

ISBN 5-7883-0432-6

© Файницкий Ю.Л., 2006

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2006

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие содержит материалы по математике, предлагаемые студентам всех специальностей СГАУ для самостоятельного изучения во втором семестре. Здесь рассматриваются методы интегрирования рациональных и иррациональных функций, некоторые методы вычисления определенного интеграла, несобственные интегралы в смысле главного значения.

Пособие состоит из 14 пунктов (параграфов), каждый из которых имеет следующую структуру. Параграф, как правило, начинается с кратких теоретических сведений, необходимых для решения очередной задачи. Теоремы приводятся без доказательств, однако, в каждом конкретном случае указывается учебное пособие, с помощью которого можно ознакомиться с обоснованием соответствующего утверждения.

Далее приводится формулировка и решение очередной задачи. Затем формулируется аналогичная задача, предназначенная для самостоятельного решения, и ответ к ней, если только ответ не следует из условия. В отдельных случаях в завершение параграфа может приводиться еще одна или несколько пар задач.

Рекомендуется следующий порядок самостоятельной работы. Прежде всего, необходимо по конспекту и учебнику проработать материал, рассмотренный на лекционных занятиях, ознакомиться с введенными там понятиями, изучить формулировки и доказательства теорем. Затем, опираясь на решения задач, предложенных на практических занятиях, выполнить текущее домашнее задание. И только после этого целесообразно осваивать материал, приведенный в настоящем учебном пособии.

Такая последовательность изучения материала связана, в частности, с тем, что здесь не дублируются рассматриваемые на лекционных и практических занятиях определения, утверждения и приемы. Предполагается, что студент с ними уже ознакомился. Пособие представляет собой руководство, помогающее студенту продолжить изучение методов решения задач по данному разделу математики.

1 НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1.1 Интегрирование рациональных функций

Определение. Число k называется кратностью корня a многочлена $P_n(x)$, если этот многочлен делится на $(x - a)^k$ и не делится на $(x - a)^{k+1}$. Если $k = 1$, то корень a называется простым, если $k \neq 1$, то кратным.

При разложении рациональной функции на простейшие дроби приходится определять параметры этих дробей, например, приводя данную сумму к общему знаменателю, записывая равенство некоторых многочленов и составляя систему линейных уравнений, нередко весьма громоздкую. Можно также получить систему линейных уравнений для искомых параметров, подставляя в указанное равенство многочленов различные значения переменной интегрирования. Наиболее эффективен этот метод, если подставлять корни знаменателя рассматриваемой функции, в том числе комплексные. Если корни кратные, то система будет содержать число уравнений, недостаточное для определения всех параметров. Однако в этом случае можно получить дополнительные уравнения, дифференцируя левую и правую части упомянутого равенства многочленов.

1. Вычислить интеграл

$$\int \frac{x(x-2)}{(x-1)^2(x^2+1)^2} dx.$$

Решение.

Представим подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x(x-2)}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+1)^2}.$$

Приравняем числители после приведения дробей в правой части к общему знаменателю:

$$\begin{aligned} x(x-2) &= A(x-1)(x^2+1)^2 + B(x^2+1)^2 + \\ &+ (Dx+E)(x-1)^2(x^2+1) + (Fx+G)(x-1)^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Знаменатель подынтегральной функции имеет корни $1, i, -i$. Подставив $x = 1$ в равенство (1), получим:

$$-1 = B \cdot 4; B = -\frac{1}{4}.$$

При $x = i$ соотношение (1) принимает вид:

$$-1 - 2i = (Fi + G)(-2i).$$

Приравняем действительные и мнимые части:

$$F = -\frac{1}{2}; G = 1.$$

Продифференцируем обе части равенства (1), оставляя в записи только те слагаемые, которые не содержат множителя $(x - 1)$:

$$2x - 2 = A(x^2 + 1)^2 - \frac{1}{4} \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x + \dots$$

При $x = 1$ это равенство примет вид:

$$0 = A \cdot 4 - 2; A = \frac{1}{2}.$$

Продифференцируем обе части равенства (1), сохраняя слагаемые, не содержащие множителя $(x^2 + 1)$:

$$2x - 2 = (Dx + E)(x - 1)^2 \cdot 2x - \frac{1}{2} \cdot (x - 1)^2 + \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) \cdot 2(x - 1) + \dots$$

Подставим сюда $x = i$:

$$2i - 2 = (Di + E)(i - 1)^2 \cdot 2i - \frac{1}{2}(i - 1)^2 + \left(-\frac{1}{2}i + 1\right) \cdot 2(i - 1),$$

или

$$2i - 2 = (Di + E) \cdot 4 + i + 1 + i + 2i - 2.$$

Отсюда

$$-2 = 4E - 1; 2 = 4D + 4,$$

то есть

$$E = -\frac{1}{4}, D = -\frac{1}{2}.$$

Запишем заданный интеграл, используя найденные значения коэффициентов:

$$\int \frac{x(x-2)}{(x-1)^2(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x-1)^2} -$$

$$-\frac{1}{4} \int \frac{2x+1}{x^2+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x-2}{(x^2+1)^2} dx.$$

Вычислим интеграл

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2} dx =$$

$$= \arctg x - \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2} = \left. \begin{array}{l} u = x; \quad dv = \frac{xdx}{(x^2+1)^2} \\ du = dx; \quad v = -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1} \end{array} \right| =$$

$$= \arctg x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \arctg x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + C.$$

Получим:

$$\int \frac{x(x-2)}{(x-1)^2(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{4} \frac{1}{x-1} -$$

$$-\frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{4} \arctg x + \frac{1}{4} \frac{2x+1}{x^2+1} + C.$$

Замечание. Здесь и в дальнейшем, до конца данного учебного пособия, символы C, C_1, C_2, \dots обозначают произвольные постоянные.

2. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2(x^2+1)}.$$

Ответ:

$$\frac{1}{16} \ln|x| - \frac{1}{18} \ln(x^2 + 1) + \frac{7}{288} \ln(x^2 + 4) - \frac{1}{24(x^2 + 4)} + C.$$

1.2 Метод Остроградского

Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная функция, знаменатель которой имеет кратные корни. Тогда

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx. \quad (2)$$

Здесь $Q_2(x)$ – многочлен, имеющий те же корни, что и $Q(x)$, но все корни многочлена $Q_2(x)$ – простые. Функция $Q_1(x)$ определяется равенством

$$Q_1(x) = \frac{Q(x)}{Q_2(x)},$$

$P_1(x)$, $P_2(x)$ – многочлены, а дроби $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ и $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ – правильные [3, гл 2, § 20, п. 20.3].

Обычно коэффициенты многочленов $P_1(x)$, $P_2(x)$ заранее неизвестны и должны быть найдены. С этой целью следует продифференцировать равенство (2). В результате получится равенство дробей, позволяющее составить систему линейных уравнений для искоемых коэффициентов.

Записывая многочлены $P_1(x)$, $P_2(x)$ с неопределенными коэффициентами, следует задавать их степени на единицу меньше, чем степени функций $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ соответственно, например,

$$\begin{aligned} & \int \frac{x dx}{(x+1)^3 (x^2 + 1)^4 (x^2 + 2x + 2)^2} = \\ & = \frac{P_1(x)}{(x+1)^2 (x^2 + 1)^3 (x^2 + 2x + 2)} + \int \frac{Q_1(x) dx}{(x+1)(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)}, \end{aligned}$$

где

$$P_1(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_9x^9,$$

$$Q_1(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + B_4x^4$$

и $A_0, A_1, A_2, \dots, A_9, B_0, B_1, \dots, B_4$ – постоянные.

3. Методом Остроградского вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{(x^3 + 1)^2}. \quad (3)$$

Решение.

Представим интеграл (3) согласно методу Остроградского:

$$\int \frac{dx}{(x^3 + 1)^2} = \frac{P_1(x)}{x^3 + 1} + \int \frac{P_2(x)}{x^3 + 1} dx.$$

Запишем многочлены $P_1(x)$ и $P_2(x)$ с неопределенными коэффициентами, одновременно представив подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей:

$$\int \frac{dx}{(x^3 + 1)^2} = \frac{Ax^2 + Bx + D}{x^3 + 1} + \int \left(\frac{E}{x + 1} + \frac{Fx + G}{x^2 - x + 1} \right) dx.$$

Продифференцируем правую и левую части этого равенства:

$$\frac{1}{(x^3 + 1)^2} = \frac{(2Ax + B)(x^3 + 1) - (Ax^2 + Bx + D) \cdot 3x^2}{(x^3 + 1)^2} + \frac{E}{x + 1} + \frac{Fx + G}{x^2 - x + 1}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю и приравняв числители левой и правой части равенства, получим соотношение

$$1 = (2Ax + B)(x^3 + 1) - 3x^2(Ax^2 + Bx + D) + (x^3 + 1)(x^2 - x + 1)E + (x^3 + 1)(x + 1)(Fx + G),$$

или

$$1 = 2Ax^4 + Bx^3 + 2Ax + B - 3Ax^4 - 3Bx^3 - 3Dx^2 +$$

$$+(x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - x + 1)E + (x^5 + x^4 + x^2 + x)F + \\ +(x^4 + x^3 + x + 1)G.$$

Искомые параметры удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} E + F &= 0, \\ -A - E + F + G &= 0, \\ -2B + E + G &= 0, \\ -3D + E + F &= 0, \\ 2A - E + F + G &= 0, \\ B + E + G &= 1. \end{aligned}$$

Из первого и четвертого из них следует, что $D = 0$, из второго и пятого находим $A = 0$, из третьего и шестого $B = \frac{1}{3}$. Остаются три уравнения, например

$$\begin{aligned} E + F &= 0, \\ -E + F + G &= 0, \\ -\frac{2}{3} + E + G &= 0. \end{aligned}$$

Из первого и третьего из них выразим F и G и подставим во второе:

$$F = -E, \quad G = \frac{2}{3} - E, \quad -E - E + \frac{2}{3} - E = 0.$$

Следовательно,

$$E = \frac{2}{9}, \quad F = -\frac{2}{9}, \quad G = \frac{4}{9}.$$

Интеграл (3) записывается в форме:

$$\int \frac{dx}{(x^3 + 1)^2} = \frac{x}{3(x^3 + 1)} + \frac{2}{9} \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2 - x + 1} \right) dx.$$

Подынтегральная функция содержит два слагаемых. Вычислим отдельно интеграл от второго из них:

$$\begin{aligned} \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx &= \int \frac{(2x-1) \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{x^2-x+1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2-x+1) - \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2-x+1) - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Получим интеграл (3):

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^3+1)^2} &= \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{2}{9} \ln|x+1| - \\ &- \frac{1}{9} \ln(x^2-x+1) + \frac{2\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C, \end{aligned}$$

или

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{1}{9} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

4. Методом Остроградского вычислить интеграл

$$\int \frac{(4x^2-8x)dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}.$$

Ответ.

$$\frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)} + \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \operatorname{arctg} x + C.$$

1.3 Интегрирование дифференциального бинома

Интеграл вида

$$I = \int x^m (a + bx^n)^p dx \quad (4)$$

называется интегралом от дифференциального бинома. Здесь $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$ и все эти параметры, за исключением m , считаются отличными от нуля.

Сделаем замену переменной

$$x^n = t, \quad x = t^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &= \int t^{\frac{m}{n}} (a + bt)^p \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt = \\ &= \frac{1}{n} \int t^{\frac{m+1}{n}-1} (a + bt)^p dt. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\frac{m+1}{n} - 1 = q.$$

Так как $m, n \in \mathbb{Q}$, то $q \in \mathbb{Q}$. Интеграл (4) примет вид:

$$I = \frac{1}{n} \int t^q (a + bt)^p dt. \quad (5)$$

Если p или q целые, то он является частным случаем интеграла вида

$$\int R \left(x, \left(\frac{cx+d}{c_1x+d_1} \right)^{\frac{r}{s}}, \dots, \left(\frac{cx+d}{c_1x+d_1} \right)^{\frac{u}{v}} \right) dx, \quad (6)$$

где c, d, c_1, d_1 – действительные постоянные, $\frac{r}{s}, \dots, \frac{u}{v} \in \mathbb{Q}$ и R – рациональная функция.

Если $p+q$ – целое число, то интеграл (5) следует записать в виде:

$$I = \frac{1}{n} \int t^{p+q} \left(\frac{a+bt}{t} \right)^p dt.$$

Это также частный случай интеграла (6).

5. Вычислить интеграл

$$I = \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}.$$

Решение.

Так как

$$I = \int x^{-4} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

то I – интеграл от дифференциального бинома.

Введем замену переменной $x^2 = t$. Предположим сначала, что $x \geq 0$. Тогда

$$x = \sqrt{t}, \quad dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

и

$$\begin{aligned} I &= \int t^{-2} (1+t)^{-\frac{1}{2}} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \\ &= \frac{1}{2} \int t^{-\frac{5}{2}} (1+t)^{-\frac{1}{2}} dt. \end{aligned}$$

Здесь $p = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, $q = -\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$, однако $p+q = -3 \in \mathbb{Z}$. Поэтому запишем интеграл I в виде:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int t^{-\frac{5}{2}} \cdot t^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(1+t)^{-\frac{1}{2}}}{t^{-\frac{1}{2}}} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int t^{-3} \left(\frac{1+t}{t} \right)^{-\frac{1}{2}} dt. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменной

$$\frac{1+t}{t} = z^2, \quad z = \sqrt{\frac{1+t}{t}}$$

и вычислим dt :

$$1+t = z^2 t, \quad t = \frac{1}{z^2 - 1}, \quad dt = \frac{-2z}{(z^2 - 1)^2} dz.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &= -\int (z^2 - 1)^3 \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{(z^2 - 1)^2} dz = \\ &= -\int (z^2 - 1) dz = -\frac{z^3}{3} + z + C. \end{aligned}$$

Здесь

$$z = \sqrt{\frac{1+t}{t}} = \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} = \frac{1}{x} \sqrt{1+x^2}.$$

Поэтому

$$I = -\frac{1}{3x^3} \sqrt{(1+x^2)^3} + \frac{1}{x} \sqrt{1+x^2} + C.$$

Если считать $x < 0$, то повторение выкладок показывает, что в этом случае интеграл имеет то же значение.

6. Вычислить интеграл

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

Ответ:

$$\frac{3}{7} \left(4\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 3 \right) \cdot \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} + C.$$

1.4 Метод неопределенных коэффициентов

Если $P_n(x)$ — многочлен степени n , то интеграл

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (7)$$

может быть представлен в виде следующей суммы [3, гл. 2, § 21, п. 21.5]:

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}. \quad (8)$$

Здесь $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степени не выше, чем $n-1$, a, b, c, λ – постоянные.

Продифференцируем обе части равенства (8):

$$\begin{aligned} \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} &= Q'_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \\ &+ Q_{n-1}(x) \cdot \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}. \end{aligned}$$

Умножая обе части этого соотношения на общий знаменатель дробей, получим равенство многочленов

$$2P_n(x) = 2Q'_{n-1}(x)(ax^2 + bx + c) + Q_{n-1}(x)(2ax + b) + 2\lambda.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x , можно найти коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и параметр λ .

Указанный метод может быть применен также для вычисления интегралов вида

$$\int \frac{dx}{(x - \alpha)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

где α, k – постоянные, $\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$. Такие интегралы приводятся к виду (7) с помощью подстановки

$$x - \alpha = \frac{1}{t}.$$

7. Вычислить интеграл

$$I = \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{2x^2 + 2x + 1}}.$$

Решение.

Сделаем замену переменной

$$x = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2}.$$

Тогда

$$I = -\int \frac{t^3 dt}{t^2 \sqrt{\frac{2}{t^2} + \frac{2}{t} + 1}} = -\int \frac{t \cdot |t| dt}{\sqrt{t^2 + 2t + 2}},$$

или

$$I = -\operatorname{sgn} t \cdot \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^2 + 2t + 2}}$$

Представим интеграл в виде суммы:

$$\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^2 + 2t + 2}} = (At + B)\sqrt{t^2 + 2t + 2} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 2t + 2}}. \quad (9)$$

Здесь A, B – постоянные.

Продифференцируем обе части равенства (9):

$$\frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 2t + 2}} = A\sqrt{t^2 + 2t + 2} + (At + B) \frac{t+1}{\sqrt{t^2 + 2t + 2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{t^2 + 2t + 2}}.$$

Умножим обе части этого равенства на знаменатель дробей, то есть на $\sqrt{t^2 + 2t + 2}$:

$$t^2 = A(t^2 + 2t + 2) + At^2 + Bt + At + B + \lambda.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной t , получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} 1 &= 2A, \\ 0 &= 3A + B, \end{aligned}$$

$$0 = 2A + B + \lambda.$$

Решая ее, найдем параметры:

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{3}{2}, \quad \lambda = \frac{1}{2}.$$

Подставляя эти значения в равенство (9), получим:

$$I = -\operatorname{sgn} t \cdot \left(\left(\frac{1}{2}t - \frac{3}{2} \right) \sqrt{t^2 + 2t + 2} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{(t+1)^2 + 1}} \right),$$

или

$$I = -\operatorname{sgn} x \cdot \left(\left(\frac{1}{2x} - \frac{3}{2} \right) \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{x} + 1 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 2} \right| \right) + C.$$

8. Вычислить интеграл

$$\int \frac{3x^2 - 5x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} dx.$$

Ответ:

$$14 \arcsin \frac{x+1}{2} - \frac{1}{2} (3x-19) \sqrt{3-2x-x^2} + C.$$

1.5 Первая подстановка Эйлера

Подстановки Эйлера применяются при вычислении интегралов вида

$$\int R \left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c} \right) dx, \quad (10)$$

где R – рациональная функция, a , b , c – постоянные.

Первая подстановка используется, если $a > 0$, и определяется соотношением

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{ax} \pm t,$$

где знаки «+» или «-» выбираются произвольно.

9. Вычислить интеграл

$$I = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}. \quad (11)$$

Решение.

Здесь $a = 1 > 0$. Применим первую подстановку Эйлера:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = -x + t, \quad (12)$$

то есть

$$t = x + \sqrt{x^2 + x + 1}.$$

Возводя обе части равенства (12) в квадрат, получим

$$x^2 + x + 1 = x^2 - 2xt + t^2,$$

или

$$x + 1 = t^2 - 2xt.$$

Отсюда

$$x = \frac{t^2 - 1}{1 + 2t}.$$

Вычислим дифференциал:

$$dx = \frac{2t(1 + 2t) - 2(t^2 - 1)}{(1 + 2t)^2} dt = \frac{2t^2 + 2t + 2}{(1 + 2t)^2} dt.$$

Подставим найденные выражения в интеграл (11):

$$I = 2 \int \frac{t^2 + t + 1}{t(1 + 2t)^2} dt.$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{t^2 + t + 1}{t(1 + 2t)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1 + 2t} + \frac{D}{(1 + 2t)^2}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю и приравнявая числители, получим соотношение

$$t^2 + t + 1 = A(1 + 4t + 4t^2) + B(t + 2t^2) + Dt$$

и вытекающую из него систему уравнений

$$\begin{aligned} 1 &= 4A + 2B, \\ 1 &= 4A + B + D, \\ 1 &= A. \end{aligned}$$

Найдем ее решение

$$A = 1, B = -\frac{3}{2}, D = -\frac{3}{2}$$

и интеграл (11):

$$\begin{aligned} I &= 2 \int \left(\frac{1}{t} - \frac{3}{2} \frac{1}{1+2t} - \frac{3}{2} \frac{1}{(1+2t)^2} \right) dt = \\ &= 2 \ln|t| - \frac{3}{2} \ln|1+2t| + \frac{3}{2} \frac{1}{1+2t} + C, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} I &= 2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 + x + 1} \right| - \frac{3}{2} \ln \left| 1 + 2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1} \right| + \\ &+ \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 + 2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}} + C. \end{aligned}$$

10. С помощью первой подстановки Эйлера вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

Ответ.

$$2 \ln \left| x - \sqrt{x^2 - x + 1} \right| - \frac{3}{2 \left(2x - 1 - 2\sqrt{x^2 - x + 1} \right)}$$

$$-\frac{3}{2} \ln \left| 2x - 1 - 2\sqrt{x^2 - x + 1} \right| + C.$$

1.6 Вторая подстановка Эйлера

Если в интеграле (10) параметр $c > 0$, то может быть применена вторая подстановка Эйлера

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm xt \pm \sqrt{c}.$$

11. Вычислить интеграл

$$I = \int \frac{dx}{x + \sqrt{4 - 2x - x^2}}. \quad (13)$$

Решение.

Применим подстановку

$$\sqrt{4 - 2x - x^2} = tx - 2, \quad (14)$$

$$t = \frac{\sqrt{4 - 2x - x^2} + 2}{x}$$

и возведем в квадрат обе части равенства (14):

$$4 - 2x - x^2 = t^2 x^2 - 4tx + 4.$$

Выразим отсюда x через переменную t :

$$\begin{aligned} -2 - x &= t^2 x - 4t, \\ x &= \frac{4t - 2}{t^2 + 1}. \end{aligned}$$

Вычислим дифференциал этой функции:

$$dx = \frac{4(t^2 + 1) - 2t \cdot (4t - 2)}{(t^2 + 1)^2} dt =$$

$$= \frac{-4t^2 + 4t + 4}{(t^2 + 1)^2} dt.$$

Учитывая соотношение (14), выразим через t знаменатель подынтегральной функции:

$$\begin{aligned} x + \sqrt{4 - 2x - x^2} &= x + tx - 2 = \\ &= x(t+1) - 2 = \frac{4t-2}{t^2+1}(t+1) - 2 = \\ &= \frac{4t^2 - 2t + 4t - 2 - 2t^2 - 2}{t^2 + 1} = \frac{2t^2 + 2t - 4}{t^2 + 1}. \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в интеграл (13):

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{2} \int \frac{(t^2 + 1)(-t^2 + t + 1)}{(t^2 + t - 2)(t^2 + 1)^2} dt = \\ &= 2 \int \frac{-t^2 + t + 1}{(t^2 + t - 2)(t^2 + 1)} dt = \\ &= 2 \int \frac{-t^2 + t + 1}{(t-1)(t+2)(t^2 + 1)} dt. \end{aligned}$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{-t^2 + t + 1}{(t-1)(t+2)(t^2 + 1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+2} + \frac{Dt + E}{t^2 + 1}.$$

После приведения к общему знаменателю приравняем числители левой и правой частей:

$$\begin{aligned} -t^2 + t + 1 &= A(t+2)(t^2 + 1) + B(t-1)(t^2 + 1) + \\ &+ (Dt + E)(t-1)(t+2). \end{aligned}$$

При $t = 1$ получим:

$$A = \frac{1}{6};$$

при $t = -2$:

$$-5 = -B \cdot 15, B = \frac{1}{3};$$

при $t = i$:

$$1 + i + 1 = (Di + E)(i - 1)(i + 2),$$

или

$$\begin{aligned} 2 + i &= (Di + E)(-3 + i), \\ 2 + i &= -D - 3E + i(-3D + E), \\ \begin{cases} 2 &= -D - 3E, \\ 1 &= -3D + E. \end{cases} \end{aligned}$$

Умножая обе части второго уравнения данной системы на 3 и складывая полученное равенство с первым из уравнений, найдем:

$$5 = -10D, D = -\frac{1}{2}$$

и

$$E = 1 + 3D = -\frac{1}{2}.$$

Интеграл (13) принимает вид:

$$\begin{aligned} I &= 2 \int \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{t-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t+2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{t+1}{t^2+1} \right) dt = \\ &= \frac{1}{3} \ln|t-1| + \frac{2}{3} \ln|t+2| - \frac{1}{2} \ln(t^2+1) - \operatorname{arctgt} + C, \end{aligned}$$

или

$$I = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{4-2x-x^2}+2}{x} - 1 \right| + \frac{2}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{4-2x-x^2}+2}{x} + 2 \right| -$$

$$-\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\left(\sqrt{4-2x-x^2} + 2 \right)^2}{x^2} + 1 \right| - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{4-2x-x^2} + 2}{x} + C.$$

12. Вычислить интеграл:

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1-2x-x^2}}.$$

Ответ:

$$\ln \left| 1 - \frac{x}{1 + \sqrt{1-2x-x^2}} \right| - 2 \operatorname{arctg} \frac{1 + \sqrt{1-2x-x^2}}{x} + C.$$

1.7 Третья подстановка Эйлера

Если в интеграле (10) квадратичная функция $ax^2 + bx + c$ имеет действительные корни x_1, x_2 , то может быть применена третья подстановка Эйлера

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - x_1)t.$$

13. Вычислить интеграл

$$I = \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}}. \quad (15)$$

Решение.

Поскольку справедливо разложение

$$x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3),$$

можно применить подстановку

$$\sqrt{x^2 + 2x - 3} = (x - 1)t, \quad (16)$$

или

$$\sqrt{(x - 1)(x + 3)} = (x - 1)t.$$

Возведем обе части этого равенства в квадрат:

$$(x - 1)(x + 3) = (x - 1)^2 t^2.$$

Выразим отсюда x и вычислим его дифференциал:

$$\begin{aligned} x + 3 &= (x - 1)t^2, \\ x + 3 &= xt^2 - t^2, \\ x &= \frac{t^2 + 3}{t^2 - 1} = 1 + \frac{4}{t^2 - 1}, \\ dx &= \frac{-8t}{(t^2 - 1)^2} dt. \end{aligned}$$

Учитывая равенство (16), выразим знаменатель подынтегральной функции интеграла (15) через t :

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3} &= 1 + (x - 1)t = \\ &= 1 + \frac{4t}{t^2 - 1} = \frac{t^2 + 4t - 1}{t^2 - 1}. \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в интеграл (15):

$$\begin{aligned} I &= -8 \int \frac{t^2 - 1}{t^2 + 4t - 1} \cdot \frac{t}{(t^2 - 1)^2} dt = \\ &= -8 \int \frac{tdt}{(t^2 - 1)(t^2 + 4t - 1)}. \end{aligned}$$

Корни многочленов $t^2 - 1$ и $t^2 + 4t - 1$ различны, поэтому подынтегральную функцию можно записать в форме

$$\frac{t}{(t^2 - 1)(t^2 + 4t - 1)} = \frac{A}{t - 1} + \frac{B}{t + 1} + \frac{Dt + E}{t^2 + 4t - 1}.$$

Для параметров A, B, D, E получим соотношение

$$t = A(t + 1)(t^2 + 4t - 1) + B(t - 1)(t^2 + 4t - 1) + (Dt + E)(t^2 - 1). \quad (17)$$

При $t = 1$ и $t = -1$ найдем:

$$A = \frac{1}{8}, \quad B = -\frac{1}{8}.$$

Чтобы отыскать значения остальных параметров, раскроем скобки в соотношении (17) и приравняем коэффициенты правой и левой части при одинаковых степенях переменной t , например, для второй и для третьей степени:

$$\begin{aligned} t &= A(t^3 + 4t^2 - t + t^2 + 4t - 1) + B(t^3 + 4t^2 - t - t^2 - 4t + 1) + \\ &\quad + D(t^3 - t) + E(t^2 - 1), \\ &\quad \begin{cases} 0 = A + B + D, \\ 0 = 5A + 3B + E. \end{cases} \end{aligned}$$

Решая эту систему, получим:

$$D = 0, \quad E = -\frac{1}{4}.$$

Интеграл (15) принимает форму:

$$\begin{aligned} I &= -8 \int \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{t-1} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{t+1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(t+2)^2 - 5} \right) dt = \\ &= -\ln|t-1| + \ln|t+1| + \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{t+2-\sqrt{5}}{t+2+\sqrt{5}} \right| + C. \end{aligned}$$

Согласно соотношению (16),

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x - 1}.$$

Поэтому

$$I = -\ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x - 1} - 1 \right| + \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x - 1} + 1 \right| +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x - 1} + 2 - \sqrt{5}}{\frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x - 1} + 2 + \sqrt{5}} \right| + C,$$

или

$$I = \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3} + x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} - x + 1} \right| +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3} + (2 - \sqrt{5})(x - 1)}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} + (2 + \sqrt{5})(x - 1)} \right| + C.$$

14. С помощью третьей подстановки Эйлера вычислить интеграл

$$\int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx.$$

Ответ:

$$-\frac{1}{6(t+1)^2} - \frac{5}{18(t+1)} - \frac{17}{108} \ln|t+1| + \frac{3}{4} \ln|t-1| - \frac{16}{27} \ln|t-2| + C,$$

где

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + 1}.$$

2 ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

2.1 Вычисление интеграла по определению

2.1.1 Равномерное разбиение отрезка интегрирования

Из определения определенного интеграла и теоремы его существования следует, что определенный интеграл от функции, непрерывной на отрезке $[a, b]$, может быть вычислен по формуле

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x,$$

где

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad \xi_i \in [a + (i-1)\Delta x, a + i\Delta x], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

то есть как предел последовательности:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i).$$

Например,

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}i\right). \quad (18)$$

15. С помощью определения вычислить интеграл

$$\int_0^1 x^2 dx.$$

Решение.

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (1^2 + 2^2 + \dots + n^2).$$

Справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{(n+1)(2n+1)n}{6}.$$

Поэтому

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)n}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

16. С помощью определения вычислить интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$$

2.1.2 Неравномерное разбиение отрезка интегрирования

В некоторых случаях при вычислении определенного интеграла

$$\int_a^b f(x) dx$$

по определению целесообразно использовать неравномерное разбиение отрезка интегрирования, например, точки разбиения могут составлять геометрическую прогрессию.

Будем считать, что $x_0 = a$, $x_n = b$, $b = q^n a$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда знаменатель прогрессии

$$q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$$

и точки разбиения

$$x_i = x_0 \cdot q^i = a \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

17. С помощью определения вычислить интеграл

$$\int_1^2 x^{10} dx.$$

Решение.

Используем неравномерное разбиение, считая, что

$$x_i = x_0 \cdot q^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Здесь $x_0 = 1$, $x_n = 2$. Поэтому равенство

$$x_n = x_0 \cdot q^n$$

имеет вид

$$2 = 1 \cdot q^n$$

и

$$q = 2^{\frac{1}{n}}.$$

Выберем

$$\xi_i = x_i = x_0 q^i = 2^{\frac{i}{n}} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Длина частичного отрезка

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = x_0 q^{i+1} - x_0 q^i = x_0 q^i (q - 1),$$

или

$$\Delta x_i = 2^{\frac{i}{n}} \left(2^{\frac{1}{n}} - 1 \right).$$

Применим основное соотношение, задающее определенный интеграл:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

(обозначения стандартные). Наибольшая длина частичного отрезка

$$\max \Delta x_i = 2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2^{\frac{n}{2}} - 1} \right) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^{10} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \xi_i^{10} \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{2^{\frac{n}{2}}} \right)^{10} 2^{\frac{i}{2}} \left(\frac{1}{2^{\frac{n}{2}} - 1} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^{\frac{n}{2}} - 1} \right) \sum_{i=1}^n 2^{\frac{11i}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^{\frac{n}{2}} - 1} \right) \sum_{i=1}^n \left(2^{\frac{11}{2}} \right)^i. \end{aligned}$$

В правой части содержится сумма n членов геометрической прогрессии с знаменателем $2^{\frac{11}{2}}$ и первым членом, равным $2^{\frac{11}{2}}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^{10} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^{\frac{n}{2}} - 1} \right) \frac{2^{\frac{11}{2}} \left(\left(2^{\frac{11}{2}} \right)^n - 1 \right)}{2^{\frac{11}{2}} - 1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} - 1}{2^{\frac{11}{2}} - 1} \cdot 2^{\frac{11}{2}} \left(2^{11} - 1 \right). \end{aligned}$$

Учтем, что при $t \rightarrow 0$

$$a^t - 1 = e^{t \ln a} - 1 \approx t \ln a.$$

Получим значение интеграла:

$$\int_1^2 x^{10} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \ln 2}{\frac{11}{n} \ln 2} \cdot 2 \frac{11}{n} (2^{11} - 1) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{11} \cdot 2 \frac{11}{n} (2^{11} - 1) = \frac{2^{11} - 1}{11},$$

или

$$\int_1^2 x^{10} dx = \frac{2047}{11}.$$

18. С помощью определения вычислить интеграл

$$\int_1^2 x^8 dx.$$

2.2 Вычисление предела с помощью определенного интеграла

Формулу (18) можно использовать для вычисления некоторых пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

где

$$\xi_i = a + \frac{b-a}{n} i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

19. Вычислить предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2 + 1^2} + \frac{1}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n^2} \right).$$

Решение.

Применим формулу (18) к интегралу

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2 + i^2}.$$

Из этих равенств следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2 + 1^2} + \frac{1}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n^2} \right) &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2 + i^2} &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

20. Вычислить предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right).$$

Ответ: $\ln 2$.

Указание. Рассмотрите интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x}$.

2.3 Интегралы от четных и нечетных функций

Если четная функция f интегрируема на отрезке $[-a, a]$, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

В случае если функция f нечетная,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

21. Вычислить интеграл:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2 \cos^2 x - 8x \cos 3x - x^2 \sin x + 4x^3 \cos x + x^4 \cos^2 x}{x^4 + 2} dx.$$

Решение.

Сгруппируем четные и нечетные слагаемые в числителе подынтегральной функции и представим интеграл в виде суммы:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2 \cos^2 x + x^4 \cos^2 x}{x^4 + 2} dx + \\ + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-8x \cos 3x - x^2 \sin x + 4x^3 \cos x}{x^4 + 2} dx.$$

Подынтегральная функция второго из данных интегралов нечетная, этот интеграл равен нулю. Поэтому

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2 \cos^2 x + x^4 \cos^2 x}{x^4 + 2} dx = \\ = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(2 + x^4) \cos^2 x}{x^4 + 2} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \\ = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \pi.$$

22. Вычислить интеграл

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2x^7 + 3x^6 - 10x^5 - 7x^3 - 12x^2 + x + 1}{x^2 + 2} dx.$$

Ответ: $-\frac{16}{5}\sqrt{2} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

2.4 Интеграл с переменным пределом интегрирования

Теорема. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $x \in (a, b)$, то

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x).$$

23. Вычислить предел

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}.$$

Решение.

Учтем, что при $x \geq 0$

$$e^{t^2} \geq 1$$

и что

$$\int_0^{+\infty} dt = \infty.$$

Согласно признакам сходимости несобственных интегралов, отсюда следует соотношение:

$$\int_0^{+\infty} e^{t^2} dt = \infty.$$

Аналогично,

$$\int_0^{+\infty} e^{2t^2} dt = \infty.$$

Таким образом, необходимо раскрыть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Применим правило Лопиталя:

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \left(\int_0^x e^{t^2} dt \right) e^{x^2}}{e^{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}}.$$

Это также неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Еще раз используем правило Лопиталя:

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = 0.$$

24. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 dt}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

Ответ: $\frac{\pi^2}{4}$.

2.5 Интеграл в смысле главного значения

2.5.1 Интеграл с бесконечными пределами

Определение. Пусть функция f непрерывна на интервале $(-\infty, +\infty)$. Если существует предел

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(x) dx,$$

то этот предел называется интегралом в смысле главного значения от функции f на указанном интервале и обозначается

$$\text{v. п. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Таким образом, по определению,

$$\text{v. п. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(x)dx.$$

25. Вычислить интеграл в смысле главного значения:

$$\text{v. п. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x)dx}{1+x^2}. \quad (19)$$

Решение.

Рассмотрим интегралы в смысле главного значения:

$$I_1 = \text{v. п. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \quad (20)$$

и

$$I_2 = \text{v. п. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^2}. \quad (21)$$

По определению,

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow +\infty} 2 \int_0^a \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} 2 \arctg x \Big|_0^a = \lim_{a \rightarrow +\infty} 2 \arctg a = \pi. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$I_2 = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \frac{x dx}{1+x^2}.$$

Так как функция $\frac{x}{1+x^2}$ нечетная, то

$$\int_{-a}^a \frac{x dx}{1+x^2} = 0$$

и

$$I_2 = 0.$$

Поскольку оба интеграла в смысле главного значения (20) и (21) существуют, то, по теореме о пределе суммы,

$$\begin{aligned} \text{v. п. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x)dx}{1+x^2} &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\int_{-a}^a \frac{dx}{1+x^2} + \int_{-a}^a \frac{x dx}{1+x^2} \right) = \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \frac{x dx}{1+x^2} = \pi, \end{aligned}$$

то есть интеграл в смысле главного значения (19)

$$\text{v. п. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x)dx}{1+x^2} = \pi.$$

26. Вычислить интеграл в смысле главного значения:

$$\text{v. п. } \int_{-\infty}^{+\infty} (x+1) \operatorname{arctg} x dx.$$

Ответ. Не существует.

2.5.2 Интеграл от неограниченной функции

Определение. Пусть функция f непрерывна на множествах $[a, c)$, $(c, b]$ и не ограничена на каждом из этих промежутков. Если существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right),$$

то этот предел называется интегралом в смысле главного значения от указанной функции на отрезке $[a, b]$ и обозначается

$$\text{v. p.} \int_a^b f(x) dx.$$

Таким образом, по определению,

$$\text{v. p.} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right).$$

27. Вычислить интеграл в смысле главного значения:

$$\text{v. p.} \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{dx}{x \ln x}.$$

Решение.

Согласно определению интеграла в смысле главного значения,

$$\begin{aligned} \text{v. p.} \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{dx}{x \ln x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x \ln x} + \int_{1+\varepsilon}^4 \frac{dx}{x \ln x} \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\ln |\ln x| \Big|_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} + \ln |\ln x| \Big|_{1+\varepsilon}^4 \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\ln |\ln(1 - \varepsilon)| - \ln \left| \ln \left(\frac{1}{2} \right) \right| + \ln |\ln(4)| - \ln |\ln(1 + \varepsilon)| \right) = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\ln \left| \frac{\ln 4}{\ln \frac{1}{2}} \right| + \ln \left| \frac{\ln(1 - \varepsilon)}{\ln(1 + \varepsilon)} \right| \right).
\end{aligned}$$

Так как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\ln(1 - \varepsilon)}{\ln(1 + \varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{-\varepsilon}{\varepsilon} = -1,$$

то

$$\text{v. п. } \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{dx}{x \ln x} = \ln 2 + \ln |-1| = \ln 2.$$

28. Вычислить интеграл в смысле главного значения:

$$\text{v. п. } \int_1^{10} \frac{dx}{7 - x}.$$

Ответ: $\ln 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие / Г.Н. Берман – СПб. : Профессия, 2005. – 432 с.
2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учеб. пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М. : АСТ : Астрель, 2005. – 558 с.
3. Кудрявцев, Л.Д. Математический анализ. Т. I / Л.Д. Кудрявцев. – М. : Дрофа, 2003. – 703 с.
4. Ляшко, И.И. Справочное пособие по математическому анализу. Введение в анализ, производная, интеграл / И.И. Ляшко [и др.]. – Киев : Вища шк., 1984. – 456 с.
5. Марон, И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной: учеб. пособие для вузов / И.А. Марон. – М. : Наука, 1976. – 400 с.
6. Ривкинд, Я.И. Дифференциальное и интегральное исчисление в задачах : учеб. пособие / Я.И. Ривкинд. – Минск : Вышэйш. школа, 1971. – 192 с.
7. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды : учеб. пособие для вузов / Л.Д. Кудрявцев [и др.]; под ред. Л.Д. Кудрявцева. – М. : Наука, 1986. – 528 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
1 НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	4
1.1 ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ	4
1.2 МЕТОД ОСТРОГРАДСКОГО	7
1.3 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО БИНОМА	10
1.4 МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ	13
1.5 ПЕРВАЯ ПОДСТАНОВКА ЭЙЛЕРА	16
1.6 ВТОРАЯ ПОДСТАНОВКА ЭЙЛЕРА	19
1.7 ТРЕТЬЯ ПОДСТАНОВКА ЭЙЛЕРА	22
2 ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	26
2.1 ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ	26
2.1.1 <i>Равномерное разбиение отрезка интегрирования</i>	<i>26</i>
2.1.2 <i>Неравномерное разбиение отрезка интегрирования</i>	<i>27</i>
2.2 ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА	30
2.3 ИНТЕГРАЛЫ ОТ ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ	31
2.4 ИНТЕГРАЛ С ПЕРЕМЕННЫМ ПРЕДЕЛОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ	33
2.5 ИНТЕГРАЛ В СМЫСЛЕ ГЛАВНОГО ЗНАЧЕНИЯ	34
2.5.1 <i>Интеграл с бесконечными пределами</i>	<i>34</i>
2.5.2 <i>Интеграл от неограниченной функции</i>	<i>37</i>
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	39

Учебное издание

Файницкий Юрий Львович

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ

Учебное пособие по самостоятельной работе

Технический редактор Ф. В. Г р е ч н и к о в
Редакторская обработка М. Г. Б о к а р е в а, А. А. Г н у т о в а
Корректорская обработка С. А. Н е ч и т а й л о
Компьютерная верстка Ю. Л. Ф а й н и ц к и й
Доверстка Н. А. Д о ц е н к о, А. А. Г н у т о в а
Донабор А. А. Г н у т о в а

Подписано в печать 18.12.06. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,33. Усл. кр.-отг. 2,45. Печ. л. 2,5.
Тираж 50 экз. Заказ . ИП-22 / 2006

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

