МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА»
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

Е.Б. КОРЕЕВА
Н.Л. ДОДОНОВА

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В ЭКОНОМИКЕ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

САМАРА
Издательство СГАУ
2011

УДК 33
ББК СГАУ : У.в6я7
К663

Рецензент: д-р техн. наук, профессор, заведующий каф. организации производства З а с к а н о в В. Г.

Кореева Е. Б., Додонова Н.Л.

К633 **Методы теории вероятностей и математической статистики в экономике:** учеб. пособие / *Е.Б. Кореева, Н.Л. Додонова* – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2011. – 84 с.: ил.

ISBN 978-5-7883-0822-7

Составлено в соответствии с Государственным образовательным стандартом, с действующей программой по высшей математике для экономических специальностей вузов и охватывает разделы общего курса математики: теория вероятностей и математическая статистика.

УДК 33
ББК СГАУ : У.в6я7

ISBN 978-5-7883-0822-7

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1 «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»

Теория вероятностей изучает закономерности случайных явлений. Опыт, эксперимент, наблюдение явления называется испытанием. Результат испытания называется событием. Для обозначения событий используются большие буквы латинского алфавита: A, B, C и т.д.

Два события называются несовместными (несовместимыми), если появление одного их них исключает появление другого в одном и том же испытании.

Два события называются совместными (совместимыми), если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.

Два события A и B называются противоположными, если в данном испытании они несовместны и одно из них обязательно происходит. Событие, противоположное событию A, обозначают через $\overline{A}$.

Событие называется достоверным, если в данном испытании оно является единственно возможным его исходом, и невозможным, если в данном испытании оно заведомо не может произойти. Событие называется случайным, если оно объективно может наступить или не наступить в данном испытании.

Событие A называется благоприятствующим событию B, если наступление события A влечет за собой наступление события B.

Совокупность событий образует полную группу для данного испытания, если его результатом обязательно становится хотя бы одно из них.

События A_1, A_2, … A_n, образующие полную группу попарно несовместимых равновозможных событий, называются элементарными.

1.1. Классическое определение вероятности

Вероятностью $P(A)$ события A называется отношение числа m элементарных событий, благоприятствующих событию A, к числу всех элементарных событий, т.е.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Следствия:

1. Вероятность достоверного события ($m = n$) равна единице;
2. Вероятность невозможного события ($m = 0$) равна нулю;
3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

1.2. Элементы комбинаторики

Для подсчета числа элементарных событий используются формулы из раздела элементарной математики – комбинаторики.

1) Размещением без повторений A_n^m называется любой упорядоченный набор m различных элементов множества, состоящего из n различных элементов. Число различных размещений из n элементов по m элементов определяется по формуле:

$$A_n^m = \frac{n\,!}{(n-m)\,!}.$$

2) Перестановками из n различных элементов называются размещения из этих n элементов по n. Число всех перестановок находится по формуле:

$$P_n = n!.$$

3) Сочетаниями из n различных элементов по m элементов называются комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом (без учета порядка следования элементов). Число сочетаний из n элементов по m элементов вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

1) Размещением с повторениями $\bar{A}_n^k$ называется любой набор k элементов множества, состоящего из n различных элементов, причем среди k элементов могут быть как различные элементы, так и одинаковые.

Число размещений с повторениями определяется формулой:

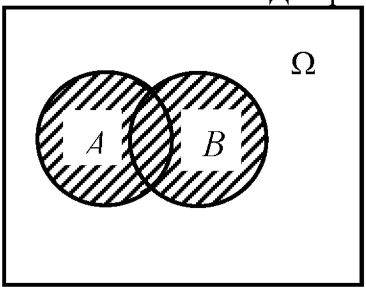
$$A_n^{-k} = n^k, \qquad (k \le n)\ .$$

1.3. Алгебра событий

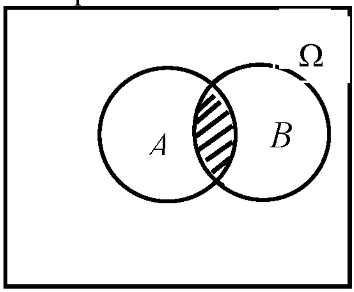
Суммой двух событий A и B называется событие $C = A + B$, состоящее или в наступлении события A, или события B, или обоих событий одновременно.

Произведением событий A и B называется событие $C = A{\cdot}B$, состоящее в выполнении и события A, и события B.

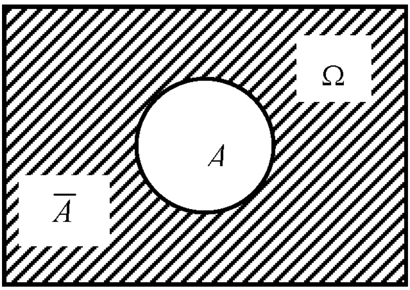
Диаграммы Эйлера



$A + B$ или $A \cup B$



$A \quad B$ или $A \cap B$



$\overline{A}$ (не A)

Здесь Ω – пространство элементарных событий (т.е. множество, составленное из всех элементарных событий).

1.4. Формулы сложения и умножения вероятностей

Вероятность суммы двух <u>несовместных</u> событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (1.1)$$

Формула (1.1) справедлива для любого конечного числа несовместных событий:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

<u>Следствие 1.</u> Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют <u>полную</u> группу <u>несовместных</u> событий, то сумма их вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=2}^{n} P(A_i)=1\ .$$

<u>Следствие 2.</u> Сумма вероятностей <u>противоположных</u> событий равна единице:

$$P(A)=1-P(\overline{A})\ .$$

В общем случае для двух <u>совместных</u> событий теорема сложения записывается в виде:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=1-\mathrm{P}\left(\overline{A}\,\overline{B}\right).$$

Событие A называется <u>независимым</u> от события B, если вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет. Событие A называется <u>зависимым</u> от события B, если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет. Вероятность события, вычисленная при условии, что имело место другое событие B, называется <u>условной вероятностью</u> события A и обозначается $P(A/B)$. Следовательно, условие независимости событий можно записать в виде:

$$P(A/B)=P(A), \qquad (1.2)$$

а условие зависимости:

$$P(A/B)\neq P(A).$$

Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B). \qquad (1.3)$$

Отметим, что зависимость или независимость событий всегда <u>взаимны</u>. Поэтому, в дальнейшем A и B будем называть просто независимыми событиями, если появление одного из них не изменяет вероятности другого. Из равенства (1.2) видно, что для независимых событий формула (1.3) имеет вид:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Теорема умножения для n событий записывается следующим образом:

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1\cdot A_2)\ \ldots P(A_n/\ A_1\cdot A_2\ldots A_{n-1}).$$

В случае независимых в совокупности событий имеем равенство:

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

1.5. Формула полной вероятности и формула Байеса

Предположим, что событие A может произойти вместе с одним из событий H_1, H_2, …, H_n, образующих полную группу несовместных событий, называемых гипотезами. Тогда вероятность события A можно определить по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i).$$

Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть пересчитаны по формуле Байеса:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)}.$$

1.6. Формула Бернулли. Теорема Лапласа. Формула Пуассона

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p, то вероятность того, что событие A появится в серии из n испытаний m раз, выражается формулой Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m \cdot q^{n-m}, \tag{1.4}$$

где $q = 1 - p$.

Наивероятнейшее число наступлений события A в задаче Бернулли можно определить из двойного неравенства:

$$(n + 1) \cdot p - 1 \le m_0 \le (n + 1)p.$$

При больших n и m вместо формулы Бернулли удобно пользоваться приближенными формулами. Согласно локальной теореме Лапласа:

$$P_n(m) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \text{ где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

По интегральной теореме Лапласа вероятность того, что событие A наступит не меньше m_1 и не больше m_2 раз, равна:

$$P_n(m_1\,;\, m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значения функции Лапласа $\Phi(x)$ находятся по таблице Приложения 2.

При малых значениях p или q и больших n удобно пользоваться приближенной формулой Пуассона:

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}, \text{ где } \lambda = np. \tag{1.5}$$

1.7. Дискретная случайная величина и закон ее распределения

Случайной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение (какое именно, заранее неизвестно). Различают дискретные и непрерывные случайные величины. Если множество значений случайной величины конечно или счетно (если ее значения можно пронумеровать), $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$, то она называется дискретной. Под законом распределения дискретной случайной величины понимают состояния, устанавливающие связи между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Эту таблицу называют рядом распределения. Так как в результате опыта случайная величина обязательно принимает какое-то возможное значение, то $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

1.8. Основные числовые характеристики дискретной случайной величины

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X (обозначается $M[X]$ или m_x) называется величина

$$M[X] = m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Вероятностный смысл математического ожидания – это приблизительно среднее значение случайной величины X. Основные свойства математического ожидания:

1) $M[C] = C$ ($C = const$, C – «случайная величина»);
2) $M[CX] = C\,M[X]$;
3) $M[X + Y] = M[X] + M[Y]$.

Дисперсией $D[X]$ или D_x дискретной случайной величины X называется величина

$$D_x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i \ . \qquad (1.6)$$

Дисперсия характеризует рассеивание случайной величины около ее математического ожидания. Формулу (1.6) можно преобразовать к более удобному для вычисления виду:

$$D_x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - m_x^2 = M\left[X^2\right] - M^2[X].$$

Чаще рассеивание характеризуют средним квадратическим отклонением σ – величиной, имеющей ту же размерность, что и сама случайная величина X:

$$\sigma[X] = \sigma_x = \sqrt{D_x} \ .$$

Основные свойства дисперсии для независимых случайных величин:

1) $D_x \geq 0$;
2) $D[C] = 0$;
3) $D\,[CX] = C^2 D[X]$;
4) $D[X + Y] = D[X] + D[Y]$.

1.9. Основные законы распределения дискретной случайной величины: биноминальные, распределение Пуассона

Случайная величина X, для которой вероятность принять значение m вычисляется по формуле (1.4) называется биноминально распределенной. Для такого распределения

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (m = 0, 1, \ldots n),$$

$$m_x = np,$$

$$D_x = npq, \quad \sigma_x = \sqrt{npq} \ .$$

Рассматривая вновь распределение Бернулли при $n \to \infty$, $p \to 0$, $np = \lambda = const$, получаем предельную вероятность (см. формулу (1.5)). Итак, распределение, описываемое формулой (1.5) называется распределением Пуассона. Его числовые характеристики:

$$m_x = \lambda, \qquad D_x = \lambda.$$

Итак, для распределения Пуассона $m_x = D_x$. Это свойство часто применяется на практике при решении вопроса: правдоподобна ли гипотеза о том, что случайная величина X распределена по закону

Пуассона, если из опытов известны статистические характеристики случайной величины m_x, D_x. Если эти значения близки, то это может служить доводом в пользу правдоподобия гипотезы. На практике обычно уже при $n \geq 100$ и $p \leq 0,1$ заменяют биноминальное распределение распределением Пуассона.

1.10. Непрерывная случайная величина. Плотность распределения непрерывной случайной величины

Распределение непрерывной случайной величины обычно задается плотностью вероятности $f(x)$, которая определяется как производная функции распределения:

$$f(x) = F'(x).$$

Смысл функции $f(x)$ выясним из преобразования

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \leq X < x + \Delta x)}{\Delta x},$$

т.е. $f(x)$ – это вероятность попадания случайной величины в бесконечно малый интервал длиной Δx, стягивающийся к точке x.

Свойства плотности вероятности:

1) $f(x) \geq 0$;
2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ – условие нормирования для непрерывной случайной величины;
3) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Вероятность попадания случайной величины в интервал (α, β) находится по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

1.11. Функция распределения, или интегральный закон распределения

Вероятность $P(X < x)$ того, что случайная величина X окажется меньше некоторого вещественного числа x, называется функцией распределения X, обозначается $F(x)$ и определяется следующим образом:

$$F(x) = P(X < x).$$

Введение функции распределения $F(x)$ оправдано тем, что она одинаково хорошо описывает как непрерывную, так и дискретную случайную величину.

Свойства функции распределения:

1) $0 \le F(x) \le 1$;
2) $F(x_1) \le F(x_2)$, если $x_1 < x_2$ ($F(x)$ – неубывающая функция);
3) $F(-\infty) = 0$;
4) $F(+\infty) = 1$;
5) $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Часто $F(x)$ называют интегральной функцией распределения или интегральным законом распределения.

1.12. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Для непрерывной случайной величины:

$$m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx;$$

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx. \tag{1.7}$$

Формулу (1.7) можно преобразовать к более удобному для вычислений виду:

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - m_x^2;$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}.$$

1.13. Равномерное, нормальное и показательное распределения

Встречаются такие непрерывные случайные величины, о которых заранее известно, что их возможные значения лежат в пределах некоторого определенного отрезка, и кроме того, известно, что в пределах этого отрезка все значения случайной величины равновероятны (имеют постоянную плотность вероятности). О таких величинах говорят, что они равномерно распределены. Непрерывная случайная величина X имеет равномерное распределение на $[a, b]$, если $f(x)$ имеет следующий вид:

$$f(x)=\begin{cases} c, & \text{при} \quad x\in[a,b] \\ 0, & \text{при} \quad x\notin[a,b] \end{cases}.$$

Из условия нормирования следует, что $c=\dfrac{1}{b-a}$.

Для равномерного распределения справедливы формулы:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x\in[a,b] \\ 1, & x>b \end{cases},$$

$$m_x=\frac{b+a}{2}, \qquad D_x=\frac{(b-a)^2}{12}, \qquad \sigma_x=\frac{b+a}{2\sqrt{3}}.$$

Случайная величина, распределенная по <u>показательному</u> закону, имеет плотность вероятности:

$$f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t\ge 0 \\ 0, & t<0 \end{cases},$$

где $\lambda > 0$.

Его числовые характеристики:

$$m_x=\frac{1}{\lambda}, \qquad D_x=\frac{1}{\lambda^2}, \qquad \sigma_x=\frac{1}{\lambda}.$$

Случайная величина X распределена по <u>нормальному</u> закону, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a, σ – параметры, вероятностный смысл которых: a – математическое ожидание; σ – среднее квадратическое отклонение X.

Вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β), равна:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2} dx$ – функция Лапласа.

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения случайной величины X от математического ожидания меньше положительного числа δ, равна:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma).$$

2. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1

Задача 1а. В группе из 30 студентов за контрольную работу 6 студентов получили оценку «отлично», 10 студентов – «хорошо», 9 студентов – «удовлетворительно», 5 студентов – «неудовлетворительно». Какова вероятность того, что все три студента, вызванные к доске, имеют неудовлетворительные оценки по контрольной работе?

Решение. Событие A – событие, состоящее в том, что все три студента, вызванные к доске, имеют неудовлетворительные оценки по контрольной работе.

Найдем вероятность события A по формуле:

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Найдем число n всех исходов испытания. Это число равно количеству способов, которыми можно выбрать трех студентов из 30:

$$n=C_{30}^{3}.$$

Число исходов, благоприятствующих событию A, – это количество способов, которыми можно выбрать трех студентов из числа студентов, имеющих неудовлетворительные оценки по контрольной работе, оно равно

$$m=C_{5}^{3}.$$

Тогда:

$$P(A)=\frac{C_5^3}{C_{30}^3}=\frac{\dfrac{5!}{3!(5-2)!}}{\dfrac{30!}{3!(30-3)!}}=\frac{2}{28\cdot 29}=\frac{1}{406}.$$

Ответ: $P(A)=\frac{1}{406}$.

Задача 1б. В коробке лежит 12 шаров: 7 белых и 5 черных. Случайным образом вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что из взятых наугад шаров: а) два белых; б) хотя бы один белый шар.

Решение. Испытанием будет случайное вынимание трех шаров. Элементарными событиями являются всевозможные сочетания по 3 из 12 шаров. Их число равно:

$$n = C_{12}^{3} = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{3!\cdot 9!} = \frac{10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3} = 220 .$$

а) Пусть событие A_1 – наличие среди вынутых шаров 2 белых. Значит, среди вынутых шаров 2 белых и 1 черный. Используя правило умножения, получим:

$$m = C_7^2 \cdot C_5^1 = \frac{7!}{2!(7-2)!}\cdot 5 = \frac{7\cdot 6\cdot 5!}{1\cdot 2\cdot 5!}\cdot 5 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{2} = 105,$$

$$P(A_1) = \frac{105}{220} = \frac{21}{44} .$$

б) Пусть событие A_2 – среди вынутых шаров имеется хотя бы один белый шар. Это событие состоит из несовместных событий:

B_1 – среди вынутых шаров 1 белый и 2 черных;

B_2 – среди вынутых шаров 2 белых и 1 черный;

B_3 – среди вынутых шаров 3 белых.

Имеем $A_2 = B_1 \cup B_2 \cup B_3$.

Проще сначала найти вероятность противоположного события $P(\overline{A_2})$ и затем по формуле $P(A_2) + P(\overline{A_2}) = 1$ вычислить вероятность искомого события.

$\overline{A_2}$ – среди вынутых шаров нет ни одного белого, то есть все черные.

В этом случае

$$m = C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{4\cdot 5}{1\cdot 2} = 10;$$

$$P(\overline{A_2}) = \frac{m}{n} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22};$$

$$P(A_2) = 1 - \frac{1}{22} = \frac{21}{22}.$$

Ответ: $P(A_1) = \frac{7}{11}$, $P(A_2) = \frac{21}{22}$.

Задача 1в. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула содержится в первом справочнике, равна 0,6; во втором – 0,7; в третьем – 0,8. Какова вероятность того, что формула содержится: а) только в одном справочнике; б) хотя бы в одном справочнике; в) только во втором справочнике?

Решение. а) Событие A_1 – формула содержится только в одном справочнике, B_i – формула содержится в i-м справочнике (i = 1, 2, 3).

Соответственно $\overline{B_i}$ – формула не содержится в i-м справочнике.

Событие A_1 можно представить в виде:

$A_1 = B_1\overline{B}_2\overline{B}_3 + \overline{B}_1 B_2\overline{B}_3 + \overline{B}_1\overline{B}_2 B_3$. Учитывая независимость и несовместность каждого события B_1, B_2, B_3, применим теоремы сложения и умножения вероятностей, получаем:

$$P(A_1) = P(B_1)\cdot P(\overline{B}_2)\cdot P(\overline{B}_3) + P(\overline{B}_1)\cdot P(B_2)\cdot P(\overline{B}_3) + P(\overline{B}_1)\cdot P(\overline{B}_2)\cdot P(B_3).$$

По условию: $P(B_1) = 0{,}6$; $P(B_2) = 0{,}7$; $P(B_3) = 0{,}8$.

Тогда $P(\overline{B}_1) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$; $P(\overline{B}_2) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$; $P(\overline{B}_3) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Таким образом,

$$P(A_1) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 =$$
$$= 0{,}036 + 0{,}056 + 0{,}096 = 0{,}188.$$

б) Событие A_2 – формула содержится хотя бы в одном справочнике.

Используем противоположное событие $\overline{A}_2$ – формула не содержится ни в одном справочнике.

Тогда $P(A_2) + P(\overline{A}_2) = 1$.

Отсюда $P(A_2) = 1 - P(\overline{A}_2)$.

Событие A_2 можно представить как $A_2 = \overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot \overline{B}_3$,

тогда $P(A_2) = P(\overline{B}_1)\cdot P(\overline{B}_2)\cdot P(\overline{B}_3) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}024$.

Таким образом, $P(A_2) = 1 - 0{,}024 = 0{,}976$.

в) Событие A_3 – формула содержится только во втором справочнике.

Событие A_3 можно представить в виде: $A_3 = \overline{B}_1 B_2 \overline{B}_3$. Тогда

$$P(A_3) = P(\overline{B}_1)\cdot P(B_2)\cdot P(\overline{B}_3) = 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}056.$$

Ответ: $P(A_1) = 0{,}296$; $P(A_2) = 0{,}976$; $P(A_3) = 0{,}056$.

Задача 1г. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 65% деталей отличного качества, а второй – 82%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалось отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что наудачу взятая с конвейера деталь – отличного качества. Событие A может произойти совместно с одним из двух событий (гипотез):

H_1 – деталь произведена первым автоматом, H_2 – деталь произведена вторым автоматом.

Находим вероятности гипотез.

По условию первый автомат производит вдвое больше деталей, чем второй, поэтому:

$P(H_1) = \frac{2}{3}$ – вероятность того, что деталь сделана первым автоматом,

$P(H_2) = \frac{1}{3}$ – вероятность того, что деталь сделана вторым автоматом.

Условные вероятности события A при их гипотезах соответственно равны:

$P(A/H_1) = 0{,}65$ – вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена первым автоматом;

$P(A/H_2) = 0{,}82$ – вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена вторым автоматом.

Вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется отличного качества, по формуле полной вероятности равна:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) = \frac{2}{3}\cdot 0{,}65 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}82 \approx 0{,}7 .$$

Искомая вероятность того, что взятая деталь отличного качества произведена первым автоматом, по формуле Байеса равна:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot 0{,}65}{0{,}7} \approx 0{,}62 .$$

Ответ: $P(H_1/A) = 0{,}62$.

Задача 1д. Вероятность того, что в локомотивном депо расход электроэнергии превысит суточную норму, равна 0,4.

1) Какова вероятность того, что за 5 рабочих дней будет зафиксирован перерасход электроэнергии в течение 2 дней?

Произвести вычисления: а) по формуле Бернулли; б) по формуле Пуассона; в) по локальной теореме Лапласа. Сделать вывод.

2) Найти вероятность того, что перерасхода энергии не будет хотя бы в течение 3 дней, используя: а) формулу Бернулли; б) интегральную теорему Лапласа.

Решение. Событие A_1 – расход электроэнергии превысит суточную норму.

1) Вероятность того, что событие A_1 появится в 5 случаях 2 раза подсчитаем тремя способами.

а) По формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m \cdot q^{n-m}.$$

По условию: $n = 5$, $m = 2$, $p = 0{,}4$ – вероятность появления события A_1;

$q = 1 - p = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$ – вероятность непоявления события A_1. Получим:

$$P(A_1) = P_5(2) = C_5^2 p^2 q^3 = C_5^2 (0{,}4)^2 \cdot (0{,}6)^3 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} \cdot (0{,}4)^2 \cdot (0{,}6)^3 = 0{,}34.$$

б) По формуле Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = np.$$

Найдем λ:

$$\lambda = 5 \cdot 0{,}4 = 2.$$

$$P(A_1) = P_5(2) = \frac{2^2}{2!} \cdot e^{-2} \approx 0{,}27.$$

в) Применяя локальную теорему Лапласа:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\varphi(x)$ – четная функция, то есть $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

$$P(A_1)=P_5(2)\approx\frac{1}{\sqrt{5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}}\cdot\varphi\left(\frac{2-5\cdot 0{,}4}{5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}\right)\approx\frac{14}{1{,}09}\cdot\varphi(0)=0{,}92\cdot 0{,}3989=0{,}37$$

Расхождение ответов объясняется тем, что в настоящем примере n=5 имеет малое значение, а формула Пуассона и локальная теорема Лапласа дают достаточно хорошие приближения лишь при достаточно больших значениях n.

2) Событие A_2 – перерасхода энергии не будет хотя бы в течение 3 дней, то есть перерасхода энергии не будет вообще или будет в течение одного или двух дней за время наблюдения.

а) По формуле Бернулли вероятность события A_2 находим как сумму отдельных вероятностей:

$$P(A_2)=P_5(0)+P_5(1)+P(2)=C_5^0\cdot p^0q^5+C_5^1\cdot p^1q^4+C_5^2\cdot p^2\cdot q^3=$$

$$=\frac{5\,!}{0\,!\cdot 5\,!}\cdot(0{,}4)^0\cdot(0{,}6)^5+\frac{5\,!}{1!\cdot 4\,!}\cdot(0{,}4)^1\cdot(0{,}6)^4+\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot(0{,}4)^2\cdot(0{,}6)^3\approx 0{,}68$$

б) найдем вероятность события A_2 по интегральной теореме Лапласа:

$$P_n(k\le m\le l)\approx\Phi\left(\frac{l-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right),\qquad k=0,\quad l=2.$$

$$P_5(0\le m\le 2)\approx\Phi\left(\frac{2-5\cdot 0{,}4}{\sqrt{5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}}\right)-\Phi\left(\frac{0-5\cdot 0{,}4}{\sqrt{5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}}\right)=\Phi(0)+\Phi(1{,}83)=0{,}47.$$

Задача 2а. В партии из шести деталей имеются четыре стандартных. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных, построить функцию распределения случайной величины $F(x)$, найти $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$.

Решение. Случайная величина X – число стандартных деталей среди отобранных – имеет следующие возможные значения:

$$x_1=1;\ x_2=2;\ x_3=3.$$

Найдем вероятности возможных значений X по формуле:

$$P(X=k)=\frac{C_n^k\cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m},$$

где N – число деталей в партии, n – число стандартных деталей в партии, m – число отобранных деталей, k – число стандартных деталей среди отобранных.

$N=6,\qquad n=4,\quad m=3.$

$$P(X=1)=\frac{C_4^1\cdot C_2^2}{C_6^3}=\frac{4\cdot1\cdot2\cdot3}{4\cdot5\cdot6}=\frac{1}{5}=0{,}2;$$

$$P(X=2)=\frac{C_4^2\cdot C_2^2}{C_6^3}=\frac{4!\cdot2!\cdot3!\cdot3!}{2!\cdot2!\cdot6!}=\frac{3}{5}=0{,}6;$$

$$P(X=3)=\frac{C_4^3\cdot C_2^0}{C_6^3}=\frac{4!\cdot3!\cdot3!}{3!\cdot6!}=\frac{1}{5}=0{,}2.$$

Получим закон распределения дискретной случайной величины X:

x_i	1	2	3
p_i	0,2	0,6	0,2

Проверка: $\sum\limits_{i=1}^{3}p_i=0{,}2+0{,}6+0{,}2=1$.

Найдем числовые характеристики случайной величины X.

1) Математическое ожидание:

$$M[X]=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i,$$

$$M[X]=\sum_{i=1}^{3}x_i p_i=1\cdot0{,}2+2\cdot0{,}6+3\cdot0{,}2=2,$$

$M[X]=2.$

2) Дисперсия:

$D[X]=M[X^2]-M^2[X],$

$$M\left[X^2\right]=\sum_{i=1}^{3}x_i^2\,p_i=1\cdot0{,}2+2^2\cdot0{,}6+3^2\cdot0{,}2=0{,}2+2{,}4+1{,}8=4{,}4$$

$D[X]=4{,}4-2^2=0{,}4.$

3) Среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{0{,}4} \approx 0{,}63.$$

Ответ: $M[X] = 2$, $D[X] = 0{,}4$, $\sigma[X] = 0{,}63$.

Задача 2б. Две независимые случайные величины X и Y заданы своими законами распределения

x_i	1	2	3
p_i	0,1	0,3	0,6
y_j	2	4	
q_j	0,3	0,7	

Найти закон распределения случайной величины $Z = X + Y$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величин X, Y и Z.

Решение. Составляем закон распределения случайной величины Z. Он будет иметь вид.

Z	3	5	4	6	5	7
P	0,03	0,07	0,09	0,21	0,18	0,42

Контроль: 0,03 + 0,07 + 0,09 + 0,21 + 0,18 + 0,42 =1

Находим

$M(X) = 1\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}3 + 3\cdot 0{,}6 = 2{,}5$, $M(Y) = 2\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}7 = 3{,}4$;

$M(X + Y) = 3\cdot 0{,}03 + 5\cdot 0{,}07 + 4\cdot 0{,}09 + 6\cdot 0{,}21 + 5\cdot 0{,}18 + 7\cdot 0{,}42 = 5{,}9$.

Проверка:

$M(X + Y) = M(X) + M(Y) = 5{,}9$; $\quad M(X^2) = 1\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}3 + 9\cdot 0{,}6 = 6{,}7$;

$M(Y^2) = 4\cdot 0{,}3 + 16\cdot 0{,}7 = 12{,}4$.

$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 6{,}7 - 2{,}5^2 = 0{,}45$.

$D(Y) = M(Y^2) - [M(Y)]^2 = 12{,}4 - (3{,}4)^2 = 0{,}84$.

$M[(X + Y)^2] = 9\cdot 0{,}03 + 25\cdot 0{,}07 + 16\cdot 0{,}09 + 36\cdot 0{,}21 +$
$+ 25\cdot 0{,}18 + 49\cdot 0{,}42 = 36.1$;

$D(X + Y) = M[(X + Y)^2] - [M(X + Y)]^2 = 36{,}1 - 5{,}9^2 = 1{,}29$.

Проверка: $D(X + Y) = D(X) + D(Y) = 1{,}29$.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{0{,}45} = 0{,}671,$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{0{,}84} = 0{,}916,$$

$$\sigma(Z) = \sigma(X + Y) = \sqrt{D(X + Y)} = \sqrt{1{,}29} = 1{,}135.$$

Задача 3а. Непрерывная случайная величина X задана своей функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0; & \text{если } x<2,\\ A(x-2)^2; & \text{если } 2\le x\le 3,\\ 1; & \text{если } x>3.\end{cases}$$

Требуется:

1) найти плотность распределения $f(x)$;

2) определить коэффициент A;

3) схематично построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины X;

5) определить вероятность того, что X примет значение из интервала (1; 2,5).

Решение. 1) найдем плотность распределения $f(x)$:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0; & x<2,\\ 2A(x-2); & 2\le x\le 3,\\ 0; & x>3.\end{cases}$$

2) определим коэффициент A из условия:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1.$$

Так как все значения данной случайной величины X заключены в отрезке [2; 3], то

$$\int_{2}^{3} 2A(x-2)dx=1.$$

Откуда $\left.\dfrac{2A(x-2)^2}{2}\right|_2^3=1$ или $A(3-2)-A(2-2)=1$, следовательно, $A=1$.

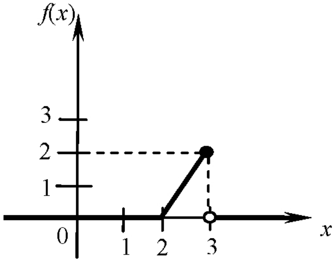


Рис. 1

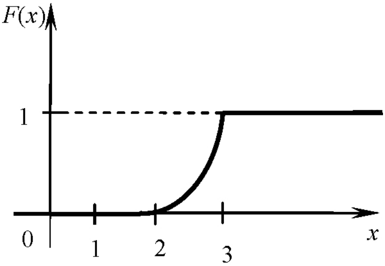


Рис. 2

3) графиком функции $f(x)=\begin{cases} 0, & x<2, \\ 2(x-2), & 2\le x\le 3, \\ 0, & x>3 \end{cases}$

на отрезке [2; 3] является прямая, а вне этого отрезка – ось абсцисс (рис.1).

Графиком функции $F(x)=\begin{cases} 0, & x<2, \\ (x-2)^2, & 2\le x\le 3, \\ 1, & x>3, \end{cases}$

на отрезке [2; 3] является парабола, а вне этого отрезка слева – ось абсцисс, справа – прямая $F(x) = 1$ (рис. 2).

4) Математическое ожидание:

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx=2\int_2^3 x(x-2)dx=2\cdot\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_2^3=2\left(9-9-\frac{8}{3}+4\right)=\frac{8}{3},$$

$$M[X]=\frac{8}{3}.$$

Дисперсия:

$$D[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx-M^2(X)=\int_2^3 x^2\cdot 2(x-2)dx-\left(\frac{8}{3}\right)^2=$$

$$=\int_2^3(2x^3-4x^2)dx-\frac{64}{9}=\frac{x^4}{2}\Bigg|_2^3-\frac{4x^3}{3}\Bigg|_2^3-\frac{64}{9}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(81-16)-\frac{4}{3}(27-8)-\frac{64}{9}=\frac{65}{2}-\frac{76}{3}-\frac{64}{9}=\frac{1}{18},$$

$$D[X] = \frac{1}{18}.$$

5) Найдем вероятность того, что X примет значение из интервала (1; 2,5) по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx,$$

$$P(1 < X < 2{,}5) = \int_{1}^{2{,}5} f(x)dx = \int_{1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{2{,}5} f(x)dx = \int_{1}^{2} 0dx + 2\int_{1}^{2{,}5} (x-2)dx =$$

$$= (x-2)^2\Big|_2^{2{,}5} = (2{,}5-2)^2 - (2-2)^2 = 0{,}5^2 = 0{,}25.$$

Ответ: $A = 1$, $M[X] = \frac{8}{3}$, $D[X] = \frac{1}{18}$, $P(1 < X < 2{,}5) = 0{,}25$.

Задача 3б. Задана непрерывная случайная величина X своей плотностью распределения вероятностей $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & если\ x < 3, \\ A(3-x); & если\ 3 \le x \le 5, \\ 0; & если\ x > 5. \end{cases}$$

Требуется:

1) определить коэффициент A;

2) найти функцию распределения $F(x)$;

3) схематично построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) вычислить математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$;

5) определить вероятность того, что X примет значение из интервала (3; 4).

Решение. 1) Определим коэффициент A из условия:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Так как все значения данной случайной величины X заключены в отрезке [3; 5], то

$$\int_{3}^{5} A(3-x)dx = 1.$$

Откуда $A\left(3x-\dfrac{x^2}{2}\right)\Bigg|_3^5=1$, или $A\left(15-\dfrac{25}{2}-9+\dfrac{9}{2}\right)=1$, $\Rightarrow$ $A=-\dfrac{1}{2}$.

Следовательно, $f(x)$ имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0; & \text{если } x<3, \\ \dfrac{1}{2}(x-3); & \text{если } 3\le x\le 5, \\ 0; & \text{если } x>5. \end{cases}$$

2) Для нахождения функции распределения *F(x)* воспользуемся равенством:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Если $x<3$, $F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\cdot dt=0$;

если $3\le x\le 5$,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{3} 0dt+\int_{3}^{x}\frac{1}{2}(t-3)dt=\left(\frac{1}{4}t^2-\frac{3}{2}t\right)\Bigg|_3^x=$$

$$=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{9}{4}+\frac{9}{2}=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}$$

если $x>5$,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{3} 0dt+\int_{3}^{5}\frac{1}{2}(t-3)dt+\int_{5}^{x}0dt=\left(\frac{t^2}{4}-\frac{3}{2}t\right)\Bigg|_3^5=\frac{25}{4}-\frac{15}{2}-\frac{9}{4}+\frac{9}{2}=$$

$$=\frac{25-30-9+18}{4}=1$$

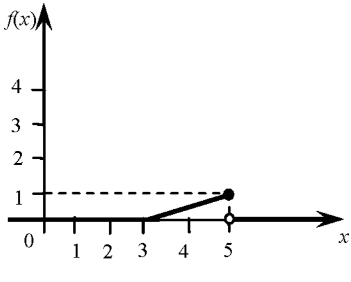


Рис. 3

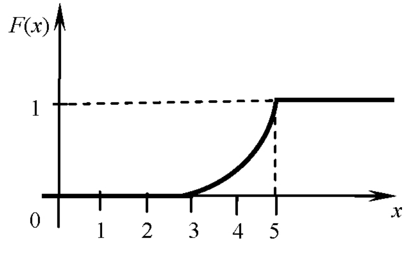


Рис. 4

Искомая функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0; \ \textit{если} \ \ x<3, \\ \frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}; \ \textit{если} \ 3\le x\le 5, \\ 1; \ \textit{если} \ \ x>5. \end{cases}$$

3) Графиком функции $f(x)$ на отрезке [3; 5] является прямая, а вне этого отрезка – ось абсцисс (рис.3).

Графиком функции $F(x)$ на отрезке [3; 5] является парабола, а вне этого отрезка слева – ось абсцисс, справа – прямая $F(x) = 1$ (рис. 4).

4) Математическое ожидание:

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_3^5 x(x-3)dx=\left(\frac{x^3}{6}-\frac{3x^2}{4}\right)\Bigg|_3^5=$$

$$=\frac{125}{6}-\frac{75}{4}-\frac{27}{6}+\frac{27}{4}=\frac{13}{3}.$$

Дисперсия:

$$D[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-M^2[X]=\frac{1}{2}\int_3^5 x^2(x-3)dx-\left(\frac{13}{3}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\int_3^5 (x^3-3x^2)dx-\frac{169}{9}=\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}-x^3\right)\Bigg|_3^5-\frac{169}{9}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{5^4}{4}-5^3-\frac{3^4}{4}+3^3\right)-\frac{169}{9}=\frac{152}{8}-\frac{169}{9}=\frac{2}{9}.$$

5) Найдем вероятность того, что X примет значение из интервала (3; 4) по формуле:

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_\alpha^\beta f(x)dx\ .$$

$$P(3<X<4)=\frac{1}{2}\int_3^4 (x-3)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-3x\right)\Bigg|_3^4=\frac{1}{2}\left(8-12-\frac{9}{2}+9\right)=\frac{1}{4}=0{,}25$$

Ответ: $A=-\frac{1}{2}$, $M[X]=\frac{13}{3}$, $D[X]=\frac{2}{9}$, $P(3<X<4) = 0{,}25$.

Задача 3в.

Непрерывная случайная величина X задана своей плотностью распределения вероятностей $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ A(3x-x)^2 & \text{при } 0\le x\le 3,\\ 0 & \text{при } x>3.\end{cases}$

Требуется:

1) найти коэффициент A;

2) найти функцию распределения $F(x)$;

3) построить график функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти математическое ожидание и дисперсию X;

5) найти вероятность того, что X примет значение из интервала (α,β), если $\alpha=1, \beta=2$.

Решение.

1) Так как все значения случайной величины заключены в промежутке [0,3], то

$$\int_0^3 A(3x-x^2)dx=1, \text{ откуда } A\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=1, \text{ или } A\left(\frac{27}{2}-9\right)=1,\ A=\frac{2}{9}.$$

2) Воспользуемся формулой $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Если $x<0$, то $f(x)=0$ и $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx=0$.

Если $0\le x\le 3$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\int\limits_{0}^{x}\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}x^2\right)dx=\frac{x^2}{3}-\frac{2x^3}{27}$.

Если $x>0$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\int\limits_{0}^{3}\left(\frac{2x}{3}-\frac{2x^2}{9}\right)dx+\int\limits_{3}^{x}0dx=\left(\frac{x^2}{3}-\frac{2x^3}{27}\right)\Bigg|_0^3=1$

Искомая функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ \dfrac{x^2}{3}-\dfrac{2x^3}{27} & \text{при } 0\le x\le 3,\\ 1 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

3) Строим график функции $f(x)$ и $F(x)$ (рис. 5,6):

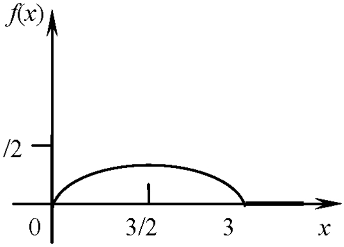


Рис. 5

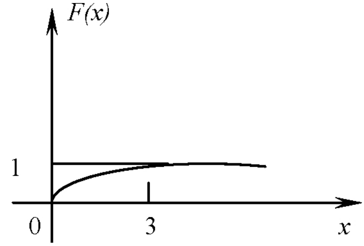


Рис. 6

4) Математическое ожидание

$$M(X)=\int_0^3 xf(x)dx=\int_0^3 x\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}x^2\right)dx=\int_0^3\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{9}x^3\right)dx=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^4}{3}\Bigg|_0^3-\frac{2}{9}\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^3=6-\frac{9}{2}=\frac{3}{2}.$$

Дисперсия

$$D(X)=\int_0^3 x^2 f(x)dx-[M(x)]^2=\int_0^3 x^2\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}x^2\right)dx-\left(\frac{3}{2}\right)^2=$$

$$=\int_0^3\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{9}x^2\right)dx-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\int_0^3\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{9}x^4\right)dx-\frac{9}{4}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^3-\frac{2}{9}\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^3-\frac{9}{4}=\frac{27}{2}-\frac{54}{5}-\frac{9}{4}=\frac{9}{20}.$$

5) $P(1<X<2)=\int_1^2\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}x^2\right)dx=\left(\frac{2}{3}\frac{x^2}{2}-\frac{2}{9}\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=\frac{13}{27}.$

Задача 3г. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad x\le 0,\\ A\sin x & \text{при}\quad 0<x\le \pi/2,\\ 1 & \text{при}\quad x>\pi/2.\end{cases}$$

Найти параметр A и плотность распределения $f(x)$.

Решение. $f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0.\\ A\cos x & \text{при} \quad 0<x\le \pi/2,\\ 0 & \text{при} \quad x>\pi/2.\end{cases}$

$\int\limits_0^{\pi/2} f(x)dx=1$, следовательно $\int\limits_0^{\pi/2} A\cos x dx=1$,

откуда $A\sin x\Big|_0^{\pi/2}=1$, или A = 1, следовательно,

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ \cos x & \text{при} \quad 0<x\le \pi/2,\\ 0 & \text{при} \quad x>\pi/2.\end{cases}$$

Задача 4а. Нормально распределенная случайная величина X задана своими параметрами: $a=3$ (математическое ожидание); σ = 5 (среднее квадратичное отклонение).

Требуется:

а) записать выражение для плотности вероятности и схематично изобразить ее график;

б) определить вероятность того, что X примет значения из интервала (1; 7);

в) определить вероятность того, что X отклонится (по модулю) от a = 3 не более, чем на δ = 2.

Решение. а) Нормальный закон распределения характеризуется плотностью:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Запишем выражение для плотности вероятности с параметрами $a=3$ и $\sigma=5$:

$$f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{2\cdot 5^2}}.$$

При x = 3 функция $f(x)$ имеет максимум:

$$f_{\max}(3)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}\approx 0{,}08.$$

График функции $f(x)$ симметричен относительно прямой $x=a=3$.

При $x = a \pm \sigma$, т.е. при $x = 3 \pm 5$ кривая $f(x)$ имеет перегибы:

$$f(3\pm 5) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(3\pm 5-3)^2}{2\cdot 5^2}} = \frac{1}{5\sqrt{2\pi e}},$$

$$f(8) = f(-2) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi e}} \approx 0{,}05.$$

Схематично строим график $f(x)$ (рис. 7):

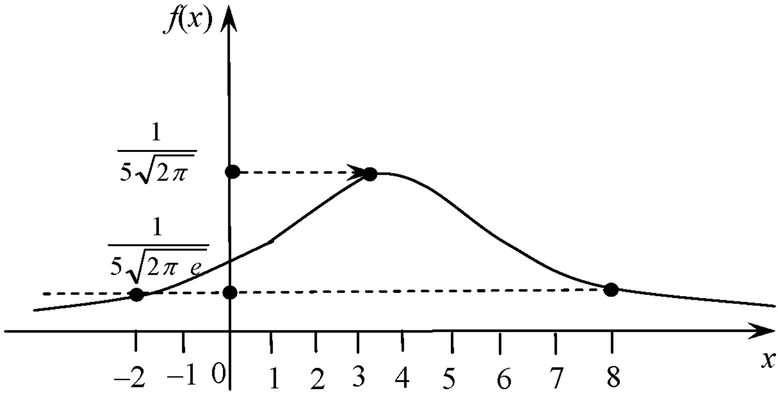


Рис. 7

б) Определим вероятность того, что X примет значение из интервала (1; 7) по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dx$ – функция Лапласа.

$\Phi(x)$ – нечетная функция, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Значения функции $\Phi(x)$ находят из Приложения 2.

Тогда

$$P(1 < x < 7) = \Phi\left(\frac{7-3}{5}\right) - \Phi\left(\frac{1-3}{5}\right) = \Phi(0{,}8) + \Phi(0{,}4) =$$

$$= 0{,}2881 + 0{,}1554 = 0{,}4435.$$

в) Вероятность отклонения X от математического ожидания a находим по формуле:

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

$$P(|X-3|<2)=2\Phi\left(\frac{2}{5}\right)=2\cdot\Phi(0,4)=2\cdot 0{,}1554=0{,}3108.$$

Ответ: $P(1<X<7)=0{,}4435$, $P(|X-3|<2)=0{,}3108$.

Задача 4б. Нормально распределенная случайная величина X задана своими параметрами $a = 30$ и $\sigma = 10$. Требуется:

1) написать формулу плотности вероятности и схематически построить ее график;
2) определить вероятность попадания X в интервал (10,50);
3) определить вероятность того, что X отклонится (по модулю) от $a = 30$ не более, чем на $\delta = 1$.

Решение.

1) По заданным параметрам случайной величины X плотность вероятности будет иметь вид $f(x)=\dfrac{1}{10\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-(x-30)^2}{200}}$.

Схематически строим график (рис. 8):

$$f(a=30)=\frac{1}{10\sqrt{2\pi}};\qquad f(a\pm\sigma)=f(a\pm 10)=\frac{1}{10\sqrt{2\pi e}}.$$

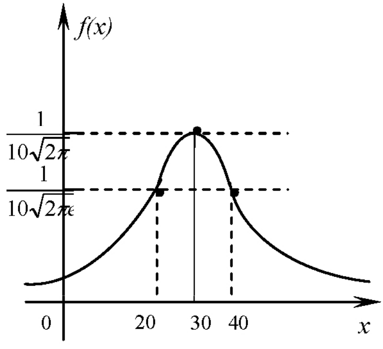


Рис. 8

$$P(10<X<50)=\Phi\left(\frac{50-30}{10}\right)-\Phi\left(\frac{10-30}{10}\right)=\Phi(20)-\Phi(-2)=\Phi(2)+\Phi(2)=2\Phi(2).$$

2) По таблице значений функции Лапласа находим $\Phi(2)=0{,}4772$. Следовательно $P(10<X<50)=2\cdot 0{,}4772=0{,}9544$.

3) Вероятность отклонения находим по формуле

$$P(|X-\alpha|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Подставив данные, получим

$$P(|X-30|<1)=2\Phi\left(\frac{1}{10}\right)=2\cdot 0{,}0398=0{,}0796,$$

где по таблице $\Phi\left(\frac{1}{10}\right)=0{,}0398$.

Задача 4в. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,5. Найти число испытаний n, при которых с вероятностью 0,7698 можно ожидать, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.

Решение. По условию $p=0{,}5$ $q=1\text{-}p=0{,}5$, $\varepsilon=0{,}02$.

Воспользуемся формулой

$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$. Значит $P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}5\right|\le 0{,}02\right)=0{,}7698$,

но тогда

$$2\Phi\left(0{,}02\sqrt{\frac{n}{0{,}5\cdot 0{,}5}}\right)=0{,}7698 \quad \text{или} \quad \Phi\left(0{,}04\sqrt{n}\right)=0{,}3849.$$

По таблице для $\Phi(x)$ находим $\Phi(1{,}2)=0{,}3849$, следовательно $0{,}04\sqrt{n}=1{,}2$, или $\sqrt{n}=30$. Таким образом $n=900$.

Задача 5а. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна, 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажутся непроверенными от 70 до 100 деталей.

Решение. По условию, $p=0{,}2$, $q=1\text{-}p=0{,}8$, $n=400$, $k_1=70$, $k_2=100$. По интегральной теореме Лапласа $P_{400}(70{,}100)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$.

Находим

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -1{,}25\,;\; x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 2{,}5\,.$$

Таким образом,

$$P_{400}(70{,}100) \approx \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25) = 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882\,.$$

Задача 5б. Вероятность того, что деталь не стандартна, $p = 0{,}1$. Найти сколько деталей надо отобрать, чтобы с вероятностью, равной 0,9544, можно было утверждать, что относительная частота появления нестандартных деталей (среди отобранных) отклоняется от вероятности p по абсолютной величине не более чем на 0,03.

Решение.

По условию $p = 0{,}1$, $q = 0{,}9$, $\varepsilon = 0{,}03$, $P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}1\right| \le 0{,}03\right) = 0{,}9544$.

Требуется найти n.

Воспользуемся формулой $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/pq}\right)$.

В силу условия $2\Phi\left(0{,}03\sqrt{n/(0{,}1 \cdot 0{,}9)}\right) = 2\Phi\left(0{,}1\sqrt{n}\right) = 0{,}9544$, следовательно $\Phi\left(0{,}1\sqrt{n}\right) = 0{,}4772$.

По таблице находим $\Phi(2) = 0{,}4772$. Для вычисления n получаем уравнение $0{,}1\sqrt{n} = 2$, откуда $n = 400$.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1

Задача №1

1.1 В партии из 10 деталей 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных 3-х деталей есть хотя бы одна нестандартная.

1.2 В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент: а) включено 4 мотора; б) включены все моторы; в) работает более половины моторов.

1.3 Два стрелка производят по одному выстрелу по одной мишени. Вероятность попадания для первого 0,8, для второго 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что эта пробоина принадлежит первому стрелку.

1.4 Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что они различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны две нужные цифры.

1.5 Найти вероятность того, что при пяти выстрелах в мишени будет не менее двух пробоин, если в среднем из десяти выстрелов стрелок попадает в мишень семь раз.

1.6 У сборщика имеется 16 деталей, изготовленных заводом № 1, и 4 детали завода № 2. Наудачу взяты 2 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них окажется изготовленной заводом № 1.

1.7 Из ящика, содержащего 3 белых и 7 черных шаров, вынимают один за другим 3 шара. Найти вероятность того, что все извлеченные шары черные, если: а) шары после испытания возвращаются в ящик; б) шары обратно не попадают.

1.8 Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 10 выстрелах мишень будет поражена: а) 7 раз; б) более 7 раз; в) не менее 7 и не более 9 раз.

1.9 Имеются 3 одинаковые на вид урны: в первой урне 2 белых и 1 черный шар; во второй – 3 белых и 1 черный; в третьей – 2 белых и 2 черных шара. Одна из урн выбирается наудачу и из нее достается шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

1.10 Железнодорожный состав формируется из десяти вагонов. Найти вероятность того, что два определенных вагона окажутся рядом.

1.11 Найти вероятность того, что «шестерка» на игральной кости выпадает 2 раза при 10 подбрасываниях. Найти наивероятнейшее число выпадений «шестерки» при 10 подбрасываниях игральной кости.

1.12 Вероятности попадания в мишень для каждого из четырех стрелков соответственно равны 0,7; 0,75; 0,8 и 0,9. Наугад выбранный стрелок делает один выстрел. Определить вероятность того, что он попадает в мишень.

1.13 Вероятность попадания в цель равна 0,5. Для поражения цели достаточно хотя бы одного попадания. Сколько нужно израсходовать снарядов для поражения цели, если цель должна быть поражена с вероятность не менее 0,9?

1.14 Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в десятку, равна 0,6. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,8 он попал в десятку хотя бы один раз?

1.15 Игральная кость подброшена 8 раз. Найти вероятность того, что «тройка» выпадет: а) 1 раз; б) от 1 до 3 раз; в) более 2-х раз.

1.16 В цехе два станка производят одинаковые детали. Мощность первого станка в 1,5 раза превышает мощность второго. Первый станок дает 6% брака, второй 3%. Какова вероятность того, что произвольно выбранная деталь окажется годной?

1.17 Из колоды карт (36 листов) извлекают 4 карты. Найти вероятности следующих событий: а) все 4 карты тузы; б) все карты одной масти; в) извлечены туз, король, дама и валет.

1.18 Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые потом тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три.

1.19 Из колоды карт (36 листов) извлекают 3 карты. Найти вероятность того, что все они будут одной масти, если: а) карта в колоду возвращается; б) карта обратно не попадает.

1.20 На складе имеется 30 коробок деталей изготовленных заводом № 1 и 50 коробок деталей, изготовленных заводом № 2. Вероятность того, что деталь завода № 1 окажется бракованной равна 0,1, а завода № 2 – 0,05. Наудачу извлеченная деталь оказалась стандартной. Определить вероятность того, что она с завода № 1.

1.21 Производится 4 независимых выстрела по одной цели с различных расстояний; вероятности попадания при этих выстрелах соответственно равны: p_1=0,1; p_2=0,2; p_3=0,3; p_4=0,4. Найти вероятность: а) ни одного; б) одного; в) двух; г) хотя бы одного попадания.

1.22 Из полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую извлеченную наудачу кость можно приставить к первой.

1.23 В ящике 10 деталей, 2 из которых нестандартные. Найти вероятность того, что в наудачу отобранных 6 деталях окажется не более одной нестандартной детали.

1.24 Прибор состоит из 8 однородных элементов, но может работать при наличии в исправном состоянии не менее 6 из них. Каждый из элементов за время работы прибора t выходит из строя независимо от других с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что прибор откажет за время t.

1.25 В первой урне 20 шаров, из них 18 белых; во второй – 10 шаров, из них 9 белых. Из второй урны наудачу взят шар и переложен в первую. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из первой урны, будет белым.

1.26 Производится 4 независимых выстрела по самолету. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,3. Для поражения самолета заведомо достаточно двух попаданий; при одном попадании самолет поражается с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что самолет будет поражен.

1.27 Из полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую наудачу извлеченную кость можно приставить к первой, если первая кость: а) оказалась дублем; б) не есть дубль.

1.28 Трое спортсменов стреляют по мишени, вероятность попадания для каждого из них: 0,85; 0,9 и 0,95. Определить вероятности: а) трех попаданий; б) одного попадания; в) хотя бы одного попадания.

1.29 Вероятность появления бракованной детали равна 0,15. Найти вероятность того, что среди 10 случайно отобранных деталей окажется бракованных: а) 2 детали; б) менее 2 деталей; в) более 2 деталей.

1.30 В группе спортсменов 10 лыжников, 5 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалифицированную норму такова: для лыжника 0,9, для велосипедиста 0,8 и для бегуна 0,75. Выбранный наудачу спортсмен норму не выполнил. Найти вероятность того, что это был лыжник.

Задача №2

2.1 Известно, что случайная величина может принимать значения 1,2,3. Составить закон распределения этой случайной величины, если известно, что ее математическое ожидание равно 1,8, а дисперсия равна 0,56.

2.2 Игральная кость брошена 3 раза. Написать закон распределения числа появлений «шестерки». Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

2.3 Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,4. Составить закон распределения числа попаданий при 4-х выстрелах. Найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение этой случайной величины.

2.4 Составить закон распределения вероятностей числа появлений события A в трех независимых испытаниях, если вероятность появления события в каждом испытании равна 0,6. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

2.5 Производится 3 выстрела с вероятностями попадания в цель $p_1=0,4$, $p_2=0,3$ и $p_3=0,6$. Составить закон распределения числа попаданий и найти математическое ожидание общего числа попаданий.

2.6 Производится 4 выстрела с вероятностями попадания в цель $p_1=0,6$, $p_2=0,4$, $p_3=0,5$ и $p_4=0,7$. Составить закон распределения числа попаданий и найти математическое ожидание этой случайной величины.

2.7 На некоторой остановке автобус останавливается только по требованию. Вероятность остановки равна 0,2. За смену автобус проходит мимо этой остановки 5 раз. Составить закон распределения числа остановки за смену, найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

2.8 В ящике 10 шаров с цифрами 1 и 2. Цифра, стоящая на вынутом наугад шаре, есть случайная величина, математическое ожидание которой равно 1,4. Сколько шаров с цифрой 1 имеется в ящике?

2.9 Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,2. Испытанию подвергнуто 5 деталей. Составить закон распределения числа отказавших деталей, найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение этой случайной величины.

2.10 Найти математическое ожидание суммы и произведения числа очков, которые могут выпасть при одном бросании двух игральных костей.

2.11 Случайная величина x может принимать два возможных значения: x_1 с вероятностью 0,3 и x_2 с вероятностью 0,7, причем $x_1<x_2$.

Найти x_1 и x_2, зная, что математическое ожидание этой случайной величины равна 2,7, а дисперсия – 0,21.

2.12 Стрелок производит 3 выстрела по мишени, с вероятностью попадания при каждом 0,4. За каждое попадание ему зачисляют 5 очков. Составить закон распределения числа выбитых очков. Найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение этой случайной величины.

2.13 Стрелок ведет стрельбу по мишени до первого попадания, имея 4 патрона. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Составить закон распределения боезапаса, оставшегося неизрасходованным. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

2.14 Испытывается устройство, состоящее из 4-х независимо работающих приборов. Вероятность отказа приборов такова: p_1=0,3; p_2=0,4; p_3=0,5 и p_4=0,6. Составить закон распределения числа отказавших приборов, найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

2.15 Вероятность того, что деталь изготовлена на данном станке равна 0,6. Произвольно выбирается 5 деталей. Составить закон распределения числа деталей, изготовленных на данном станке, найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение этой случайной величины.

2.16 Две независимые случайные величины X и Y заданы своими законами распределения:

x_i	0	1	2
p_i	0,1	0,5	0,4

y_i	-1	0	1
p_i	0,2	0,4	0,4

Определить закон распределения случайной величины $Z=X+Y$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное X, Y и Z.

2.17 Игральная кость подброшена 4 раза. Составить закон распределения числа появлений «пятерки», найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

2.18 Два независимые случайные величины X и Y заданы своими законами распределения:

x_i	0	1	2
p_i	0,3	0,4	0,3

y_i	-1	0	1
p_i	0,2	0,1	0,7

Определить закон распределения случайной величины $Z=XY$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайных величин X, Y и Z.

2.19 Случайная величина X может принимать три значения 0,1 и 2. Составить закон распределения этой случайной величины, если ее математическое ожидание равно 0,9; дисперсия 0,69.

2.20 В цехе имеются 5 моторов. Для каждого вероятность включения в данный момент равна 0,6. Составить закон распределения числа включенных моторов, найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

2.21 Составить закон распределения числа выпавших гербов при 6 бросаниях монеты. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение этой случайной величины.

2.22 Стрелок может выбить 10, 9 или 8 очков с вероятностями p_1, p_2 и p_3. Количество выбитых очков – случайная величина, математическое ожидание которое равно 9,2 , а дисперсия 0,36. Составить закон распределения этой случайной величины.

2.23 Монета подброшена 7 раз. Составить закон распределения числа выпавших гербов, найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

2.24 Случайная величина X может принимать значения x_1 и x_2 с вероятностью 0,6 и 0,4. Найти значения x_1 и x_2, если математическое ожидание случайной величины X равно 2,4, дисперсия равна 0,24 и $x_1+x_2<5{,}5$.

2.25 Дискретные независимые случайные величины X и Y заданы законами распределения

x_i	1	2
p_i	0,2	0,8

y_i	0,5	1
p_i	0,3	0,7

Найти математическое ожидание и дисперсию произведения XY двумя способами: а) составив ряд распределения XY; б) пользуясь свойствами математического ожидания и дисперсии.

2.26 Игральная кость брошена 5 раз. Составить закон распределения числа выпавших «троек», найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

2.27 Вероятность солнечного дня в июле равна 0,8. Составить закон распределения числа солнечных дней в июльской неделе, найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

2.28 Вероятность попадания стрелком в мишень при одном выстреле равна 0,8. Составить закон распределения числа пробоин в мишени при 4-х выстрелах. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

2.29 Монета подброшена 8 раз. Составить закон распределения числа выпавших «гербов», найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение этой случайной величины.

2.30 Вероятность появления события A в одном испытании равна 0,3. Составить закон распределения числа появления события A в 5 испытаниях, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение этой случайной величины.

Задача №3

3.1-3.15 Задана непрерывная случайная величина X своей плотностью распределения $f(x)$. Требуется:

1. Определить коэффициент A;
2. Найти функцию распределения $F(x)$;
3. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;
4. Вычислить математическое ожидание и дисперсию X
5. Определить вероятность того, что X примет значение из интервала (α ; β).

3.1 $$f(x)=\begin{cases}0, & x<-2,\\ A(x+2), & -2\le x\le 1,\\ 0, & x>1,\end{cases}\qquad \alpha=-1;\beta=1$$

3.2 $$f(x)=\begin{cases}0, & x<-3,\\ A(x+3), & -3\le x\le 1,\\ 0, & x>1,\end{cases}\qquad \alpha=-2;\beta=0$$

3.3 $$f(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ A(x-1), & 1\le x\le 4,\\ 0, & x>4,\end{cases}\qquad \alpha=2;\beta=3$$

3.4 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ Ax, & 0\le x\le 2,\\ 0, & x>2,\end{cases}$ α=1;β=2

3.5 $f(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ A(x+1), & -1\le x\le 3,\\ 0, & x>3,\end{cases}$ α=0;β=2

3.6 $f(x)=\begin{cases}0, & x<2,\\ A(x-2), & 2\le x\le 5,\\ 0, & x>5,\end{cases}$ α=3;β=4

3.7 $f(x)=\begin{cases}0, & x<3,\\ A(x-3), & 3\le x\le 7,\\ 0, & x>7,\end{cases}$ α=3;β=6

3.8 $f(x)=\begin{cases}0, & x<-3,\\ A(x+3), & -3\le x\le 1,\\ 0, & x>1,\end{cases}$ α=-2;β=0

3.9 $f(x)=\begin{cases}0, & x<4,\\ A(x-4), & 4\le x\le 9,\\ 0, & x>9,\end{cases}$ α=5;β=7

3.10 $f(x)=\begin{cases}0, & x<-2,\\ A(x+2), & -2\le x\le 6,\\ 0, & x>6,\end{cases}$ α=0;β=4

$$3.11\ \ f(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ A(x-1), & 1\le x\le 5,\\ 0, & x>5,\end{cases}\qquad \alpha=2;\beta=4$$

$$3.12\ \ f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ Ax, & 0\le x\le 6,\\ 0, & x>6,\end{cases}\qquad \alpha=1;\beta=3$$

$$3.13\ \ f(x)=\begin{cases}0, & x<-5,\\ A(x+5), & -5\le x\le 0,\\ 0, & x>0,\end{cases}\qquad \alpha=-4;\beta=-2$$

$$3.14\ \ f(x)=\begin{cases}0, & x<3,\\ A(x-3), & 3\le x\le 7,\\ 0, & x>7,\end{cases}\qquad \alpha=4;\beta=6$$

$$3.15\ \ f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ Ax, & 0\le x\le 5,\\ 0, & x>5,\end{cases}\qquad \alpha=1;\beta=4$$

3.16-3.30 Задана непрерывная случайная величина X своей функцией распределения $F(x)$. Требуется:

1. Найти коэффициент A;
2. Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$;
3. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$;
4. Вычислить математическое ожидание и дисперсию X;
5. Определить вероятность того, что X примет значение из интервала (α ; β).

$$3.16\ \ F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ A(x^3+1), & -1\le x\le 2,\\ 1, & x>2,\end{cases}\qquad (\alpha=0\ ;\beta=2)$$

3.17 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ Ax^2, & 0\le x\le 4,\\ 1, & x>4,\end{cases}$ (*α*=1 ;*β*=3)

3.18 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ A(x-1)^2, & 1\le x\le 3,\\ 1, & x>3,\end{cases}$ (*α*=2 ;*β*=3)

3.19 $F(x)=\begin{cases}0, & x<2,\\ A(x^2-4), & 2\le x\le 5,\\ 1, & x>5,\end{cases}$ (*α*=3 ;*β*=5)

3.20 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ A(x-1)^2, & 1\le x\le 3,\\ 1, & x>3,\end{cases}$ (*α*=1 ;*β*=2)

3.21 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ A(x-1)^2, & 1\le x\le 6,\\ 1, & x>6,\end{cases}$ (*α*=2 ;*β*=4)

3.22 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ A(x^2-1), & 1\le x\le 4,\\ 1, & x>4,\end{cases}$ (*α*=1 ;*β*=3)

3.23 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ Ax^3, & 0\le x\le 3,\\ 1, & x>3,\end{cases}$ (*α*=1 ;*β*=3)

3.24 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-2,\\ A(x+2)^2, & -2\le x\le 3,\\ 1, & x>3,\end{cases}$ (*α*=-1 ;*β*=1)

3.25 $F(x)=\begin{cases}0, & x<2,\\ A(x^2-4), & 2\le x\le 5,\\ 1, & x>5,\end{cases}$ (α=1 ;β=3)

3.26 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-3,\\ A(x\ \ +3)^2, & -3\le x\le 2,\\ 1, & x>2,\end{cases}$ (α=-1 ;β=1)

3.27 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ Ax^3, & 0\le x\le 6,\\ 1, & x>6,\end{cases}$ (α=2 ;β=4)

3.28 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ A(x^2-1), & 1\le x\le 5,\\ 1, & x>5,\end{cases}$ (α=1 ;β=3)

3.29 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ A(x-1)^3, & 1\le x\le 3,\\ 1, & x>3,\end{cases}$ (α=1 ;β=3)

3.30 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-2,\\ A(x+2)^2, & -2\le x\le 1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$ (α=-1 ;β=0)

Задача №4

4.1-4.30 Нормально распределенная случайная величина X задана своими параметрами – математическим ожиданием a и средним квадратичным отклонением σ . Требуется:

1. Написать плотность вероятностей $f(x)$ и схематически изобразить ее график;

2. Определить вероятность того, что X примет значение из интервала (α ;β);

3. Определить вероятность того, что X отклоняется (по модулю) от a не более чем на δ .

№ варианта	*a*	*σ*	*α*	*β*	*δ*
4.1	7	5	5	10	2
4.2	8	4	6	11	3
4.3	2	3	0	3	2
4.4	4	2	3	6	2
4.5	5	1	4	6	2
4.6	1	2	0	2	3
4.7	2	2	1	4	1
4.8	-3	1	-4	-2	1
4.9	0	3	-2	0	2
4.10	4	1	3	6	11
4.11	5	3	4	8	2
4.12	-2	2	-3	0	2
4.13	-1	4	-2	1	3
4.14	0	2	-1	0	1
4.15	8	3	7	10	2
4.16	7	3	5	7	2
4.17	-1	4	-3	0	3
4.18	-2	1	-2	0	1
4.19	3	5	1	4	3
4.20	2	2	1	3	1
4.21	4	2	1	4	1
4.22	1	3	0	2	1
4.23	5	2	1	5	2
4.24	6	4	3	7	3
4.25	-3	1	-5	-2	1
4.26	-5	3	-7	0	2
4.27	0	3	-2	1	2
4.28	1	4	-1	2	3
4.29	2	2	0	3	2
4.30	-1	2	-3	0	1

Задача №5

5.1 Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут: а) 2 негодных изделия; б) более двух негодных изделий.

5.2 Производится некоторый опыт, в котором случайное событие A может появиться с вероятностью $p=0,3$. Опыт производится при неизменных условиях 600 раз. Найти вероятность того, что при этом относительная частота появления события A отклонится от p=0,3 не более, чем на 0,03.

5.3 Автоматическая телефонная станция получает в среднем за час 300 вызовов. Какова вероятность того, что за данную минуту она получит: а) два вызова; б) более 2-х вызовов.

5.4 Книга в 1000 страниц имеет 100 опечаток. Какова вероятность того, что на случайно выбранной странице не менее 3-х опечаток?

5.5 Диаметр детали, изготавливаемой на станке,– случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием a=25 см и средним квадратичным отклонением σ=0,4 см.. Найти вероятность того, что две наудачу взятые детали имеют отклонение от математического ожидания по абсолютной величине не более 0,16 см.

5.6 Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена: а) не более 60 раз; б) равно 60 раз; в) более 60 и не менее 70 раз.

5.7 Среди семян ржи имеется 0,4% семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 5000 семян обнаружить: а) два семени сорняков; б) более 3-х семян сорняков.

5.8 Вероятность того, что деталь нестандартная,p=0,1. Найти вероятность того, что среди случайно отобранных 400 деталей относительная частота появления нестандартных деталей отклонится от вероятности p=0,1 по абсолютной величине не более, чем на 0,03.

5.9 Производится некоторый опыт, в котором случайное событие A может появиться с вероятностью p=0,4. Опыт производят при неизменных условиях 700 раз. Найти вероятность того, что в 700 опытах события A появится: а) 280 раз; б) более 300 раз; в) от 200 до 300 раз.

5.10 Вероятность того, что деталь нестандартная p=0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей нестандартных будет: а) 80 штук; б) от 70 до 90 штук; в) менее 80 штук.

5.11 Вероятность того, что деталь нестандартная, p=0,1. Найти, сколько деталей нужно отобрать, чтобы с вероятностью 0,9544 можно было утверждать, что относительная частота появления нестандартных деталей (среди отобранных) отклонится от постоянной вероятности p по абсолютной величине не более, чем на 0,03.

5.12 Какова вероятность того, что при 100 бросаниях монеты «герб» появиться: а) 50 раз; б) от 40 до 60 раз; в) более 60 раз?

5.13 Игральная кость подброшена 100 раз. Найти вероятности того, что «пятерка» выпадет: а) 15 раз; б) от 10 до 20 раз; в) не более 20 раз.

5.14 Какова вероятность того, что при 150 бросаниях монеты «герб» появиться: а) 75 раз ; б) от 60 до 80 раз; в) более 80 раз?

5.15 В урне 80 белых и 20 черных шаров. Сколько шаров (с возвращением) нужно вынуть из урны, чтобы с вероятностью 0,95 можно было ожидать, что частота появления белого шара будет отклоняться от вероятности меньше чем на 0,1?

5.16 Коммутатор обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течении одной минуты абонент позвонит на коммутатор, равна 0,02. Какое из двух событий вероятнее: в течении одной минуты позвонит 3 абонента; позвонит 4 абонента?

5.17 Производится некоторый опыт, в котором случайное событие A может появиться с вероятностью 0,3. Найти вероятность того, что в 800 независимых испытаниях событие A появиться: а) 240 раз; б) от 200 до 300 раз; в) более 250 раз.

5.18 Производиться некоторый опыт, в котором случайное событие A может появиться с вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что в 1000 независимых испытаний событие A появиться а) 400 раз; б) от 300 до 500 раз; в) более 400 раз.

5.19 Монета подброшена 300 раз. Найти вероятность того, что «герб» появиться: а) 150 раз; б) от 120 до 160 раз; в) более 160 раз.

5.20 Игральная кость подброшена 200 раз. Найти вероятность того, что «двойка» появиться: а) 32 раза; б) от 30 до 40 раз; в) более 33 раз.

5.21 Монета подброшена 200 раз. Найти вероятность того, что «герб» появиться: а) 100 раз; б) от 90 до 105 раз; в) более 100 раз.

5.22 Вероятность попадания стрелком в мишень равна 0,6. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах стрелок попадет: а) 60 раз; б) от 50 до 70 раз; в) менее 60 раз

5.23 Игральную кость подбрасывают 1000 раз. Оценить вероятность отклонения частоты появления «шестерки» от вероятности появления ее же меньше чем на 0,01.

5.24 Производиться некоторый опыт, в котором случайное событие A может появиться с вероятностью 0,2. Сколько раз нужно повторить этот опыт для того, чтобы с вероятностью 0,8 можно было ожидать отклонение относительной частоты появления события A от p=0,2 не более, чем на 0,03.

5.25 Монета подброшена 500 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет: а) 250 раз; б) от 230 до 270 раз; в) более 250 раз.

5.26 Игральная кость подброшена 180 раз. Найти вероятность того, что «четверка» появиться: а) 30 раз; б) от 25 до 40; в) более 30 раз.

5.27 Завод отправил на базу 1000 изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредиться, равна 0,002. Найти вероятность того, что на базу прибудут а) 2 негодных изделия; б) более 3 негодных изделий; в) хотя бы одно негодное изделие.

5.28 Игральная кость подброшена 1000 раз. Найти вероятность того, что «пятерка» выпадет: а) 167 раз; б) от 160 до 170 раз; в) более 170 раз.

5.29 Производиться некоторый опыт, в котором случайное событие A может появиться с вероятностью 0,6. Опыт повторяют при неизменных условиях 800 раз. Какое отклонение относительной частоты появления события A от p=0,6 можно ожидать с вероятностью 0,8.

5.30 Монета подброшена 600 раз. Найти вероятность того, что «герб» появиться: а) 300 раз; б) от 250 до 300 раз; в) более 300 раз.

4. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2 «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

4.1. Основные понятия вариационного ряда

Множество всех возможных значений случайной величины X называется генеральной совокупностью X.

Выборкой называется подмножество из генеральной совокупности, статистические характеристики (среднее, дисперсия и т.д.) которого близки к статистическим характеристикам генеральной совокупности.

Вариационным рядом выборки $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ значений случайной величины X называется последовательность пар чисел $(x_i, \; n_i)$ $(i = \overline{1, m})$, составленная при условии, что $x_{i+1} > x_i$, n_i – число наблюдений величины x_i в выборке, m – число различных значений x_i в выборке.

Величины x_i называются вариантами вариационного ряда; величина n

$$n = \sum_{i=1}^{m} n_i \tag{2.1}$$

– объемом выборки; n_i – частотой варианты x_i, а величина p_i

$$p_i = n_i / n \tag{2.2}$$

– относительной частотой или частостью.

4.2. Основные понятия интервального ряда

При большом значении n для упрощения статистической обработки выборки вариационный ряд разбивается на интервалы одинаковой длины, в каждый из которых попадают варианты с близкими значениями. Длина интервала h_x находится по формуле Стерджеса:

$$h_x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}332 \lg n}, \tag{2.3}$$

где x_{min} и x_{max} – минимальное и максимальное значения вариант в выборке, а в качестве h_x удобно брать целое четное число, ближайшее к значению правой части в (2.3).

За начало первого интервала принимается значение $x_{нач.} = x_{\min} - h_x/2$. Конец последнего интервала $x_{кон.}$ должен удовлетворять условию

$x_{кон.} - h_x \leq x_{max} \leq x_{кон.}$. Варианта, попадающая на границу интервалов, включается в оба интервала с весом 0,5.

Можно также руководствоваться и другим правилом, например, включать в интервал варианту, совпадающую с началом интервала, а варианту, совпадающую с концом, не включать в интервал, либо наоборот. Важно лишь придерживаться выбранного правила и при заполнении корреляционной таблицы. Полученное представление выборки называется интервальным рядом распределения X.

При интервальном распределении, помимо h_x, вводятся также следующие характеристики: $\tilde{x}_i$ – середина i-го интервала; $\tilde{n}_i$ – частота для i-го интервала, равная числу вариант, попавших в i-й интервал;

$$\tilde{p}_i = \frac{\tilde{n}_i}{n} \tag{2.4}$$

– относительная частота для i-го интервала.

4.3. График эмпирической функции

Для графического представления интервального ряда используется гистограмма, представляющая собой совокупность $\tilde{m}$ прямоугольников ($\tilde{m}$ – число интервалов) на плоскости (x, $\tilde{p}$) (рис. 9). Основание каждого прямоугольника равно длине интервала h_x, а высота i-го прямоугольника равна относительной частоте $\tilde{p}_i$.

Основываясь на гистограмме, можно построить качественный вид графика эмпирической функции плотности вероятностей величины X, плавно обводя вершины прямоугольников (кривая на рис. 9).

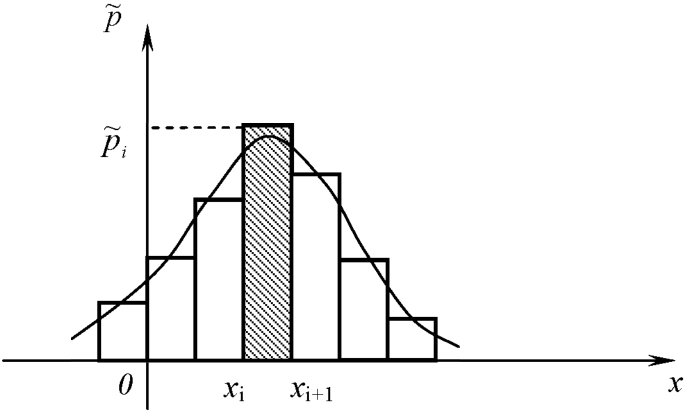


Рис. 9

4.4. Понятия моды и медианы

Модой M_0 интервального распределения случайной величины называется середина интервала с максимальной относительной частотой (на рис. 9 это интервал, соответствующий заштрихованному прямоугольнику).

Медианой M_e выборки называется значение срединного элемента вариационного ряда. Для интервального распределения при четном числе интервалов медианой является граница двух срединных интервалов, а при нечетном числе интервалов – середина срединного интервала (на рис. 9 медианой является середина заштрихованного интервала).

4.5. Статистические параметры выборки

Выборка величины X может быть охарактеризована статистическим параметрами: средним, дисперсией, средним квадратическим отклонением, которые вычисляются соответственно по формулам:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i n_i \tag{2.5}$$

$$D_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} (x_i - \bar{x})^2 n_i \,, \tag{2.6}$$

$$\sigma = \sqrt{D_x} \,. \tag{2.7}$$

Аналогичные величины для интервального распределения случайной величины X вычисляются по формулам:

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\tilde{m}} \tilde{x}_i n_i \,, \tag{2.8}$$

$$D_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\tilde{\tilde{m}}} (\tilde{x}_i - \bar{x}_в)^2 \tilde{n}_i \,, \tag{2.9}$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} \,. \tag{2.10}$$

Величины $\bar{X}_в$, $D_{xв}$, $\sigma_{xв}$ называются соответственно выборочным средним, выборочной дисперсией и выборочным средним квадратическим отклонением случайной величины X.

4.6. Доверительный интервал и доверительная вероятность

Пусть для параметра a из опыта получена несмещенная оценка $\tilde{a}$. Находится такое значение ε, для которого вероятность теоретического распределения равна $P(|\tilde{a} - a|<\varepsilon) = \beta$, где задаваемое значение β близко к 1. Вероятность β называется доверительной вероятностью, а интервал $l_\beta = (\tilde{a} - \varepsilon;\ \tilde{a} + \varepsilon)$, в который с вероятностью β попадает параметр a, называется доверительным интервалом.

В случае нормального распределения X при большом объеме выборки доверительный интервал для оценки математического ожидания X находится по формуле

$$l_\beta = (\overline{x} - \varepsilon; \overline{x} + \varepsilon). \tag{2.11}$$

Значение параметра ε определяется из равенства

$$\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{\widetilde{D}_x}}\right) = \frac{1}{2}\beta, \tag{2.12}$$

где $\beta \geq 0{,}8$ – доверительная вероятность,

$$\widetilde{D}_x = \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{m}(x_i - \overline{x})^2 n_i = \frac{n}{n-1}\cdot D_x \tag{2.13}$$

– несмещенная оценка дисперсии X, а $\Phi(x)$ – функция Лапласа (Приложение 2). Из таблицы по заданной вероятности β находится значение аргумента x_β функции Φ. По найденному значению x_β находится ε:

$$\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{\widetilde{D}_x}} = x_\beta; \Rightarrow \varepsilon = x_\beta\cdot\sqrt{\frac{\widetilde{D}_x}{n}}. \tag{2.14}$$

Доверительный интервал для оценки дисперсии X находится по формуле

$$l'_\beta = (\widetilde{D}_x - \varepsilon',\ \widetilde{D}_x + \varepsilon'), \tag{2.15}$$

где ε' находится из условия

$$\Phi\left(\varepsilon'\cdot\sqrt{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{1}{\widetilde{D}_x}\right) = \frac{1}{2}\beta.$$

Обозначая через x'_β найденное из таблицы значение аргумента функции Лапласа, параметр ε' находим из формулы

$$\varepsilon' = x'_\beta\cdot\widetilde{D}_x\cdot\sqrt{\frac{2}{n-1}}. \tag{2.16}$$

4.7. Интервальное распределение нормального закона

В случае, если интервальное распределение X подчиняется нормальному закону, теоретическая частота для i-го интервала n_{it} рассчитывается по формуле

$$n_{it} = n \cdot (\Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)) , \tag{2.17}$$

где

$$z_i = \frac{x_i - \overline{x}_в}{\sigma_{xв}} , \qquad z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \overline{x}_в}{\sigma_{xв}} , \tag{2.18}$$

x_i и x_{i+1} – начало и конец i-го интервала, а $\Phi(z)$ – функция Лапласа.

Значение каждой из найденных теоретических частот $p_{it} = n_{it} / n$ для i-го интервала заносится с абсциссой $(x_i+x_{i+1})/2$ на рис. 9. Через полученные точки проводится теоретическая кривая плотности вероятности X. Делается вывод о качественном и количественном совпадениях эмпирической и теоретической кривых.

4.8. Критерий Пирсона

Проверку гипотезы о том, что полученное интервальное распределение величины X подчинено нормальному закону, можно сделать с помощью критерия Пирсона.

При использовании этого критерия может возникнуть необходимость в построении дополнительной таблицы, если в интервальном распределении имеются интервалы с малочисленными частотами, в которых либо $\widetilde{n}_i > 5$, либо $n_{it} < 5$.

В этом случае малочисленные интервалы объединяются с соседними так, чтобы в новом интервальном распределении с числом интервалов l эмпирические частоты $n_{iэ}$ и теоретические частоты k_{it} для любого i-го интервала удовлетворяли условиям: $n_{iэ} \geq 5$, $k_{it} \geq 5$. После этого заполняется таблица $(n_{iэ}, k_{it})$.

Критерий Пирсона заключается в следующем. Вычисляется случайная функция $x^2_{набл.}$, равная

$$x^2_{набл.} = \sum_{i=1}^{l} \frac{(n_{iэ} - k_{it})^2}{k_{it}} . \tag{2.19}$$

Находится число степеней свободы k

$$k = l - r - 1, \tag{2.20}$$

где для нормального распределения $r = 2$.

При заданном уровне значимости α и найденном значении k, по таблице критических точек теоретического распределения x^2 (Приложение 3) находится критическое значение $x^2_{кр}$.

Если $x^2_{кр} > x^2_{набл.}$, то гипотеза о нормальном распределении X принимается, в противном случае отвергается.

4.9. Корреляция между случайными величинами

Связь между случайными величинами X и Y может носить случайный характер. В этом случае говорят о статистической связи X и Y.

Если среднее значение X (Y) функционально зависит от значений Y, то говорят о корреляционной связи X и Y.

Для выяснения вопроса о том, существует ли корреляция между X и Y, интервальный ряд записывается в виде корреляционной таблицы 1.

Таблица 1

$\tilde{y}_i$ \ $\tilde{x}_j$	10	14	18	22	n_y
4	3	2	0	0	5
6	0	4	5	0	9
8	1	0	6	2	9
n_x	4	6	11	2	$n = 23$

В первой строке последовательно записываются значения середин интервалов $\tilde{x}_j$ в интервальном распределении X, а в первом столбце – последовательные значения середин интервалов $\tilde{y}_i$ в интервальном распределении Y.

На пересечении i-й строки и j-го столбца записывается частота n_{xy}, равная числу вариант из X, попавших в j-й интервал интервального распределения X, при одновременном попадании в i-й интервал интервального распределения Y n_{xy} вариант из Y. В случае $n_{xy} = 0$ в соответствующей клетке таблицы ставится ноль. В последней строке записываются суммы всех n_{xy} при данных значениях $\tilde{x}_j$, а в последнем столбце – суммы всех n_{xy} при данных значениях $\tilde{y}_i$.

В клетке, расположенной в нижнем правом углу таблицы, записывается сумма всех частот $n = \sum n_x = \sum n_y$.

4.10. Выборочный коэффициент корреляции

Если в корреляционной таблице в основном заполнены клетки вблизи одной или другой диагонали (как в таблице 1), то стоит искать линейную связь между X и Y.

Если заполненное большинство клеток таблицы образует какую-то кривую, то искать линейную связь между X и Y не имеет смысла.

Выборочный коэффициент корреляции $r_в$ характеризует степень корреляции (связи) между X и Y и изменяется в пределах $0 \le | r_в | \le 1$. При $r_в = 0$ корреляция между X и Y отсутствует, а при $| r_в | = 1$ корреляция между X и Y переходит в функциональную связь.

В предположении линейной корреляции между X и Y $r_в$ рассчитывается по формуле

$$r_в = \frac{\sum\limits_{(l)} \left(n_{xy}\right)_l x_l y_l - n\overline{x}_в \overline{y}_в}{n\sigma_x \sigma_y}, \tag{2.21}$$

где $\overline{x}_в$ определяется по формуле (2.8), а $\overline{y}_в$ – по аналогичной формуле; σ_x рассчитывается по формулам (2.9), (2.10), а σ_y – по аналогичным формулам.

В качестве примера найдем $r_в$ из данных таблицы 1:

$$\sum_l (n_{xy})_l x_l y_l = 3\cdot 10\cdot 4 + 2\cdot 14\cdot 4 + 4\cdot 14\cdot 6 + 5\cdot 18\cdot 6 + 1\cdot 10\cdot 8 +$$

$$+ 6\cdot 18\cdot 8 + 2\cdot 22\cdot 8 = 2404;$$

$$\overline{x}_в = \frac{1}{23}\left(4\cdot 10 + 6\cdot 14 + 11\cdot 18 + 2\cdot 22\right) = \frac{366}{23} \approx 15{,}913;$$

$$\overline{y}_в = \frac{1}{23}\left(5\cdot 4 + 9\cdot 6 + 9\cdot 8\right) = \frac{146}{23} \approx 6{,}3478;$$

$$D_x = \frac{1}{23}\{(10 - 15{,}913)^2 \cdot 4 + (14 - 15{,}913)^2 \cdot 6 +$$

$$+ (18 - 15{,}913)^2 \cdot 11 + (22 - 15{,}913)^2 \cdot 2\} \approx 12{,}34;$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} \approx 3{,}513;$$

$$D_y = \frac{1}{23}\{(4-6{,}3478)^2 \cdot 5 + (6-6{,}3478)^2 \cdot 9 +$$
$$+ (8-6{,}3478)^2 \cdot 9\} \approx 2{,}314;$$
$$\sigma_y \approx 1{,}521.$$

По формуле (2.21) находим $r_в$:

$$r_в = \frac{2404 - 23 \cdot 15{,}913 \cdot 6{,}3478}{23 \cdot 3{,}513 \cdot 1{,}521} = 0{,}657 .$$

Можно сделать вывод, что между X и Y имеется заметная корреляция.

4.11. Условное математическое ожидание и уравнения линий регрессии

Условным математическим ожиданием дискретной случайной величины Y при $X=x$, где x – определенное значение случайной величины X, называется произведение возможных значений Y на их условные вероятности:

$$M[Y \mid X = x] = \sum_{i=1}^{m} y_i p(y_i \mid x).$$

Как видно из формулы, условное математическое ожидание $M[Y \mid x]$ является функцией от x:

$$M[Y \mid x] = f(x),$$

которую называют функцией регрессии Y на X.

Аналогично определяется условное математическое ожидание дискретной случайной величины X и функция регрессии X на Y:

$$M[X \mid y] = \varphi(y).$$

Величины $M[Y \mid x]$ и $M[X \mid y]$ обозначаются собственно как $\overline{y}_x$ и $\overline{x}_y$.

Уравнения $\overline{y}_x = f(x)$ и $\overline{x}_y = \varphi(y)$ называются эмпирическими или выборочными линиями регрессии Y на X и X на Y соответственно.

В случае линейной корреляции между X и Y эти линии будут прямыми и определяются уравнениями:

$$\overline{y}_x - \overline{y}_в = r_в \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}_в\right); \quad (2.22)$$

$$\overline{x}_y - \overline{x}_в = r_в \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y - \overline{y}_в\right). \quad (2.23)$$

5. РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2

Дана двумерная выборка дискретных случайных величин X и Y (табл. 2):

Таблица 2

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
70	66	73	68	59	57	66	61	59	58
66	63	61	60	68	65	74	68	58	57
67	62	74	68	62	60	73	67	70	65
67	63	71	67	69	64	60	58	70	65
77	72	74	72	74	71	68	67	64	60
70	66	65	62	53	56	66	63	68	63
66	63	70	65	63	60	69	66	74	68
64	64	63	60	59	57	73	69	62	59
70	64	68	65	72	70	79	71	60	57
71	66	66	62	64	61	69	69	54	55
65	63	61	59	58	56	63	61	65	63
56	59	70	65	72	69	57	57	71	65
62	59	59	58	63	60	67	62	71	66
70	66	75	69	57	55	58	57	68	67
60	58	73	68	55	55	66	62	56	56
60	59	71	67	74	67	71	66	74	70
76	71	55	58	61	58	67	62	71	68
73	69	62	59	69	65	73	68	59	60
66	62	69	64	58	56	56	54	67	64
65	62	59	61	61	61	69	66	61	59

1. Построить вариационные ряды для величин x_i.

Решение. Просматривая выборку из X, находим минимальное значение $x = x_1 = 53$, которое встречается один раз. Следующее большее значение $x_2 = 54$ встречается также один раз. Продолжая просмотр, получим следующий вариационный ряд для X:

Таблица 3

x_i	53	54	55	56	57	58	59	60	
n_i	1	1	2	3	2	4	6	4	
x_i	61	62	63	64	65	66	67	68	69
n_i	5	4	4	3	4	7	5	5	6
x_i	70	71	72	73	74	75	76	77	79
n_i	8	7	2	6	7	1	1	1	1

Делаем проверку: $\sum_{(i)} n_i = n = 100$, т.е. вариационный ряд построен верно.

2. Составляем интервальный ряд распределения для X.

По формуле (2.3) найдем длину интервала h_x:

$$h_x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}332 \cdot \lg n} = \frac{79 - 53}{1 + 3{,}332 \cdot 2} \approx 3{,}392.$$

Округляя до ближайшего целого четного числа, получим $h_x = 4$.

Находим начало 1-го интервала $x_{нач.}$:

$$x_{нач} = x_{\min} - h_x/2 = 53 - 2 = 51.$$

При таком $x_{нач.}$ конец последнего интервала $x_{кон.}$ совпадает с $x_{\max}$, поэтому в качестве $x_{нач}$ целесообразно взять значение $x_{нач.} = 52$, чтобы было $x_{\max} < x_{кон.}$.

Заполняем два первых столбца таблицы 4.

Таблица 4

Начало интервала x_i	Конец интервала $x_i + 1$	Середина интервала $\tilde{x}_i$	Частота интервала $\tilde{n}_i$	Относительная частота интервала $\tilde{p}_i$	Теоретическая частота интервала n_{it}
52	56	54	5,5	0,055	4,12
56	60	58	15,5	0,155	11,3
60	64	62	16,5	0,165	20,88
64	68	66	20	0,2	25,45
68	72	70	24,5	0,245	20,69
72	76	74	15,5	0,155	11,17
76	80	78	2,5	0,025	4,03

Находим середины интервалов $\tilde{x}_i$ и значения заносим в 3-й столбец таблицы 4.

Из таблицы 3 находим число вариант $\tilde{n}_i$, попадающих в каждый интервал, и заносим в 4-й столбец таблицы 4.

В 5-й столбец таблицы 4 записываем относительные частоты $\tilde{p}_i = \tilde{n}_i / n$.

3. Строим гистограмму интервального распределения X (рис. 10):

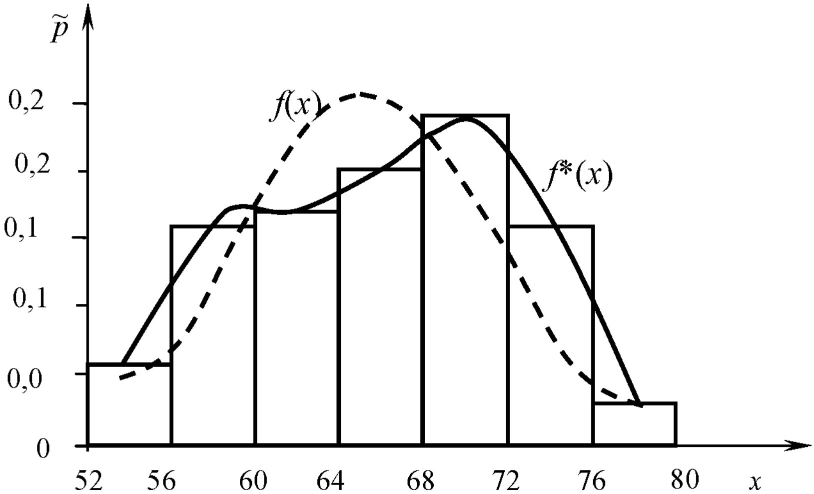


Рис. 10. $f^*(x)$ и $f(x)$ – эмпирическая и теоретическая кривые плотности вероятности случайной величины X соответственно.

На основе гистограммы строим график (сплошная линия) эмпирической функции плотности вероятности $X(f_э(x))$, плавно обводя вершины прямоугольников.

4. Из гистограммы видно, что модой является середина 5-го интервала, имеющего максимальную частоту. Середина 5-го интервала $\tilde{x}_5 = 70 = M_0$ является модой интервального распределения X.

Срединным интервалом является 4-й интервал, т.к. середина этого интервала $\tilde{x}_4 = 66 = M_e$ является медианой интервального распределения X.

5. По формулам (2.5), (2.6), (2.7) соответственно находим среднее $\bar{x}$, дисперсию D_x и среднее квадратическое отклонение σ_x, используя данные таблицы 2:

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}x_i n_i=\frac{1}{100}\left(53\cdot 1+\ldots+60\cdot 4+\ldots+79\cdot 1\right)=65{,}97;$$

$$D_x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i-\overline{x}\right)^2 n_i=\frac{1}{100}\{\left(53-65{,}97\right)^2\cdot 1+\ldots+\left(60-65{,}97\right)^2\cdot 4+\ldots+$$

$$+\left(79-65{,}97\right)^2\cdot 1\}=34{,}495;$$

$$\sigma_x=\sqrt{D_x}\approx 5{,}873\,.$$

По данным таблицы 3 находим выборочное среднее, дисперсию и среднее квадратическое отклонение по формулам (2.8), (2.9), (2.10) соответственно:

$$\overline{x}_в=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\widetilde{m}}\widetilde{x}_i\widetilde{n}_i=\frac{1}{100}(54\cdot 5{,}5+58\cdot 15{,}5+62\cdot 16{,}5+66\cdot 20+$$

$$+70\cdot 24{,}5+74\cdot 15{,}5+78\cdot 2{,}5)=65{,}96;$$

$$D_{xв}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\widetilde{m}}\left(\widetilde{x}_i-\overline{x}_в\right)^2\widetilde{n}_i=\frac{1}{100}\{\left(54-65{,}96\right)^2\cdot 5{,}5+\ldots+$$

$$+\left(78-65{,}96\right)^2\cdot 2{,}5\}\approx 37{,}92;$$

$$\sigma_{xв}=\sqrt{D_{вx}}\approx 6{,}158.$$

6. Доверительный интервал для оценки математического ожидания находим по формулам (2.13)–(2.16). Из таблицы для $\Phi(x_\beta)$ = 1/2 β = 0,45 (Приложение 2) находим: $x_\beta \approx 1{,}645$.

$$\widetilde{D}_x=\frac{n}{n-1}D_x\approx\frac{100}{99}\cdot 34{,}4951\approx 34{,}8435;$$

$$\varepsilon=x_\beta\cdot\sqrt{\frac{\widetilde{D}_x}{n}}\approx 1{,}645\cdot\sqrt{\frac{34{,}8435}{100}}\approx 0{,}971;$$

$$I_\beta=\left(\overline{x}-\varepsilon\,;\,\overline{x}+\varepsilon\right)=\left(65{,}97-0{,}971\,;\,65{,}97+0{,}971\right)\approx\left(65\,;\,66{,}94\right).$$

Доверительный интервал для оценки дисперсии находим по формулам (2.17), (2.18):

$$\varepsilon'=x_\beta\cdot\widetilde{D}_x\sqrt{\frac{2}{n-1}}\approx 1{,}645\cdot 34{,}8435\sqrt{\frac{2}{99}}\approx 8{,}1468\,;$$

$$l'_\beta = \left(\widetilde{D}_x - \varepsilon' \, ; \widetilde{D}_x + \varepsilon\right) = (34{,}8435 - 8{,}1468; \, 4{,}8435 + 8{,}1468) \approx$$
$$\approx (26{,}7 \, ; 43).$$

7. Используя данные из таблицы 3 и вычисленные значения $\overline{x}_в$ и $\sigma_{ув}$, по формуле (2.17) вычисляем теоретические частоты для интервала n_{it}:

$$n_{1t} = 100 \cdot \left\{ \Phi\left(\frac{56 - 65{,}96}{6{,}158}\right) - \Phi\left(\frac{52 - 65{,}96}{6{,}158}\right) \right\} \approx 100 \cdot \{\Phi(-1{,}617) - \Phi(-2{,}267)\} =$$
$$= 100 \cdot \{\Phi(2{,}267) - \Phi(1{,}617)\} \approx 100 \cdot (0{,}4885 - 0{,}0642) \approx 4{,}24;$$
$$n_{7t} = 100 \cdot \left\{ \Phi\left(\frac{80 - 65{,}96}{6{,}158}\right) - \Phi\left(\frac{76 - 65{,}96}{6{,}158}\right) \right\} \approx 100 \cdot \{\Phi(2{,}28) - \Phi(1{,}63)\} \approx$$
$$\approx 100 \cdot (0{,}4887 - 0{,}4484) \approx 4{,}03.$$

Вычисленные частоты заносим в 6-й столбец таблицы 4.

Значения относительных частот интервалов $n_{it}/100$ с абсциссами $\widetilde{x}_i$ заносим на рис.9 и через эти точки проводим теоретическую кривую (штриховая линия). Видно, что ход теоретической кривой качественно совпадает с ходом эмпирической кривой.

8. С помощью критерия согласия Пирсона проверяем гипотезу о нормальном распределении X. Так как имеются частоты с малочисленными интервалами (1-й и 7-й), то объединяем 1-й интервал со вторым, а 7-й – с шестым. Заполняем таблицу 5 для новых частот $n_{iэ}$ и k_{it}:

Таблица 5

$n_{iэ}$	21	16,5	20	24,5	18
k_{it}	15,54	20,88	25,45	20,69	15,2

По данным таблицы 5 находим $\chi^2_{набл.}$:

$$\chi^2_{набл.} = \sum_{i=1}^{5} \frac{(n_{iэ} - k_{it})^2}{k_{it}} \approx 5{,}32.$$

Находим число степеней свободы k:

$$k = l - 3 = 5 - 3 = 2.$$

Для уровня значимости α = 0,05 и k = 2 из таблицы 5 находим критическое значение $\chi^2_{кр.} = 6$. Т.к. $\chi^2_{кр.} > \chi^2_{набл.}$ (6 > 5,32), то гипотезу о нормальном распределении X принимаем.

Аналогичным образом проводим расчеты для выборки Y.

1. Строим вариационный ряд:

Таблица 6

y_i	54	55	56	57	58	59	60	61	62	
n_i	1	3	4	6	6	7	7	5	8	
yi	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
ni	7	5	8	8	6	7	5	2	3	2

2. Составляем интервальный ряд распределения Y.

$$h_y = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{1 + 3{,}332 \cdot 2} = \frac{72 - 54}{7{,}664} \approx 2{,}35;$$

Округляя, получим $h_y = 2$.

Начало 1-го интервала:

$$y_{нач} = y_{\min} - h_y/2 = 54 - 1 = 53.$$

Заполняем два первых столбца таблицы 7.

Таблица 7

Начало интервала y_i	Конец интервала y_{i+1}	Середина интервала $\tilde{y}_i$	Частота интервала $\tilde{n}_i$	Относительная частота интервала $\tilde{p}_i$	Теоретическая частота интервала n_{it}
53	55	54	2,5	0,025	2,63
55	57	56	8,5	0,085	5,57
57	59	58	12,5	0,125	9,67
59	61	60	13	0,13	14,08
61	63	62	14	0,14	16,93
63	65	64	12,5	0,125	16,82
65	67	66	15	0,15	13,93
67	69	68	12,5	0,125	9,53
69	71	70	6	0,06	5,4
71	73	72	3,5	0,035	2,54

Находим середины интервалов и заполняем 3-й столбец таблицы 7.

Используя таблицу 6, заполняем 4-й столбец таблицы 7.

В 5-й столбец таблицы 7 заносим относительные частоты $\tilde{p}_i = \tilde{n}_i / n$.

3. Строим гистограмму интервального распределения Y (рис. 11):

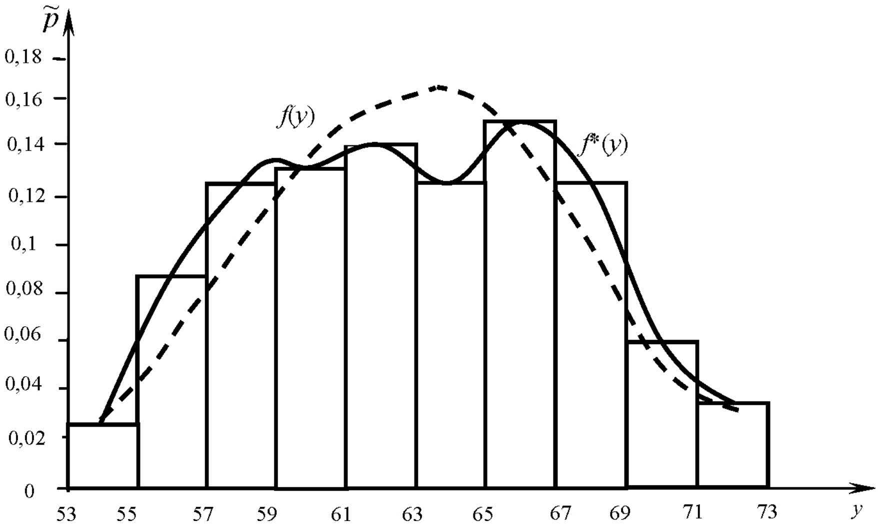


Рис. 11. $f^*(y)$ и $f(y)$ – эмпирическая и теоретическая кривые плотности вероятности случайной величины Y соответственно.

По гистограмме строим график эмпирической функции плотности вероятности $Y(f_э(y))$.

4. Из гистограммы видно, что модой является середина 7-го интервала, т.е. $\tilde{x}_5 = 67$ можно считать модой M_0 интервального распределения Y.

Верхняя граница 5-го интервала является медианой интервального распределения, т.е. $M_e = 63$.

5. Находим $\bar{y}$, D_y, σ_y:

$$\bar{y}=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{19} y_i n_i=\frac{1}{100}(54\cdot 1+55\cdot 3+\ldots+71\cdot 3+72\cdot 2)=62{,}96;$$

$$D_y=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{19}(y_i-\bar{y})^2 n_i\approx 20{,}5;$$

$$\sigma_y=\sqrt{D_y}\approx 4{,}53\ .$$

Находим $\bar{y}_в$, $D_{yв}$, $\sigma_{yв}$:

$$\bar{y}_в=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}\tilde{y}_i\tilde{n}_i=62{,}96;$$

$$D_{yв}=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{10}(\tilde{y}_i-\bar{y}_в)^2 n_i\approx 21;$$

$$\sigma_{yв}=\sqrt{D_{yв}}\approx 4{,}58.$$

6. Находим доверительный интервал для оценки математического ожидания:

$$\Phi(y_\beta)=1/2\,\beta=0{,}45;\quad y_\beta\approx 1{,}645.$$

$$\tilde{D}_y=\frac{n}{n-1}D_y\approx\frac{100}{99}\cdot 20{,}5\approx 20{,}7;$$

$$\varepsilon=y_\beta\cdot\sqrt{\frac{\tilde{D}_y}{n}}\approx 1{,}645\cdot\sqrt{\frac{20{,}7}{100}}\approx 0{,}75;$$

$$I_\beta=(\bar{y}-\varepsilon\,;\bar{y}+\varepsilon)=(62{,}96-0{,}75;\,62{,}96+0{,}75)\approx(62{,}21;\,63{,}71).$$

Находим доверительный интервал для оценки дисперсии:

$$\varepsilon'=y_\beta\cdot\tilde{D}_y\sqrt{\frac{2}{n-1}}\approx 1{,}645\cdot 20{,}7\sqrt{\frac{2}{99}}\approx 4{,}84;$$

$$I'_\beta=(\tilde{D}_y-\varepsilon'\,;\tilde{D}_y+\varepsilon')=(20{,}7-4{,}84;\,20{,}7+4{,}84)\approx$$

$$\approx(15{,}86;\,25{,}54).$$

7. Используя данные из таблицы 6 и вычисленные значения $\overline{y}_в$ и $\sigma_{ув}$, по формуле (2.17) вычисляем теоретические частоты для интервала n_{it} и заносим в 6-й столбец таблицы 7.

Значения относительных частот интервалов $n_{it}/100$ с абсциссами $\widetilde{y}_i$ заносим на рис.11 и через эти точки проводим теоретическую кривую (штриховая линия). Видно, что ход теоретической кривой качественно совпадает с ходом эмпирической кривой.

8. С помощью критерия согласия Пирсона проверяем гипотезу о нормальном распределении Y. Так как имеются малочисленные интервалы (1, 10-й для эмпирической частоты и 1, 2, 10-й для теоретической частоты), то объединяем 1-й интервал со вторым, а 10-й с 9-м. Заполняем таблицу 8 для новых частот $\widetilde{n}_i'$ и $\widetilde{n}_{it}'$:

Таблица 8

$\widetilde{n}_i'$	11	12,5	13	14	12,5	15	12,5	9,5
$\widetilde{n}_{it}'$	8,2	9,67	14,08	16,93	16,82	13,93	9,53	7,94

По данным таблицы 8 находим $\chi^2_{набл.}$:

$$\chi^2_{набл.} = \sum_{i=1}^{8} \frac{\left(\widetilde{n}_i' - n_i'\right)^2}{n_{it}'} \approx 4,8 \ ;$$

Находим число степеней свободы k:

$k = \widetilde{m}' - 3 = 8 - 3 = 5$.

Для уровня значимости α = 0,05 и k = 5 из Приложения 3 находим критическое значение $\chi^2_{кр.} = 11,1$; т.к. $\chi^2_{кр.} > \chi^2_{набл.}$ (11,1 > 4,8), то гипотезу о нормальном распределении принимаем.

9. Строим корреляционную таблицу (табл. 9). В первый столбец таблицы заносим $\widetilde{y}_i$, а в первую строку $\widetilde{x}_i$. Для упрощения нахождения величин n_{xy} указываем также начало и конец каждого интервала.

Таблица 9

Y \ X	54 52 – 56	58 56 – 60	62 60 – 64	66 64 – 68	70 68 – 72	74 72 – 76	78 76 – 80	n_y
54 53 – 55	1,5	1						2,5
56 55 – 57	2,5	5,75	0,25					8,5
58 57 – 59	1,25	6,25	5					12,5
60 59 – 61	0,25	2	9,5	1,25				13
62 61 – 63		0,5	1,25	12	0,25			14
64 63 – 65			0,5	5,25	6,75			12,5
66 65 – 67				1	13	1		15
68 67 – 69				0,5	3,25	8,75		12,5
70 69 – 71					1,25	4	0,75	6
72 71 – 73						1,75	1,75	3,5
n_x	5,5	15,5	16,5	20	24,5	15,5	2,5	$n = 100$

Заполнение таблицы начнем с клетки в верхнем левом углу. Просматривая в табл. 2 значения X, попадающие в 1-й интервал для X, подсчитываем число значений Y сопутствующих этим значениям X и попадающих одновременно в 1-й интервал для Y. Варианты, попадающие на границы интервалов, с весом 0,5 учитываем как для рассматриваемого интервала, так и для соседнего. Если в рассматриваемой паре (x, y) и x, и y попадает на границу своего интервала, то эта пара заносится в соответствующие клетки с весом 0,25.

После заполнения всех клеток делаем проверку:

$$\sum n_x = \sum n_y = 100 .$$

10. Заполненные клетки в табл. 9 группируются около главной диагонали. Это говорит о том, что связь между X и Y можно считать линейной.

В предположении линейной корреляции между X и Y по формуле (2.21) находим выборочный коэффициент корреляции $r_в$:

$$r_в = \frac{1}{n\sigma_{xв}\sigma_{yв}}\left\{\sum_l (n_{xy})_l \tilde{x}_l \tilde{y}_l - n\tilde{\bar{x}}_l \tilde{\bar{y}}_l\right\} =$$

$$= \frac{1}{100 \cdot 6{,}158 \cdot 4{,}58}\{54\,(54 \cdot 1{,}5 + 56 \cdot 2{,}5 + 58 \cdot 1{,}25 + 60 \cdot 0{,}25 +$$

$+ 58(54 \cdot 1 + 56 \cdot 5{,}75 + 58 \cdot 6{,}25 + 60 \cdot 2 + 62 \cdot 0{,}5) + 62(56 \cdot 0{,}25 +$
$+ 58 \cdot 5 + 60 \cdot 9{,}5 + 62 \cdot 1{,}25 + 64 \cdot 0{,}5) + 66(60 \cdot 1{,}25 + 62 \cdot 12 +$
$+ 64 \cdot 5{,}25 + 66 \cdot 1 + 68 \cdot 0{,}5) + 70(62 \cdot 0{,}25 + 64 \cdot 6{,}75 + 66 \cdot 13 +$
$+ 68 \cdot 3{,}25 + 70 \cdot 1{,}25) + 74(66 \cdot 1 + 68 \cdot 8{,}75 + 70 \cdot 4 + 72 \cdot 1{,}75) -$
$- 100 \cdot 65{,}96 \cdot 62{,}96\} \approx 0{,}934.$

11. Выборочные прямые регрессии Y на X и X на Y находим соответственно по формулам (2.22) и (2.23):

$$\bar{y}_x - \bar{y}_в = r_в \cdot \frac{\sigma_{yв}}{\sigma_{xв}} \cdot (x - \bar{x}_в)$$

или $\bar{y}_x = 0{,}695x + 17{,}14 \Rightarrow x = 1{,}439 \cdot \bar{y}_x - 24{,}66$;

$$\bar{x}_y - \bar{x}_в = r_в \cdot \frac{\sigma_{xв}}{\sigma_{yв}} \cdot (y - \bar{y}_в)$$

или $\bar{x}_y = 1{,}256y - 13{,}1 \Rightarrow y = 0{,}796 \cdot \bar{x}_y + 10{,}43$.

12. На корреляционное поле наносим точки заданной выборки и строим линии регрессии Y на X и X на Y (рис. 12).

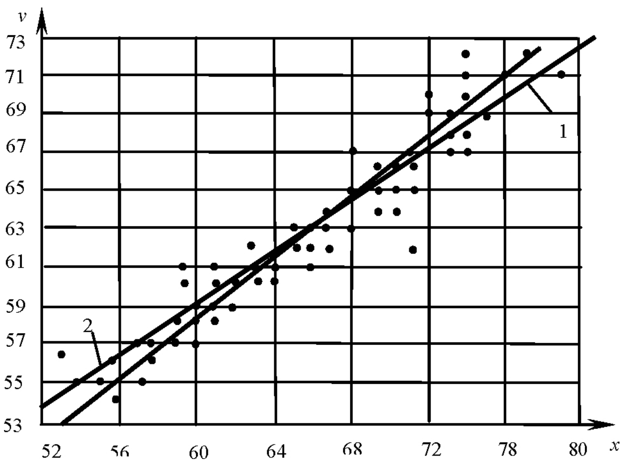


Рис. 12. 1 – линия регрессии Y на X; 2 – линия регрессии X на Y.

6. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2

1 часть. Для заданной выборки из генеральной совокупности СВХ (n=100, представлены ниже таблицами 1-30), по своему варианту необходимо:

1. Определить размах варьирования значений случайной величины и составить вариационный ряд распределения;
2. По формуле Стерджеса определить длину интервалов и составить интервальный вариационный ряд;
3. Найти выборочную среднюю $\bar{x}_в$, выборочную дисперсию $D_в$, выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$, модуль M_0, медиану M_e и коэффициент вариации $\delta_в$;
4. Построить эмпирическую функцию распределения вероятностей $F^*(x)$.

2 часть. По данным предыдущего задания необходимо:

1. Построить гистограмму относительных частот и линию эмпирической плотности;
2. Пользуясь критерием Пирсона проверить гипотезу о нормальном законе распределения генеральной совокупности при уровне значимости α=0,05, предварительно вычислив для каждого интервала группирования вариационного ряда выравнивающие частоты;
3. На гистограмме относительных частот нанести линию теоретической плотности $f(x)$ нормального распределения;
4. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания генеральной совокупности случайной величины с надежностью γ=0,95.

1	66	73	68	62	71	57	67	69	65	70	79	74	64	63	74
	64	63	66	52	62	71	70	57	70	68	62	68	57	72	63
	59	60	61	70	63	57	64	61	65	68	64	70	63	56	77
	73	76	56	67	68	62	70	67	66	60	67	66	69	67	69
	72	79	68	63	74	71	78	72	73	68	65	67	61	68	65
	70	68	65	68	68	66	75	63	69	70	61	58	64	74	72
	61	75	69	60	70	68	69	79	63	81					

2	40	43	47	45	52	39	41	36	42	38	51	51	44	36	30
	44	42	43	43	38	45	39	48	40	34	45	40	40	47	36
	50	56	36	38	32	41	49	45	43	41	40	53	40	37	
	53	51	49	52	47	47	43	48	45	40	49	39	46	40	
	47	50	40	34	38	35	44	42	43	41	44	42	43	45	
	46	52	42	51	45	49	53	52	34	41	36	33	33	40	
	43	42	34	43	46	42	42	45	45	48	48	42	51	38	
3	83	77	58	87	67	74	55	70	66	76	67	78	72	78	77
	67	59	64	67	66	71	76	80	62	68	59	71	52	64	66
	62	65	69	59	67	67	58	74	68	71	67	65	79	83	
	76	79	65	83	90	75	61	68	78	82	66	79	70	78	
	60	75	76	64	75	82	75	65	68	63	69	72	86	65	
	82	75	67	82	56	78	74	65	61	64	76	71	70	73	
	70	71	68	79	67	75	75	80	65	67	74	62	93	60	
4	58	59	58	57	59	48	54	53	66	64	56	54	54	53	64
	53	63	64	53	61	56	53	64	60	57	61	60	63	59	58
	55	60	66	56	56	51	58	66	54	55	57	57	64	56	
	58	54	57	60	60	64	55	59	49	56	48	55	50	47	
	61	64	53	58	62	54	56	56	57	52	59	58	53	62	
	65	58	57	62	57	59	52	65	47	56	65	56	57	55	
	58	57	66	59	56	61	62	64	59	57	66	62	69	66	
5	67	70	74	71	73	72	78	77	70	75	71	78	82	66	74
	76	85	77	77	78	84	86	74	68	73	73	75	79	76	66
	73	77	83	76	71	71	67	70	65	69	78	81	78	76	
	78	77	59	72	78	67	82	74	74	67	73	79	79	75	
	70	85	75	73	74	81	73	79	67	79	70	69	77	61	
	69	73	82	71	76	72	71	78	81	82	68	85	76	82	
	78	79	75	75	72	73	80	81	77	79	74	74	71	74	
6	75	67	69	69	60	64	85	85	77	80	62	75	69	81	79
	63	69	60	77	74	54	77	61	78	77	60	66	73	73	55
	80	73	73	70	72	81	72	86	69	89	73	76	74	62	
	63	84	91	82	67	81	85	75	56	77	76	71	73	66	
	75	67	76	82	77	88	72	83	91	83	68	62	69	80	
	73	84	72	81	85	62	82	84	84	81	78	79	57	61	
	75	60	78	68	61	94	78	67	77	78	81	67	71	74	
7	60	62	62	56	59	56	63	61	59	64	59	62	67	59	56
	62	60	61	60	66	60	61	63	64	57	58	56	60	60	63
	64	56	57	67	59	62	60	55	60	56	60	55	58	63	
	59	57	65	61	66	64	63	66	56	63	67	63	63	62	
	64	69	57	67	59	55	60	64	57	62	66	59	64	53	
	63	58	65	58	66	63	64	61	62	67	65	61	59	65	
	62	58	59	63	58	65	59	60	67	62	66	62	57	62	

8	48	51	47	53	49	42	38	44	45	47	36	43	42	47	50
	40	45	40	56	46	50	57	52	55	42	40	40	48	55	41
	47	52	51	50	48	39	50	45	48	44	48	58	40	53	
	43	44	46	47	39	42	45	45	49	56	54	48	54	45	
	53	46	51	37	42	51	38	46	53	48	41	42	46	49	
	37	42	45	56	49	38	45	50	44	51	43	47	47	50	
	56	55	48	45	44	54	38	51	53	36	41	41	41	49	

9	69	66	58	70	65	56	48	59	61	58	48	56	57	62	65
	57	56	53	74	59	68	77	68	72	56	51	53	64	53	54
	64	69	65	67	63	52	66	60	60	58	62	76	52	73	
	61	59	60	63	51	54	55	62	64	75	69	63	72	72	
	54	62	67	46	52	68	48	60	69	65	48	53	59	65	
	43	56	58	73	67	51	61	66	57	68	53	64	62	66	
	76	75	63	61	57	71	51	60	70	47	57	52	63	58	

10	47	57	51	45	55	47	48	52	59	46	46	51	52	45
	58	50	53	57	47	51	47	54	41	62	55	54	49	47
	55	47	51	54	50	53	48	43	52	45	50	48	55	49
	50	51	49	48	50	51	53	54	44	47	47	50	50	53
	55	53	51	57	53	50	49	51	46	51	44	51	47	58
	46	47	52	48	46	54	53	45	51	55	53	49	50	49
	47	49	53	44	52	50	56	50	60	44	50	54	41	60
	40	63												

11	54	66	62	65	50	55	85	85	73	73	53	67	64	77	47
	75	61	50	73	71	46	76	51	75	76	54	61	68	69	72
	55	66	66	67	68	70	68	87	62	89	66	70	68	55	
	76	82	87	82	59	78	86	71	43	72	74	68	69	60	
	66	84	72	78	71	87	65	74	93	79	60	53	65	75	
	60	59	67	77	79	56	74	81	78	80	76	77	49	51	
	66	54	72	62	51	89	74	60	67	75	71	63	63	80	

12	28	39	35	21	28	25	22	30	23	31	29	26	27	23
	32	27	39	29	37	35	33	21	31	36	38	25	29	29
	24	28	33	25	22	32	31	40	31	24	30	24	25	27
	33	35	30	31	33	29	25	32	32	37	34	25	29	28
	25	29	31	35	26	30	29	23	31	27	32	35	35	25
	34	31	26	20	28	34	34	29	31	28	28	31	36	30
	24	41	25	33	37	28	36	33	33	26	27	28	33	34
	39	29												

13	43	47	47	43	41	49	34	49	36	34
	51	48	44	43	53	46	38	46	36	60
	43	53	52	40	38	42	40	43	43	56
	42	39	45	30	49	47	35	30	52	45
	46	46	52	38	47	32	46	44	37	45
	56	50	58	51	46	38	42	50	44	49
	42	33	38	45	50	49	45	46	39	45

14	67	72	72	66	65	72	63	72	60	61	74	62	72	67
	75	78	70	68	76	69	65	69	65	81	59	76	70	69
	67	72	74	65	62	57	60	66	72	80	64	63	66	66
	66	63	71	57	72	72	71	57	75	73	71	61	68	67
	75	73	76	66	72	62	66	67	64	73	73	62	69	80
	78	72	80	75	69	71	70	72	70	74	73	65	67	64
	65	57	63	68	70	60	75	70	62	76	58	62	65	66
	55	67												

15	81	88	69	76	84	86	96	84	87	85	81
	61	76	81	83	92	73	98	80	72	74	68
	73	76	76	81	83	72	91	73	72	95	66
	71	86	69	89	84	80	69	75	73	86	69
	76	72	85	78	67	70	75	71	66	74	69
	82	91	72	75	81	87	89	79	78	92	95
	77	82	84	81	69	77	72	62	81	67	84

16	82	87	71	78	83	88	96	84	86	83	81	68	80	75	70
	74	77	80	82	92	75	99	82	75	74	74	87	85	81	87
	66	77	78	80	85	75	88	73	75	92	68	85	78	77	
	78	84	73	90	83	80	71	81	70	84	72	74	78	85	
	74	73	90	78	69	74	76	77	75	76	71	67	74	79	
	82	88	75	75	81	84	87	78	79	90	90	70	85	64	
	78	84	84	80	72	77	73	68	80	71	88	76	80	75	

17	95	91	88	83	88	90	87	87	92	90	83	94	97	83	93
	85	88	90	86	99	89	88	92	85	96	95	86	85	87	88
	96	92	92	72	88	82	90	83	94	92	88	95	86	90	
	82	90	93	98	82	95	88	85	81	89	86	82	84	90	
	91	89	84	92	91	99	94	84	91	87	81	78	98	92	
	90	81	92	91	88	88	92	84	93	80	88	82	94	93	
	95	89	89	95	94	87	86	86	81	85	87	93	83	95	

18	77	70	64	67	72	65	69	61	64	69	73	68	80	75	63
	57	65	71	73	77	62	74	62	70	71	77	57	64	54	60
	59	75	71	66	75	83	62	70	65	67	76	76	78	83	
	73	65	66	72	73	78	69	67	75	76	73	71	70	69	
	74	72	59	60	79	67	65	76	70	65	79	70	67	73	
	68	65	59	83	74	66	69	67	72	74	73	70	75	64	
	70	67	64	84	76	78	73	69	72	71	58	74	67	66	

19	68	73	67	61	65	64	69	65	65	56	60	58	68	64	59
	71	63	64	66	65	62	68	67	72	68	64	63	68	63	66
	70	64	69	70	60	68	62	65	67	61	62	61	75	56	
	71	61	63	72	64	69	65	68	64	68	62	63	62	64	
	64	63	62	60	61	65	61	59	70	60	68	62	64	66	
	63	52	69	64	55	67	69	66	64	73	60	64	66	71	
	66	70	74	63	58	63	67	66	69	60	63	66	62	66	

20	81	51	67	82	53	85	72	74	83	55	81	56	72	67	76
	82	70	62	72	58	49	62	63	71	54	58	76	60	87	62
	85	83	95	67	65	65	53	73	89	73	81	63	68	55	
	61	75	64	65	82	55	53	74	78	80	74	69	86	80	
	66	64	80	83	59	68	73	73	79	78	75	57	65	72	
	76	78	58	57	60	85	80	55	82	69	64	74	79	62	
	66	80	49	70	79	84	80	70	74	90	82	76	78	67	

21	37	50	43	38	49	36	40	43	38	54	39	48	46	45	38
	48	42	46	49	50	55	45	46	44	52	50	45	49	35	46
	39	35	31	47	44	52	54	45	35	40	36	47	47	49	
	37	47	47	50	41	59	57	40	38	42	40	43	37	36	
	46	47	40	38	54	45	40	42	40	41	40	48	46	41	
	46	44	47	50	47	35	38	50	36	43	49	42	37	45	
	44	39	53	45	42	41	42	49	42	40	39	39	38	46	

22	75	62	71	90	69	68	84	73	81	72	70	89	86	68	82
	73	91	93	71	62	60	81	69	79	55	56	90	71	78	62
	77	71	71	63	81	98	80	72	87	64	66	71	74	72	
	57	69	66	94	79	54	85	82	70	75	77	66	63	69	
	72	56	78	64	84	79	67	82	75	53	81	85	57	90	
	67	80	86	81	74	72	87	81	76	58	58	81	67	70	
	73	77	60	92	62	79	43	80	67	81	54	71	67	73	

23	50	48	50	51	52	54	50	50	55	52	47	59	49	39	60
	49	58	56	51	44	48	52	54	41	47	46	49	54	42	46
	56	45	51	56	58	52	52	49	51	49	50	51	54	50	
	61	50	49	59	52	48	57	60	54	57	44	47	55	55	
	51	55	55	47	57	49	51	56	66	41	46	42	45	50	
	54	48	55	52	54	54	47	49	45	53	53	51	43	57	
	48	53	53	47	58	62	47	47	50	44	44	50	51	58	

24	76	83	88	80	72	62	72	62	65	75	70	62	73	75	69
	69	70	73	66	74	62	67	55	68	74	66	71	94	65	70
	78	83	83	59	58	84	93	83	85	67	44	69	70	76	
	69	72	63	51	64	56	69	78	71	64	64	89	75	83	
	56	60	65	88	54	90	75	62	64	79	73	78	54	71	
	58	57	62	64	55	67	79	76	87	60	58	54	67	60	
	83	69	60	68	77	87	65	63	66	54	82	64	91	56	

25	59	64	59	61	62	52	69	59	58	63	61	55	60	59	67
	64	56	65	66	56	65	64	57	62	65	57	63	59	56	62
	63	60	59	56	60	60	66	67	57	58	64	60	60	63	
	60	55	52	65	58	55	60	62	58	61	55	63	59	60	
	65	59	64	58	57	61	66	62	66	60	50	57	55	58	
	65	51	56	59	63	63	65	58	66	67	65	58	67	64	
	62	53	58	61	58	62	56	57	61	58	60	57	61	63	

26	47	37	50	45	48	53	52	40	40	57	47	45	55	51	46
	58	61	46	50	52	57	58	52	46	48	60	57	48	34	49
	44	55	58	50	50	48	42	48	51	53	44	48	62	50	
	53	56	54	53	56	50	52	54	50	63	60	62	60	63	
	48	50	45	42	50	52	53	48	51	51	53	47	57	56	
	61	44	47	47	42	52	60	56	49	54	58	50	59	45	
	61	42	41	46	47	51	56	44	50	55	50	51	52	53	

27	74	64	65	70	76	70	69	75	77	71	85	79	83	75	79
	75	74	64	75	83	76	69	84	75	64	78	81	68	73	65
	80	61	78	57	80	74	68	77	68	77	71	74	68	70	
	83	70	68	78	72	67	70	79	70	84	87	69	72	64	
	78	77	74	67	70	66	71	75	74	76	74	75	72	63	
	83	71	70	69	70	80	71	59	73	80	71	72	71	71	
	66	71	74	66	73	67	67	70	85	70	78	82	77	71	

28	62	57	57	61	50	67	55	61	62	65	66	63	47	57	60
	72	52	66	69	63	64	63	52	61	61	53	52	65	51	53
	56	56	64	68	61	60	54	70	50	69	46	58	62	57	
	50	48	53	55	70	69	59	53	71	67	62	65	58	72	
	65	56	55	38	51	59	60	68	69	61	68	58	53	64	
	61	62	57	75	58	60	53	41	56	48	56	64	67	69	
	65	64	65	51	54	47	56	47	59	64	43	63	71	50	

29	87	80	79	76	60	79	81	95	89	79	80	86	74	80	83
	81	79	93	81	65	83	95	73	79	73	81	81	75	86	61
	64	86	80	71	73	90	70	85	84	60	67	72	69	90	
	63	87	93	72	76	65	51	90	77	57	75	90	75	77	
	73	70	91	72	78	80	91	81	92	74	65	57	70	82	
	80	76	80	74	86	68	69	95	69	80	63	58	93	75	
	77	99	79	85	65	64	59	54	81	81	78	93	85	68	

30	45	52	51	50	48	44	40	52	45	44	50	46	55	52	59
	51	40	50	48	49	49	47	44	56	51	44	46	38	46	51
	51	51	49	50	50	47	46	52	43	51	50	50	43	44	
	53	42	47	46	47	47	48	48	48	50	48	50	48	36	
	50	46	49	48	49	51	44	51	49	46	44	49	47	51	
	49	50	50	49	49	52	51	56	53	47	53	48	46	41	
	55	45	49	45	47	44	45	52	51	52	45	47	49	48	

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гмурман, В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман - М.: Высшая школа, 1999.
2. *Вентцель, Е.С.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель - М.: Высшая школа, 1998; 2002.
3. *Бочаров, П.П.* Теория вероятностей. Математическая статистика / П.П. Бочаров, А.В. Печенкин - М.: Гардарика, 1998.
4. *Розанов, Ю.А.* Лекции по теории вероятностей / Ю.А. Розанов - М.: Наука, 1986.
5. *Данко, П.Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова - М.: Высшая школа, 1999.
6. *Колде, Я.К.* Практикум по теории вероятностей и математической статистике / Я.К. Колде - М.: Высшая школа, 1991.
7. *Калинина, В.М.* Математическая статистика / В.М. Калинина, В.Ф. Панкин - М.: Высшая школа, 1998.
8. *Вентцель, Е.С.* Задачи и упражнения по теории вероятностей / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров - М.: Высшая школа, 2000.
9. *Гмурман, В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман - М.: Высшая школа, 1999.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1635	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	005	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{\frac{z^2}{2}}dz$ **.**

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,36	0,1406	0,72	0,2642	1,08	0,3599	1,44	0,4251
0,01	0,0040	0,37	0,1443	0,73	0,2673	1,09	0,3621	1,45	0,4265
0,02	0,0080	0,38	0,1480	0,74	0,2704	1,10	0,3643	1,46	0,4279
0,03	0,0120	0,39	0,1517	0,75	0,2734	1,11	0,3665	1,47	0,4292
0,04	0,0160	0,40	0,1554	0,76	0,2764	1,12	0,3686	1,48	0,4306
0,05	0,0199	0,41	0,1591	0,77	0,2794	1,13	0,3708	1,49	0,4319
0,06	0,0239	0,42	0,1628	078	0,2823	1,14	0,3729	1,50	0,4332
0,07	0,0279	0,43	0,1664	0,79	0,2852	1,15	0,3749	1,51	0,4345
0,08	0,0319	0,44	0,1700	0,80	0,2881	1,16	0,3770	1,52	0,4358
0,09	0,0359	0,45	0,1736	0,81	0,2910	1,17	0,3790	1,53	0,4370
0,10	0,0398	0,46	0,1772	0,82	0,2939	1,18	0,3810	1,54	0,4382
0,11	0,0438	0,47	0,1808	0,83	0,2967	1,19	0,3830	1,55	0,4394
0,12	0,0478	0,48	0,1844	0,84	0,2995	1,20	0,3849	1,56	0,4406
0,13	0,0517	0,49	0,1879	0,85	0,3023	1,21	0,3869	1,57	0,4418
0,14	0,0557	0,50	0,1915	0,86	0,3051	1,22	0,3888	1,58	0,4429
0,15	0,0596	0,51	0,1950	0,87	0,3079	1,23	0,3907	1,59	0,4441
0,16	0,0636	0,52	0,1985	0,88	0,3106	1,24	0,3925	1,60	0,4452
0,17	0,0675	0,53	0,2019	0,89	0,3133	1,25	0,3944	1,61	0,4463
0,18	0,0714	0,54	0,2	0,90	0,3159	1,26	0,3962	1,62	0,4474
0,19	0,0753	0,55	0,2088	0,91	0,3186	1,27	0,398	1,63	0,4484
0,20	0,0793	0,56	0,2123	0,92	0,3212	1,28	0,3997	1,64	0,4495
0,21	0,0832	0,57	0,2157	0,93	0,3238	1,29	0,4015	1,65	0,4505
0,22	0,0871	0,58	0,2190	0,94	0,3264	1,30	0,4032	1,66	0,4515
0,23	0,0910	0,59	0,2224	0,95	0,3289	1,31	0,4049	1,67	0,4525
0,24	0,0948	0,60	0,2557	0,96	0,3315	1,32	0,4066	1,68	0,4535
0,25	0,0987	0,61	0,2291	0,97	0,3340	1,33	0,4082	1,96	0,4545
0,26	0,1026	0,62	0,2324	0,98	0,3365	1,34	0,4099	1,70	0,4554
0,27	0,1064	0,63	0,2357	0,99	0,3389	1,35	0,4115	1,71	0,4564
0,28	0,1103	0,64	0,2389	1,00	0,3413	1,36	0,4131	1,72	0,4573
0,29	0,1141	0,65	0,2422	1,01	0,3438	1,37	0,4147	1,73	0,4582
0,30	0,1179	0,66	0,2454	1,02	0,3461	1,38	0,4162	1,74	0,4591
0,31	0,1217	0,67	0,2486	1,03	0,3485	1,39	0,4177	1,75	0,4599
0,32	0,1255	0,68	0,2517	1,04	0,3508	1,40	0,4192	1,76	0,4608
0,33	0,1293	0,69	0,2549	1,05	0,3531	1,41	0,4207	1,77	0,4616
0,34	0,1331	0,70	0,2580	1,06	0,3554	1,42	0,4222	1,78	0,4625
0,35	0,1368	0,71	0,2611	1,07	0,3577	1,43	0,4236	1,79	0,4633
1,80	0,4641	1,96	0,475	2,24	0,4875	2,56	0,4948	2,88	0,4980
1,81	0,4649	1,97	0,4756	2,26	0,4881	2,58	0,4951	2,90	0,4981
1,82	0,4656	1,98	0,4761	2,28	0,4887	2,60	0,4953	2,92	0,4982
1,83	0,4664	1,99	0,4767	2,30	04893	2,62	0,4956	2,94	0,4984

1,84	0,4671	2,00	0,4772	2,32	0,4898	2,64	0,4959	2,96	0,4985
1,85	0,4678	2,02	0,4783	2,34	0,4904	2,66	0,4961	2,98	0,4986
1,86	0,4686	2,04	0,4793	2,36	0,4909	2,68	0,4963	3,00	0,49865
1,87	0,4693	2,06	0,4803	2,38	0,4913	2,70	0,4965	3,20	0,49931
1,88	0,4699	2,08	0,4812	2,40	0,4918	2,72	0,4967	3,40	0,49966
1,89	0,4706	2,10	0,4821	2,42	0,4922	2,74	0,4969	3,60	0,499841
1,90	0,4713	2,12	0,4830	2,44	0,4927	2,76	0,4971	3,80	0,499928
1,91	0,4719	2,14	0,4838	2,46	0,4931	2,78	0,4973	4,00	0499968
1,92	0,4726	2,16	0,4846	2,48	0,4934	2,80	0,4974	4,50	0,499997
1,93	0,4732	2,18	0,4854	2,50	0,4938	2,82	0,4976	5,00	0,499997
1,94	0,4738	2,20	0,4861	2,52	0,4941	2,84	0,4977		
1,95	0,4744	2,22	0,4868	2,54		2,86	0,4979		

Приложение 3

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66

15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7.01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Учебное издание

Кореева Екатерина Борисовна,
Додонова Наталья Леонидовна

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В ЭКОНОМИКЕ

Учебное пособие

Редактор И.И. Спиридонова
Доверстка И.И. Спиридонова

Подписано в печать 15.07.2011 г. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 5,25.
Тираж 100 экз. Заказ . Арт. С - С3 / 2011

Самарский государственный аэрокосмический университет.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного аэрокосмического университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.