МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

# Методы оптимизации

Электронный учебно-методический комплекс
по дисциплине в LMS Moodle

САМАРА
2012

УДК 519.85, 519.6

Автор-составитель: **Белоусов Александр Александрович**

**Методы оптимизации** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс по дисциплине в LMS Moodle / Минобрнауки России, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); авт.-сост. А.А. Белоусов. - Электрон. текстовые и граф. дан. - Самара, 2012. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

В состав учебно-методического комплекса входят:
1. Курс лекций.
2. Задания на практические работы.
3. Темы для подготовки к зачету
4. Тесты для итогового контроля знаний.

УМДК «Методы оптимизации» предназначен для студентов факультета информатики, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 010400.62 «Прикладная математика и информатика» в 5 семестре.

УМДК разработан на кафедре технической кибернетики.

## ЛЕКЦИЯ 1. ВВЕДЕНИЕ В МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Аналитические методы решения задач на отыскание наибольших и наименьших величин являются актуальными уже на протяжении многих веков развития человечества. Как наука теория экстремальных задач начала создаваться в начале XVII века. Большой вклад в ее развитие внесли такие крупнейшие ученые как П.Ферма, М.Ньютон, Ж.Лагранж, А.Эйлер, Ж.Пуанкаре, А.В.Канторович, Н.Винер и др.

В связи с запросами техники, экономики бурное развитие получили такие разделы теории оптимизации, как динамическое программирование, теория оптимального управления, методы решения экстремальных задач и анализа данных. Знание основных принципов и законов управления, основанных на математических методах оптимизации, позволяет эффективно управлять организационными системами, производством, делать прогнозы в финансовой деятельности и экономике, влиять на физические и биологические процессы.

Общепринятую точку зрения на предмет и цели оптимизации выразили Бейтлер и Уайл: «То, что люди стремятся к совершенству, нашло свое выражение в теории оптимизации. Она изучает, как описать и достичь наилучшего, если мы имеем возможность измерения и можем переходить от плохого к хорошему».

Объектом курса методов оптимизации являются оптимизационные задачи. Предмет курса МО, составляют теория и методы решения однокритериальных задач, поставленных на математических моделях.

В пределах настоящего курса будут рассмотрены следующие разделы:

1. **Линейное программирование(ЛП)**

   *(Симплекс-метод, двойственный симплекс-метод, двойственная задача ЛП)*

2. **Нелинейное программирование**

   *(Методы безусловной оптимизации, выпуклое программирование, методы оптимизации функций при наличии ограничений)*

3. **Оптимизация на дискретных моделях**

   *(NP-полные задачи, целочисленное линейное программирование, динамическое программирование)*

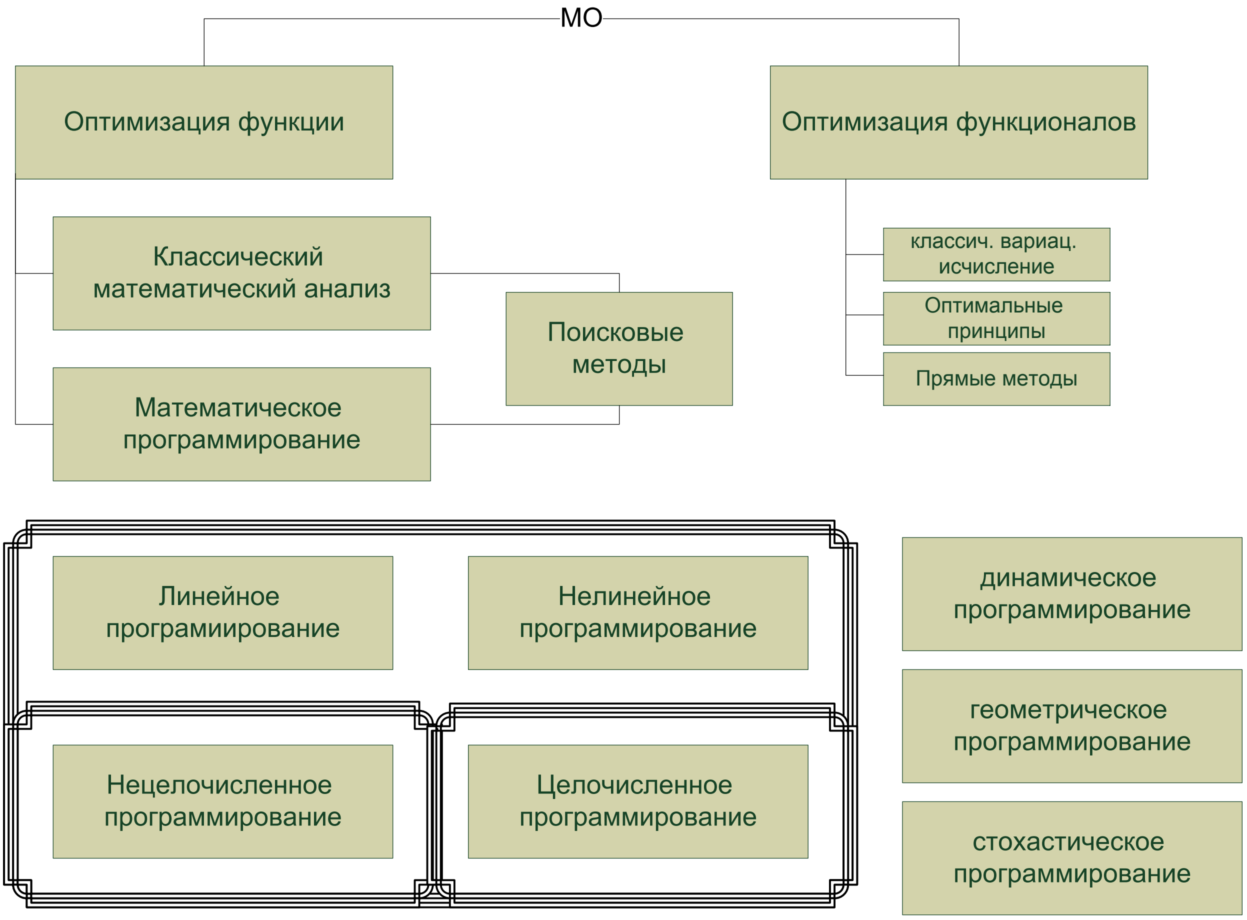
4. **Оптимизация на графах**

   *(ор. графы, неор. графы, задача о назначениях)*

5. **Стохастическое программирование**

   *(стохастическая аппроксимация, генетический алгоритм)*

**Схема классификации МО**




## §1 Основные понятия и определения оптимизации

В настоящем курсе рассматриваются задачи оптимизации в конечномерном пространстве.

Пусть задана некоторая скалярная ***целевая функция***. Задача оптимизации может быть сформулирована как задача оптимизации целевой функции при условии выполнения ряда заданных ограничений. $\forall$ решение, которое удовлетворяет этим ограничениям называется ***допустимым***.

**Опр.1.1** Задачей оптимизации называют задачу отыскания минимумов или максимумов (экстремумов) функции на заданных множествах:

$$f(x) \to min,\ x \in X \tag{1.1}$$

$f(x)$ – ***целевая функция*** или ***критерий оптимальности***. $X$ – допустимое множество решения задач. При этом т.к. мы рассматриваем только конечномерные задачи $X \subseteq \mathbf{R}^n$.

**Опр.1.2** Точка $x^* \in X \subset \mathbf{R}^n$ называется:

a) точкой ***глобального*** минимума функции $f$ на множестве $X$ или глобальным решением задачи (1.1), если

$$f\left(x^*\right) \le f\left(x\right), \forall x \in X \tag{1.2}$$

b) точкой ***локального*** минимума $f$ на множестве $X$ или локальным решением задачи (1.1), если существует ε-окрестность $O_\varepsilon(x^*) \subset R^n$ точки $x^*$:

$$f\left(x^*\right) \le f\left(x\right), \forall x \in X \cap O_\varepsilon\left(x^*\right), \tag{1.3}$$

где $O_\varepsilon\left(x^*\right) = \left\{x \in R^n | x - x^* \le \varepsilon\right\}$

Если (1.2), (1.3) выполняется строго, то $x^*$ - ***строгое*** решение в глобальном или локальном смысле соответственно.

Если $x^* \in X$ - точка глобального минимума $f$ на $X$, то пишут $x^* = \underset{x \in X}{\operatorname{argmin}} f\left(x\right)$ или $f\left(x^*\right) = \min\limits_{x \in X} f(x)$. Множество всех точек глобального минимума а на $X$ обозначается

$$\underset{x \in X}{argmin}\, f\left(x\right) = \left\{x^* \in X | f\left(x^*\right) = f^*\right\}$$

Аналогично в случае максимализации $f(x) \to max$, при этом $-f(x) \to min$.

Возникает вопрос о существовании решения задачи (1.1), на которую дает ответ следующая теорема:

**Теорема 1.1** (вторая теорема Вейерштрасса)

Если функция *f(x)* непрерывна на компактном множестве X, то она достигает своих точных верхних и нижних граней, т.е. $\exists$ такие точки $x_1^* \, u \, x_2^* \in X$, что

$$f\left(x_1^*\right) = \sup_{x \in X} f(x), f\left(x_1^*\right) = \inf_{x \in X} f(x)$$

Если $X = R^n$, то задача (1.1) – общая постановка задачи безусловной оптимизации. Вообще вид $f\left(x\right)$ и области $X$ определяет классификацию задач оптимизации.

Например, задача нелинейного программирования имеет вид:

$$f\left(x\right) \to min. \tag{1.4}$$

При ограничениях:

$$g_i(x) \le 0, i = 1,..,m. \tag{1.5}$$

$$g_i(x) = 0, i = m+1,..,k. \tag{1.6}$$

$$x^* \in X \subset R^n.$$

Где $f(x), g_i(x),.., g_k(x)$ – функции определенные на $\mathbf{R^n}$, $x = (x_1,..,x_n)^T$ (1.5) – ограничения в форме неравенств, (1.6) – в форме равенств. $x \in X$, удовлетворяющий (1.5), (1.6) называется допустимой точкой. Совокупность всех допустимых точек образует допустимую область.

**Опр.1.3** Оптимальным решением задачи оптимизации (1.4) – (1.6) называется допустимое решение при котором $f(x)$ достигает своего экстремального значения (т.е. лучшее допустимое решение в смысле выбранного критерия).

В случае, если в задаче (1.4) – (1.6) функции $f(x)$, $g_i(x)$ являются линейными, а также соотношения, задающее область $X$ линейное, то сформулированная задача является задачей ***линейного программирования***.

Будем изучать как ***точные*** (***оптимальные***) решения, так и ***приближенные*** (***субоптимальные***) решения, так как существует множество задач, для которых точное решение или не может быть найдено или поиск его из-за своей сложности практически неприемлим.

# Глава 1. Методы поиска

## § 1. Градиентные методы

Рассмотрим задачу:

$$f(x) \to min, x \in X \subset R^n \qquad (1.1)$$

И процедуру построения минимизирующей последовательности точек $\{x_k\}$:

$$f(x_0) > f(x_1) > \cdots > f(x_k) > \cdots \qquad (1.2)$$

**Опр1.1:** Методы получения точек, соответствующих условию (1.2), называется методом спуска.

**Опр1.2:** Градиентным методом называется метод, согласно которому точка $x_{k+1}$ выбирается по отношению к $x_k$ в направлении - $\nabla f(x_k)$, т.е. $x_{k+1} = x_k - t_k \nabla f(x_k)$, где $t_k$ - длина шага.

При $\forall$ методе спуск $\{x_k\}$ подчиняется условию:

$$x_{k+1} = x_k - t_k p_k , \qquad k = 0,1,2, \dots \qquad (1.3)$$

где $p_k$ - вектор направления, $t_k$ - длина шага.

В зависимости от выбора $t_k$ ,$p_k$ получаются различные методы спуска:

1. Методы, использующие только значение функции – прямые методы (методы Ф-ого порядка),
2. Методы, использующие f(x) и производную – градиентные методы 1ого порядка,
3. Методы, использующие также значения 2ой производной – методы 2-ого порядка.

Рассмотрим градиентные методы 1ого и 2ого порядка.

### 1.1 Метод наискорейшего спуска с оптимизируемой длиной шага.

Для выбора шага $t_k$ используется условие:

$$f(x_{k+1}) = f(x_k - t_k \nabla f(x_k)) \to \min_{t_k > 0} \qquad (1.4)$$

В качестве $p_k$ выбирается антиградиент - $\nabla f(x_k)$.

**Алгоритм метода**

**Шаг1:** *инициализация*

Выбрать $\varepsilon > 0$ определяющее множество решений

$$\Omega = \{x_k | \|\nabla f(x_k)\| \le \varepsilon\} \ (k = 0,1,2, \dots)$$

Выбрать начальную точку $x_0$

**<u>Шаг2:</u>** *Критерий останова*

Если $x_k \in \Omega$ – stop. Иначе к шагу 3.

**<u>Шаг3:</u>** *Итерация*

Вычислить $\nabla f(x_k)$, определить $t_k$ из решения задачи одномерной минимизации

$$f(x_{k+1}) = f(x_k - t_k \nabla f(x_k)) \to \min_{t_k > 0}$$

Положить $x_{k+1} = x_k - t_k \nabla f(x_k)$, заменить ***k*** на ***k+1***, перейти к шагу 2.

### 1.2 Метод наискорейшего спуска с постоянным шагом

$t$

Условие, при котором можно выбрать постоянную длину шага $t_k =$ , определяется следующей теоремой:

**<u>Теорема 1.1:</u>** $\{x_k\} \subset \mathbb{K}$ - компакт и $\exists$ такое число L: градиент $\nabla f(x_k)$ функции $f(x) \in C^1 (\mathbf{R}^n)$ удовлетворяет условию Липшица:

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in \mathbf{R}^n \qquad (1.5)$$

Тогда $\exists$ параметр $t$ : $\forall$ последовательности точек $\{x_k\}$, определяемых процессом $x_{k+1} = x_k - t_k \nabla f(x_k)$ и $\forall x_0 \in \mathbf{R}^n$ выполняется: $\lim_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0$ .

**<u>Алгоритм метода</u>**

**<u>Шаг1:</u>** *инициализация*

Выбрать $\varepsilon > 0$ определяющее множество решений

$$\Omega = \{x_k \mid \|\nabla f(x_k)\| \leq \varepsilon\} \ (k = 0,1,2,\dots)$$

Определить длину шага $t = \frac{1}{2}L$ , где L определяется условием

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\|x - y\|, \forall x, y \in X$$

Выбрать начальную точку $x_0$

**<u>Шаг2:</u>** *Критерий останова*

Если $x_k \in \Omega$ – stop, иначе к шагу 3.

**<u>Шаг3:</u>** *Итерация*

Положить $x_{k+1} = x_k - t_k \nabla f(x_k)$, заменить ***k*** на ***k+1***, перейти к шагу 2.

**<u>Замечание.</u>** Метод наискорейшего спуска хорошо работает только для точек далеко отстоящих от стационарной точки, в нуле которой метод сходится медленно за счет выбора очень маленькой длины шага и частой смены направлений.

### 1.3 Метод Ньютона

Относится к градиентным методам второго порядка. Рассмотрим квадратичную аппроксимацию функции $\boldsymbol{f(x)} \in \boldsymbol{C^2(X)}$, где X – замкнутое выпуклое множество из $\boldsymbol{R^n}$, в точке $x_k$ функции

$$\hat{f}(\boldsymbol{x}) = f(x_k) + (\nabla f(x_k), (x - x_k)) + \frac{1}{2}(x - x_k)^T H(x_k)(x - x_k), \qquad (1.6)$$

Где $H(x_k) = \left(\frac{\partial^2 f(x_k)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{n\times n}$ – матрица Гессе $1 \le i; j \le n$ , $\nabla f(x)$ - градиент функции $f$ .

Необходимое условие экстремума для функции $\hat{f}(\boldsymbol{x})$ (1.6) в точке $x_k$ является выполнение условия:

$$\hat{f}(\boldsymbol{x}) = f(x_k) + H(x_k)(x - x_k) = \boldsymbol{0} \qquad (1.7)$$

Предполагая существование в точке $x_k$ матрицы $H^{-1}$ из (1.7) получаем

$x_{k+1} = x_k - H^{-1}(x_k)\nabla f(x_k)$

В общем случае нельзя гарантировать существование $H^{-1}$ и сходимости метода, тем не менее можно показать сходимость метода для некоторой окрестности точки $x^*$, для которой $\nabla f(x^*)$=0 и $\exists H^{-1}(x^*)$.

**<u>Теорема 1.2:</u>** (о сходимости метода Ньютона)

$f(x) \in C^2\ (X)$ Рассматривая метод Ньютона определяющий плоскость  точек

$x_{k+1} = x_k - H^{-1}(x_k)\nabla f(x_k)$

$x^*$ - таково, что $\nabla f(x^*) = 0$ è $\exists H^{-1}(x^*)$

Если начальная точка $x_0$ достаточно близка к $x^*$, так что $\exists$ числа $C_1, C_2 > 0$:

$C_1, C_2 < 1$ è

(1) $\left\|H^{-1}(x)\right\| \le C_1$

(2) $\left\|\nabla f(x^*) - \nabla f(x_k) - H(x)(x^* - x)\right\| / \left\|x - x^*\right\| \le C_2$

Для всех x, удовлетворяющих неравенству $\left\|x - x^*\right\| \le \left\|x_0 - x^*\right\|$, то тогда для последовательности точек, порождаемых методом ньютона, сходится к $x^*$, а именно $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$

**<u>Алгоритм метода</u>**

**<u>Шаг1:</u>** *инициализация*

Выбрать $\varepsilon > 0$ определяющее множество решений

$\Omega = \{x_k | \|\nabla f(x_k)\| \le \varepsilon\}\ (k = 0,1,2,\dots)$

Выбрать начальную точку $x_0$

**<u>Шаг2:</u>** *Критерий останова*

Если $x_k \in \Omega$ – stop, иначе к шагу 3.

**<u>Шаг3:</u>** *Итерация*

Определить новую точку $x_{k+1} = x_k - H^{-1}(x_k)\nabla f(x_k)$, заменить ***k*** на ***k+1***, перейти к шагу 2.

## § 2. Методы прямого поиска

### 2.1 Метод последовательной минимизации функции по направлениям

Производится последовательная минимизация функции вдоль *n* линейно независимых направлений.

$x_k$ - точка на k-ом шаге, $d_{k,1},\dots,d_{k,n}$ - направления минимизации. Рассмотрим векторы: $y_{k,1},\dots,y_{k,n}$ заданные соотношениями:

$$y_{k,1} = x_k,\dots,y_{k,j+1} = y_{k,j} + t_{k,j}d_{k,j}\quad (k = 1,2,\dots,n) \tag{2.1}$$

Где через $t_{k,j}$ обозначено решение одномерной оптимизационной задачи

$$f\left(y_{k,j} + t_{k,j}d_{k,j}\right) \to \min_{t_{k,j}} \tag{2.2}$$

То в качестве очередной точки полагают $x_{k+1} = y_{k,n+1}$. В дальнейшем будем считать, что $\left\|d_{kj}\right\| = 1.\ \forall k,\ j = \overline{1,n}$. Условие сходимости алгоритма даются теоремой.

**<u>Теорема 2.1:</u>** (о сходимости последовательности пробных точек)

Пусть плоскость точек $\{x_k\}$ определяется формулами (2.1)-(2.2), $\{x_k\} \in \mathrm{k}$ - компакт и $\exists \varepsilon > 0 : \det\left[d_{k,1}, \ldots, d_{k,n}\right] \geq \varepsilon$ для всех k. Функция *f* дифференцируема и имеет единственный минимум вдоль $\forall$ прямой в $R^n$, $\Omega = \left\{x^* \middle| \nabla f\left(x^*\right) = 0\right\}$ - множество решений.

Тогда множество $\{x_k\}$, порождаемое алгортмом либо конечно, либо все предельные точки, порождаемые плоскостью лежат в $\Omega$.

## 2.2 Метод циклического покоординатного спуска

__Алгоритм метода__

__Шаг1:__ *инициализация*

Выбрать $\varepsilon > 0$, взять в качестве $d_1, \ldots, d_n$ координаты:
$d_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T, d_2 = (0, 1, \ldots, 0)^T, \ldots, d_n = (0, 0, \ldots, 1)^T$. Множество решений:
$\Omega = \left\{x_k \middle| \left\|\nabla f\left(x_k\right)\right\| \leq \varepsilon\right\} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$. Выбрав начальную точку $x_1$ и $y_{1,1} = x_1, k = j = 1$.

__Шаг2:__ *Критерий останова*

Если $x_k \in \Omega$ – stop, иначе к шагу 3.

__Шаг3:__ *Итерация*

Положить $t_{k,j}$ равным решению задачи минимизации функции $f\left(y_{k,j} + t_{k,j} d_{k,j}\right), t_{k,j} \in R$.
Положим $y_{k,j+1} = y_{k,j} + t_{k,j} d_{k,j}$. Если ***j<n***, то заменить ***j*** на ***j+1*** и повторить шаг итерации. Если ***j=n***, то положить $x_{k+1} = y_{k,n+1}, \; j = 1$. Заменить ***k*** на ***k+1*** и перейти к шагу 2.

Из теоремы 2.1 следует что алгоритм сходится при условии:

1. ***f*** – дифференцируема
2. минимум ***f*** вдоль $\forall$ направления в $R^n$ единственен
3. последовательность точек, генерируемых алгоритмом, содержится в компактном множестве и $R^n$.

При выбранном критерии остановки условие дифференцируемости функции f является существенным. Для недифференцируемых функций метод может останавливаться в точке не являющийся стационарной. В некоторых случаях эта трудность может быть преодолена поиском вдоль направления $p_k = x_{k+1} - x_k$. Такой шаг обычно называют ускоряющим шагом.

Ускоряющий шаг часто приводит к уменьшению времени работы алгоритма и для дифференцируемых функций. Обычно эмпирическим путем устанавливается, что шаг делается через определенное число итераций. Такая модификация метода обычно ускоряет сходимость метода.

### 2.3 Метода покоординатного спуска с преобразованием базиса (метод Розенброка)

Х. Розенброком в 1960г.

Суть: на $\lambda$ итерации строится новый ортонормированный базис.

Пусть $x_k$ - текущая пробная точка, $d_j\left(x_k\right)\ j=\overline{1,n}$ - текущий ортонормированный базис. Построение новой точки осуществляется в соответствии с процедурой минимизации по направлениям текущего базиса $d_j\left(x_k\right)\ j=\overline{1,n}$.

Пусть как и ранее $t_k$ - решения задач минимизации функции: $f\left(y_j+td_j\right)$. Построение нового базиса $d_j\left(x_{k+1}\right)\ j=\overline{1,n}$ в новой точке $x_{k+1}$ проводится с помощью процедуры Граммы-Шмидта:

$$l_j=\begin{cases} d_j,\ \text{åñëè}\ t_j=0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} t_i d_i\left(x_k\right),\ \text{åñëè}\ t_j\neq 0 \end{cases}\quad b_j=\begin{cases} l_j,\ \text{ï ðè}\ j=1 \\ l_j-\sum\limits_{i=1}^{j-1}\left(l_j^T d_i\left(x_{k+1}\right)\right)d_i\left(x_{k+1}\right),\ \text{ï ðè}\ j>2 \end{cases}$$

$$d_j\left(x_{k+1}\right)=b_j\big/\left\|b_j\right\|$$

<u>**Алгоритм Розенброка**</u>

<u>**Шаг1:**</u> *инициализация*

Выбрать $\varepsilon>0$, взять в качестве $d_1,\ldots,d_n$ взять ортонормированное множество решений $\Omega=\left\{x_k\left\|\nabla f\left(x_k\right)\right\|\leq\varepsilon\right\}\ \left(k=0,1,2,\ldots\right)$. Выбрав начальную точку $x_1$ и $y_1=x_1,k=j=1$.

<u>**Шаг2:**</u> *Критерий останова*

Если $x_k\in\Omega$ – stop, иначе к шагу 3.

<u>**Шаг3:**</u> *Итерация*

Положить $t_j$ равным решению задачи минимизации функции $f\left(y_j+td_j\right)$ при условии $t\in R$. Положим $y_{j+1}=y_j+t_jd_j$. Если ***j<n***, то заменить ***j*** на ***j+1*** и повторить шаг итерации. Если ***j=n***, то положить $x_{k+1}=y_{n+1}$ и заменить ***k*** на ***k+1***. Построить в точке $x_{k+1}$ новый ортонормированный базис в соответствии с вышеизложенной процедурой Грамма-Шмидта. Положить ***j=1*** перейти к шагу 2.

<u>**Пример 2.1**</u>: Найти минимум функции $f\left(x_1,x_2\right)=\left(x_1-1\right)^4+\left(2x_2-x_1\right)^2$ методом покоординатного спуска с преобразованием базиса.

<u>**Решение:**</u> Начальный базис $d_1\left(1,0\right)^T,d_1\left(0,1\right)^T$. Множество решений $\Omega=\left\{x_k\left\|\nabla f\left(x_k\right)\right\|<\varepsilon\right\},\ \varepsilon=0,3$. Начальная пробная точка $x_0=\left(3,2\right)^T$. Вычислим

$\nabla f(x)=\begin{pmatrix}4(x_1-1)^3-2(2x_2-x_1)\\ 4(2x_2-x_1)\end{pmatrix}$. Проверим критерий остановки $\|\nabla f(x_0)\|=30,265>0,3$ => строим новую пробную точку. Для $x_0=(3,2)^T$ определяем t, решая задачу $f(y_1)=(y_1+td_1)\to\min\limits_t$. Определив $t_1=-1$, рассчитываем значения новой точки $y_2=y_1+t_1d_1$. Решив соответствующую задачу и определив $t_2=-1$ рассчитываем значение новой пробной точки $x_1=y_3=y_2+t_2d_2=(2,1)^T$. Строим новый ортонормированный базис:

$d_1(x_1)=\begin{pmatrix}-0,70711\\ -0,70711\end{pmatrix}$ $d_2(x_2)=\begin{pmatrix}0,70711\\ -0,70711\end{pmatrix}$. Результаты вычислений в таблице 2.1

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ | $\|\nabla f(x_k)\|$ | $t_1$ | $t_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $(2,1)^T$ | 1 | 4 | 0.5802 | –0.2192 |
| 2 | $(1.435,0.745)^T$ | 0.039 | 0.31 | 0.3035 | –0.0357 |
| 3 | $(1.173,0.587)^T$ | $9\cdot10^{-4}$ | 0.018 | | |

Для $x_3=(1.173,0.587)^T$ выполнен критерий остановки.

## § 3. Методы минимизации функции одной переменной не использующие производной

Для многих задач безусловной оптимизации при определении длины шага необходимо выполнять одномерную оптимизацию. Классический подход: $f'(x)=0$, однако, на практике вычисление производной связано с неустойчивостью вычислений. Рассмотрим задачу одномерной минимизации функции $f(t)$: $a\le t\le b$, $[a,b]$ - отрезок неопределенности.

**<u>Опр 3.1:</u>** $f(x)$ унимодальна на $[a,b]$, если она непрерывна на $[a,b]$ и $\exists t^*:\forall t\in[a,b]\ f(t^*)\le f(t)$ и $\forall\alpha,\beta\in[a,b]:\ f(t^*)\ne f(\alpha),\ f(t^*)\ne f(\beta)$, è $\alpha<\beta$ выполнено:

1) $f(\alpha)>f(\beta)$ при $\beta<t^*$
2) $f(\alpha)<f(\beta)$ при $t^*\le\alpha$

### 3.1 Метод дихотомического поиска

Пусть $f:R\to R$ - унимодальна

Пусть $f$ - вычислена в точках $\alpha_1,\beta_1$: $a<\alpha_1<\beta_1<b$. В зависимости от $f$ длина нового отрезка $\beta_1-a_1$ или $b_1-\alpha_1$. Оптимальная стратегия выбора точек $\alpha_1,\beta_1$ заключающихся в стремлении минимизировать max отрезок:

$$\max\{\beta_1 - a_1, b_1 - \alpha_1\} \to \min_{\alpha_1 \beta_1}$$

Это может быть достигнута если $\alpha_1 = \beta_1 = \dfrac{b_1 + a_1}{2}$, но нам нужно 2 точки =>выбираем $\alpha_1, \beta_1$ симметрично на расстоянии $\varepsilon > 0$ от центра $[a_1, b_1]$. $\varepsilon$ достаточно мало, чтобы обеспечить требуемую точность: $b_2 - a_2 = \varepsilon + (b_2 - a_2)/2$ (т.е. близко к искомому $t^*$) и одновременно значения $f(\alpha_1)$ и $f(\beta_1)$ были различны.

__Алгоритм дихотомического поиска__

__Шаг1:__ *инициализация*

Выбрать допустимую длину отрезка неопределенности: $0 < \delta < b - a$ и константу различимости $0 < \varepsilon < \delta/2$. Задаем $[a_1, b_1]$ - начальный отрезок неопределенности. Положить ***k=1***.

__Основной цикл__

__Шаг2:__ *Критерий останова*

Если $b_k - a_k < \delta_k \to$ stop минимум $\in [a_k, b_k]$.

__Шаг3:__ *Итерация*

Вычислим: $\alpha_k = (a_k + b_k)/2 - \varepsilon,\ \beta_k = (a_k + b_k)/2 - \varepsilon$. Если $f(\alpha_k) < f(\beta_k)$, положить $a_{k+1} = a_k,\ \mathrm{b}_{k+1} = \beta_k$. Иначе $a_{k+1} = \alpha_k,\ \mathrm{b}_{k+1} = b_k$. Заменить ***k*** на ***k+1***, к шагу 2.

Заметим, что длина отрезка неопределенности после k-ого шага:
$(b_{k+1} - a_{k+1}) = (b_1 - a_1)/2^k + 2\varepsilon(1 - 2^{-k})$.

Эту формулу можно использовать для определения числа итераций алгоритма для заданного $\delta$.

### 3.2 Метод квадратичной аппроксимации.

Изобрел М. Пауэлл.

Если функция нелинейна, то приблизив ее квадратным трехчленом можно построить оценку точки минимума.

Пусть $f(x): R \to R$

Пусть в $x_1\ x_2\ x_3$: $f(x_1)\ f(x_2)\ f(x_3)$ - заданные значения. Квадратный трехчлен: $r(x) = c_0 + c_1(x - x_1)(x - x_2)$. Подставляем $x_1, x_2$ в $r(x)$, получим:

$c_0 = f(x_1)$

$c_1 = \left[ f(x_2) - f(x_1) \right] / (x_2 - x_1)$

Подставим $x_3$ в $r(x)$:

$$c_2 = \frac{1}{x_2 - x_3}\left[ \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \right]$$

Оценка $\hat{x}^*$ точки минимум $x^*$ $f(x)$ получим уравнение:

$\frac{dr(x)}{dx} = c_1 + c_2(x - x_2) + c_2(x - x_1) = 0$ => $\hat{x}^* = (x_1 + x_2)/2 - c_1/2c_2$ .

**Алгоритм**

**Шаг1:** *инициализация*

Выбираем отрезок $[x_1 \ x_3]$ на котором определен минимум и внутреннюю точку $x_3$ . Задаем $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ .

**Шаг2:** *Критерий останова*

$$f_{\min} = \min\{f(x_i)\} \ i = 1,2,3; \ x_{\min} = \arg\min\{f(x_i)\} \ i = 1,2,3.$$

$$c_1 = \left[ f(x_2) - f(x_1) \right] / (x_2 - x_1); \ c_2 = \frac{1}{x_2 - x_3}\left[ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \right]$$

$$\hat{x}^* = (x_1 + x_2)/2 - c_1/2c_2$$

Если $\left| f_{\min} - f(\hat{x}^*) \right| < \varepsilon_1$ и $\left| x_{\min} - \hat{x}^* \right| < \varepsilon_2$, то stop. Иначе обозначить точку из $\{x_1 \ x_2 \ x_3\}$ ближайшую к $\hat{x}^*$ слева $2/_{\gamma} x_1$, справа - $2/_{\gamma} x_3$ и положить $x_2 = \hat{x}^*$. Повторить основной цикл.

# ГЛАВА 2. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

## ЛЕКЦИЯ 2. ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. СИМПЛЕКС-МЕТОД

### §1. Постановка задачи линейного программирования.

**Опр 1.1** Задачей *линейного программирования* (ЛП) называется задача минимизации или максимизации линейной функции при линейных ограничениях на области изменения переменных.

*Каноническая форма* задачи ЛП:

$$c^T x \to \max \tag{1.1}$$

$$Ax = b \tag{1.2}$$

$$x \geq 0, \tag{1.3}$$

где $A$ - матрица $m \times n$, $b = (b_1,...,b_m)^T$, $c = (c_1,...c_n)^T$, $x = (x_1,...x_n)^T$.

**Опр 1.2** Система (1.2) называется *непрямыми ограничениями*, (1.3) – *прямыми ограничениями*, $c^T x$ - *целевая функция*.

**Опр 1.3** *Стандартная форма* задачи ЛП:

$$\begin{gathered} c^T x \to \max \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{gathered} \tag{1.4}$$

**Опр 1.4** Общая задача ЛП:

$$\begin{gathered} c^T x \to \max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ \forall i = 1,2,...,k \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ \forall i = k+1,...,m \\ x_j \geq 0, \forall j = 1,2,...,r \qquad \forall r < n \end{gathered} \tag{1.5}$$

Все три формы задачи эквивалентны в том смысле, что каждую из них можно привести к любому из двух остальных простыми преобразованиями.

Например, если в системе непрямых ограничений (1.4) имеется неравенство:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \tag{1.6}$$

то можно ввести дополнительную переменную, называемую *переменной недостатка* $x_{n+1}$ такую, что:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+1} = b_i \,, \tag{1.7}$$

$$x_{n+1} \geq 0$$

Аналогично вводится *переменная избытка*, если в (1.4) неравенство вида $\geq$.

Задачу в канонической форме можно привести к стандартной:

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ax \leq b \\ -Ax \leq -b \end{cases}$$

## §2. Геометрическая интерпретация решения задачи ЛП

Рассмотрим задачу ЛП:

$$f\left(x_1, x_2\right) = 2x_1 + 2x_2 \to \max \tag{2.1}$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12 \tag{2.2}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6 \tag{2.3}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

На рис 2.1 показана область допустимых решений $D$.

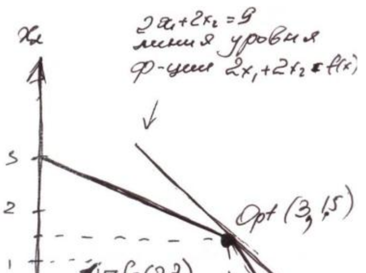



рис 2.1.

Градиент функции $f\left(x_1, x_2\right)$:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = (2, 2)$$

перпендикулярен прямой из множества прямых, удовлетворяющих уравнению линии уровня целевой функции:

$$2x_1 + 2x_2 = k \qquad (2.4)$$

Увеличение значения $k$ соответствует движению прямой (2.4) в направлении увеличения градиента целевой функции. Для некоторого $k = k_{\max}$ произойдет «последнее касание» прямой области $D$. В точке касания функция (2.1) примет максимальное значение равное $k_{\max}$, при этом будут выполняться ограничения (2.2), (2.3). В нашем случае $k_{\max} = 9; Opt(3{,}1.5)$

В случаях, если линия уровня (2.1) параллельна некоторой грани, получим бесконечное множество решений.

Если область $D$ не ограничена, то может оказаться, что бесконечное увеличение величины $k$ приведет к бесконечному возрастанию целевой функции. В этом случае решение не существует.

### §3. Общая идея решения задачи ЛП

Название метода связано с тем, что впервые он разработан для задач ЛП, где множество решений $D$ представляло собой симплекс. Предложен впервые Дж. Б. Данцигом в 1963 г.

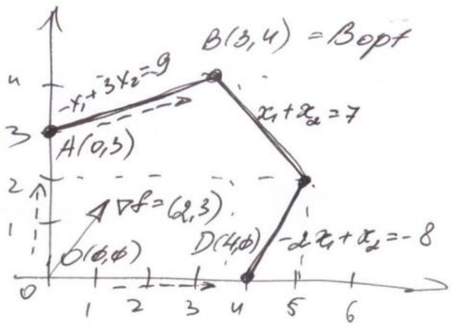
**Опр 4.1** Симплексом $S_n$ ($n$-мерным) называется вещественная оболочка $n$ точек $x_1,...,x_m \in \mathbf{R}^n$, не лежащая на $n-2$ мерной плоскости.

Геометрический смысл состоит в переходе от исходной точки к некоторой смежной крайней точке многогранника ограничений.

**Опр 4.2** Решение, соответствующее начальной точке, называется *начальным решением*.

**Пример 1.1** Рассмотрим задачу ЛП.

$$
\begin{aligned}
& f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max \\
& -x_1 + 3x_2 \le 9 \\
& x_1 + x_2 \le 7 \\
& -2x_1 - x_2 \le 8 \\
& -x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,
\end{aligned}
$$




Из точки $O(0,0)$ можно перейти к смежной точке $A$ или $D$. Поскольку в целевой функции $c_1 < c_2$, то выгодно увеличивать $x_2$, следовательно осуществляется переход к точке $A$. Далее переход $A \Rightarrow B_{opt}$.

Выбор последующей точки в симплекс-методе определяется следующими правилами:

1. Каждая последующая точка должна быть смежной с предыдущей по границам пространства решений.
2. Обратный переход производиться не может.

## §5. Теорема о связи между допустимыми базисными решениями и крайними точками

При анализе геометрической интерпретации задачи ЛП сформулировано предложение, что точками, подозрительными на оптимум являются крайние точки выпуклого множества ограничений.

Пусть задана задача ЛП в канонической форме:

$$c^T x \to \max \tag{5.1}$$

$$Ax = b \tag{5.2}$$

$$x \geq 0 \tag{5.3}$$

Где $A$ - матрица $m \times n$, при этом полагаем $m < n$ и $rang(A) = m$.

**Опр 2.1** Базисом матрицы $A$ называется набор $m$ линейно независимых столбцов $B = \left\{A_{j1}, A_{j2}, ..., A_{jm}\right\}$

Пусть первые $m$ столбцов матрицы $A$ образуют базис. Представим $A$ в виде двух подматриц. $A = (B, N)$, вектор $x$ – в виде:

$$x = (x_B x_N)^T \tag{5.4}$$

где $x_B = (x_1 ... x_m)^T$, $x_N = (x_{m+1} ... x_n)^T$.

Систему непрямых ограничений (5.2) представим в виде:

$$Bx_B + Nx_N = b \qquad (5.5)$$

Откуда

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \qquad (5.6)$$

**Опр 2.2** Вектор $x_B$ будем называть вектором *базисных переменных*, $x_N$ - вектором *небазисных переменных*.

**Опр 2.3** *Базисным решением* $x$ системы непрямых ограничений (5.2), соответствующим базису $B$ назовем частное решение системы (5.6), в котором $x_N = 0$.

Если

$$x_B = \overline{x} = B^{-1}b \ge 0, \qquad (5.7)$$

где $(x_B)_{ji} = \overline{x}_i$, $i = 1,...,m$, то базисное решение удовлетворяет (5.3).

**Опр 2.4** Такое базисное решение называют *допустимым базисным решением*.

**Опр 2.5** Базисное решение $x$ называется *вырожденным*, если вектор $x_B$ имеет нулевые компоненты.

**Теорема 2.1** Для области допустимых решений задачи ЛП (5.1)–(5.3) $D = \{x \mid Ax = b, x \ge 0\}$ вектор $x$ тогда и только тогда является допустимым базисным решением, когда $x \in D$ является крайней точкой. ■

С каждым допустимым базисным решением $x$ свяжем представление целевой функции:

$$c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T (B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N^T x_N = c_B^T x_B - (c_B^T B^{-1}N - c_N^T) x_N$$

С учетом данного представления задача может быть переформулирована в виде: найти базис $B$ такой, что:

$$c_B^T x_B - (c_B^T B^{-1}N - c_N^T) x_N \to \max$$

при условии $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \ge 0, x_N \ge 0$

Поскольку базисных допустимых решений конечное число ($\leq \frac{n!}{(n-m)!m!}$ - доказать почему), то поиск оптимального решения организуем в виде последовательного перехода от базиса к базису, стремясь на каждом шаге получить большее значение целевой функции, т.е.

$$B_k \to B_{k+1}, \text{ если } c^T x_k < c^T x_{k+1} \qquad (5.8)$$

Суть симплекс-метода составляют 3 правила:

1. Правило оптимальности, позволяющее заключить что $x_k$ - является оптимальным решением.

2. Правило отсутствия решения, позволяющее заключить, что задача ЛП не имеет решения.

3. Правило перехода к лучшей крайней точке $x_k \to x_{k+1}$, при условии выполнения (5.8).

## §6. Процесс перехода к новому допустимому базисному решению.

Рассмотрим представление целевой функции:

$$c^T x = c_B^T \overline{x} - (c_B^T X - c_N^T) x_N \qquad (6.1)$$

где $B = \{A_1, .A_2, ..., A_m\}$ - базис матрицы $A$, $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, ...\overline{x}_m)^T = B^{-1}b$ - вектор базисных переменных $x_{j1}, x_{j2}, ...x_{jm}$, т.е. $x_{ji} = \overline{x}_i$, $i = \overline{1, m}$. $X = B^{-1}N = \{X_{m+1}, ...X_n\}$, $X_j$ - координата разложения небазисного вектор-столбца $A_j$ по базису $B$.

**Опр 6.1** Симплекс разностью для $j$-ой переменной в базисе $B$ называется величина:

$$\Delta_j = c_B^T B^{-1} A_j - c_j = c_B^T X_j - c_j, \; j = 1, 2, ...n \qquad (6.2)$$

Т.к. $X_j = E_j$ при $j = 1, 2, ...m$ и $c_B^T E_j = c_j$, то $\Delta_j = 0$ при $j = 1, 2, ...m$ (т.е. для элементов базиса). Для небазисных переменных $\Delta_j$ - это коэффициенты возрастания или убывания целевой функции.

Значит для возрастания целевой функции (6.1) целесообразно увеличивать небазисные переменные с отрицательными симплекс-разностями.

Выберем небазисную переменную $x_t$ ($t \in J_N$ - множество индексов небазисных переменных), с отрицательной симплекс-разностью и выясним до какого значения мы можем ее увеличивать. Рассмотрим

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \geq 0.$$

При $x_t > 0$ и всех остальных небазисных переменных равных нулю должно выполняться условие:

$$x_B = \overline{x} - X_t x_t \geq 0 \qquad (6.3)$$

Где $X_t = (x_{1t}, x_{2t} ... x_{mt})^T$. Решая (6.3) относительно $x_t$ получим:

$x_{it} x_t \leq \overline{x}_i$, откуда $x_t \leq \dfrac{\overline{x}_i}{x_{it}}$, для $i = 1, 2, ...m$. Тогда

$$x_t = \min \left\{ \frac{\overline{x}_i}{x_{it}} \right\}, \; \forall i = 1, 2, ...m \qquad (6.4)$$

В случае, если все $x_{it} \leq 0$ $\left(i = 1, 2, ...m\right)$, то из (6.3) следует, что $x_t$ не ограничена сверху и при $\Delta_t < 0$ можно получить сколь угодно большое значение целевой функции (условие отсутствия решения)

**Теорема 6.1** Если для какого-либо допустимого базисного решения существует хотя бы одна симплекс-разность $\Delta_t < 0 \quad (t \in J_N)$ и для нее все коэффициенты разложения $X_t = B^{-1}A_t$ не положительны $x_{it} \le 0 \quad (i = 1, 2, ...m)$, то целевая функция неограниченна сверху. ■

Пусть решение (6.4) получено. После подстановки $x_t$ в (6.3) по крайней мере одно из неравенств станет равенством, а соответствующая координата $x_B$ станет равна нулю, т.е. станет небазисной. Это соответствует переходу от допустимого базисного решения $x_B$ (базиса $B$) к решению $x'_B$ (базиса $B'$).

Пусть, например, $k$-я координата вектора базисных переменных $x_B$ (6.3) равна нулю: $(x_{B'})_k = \bar{x}_k - x_{kt}x_t = 0$, это возможно когда:

$$x_t = \min_{x_{it}>0}\left\{\frac{\bar{x}_i}{x_{it}}\right\} = \frac{\bar{x}_k}{x_{kt}}.$$

Переход от базиса $B = \{A_1, A_2, ..., A_k, ..., A_m\}$ к базису $B' = \{A_1, A_2, ..., A_{k-1}, A_t, A_{k+1} ..., A_m\}$ осуществляется посредством выведения из базиса вектора $A_k$ (он становится небазисным) и вводом в него вектора $A_t$.

**Теорема 6.2** Пусть

$$B = \{A_1, A_2, ..., A_k, ..., A_m\} \tag{6.5}$$

базис матрицы $A$.

Заменим $A_k$ некоторым $A_t \quad (t \in J_N)$, получим:

$$B' = \{A_1, A_2, ..., A_{k-1}, A_t, A_{k+1} ..., A_m\} \tag{6.6}$$

$B'$ - образует базис *тогда и только тогда*, когда в разложении $A_t$ по базису $B$

$$A_t = x_{1t}A_1 + ... + x_{kt}A_k + ... + x_{mt}A_m \tag{6.7}$$

коэффициент $x_{kt} \neq 0$. ■

### Основные формулы симплекс-метода

#### *1. Пересчет допустимого базисного решения*

Согласно (6.3) новое базисное решение, соответствующая базису $B'$, будет

$$\bar{x}'_i = \begin{cases} \dfrac{\bar{x}_k}{x_{kt}}, i = k \\ \bar{x}_i - (\dfrac{\bar{x}_k}{x_{kt}}) x_{it}, \ i \in \{1, 2, ...m\} \setminus \{k\} \end{cases} \quad (6.8)$$

### 2. Пересчет разложения векторов матрицы $A$ в новом базисе ( $X'_i$ )

Из (6.7) найдем разложение вектора $A_k$ по новому базису $B'$ имеет вид:

$$A_k = B'X'_k = \sum_{i=1}^{m} (-\frac{x_{it}}{x_{kt}}) A_i + \frac{1}{x_{kt}} A_t .$$

Откуда

$$x'_{ik} = \begin{cases} -\dfrac{x_{it}}{x_{kt}}, i \in \{1, 2, ..., m\} \setminus \{k\} \\ \dfrac{1}{x_{kt}}, i = k \end{cases} \quad (6.9)$$

Пусть $A_j$ - произвольный небазисный вектор отличный от $A_k$. $X_j$ – его координаты в старом базисе $B$ (6.5). Пусть $X'_j = (x'_{1j}, x'_{2j} ... x'_{mj})^T$ - его координаты в новом базисе $B'$ (6.6).

$$A_j = \sum_{i=0}^{m} x_{ij} A_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} x_{ij} A_i + x_{kj} A_k \quad (6.10)$$

Подставим вместо $A_k$ его представление (6.9), получим:

$$A_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} [x_{ij} - \frac{x_{kj}}{x_{kt}} x_{it}] A_i + \frac{x_{kj}}{x_{kt}} A_t \quad (6.12)$$

Тогда

$$x'_{ij} = \begin{cases} \dfrac{x_{kj}}{x_{kt}}, i = k \\ x_{ij} - \dfrac{x_{kj}}{x_{kt}} x_{it}, i = 1, 2, ...m, i \neq k \end{cases} \quad (6.12)$$

(6.12) – *основная* формула симплекс-метода. Формула (6.10) – частный случай (6.12).

### 3. Пересчет симплекс-разностей

Симплекс-разности пересчитываются аналогично: подставим $x_t$ из (6.4) в формулу $c^T x = c_B^T \overline{x} - \Delta_t x_t$, получим:

$$c_B{}^T \overline{x}' = c_{B_0}^T \overline{x} - \Delta_t \frac{\overline{x}_k}{x_{kt}} \qquad (6.13)$$

Легко проверить, что

$$\Delta'_j = \Delta_j - \Delta_t \frac{\overline{x}_k}{x_{kt}}, \quad j = 1, 2, \ldots n \qquad (6.14)$$

Заметим, что $\{B_1\} = \{B_0 \setminus A_k\} \cup A_t$

**Теорема об оптимальности допустимого базисного решения.**

Логично предположить, что если все симплекс-разности в текущем базисе неотрицательны, то улучшить решение невозможно.

**Теорема 6.3** Если в текущем допустимом базисном решении все симплекс-разности $\Delta_k \quad (k = 1, 2, \ldots n)$ неотрицательны, то текущее допустимое базисное решение оптимально. ■

Очевидно, что для задачи на минимум условие оптимальности будет неположительность всех симплекс-разностей. Осталось найти хотя бы одно допустимое базисное решение.

Рассмотрим:

$$\begin{aligned} & c^T x \to \max \\ & Ax \le b \\ & x \ge 0 \\ & b > 0 \end{aligned}$$

(в стандартной форме)

Приведем ее к канонической форме:

$$\begin{aligned} & c^T x \to \max \\ & Ax + E\tilde{x} = b \\ & x, \tilde{x} \ge 0 \\ & b > 0 \end{aligned}$$

Ясно, что решение $\begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ является допустимым (т.к. b>0) и соответствует единичному базису $E$.

## §7. Процедура решения задачи симплекс-методом.

### *7.1 Алгоритм симплекс-метода.*

Пусть дана задача ЛП в канонической форме

$$c^T x \to \max$$
$$c^T x = b$$
$$x \ge 0$$

$x = \left(\overline{x}_{j_1}, ..., \overline{x}_{j_m}, 0_{j_{m+1}}, ..., 0_{j_n}\right) \ge 0$ невырожденное допустимое базисное решение.

Следовательно, исходный базис:

$$B = \left\{A_{j_1}, A_{j_2}, ..., A_{j_m}\right\} \tag{7.1}$$

**<u>Шаги алгоритма.</u>**

<u>Шаг1. Инициализация.</u>

Находим разложение небазисных векторов $A_{j_k}$ по базису (7.1):

$$X_j = B^{-1} A_j \quad \left(j \in J_N\right).$$

Для $j \in J_B$ разложение известно

$$X_j = E_j = \left(0_1, ..., 0_{j-1}, 1_j, 0_{j+1}, ..., 0_m\right)^T$$

Известны значения базисных переменных, соответствующих базису $B$.

$$x = (\overline{x}_{j_1}, ..., \overline{x}_{j_m})^T = B^{-1} b .$$

<u>Шаг 2. Условие оптимальности.</u>

$\forall\, j = 1, 2, ..., n$ вычисляем симплекс-разности $\Delta_j = c_B^T X_j - c_j$

Если все симплекс-разности неотрицательны ($\Delta_j \ge 0$) $\Rightarrow$ **stop**, рассматриваемое допустимое базисное решение является *оптимальным*.

<u>Шаг 3. Условие отсутствия решения.</u>

Если $\exists\, j \in J_N$, такое, что $\Delta_j < 0$ и все элементы $X_j$ неположительны, т.е. $\left(i = 1, 2, ...m\right)$ $\Rightarrow$ **stop**, целевая функция *неограничена*. Иначе переходим к шагу 4.

<u>Шаг 4. Итерация.</u>

Выберем $\Delta_t < 0$ из условия $\Delta_t = \max\limits_{\Delta_j<0} |\Delta_j| \quad j = 1,2,...n$. Соответствующая векторустолбцу $X_t$ небазисная переменная $x_t$ вводится в базис.

Вычислим отношения $\dfrac{\overline{x}_i}{x_{it}}$ для всех $i$ таких, что $x_{it} > 0$ и найдем минимальное:

$$\frac{\overline{x}_k}{x_{kt}} = \min_{x_{it}>0}\left\{\frac{\overline{x}_i}{x_{it}}\right\}.$$

Соответствующая $k$-я базисная переменная $x_{j_k}$ $(\overline{x}_k = x_{j_k})$ выводится из базиса. При этом $t$-я вводимая переменная имеет вид:

$$(x_{B'})_{t_k} = x_t = \overline{x}'_k = \frac{\overline{x}_k}{x_{kt}} > 0,$$

а выводимая переменная обнуляется

$$x_{j_k} = \overline{x}_k = 0$$

Переходим к новому базису $B'$: $\{B'\} = \{B \setminus A_k\} \cup A_t$, вычислив по основным формулам новое базисное решение $\overline{x}'_i$ (6.8), коэффициенты разложения $x'_{ik}$ (6.9) $x'_{ij}$ (6.12) векторов матрицы $A$. Переходим к шагу 2.

## 7.2 Симплекс-таблица

Симплекс-таблица используется для организации вычислений вручную. В столбцах запишем: коэффициенты базисных переменных: $J_B = \{j_1, j_2, ..., j_m\}$, коэффициенты целевой функции, соответствующие базисным переменным $c_B$, базисные координаты $\overline{x}$ - текущего базисного решения, коэффициенты разложения $X_j$ $(j = 1,2,...n)$ в $(m+1)$-й строке: значения целевой функции при текущем базисном решении $c_B^T\overline{x}$ и $\Delta_j$ $(j = 1,2,...n)$. То есть получим табличную форму задачи ЛП.

$$M_{<(m+1)\times(n+2)>} = \begin{pmatrix} J_{B<m\times1>} & c_{B<m\times1>} & \overline{x}_{<m\times1>} & XB^{-1}{}_{<m\times n>} \\ - & - & c_B^T\overline{x} & \Delta^T{}_{(1\times n)} \end{pmatrix}$$

**Пример** Построить симплекс-таблицу для задачи ЛП

$$\begin{aligned} & c^T x \to \max \\ & Ax \le b \\ & x \ge 0 \\ & b > 0 \end{aligned}$$

**Решение** приведем задачу к канонической форме:

$$c^T x \to \max$$
$$Ax + E\tilde{x} = b$$
$$x, \tilde{x} \ge 0$$

Очевидно, что решение $\begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ является допустимым базисным $\Rightarrow$ начальное заполнение симплекс-таблицы имеет вид:

| $J_B$ | $c_B$ | $\overline{x}$ | $X_1$ | $X_2$ | … | $X_{n+1}$ | … | $X_{n+m}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n+1 | 0 | $b_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | | 1 | … | 0 |
| n+2 | 0 | $b_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | | 0 | … | 0 |
| … | … | | | | | … | … | … |
| n+m | 0 | $b_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | | 0 | … | 1 |
| | | 0 | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | … | 0 | 0 | 0 |

**Опр 1** Столбец таблицы, который вводится в базис на текущей итерации называется *ведущим*.(отмечается ↑). Строка таблицы, выводимая из базиса называется *ведущей* (→). Элемент, стоящий на пересечении называется *ведущим*.

Преобразование симплекс-таблицы проводится в 3 этапа:

1. $k$ -я ведущая строка нормируется ведущим элементом $x_{kt}$. Получаем

$$x'_{kt} = \frac{\overline{x}_k}{x_{kt}},\ x'_{kj} = \frac{x_{kj}}{x_{kt}},\ j = 1, 2, ..., n.$$

2. Пересчитываем все элементы кроме ведущей строки и ведущего столбца и столбцов с метками $J_B$, $c_B$ по следующему правилу (правило треугольника)

$\overline{x}'_i = \overline{x}_i - x_{it}\overline{x}'_k, i \ne k$ ; $c_B^T\overline{x}' = c_B^T\overline{x} - \Delta_t\overline{x}'_k$

$\Delta'_j = \Delta_j - \Delta_t x'_{kj}, j \ne t$ ; $x'_{ij} = x_{ij} - x_{it}x'_{kj}, i \ne k, j \ne t$

Правило треугольника проиллюстрировано на рис.1.

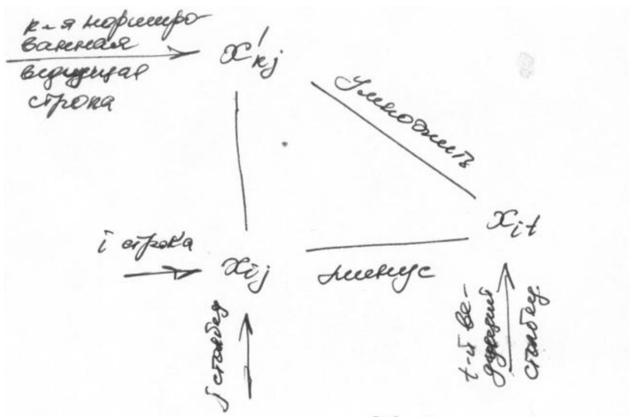


рис.1. Правило треуг-ка

3. Все элементы ведущего столбца обнуляются. Ведущий элемент приравнивается единице. Изменяются элементы ведущей строки и столбцов с

метками $J_B$ и $c_B$

## §11 Теорема двойственности

Время решения ЗЛП определяется в основном числом непрямых ограничений, поэтому представляет интерес разработка метода, обеспечивающего замену процесса решения произвольной ЗЛП с числом ограничений, не превышающих число первых. Для ЗЛП(прямой задачи) существует соответствующая двойственная задача в другом пространстве переменных, но с тем же самым оптимальным значением целевой функции (если решение существует). Обе задачи симметричны друг другу.

| **Прямая задача** | | **Двойственная задача** |
|---|---|---|
| $c^T x \to max$<br>$Ax \le b$<br>$x \ge 0$ | =><br>(1.1) | $b^T y \to min$<br>$A^T y \ge c$<br>$y \ge 0$ |
| $c^T x \to min$<br>$Ax \ge b$<br>$x \ge 0$ | =><br>(1.2) | $b^T y \to max$<br>$A^T y \le c$<br>$y \ge 0$ |

Каждя из задач может быть получена из другой формальными преобразоаниями:

a) Заменой направления целевой функции

b) Заменой $b$ и $c$, транспонированием $A$

c) Замена знака неравенств в системе непрямых ограничений на противоположный.

**Опр 1.1** задача вида (1.1), (1.2) называется симметричной парой двойственных задач.

Если ЗЛП в канонической форме:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $c^T x \to max$<br>$Ax = b$<br>$x \ge 0$ | ~ | $c^T x \to max$<br>$Ax \le b$<br>$-Ax \le (-b)$<br>$x \ge 0$ | => | $b^T(y_1 - y_2) \to min$<br>$A^T(y_1 - y_2) \ge c$<br>$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0$ | ~ | $b^T y \to min$<br>$A^T y \ge c$<br>$y$ – без ограничений |

Связь между решениями прямой и двойственной задач дает следующая:

**Теорема 1.1** (теорема двойственности)

1. Если $\hat{x}, \hat{y}$ - допустимые решения пары двойственных задач (1.1), то $c^T \hat{x} \le b^T \hat{y}$

2. Если целевая функция прямой задачи (1.1) неограниченно возрастает $c^T \to +\infty$, то система ограничений двойственной задачи (1.1) несовместна, т.е. $rank(A^T) \ne rank(\{A^T|c\})$, где $A^T|c$ - расширенная матрица системы ограничений двойственной задачи (1.1).

**<u>Следствие 1.</u>** Если ∃ допустимые решения пары двойственных задач (1.1) – (1.2), то ∃ и оптимальные.

Полученные результаты позволяют утверждать, что решив одну из пары двойственных задач, легко получить решение (оптимальное) другой задачи.

## §12 Условия дополняющей нежесткости.

**<u>Теорема 1.2</u>** Допустимые решения $\{x, y\}$ пары двойственных задач (1.1) являются оптимальными тогда и только тогда, когда выполняются условия дополняющей нежесткости:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i\right) = 0 \qquad (2.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i - c_j\right) = 0 \qquad (2.2)$$

Условие дополняющей нежесткости можно сформулировать следующим образом. Для пары оптимальных решений (2.1), (2.2) справедливо:

1. Если неравенство в системе ограничений одной из задача выполнятеся строго, то соответствующая координата оптимального решения другой задачи =0:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i => \ y_i = 0 \ (\forall i = \overline{1, m})$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i < c_j => x_j = 0 (\forall j = \overline{1, n})$$

2. Если некоторая координата оптимального решения положительна, то соответствующее неравенство в системе ограничений двойственной задачи выполняется как равенство:

$$x_j > 0 => \sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i = c_j (\forall j = \overline{1, n})$$

или

$$y_i > 0 => \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i (\forall i = \overline{1, m})$$

**Пример 2.1** Решить ЗЛП симплекс методом, построив двойственную к данной задачу и указать ее решение.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \to max$$

$$3x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 9x_4 \le 12$$

$$4 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 \le 10 \qquad (2.3)$$

$$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 6x_4 \leq 14$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

**<u>Решение</u>**: Решаем задачу симплекс методом и получаем:

$$x^* = (0, 14/11, 10/11, 0)^T, c^T x^* = 38/11 \qquad (2.4)$$

Двойственная задача имеет вид:

$$\begin{aligned} &12y_1 + 10y_2 + 14y_3 \to min \\ &3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ &8y_1 + 5y_2 + 7y_3 \geq 2 \\ &2y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ &9y_1 + 7y_2 + 6y_3 \geq 2 \\ &y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned} \qquad (2.5)$$

Условие дополнительной нежесткости:

$$\begin{cases} x_1^*(3y_1^* + 4y_2^* + 2y_3^* - 1) = 0 \\ x_2^*(8y_1^* + 5y_2^* + 7y_3^* - 2) = 0 \\ x_3^*(2y_1^* + 4y_2^* + 3y_3^* - 1) = 0 \\ x_4^*(9y_1^* + 7y_2^* + 6y_3^* - 2) = 0 \end{cases} \qquad (2.6)$$

$$\begin{cases} y_1^*(3x_1^* + 8x_2^* + 2x_3^* + 9x_4^* - 12) = 0 \\ y_2^*(4x_1^* + 5x_2^* + 4x_3^* + 7x_4^* - 10) = 0 \\ y_3^*(2x_1^* + 7x_2^* + 3x_3^* + 6x_4^* - 14) = 0 \end{cases} \qquad (2.7)$$

Подставляя решение (2.4) в (2.6) и (2.7) и решив их относительно переменных

## §8. Двухфазный метод решения ЗЛП.

Вопрос нахождения допустимого базисного решения решён для ЗЛП в канонической форме с невырожденным допустимым базисным решением и для задачи в стандартной форме.

В общем случае идея поиска допустимого базисного решения лежит во введении искусственного базиса.

Пусть дана ЗЛП:

$$c^T x \to max,$$

$$Ax = b, \qquad (5.1)$$

$$x \geq 0.$$

Без ограничения общности считаем $b \geq 0$, $A$ – любая.

Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$-d^T \overline{x} \to max,$$

$$Ax + E\overline{x} = b, \qquad (5.2)$$

$$x \geq 0, \overline{x} \geq 0,$$

где $d = (1_1, 1_2, \ldots, 1_m)^T$, $\overline{x} = (\overline{x}_{n+1}, \overline{x}_{n+2}, \ldots, \overline{x}_{n+m})^T$ – вспомогательные переменные.

Для задачи (5.2) вектор $x_d = \begin{pmatrix} x \\ \overline{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ является допустимым базисным решением (так как $-d^T \overline{x} \leq 0$, то целевая функция ограничена сверху).

Пусть $x_d^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \overline{x}_{n+1}^*, \overline{x}_{n+2}^*, \ldots, \overline{x}_{n+m}^*\right)^T$ – оптимальное решение вспомогательной задачи (5.2) и $-d^T x_d^* = \nu$. Возможны два случая: $\nu < 0$ и $\nu = 0$:

$$\nu < 0:\ \exists \overline{x}_{n+j} > 0$$

$$\nu = 0:\ \forall \overline{x}_{n+j} = 0,\ j = \overline{1, m}$$

**<u>Теорема 5.1</u>** Если для задачи (5.2) $-d^T x_d^* < 0$, то система $Ax = b$ задачи (5.1) несовместна.

Пусть $-d^T x_d^* = 0$. Если векторы, соответствующие вспомогательным переменным, не входят в базис, то допустимое базисное решение для (5.1) получено (можно использовать симплекс-таблицу задачи (5.2) для (5.1)).

Если вектор, соответствующий переменной $\overline{x}_{j_s}$, входит в базис, то возможен один из двух случаев:

- В s-й строке есть элемент $x_{s\,k} \neq 0$ для $k \leq n$. Тогда выполняем операцию замещения, выводя из базиса $E_{j_s}$ соответствующий $\overline{x}_{j_s}$ и замещая его вектором $A_k$ задачи (5.1). Соответствующий элемент вектора решения по-прежнему остаётся нулевым.
- На $s$-й строке все $x_{s\,k} \neq 0$ для $k \leq n$. Тогда строку $s$ нужно удалить. После вывода всех вспомогательных переменных получим допустимое базисное решение.

## §6. Правило Блэнда, устраняющее зацикливание.

Что делать, если вектор решения является вырожденным? Наличие нулевых координат связано с наличием в системе ограничений избыточных ограничений.

Пусть имеется вырожденное решение и $\overline{x}_k < 0$, $\overline{x}_s = 0$ и $x_{sk} > 0$.

Тогда $\min\limits_{x_{ik} > \varnothing} \left\{ \dfrac{\overline{x}_i}{x_{ik}} \right\} = \dfrac{\overline{x}_s}{x_{sk}} = 0$ и вектор $A_k$ замещает $A_s$. Значение целевой функции при этом не изменяется: $c^T \overline{x} = c^T \overline{x} - \dfrac{\overline{x}_s}{x_{sk}} x_k = c^T \overline{x}$. Такой переход потенциально опасен, т.к. можно прийти к возврату к исходному базису и дальнейшему зацикливанию.

**Теорема 6.1 Правило Блэнда**

Для любой ЗЛП симплекс-метод сходится за конечное число шагов, если выбирать ведущий элемент по следующему правилу:

a) Выбирать ведущий столбец по первой встретившейся отрицательной симплекс-разности

$$k = \min\left\{ j \mid x_j < 0, j = \overline{1,n} \right\}.$$

b) Выбирать ведущую строку, имеющую наименьший номер из тех, на которых достигается минимум соответствующего отношения:

$$s = \min_{x_{ik} > 0} \left\{ i \mid \frac{\overline{x}_i}{x_{i\,k}} \leq \frac{\overline{x}_h}{x_{h\,k}}, \forall i, h = \overline{1,m} \right\}.$$

## §7. Двойственный симплекс-метод.

Особенность симплекс-метода заключается в том, что переход к новому допустимому базисному решению приводит к неубыванию целевой функции. В некоторых случаях может оказаться полезным другой подход к решению ЗЛП, называемым двойственным симплекс-методом.

**Пример 7.1**

$$x_1 + x_2 \to min,$$

$$2x_1 + x_2 \geq 3, \qquad (7.1)$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 5,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

**Решение:**

Перейдём к эквивалентной задаче на максимум:

$$-x_1 - x_2 \to max,$$

$$-2x_1 - x_2 + x_3 = -3, \qquad (7.2)$$

$$-x_1 - 4x_2 + x_4 = -5,$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,4}.$$

Построим симплекс-таблицу:

| $J_B$ | $c_B$ | $\bar{x}$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0 | −3 | −2 | −1 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | −5 | −1 | −4 | 0 | 1 |
| | | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Все симплекс-разности неотрицательны, т.е. выполнено условие оптимальности, но базисное решение является недопустимым. Такое решение будем называть *почти допустимым решением* ЗЛП.

Построим новую схему выбора ведущего элемента: потребуем поддержку неотрицательности симплекс-разностей. Выбор ведущего элемента начнём с выбора ведущей строки. В качестве ведущей выберем строку с отрицательной координатой вектора решения.

Пусть $\bar{x}_s < 0$. Выбор ведущего *k*-го столбца выполнено так, чтобы $\forall\, j = \overline{1,n}$:

$$\bar{x}_j^{'} = \bar{x}_j - \frac{x_{s\,j}}{x_{s\,k}} x_k \geq 0. \qquad (7.3)$$

В частности для $j = s$:

$$\bar{x}_j^{'} = 0 - \frac{x_{s\,j}}{x_{s\,k}} x_k \geq 0. \qquad (7.4)$$

Т.к. $x_{ss} = 1$ (вектор $A_s$ из старого базиса), а $x_k \geq 0$, то (7.4) равносильно

$$x_{sk} < 0. \tag{7.5}$$

Т.е. поиск ведущего столбца осуществляется среди отрицательных элементов ведущей строки.

При $x_{sj} \geq 0$ и $x_{sk} < 0$ неравенство (7.3) выполняется всегда. В случае $x_{sj} < 0$ неравенство (7.3) равносильно

$$\frac{\overline{x}_j}{x_{sj}} - \frac{\overline{x}_k}{x_{sk}} \leq 0, \quad \frac{\overline{x}_k}{x_{sk}} \geq \frac{\overline{x}_j}{x_{sj}}.$$

Отсюда получим, что $\left|\frac{\overline{x}_k}{x_{sk}}\right| \leq \left|\frac{\overline{x}_j}{x_{sj}}\right|$. Следовательно, *k* выбирается такое, на котором достигается по всем $x_{sj} < 0$, $j = \overline{1,n}$

$$\min \left|\frac{\overline{x}_j}{x_{sj}}\right|. \tag{7.6}$$

После выбора ведущего элемента пересчёт симплекс-таблицы выполняется по схеме симплекс-метода. Это приводит к новому почти допустимому базисному решению.

**Теорема 7.1 (о почти допустимом базисном решении)**

Если начальное допустимое базисное решение задачи

$$c^T x \to max, \tag{7.7}$$

$$Ax = b, \tag{7.8}$$

$$x \geq 0 \tag{7.9}$$

таково, что среди базисных переменных есть хотя бы одно $\overline{x}_s < 0$, и такое, что все $x_{sj} \geq 0$, $j = \overline{1,n}$, то система ограничений (7.8) данной задачи несовместна.

**Алгоритм двойственного симплекс-метода**

Пусть дана ЗЛП с почти допустимым базисным решением:

$$c^T x \to max,$$

$$Ax = b, \tag{7.10}$$

$$x = \left(\overline{x}_{j_1}, \overline{x}_{j_2}, \ldots, \overline{x}_{j_m}, 0_{j_{m+1}}, \ldots, 0_{j_n}\right)^T$$

и исходным базисом

$$B=\left\{A_{j_1}, A_{j\,2}, \ldots, A_{j\,m}\right\}. \tag{7.11}$$

*Шаг 1.*

Проверяем условие $\bar{x}_i \geq 0$, i$=\overline{1,m}$. Если оно выполнено, то stop, решение оптимально.

Если $\exists \bar{x}_i < 0$, то переходим к шагу 2.

*Шаг 2.*

Разложим $A_1, A_2, \ldots, A_n$ по базису (7.11) и просматриваем строки, для которых $\bar{x}_i < 0$, $i=\overline{1,m}$.

Если $\exists \bar{x}_i < 0 : x_{ij} \geq 0\left(j=\overline{1,n}\right)$, то stop – задача не имеет решения.

Если таких $\bar{x}_i < 0$ нет, то шаг 3.

*Шаг 3.*

Ведущую $s$-ю строку выбираем из эвристического условия: $\bar{x}_s = \max\limits_{\bar{x}_i<0} |\bar{x}_i|$, и для неё вычисляем отношения ${}^{\bar{x}_j}\!/\!_{x_{sj}}$ для всех $x_{sj} < 0$, $j=\overline{1,n}$.

Ведущий $k$-й столбец выбираем из условия

$$\min_{x_{sj}<0}\left|\frac{\bar{x}_j}{x_{sj}}\right|,\ j=\overline{1,n}.$$

Переходим к новому почти допустимому базисному решению, заменяя в базисе вектор $A_s$ вектором $A_k$, пересчитываем симплекс-таблицу по ведущему $x_{sk}$ элементу матрицы $A$. Переход к шагу 1.

Геометрически двойственный симплекс-метод можно интерпретировать как процедуру последовательного получаемых $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_l, \ldots \in \mathrm{R}^n$, лежащих вне многогранника ограничений, с каждым шагом приближаясь к многограннику ограничений.

# ЛЕКЦИЯ 6 ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

## §14. Транспортная задача

### 14.1. Постановка транспортной задачи.

Имеется $m$ пунктов производства сырья $A_1, A_2, ..., A_m$. Объём производства в $A_i$ равен $a_i$ единиц ($i = \overline{1,m}$). Также имеется $n$ пунктов сбыта (потребления) сырья $B_1, B_2, ..., B_n$. Потребление в $B_j$ составляет $b_j$ единиц ( $j = \overline{1,n}$ ). Транспортировка сырья возможна из любого $A_i$ в любой $B_j$, при этом транспортные издержки равны $c_{ij}$ ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$)).

Необходимо удовлетворить запросы потребителей, вывезти все продукты и обеспечить минимальные суммарные транспортные издержки.

Схема перевозок приведена на рис. 14.1, а условие задачи может быть представлено в виде матрицы перевозок (табл. 14.1).

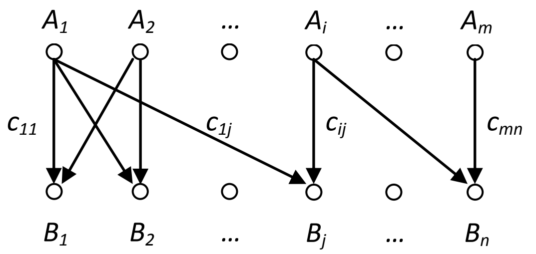



рис. 14.1

| | $B_1$ | $B_2$ | … | $B_n$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $c_{11}$ | $c_{12}$ | … | $c_{1n}$ | $a_1$ |
| $A_2$ | $c_{21}$ | $c_{22}$ | … | $c_{2n}$ | $a_2$ |
| … | … | … | … | … | … |
| $A_m$ | $c_{m1}$ | $c_{m2}$ | … | $c_{mn}$ | $a_m$ |
| | $b_1$ | $b_2$ | … | $b_n$ | |

табл. 14.1

Пусть $x_{ij}$ – количество продукта, перевозимого из $A_i$ в $B_j$. Требуется определить множество $x_{ij}$ такое, что:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1,m}) \text{ – условие полного вывоза сырья} \qquad (14.1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1,n}) \text{ – условие удовлетворения спроса} \qquad (14.2)$$

при которых целевая функция (суммарные издержки на перевозку):

$$f(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min \qquad (14.3)$$

Матрицу $X=\left(x_{ij}\right)$, удовлетворяющую (14.1)–(14.3), называют *планом перевозок* транспортной задачи, $C=\left(c_{ij}\right)$ – матрица издержек, $x_{ij}$ – перевозки. В матричном виде ограничения задачи (14.1), (14.2) имеют вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 1 & ... & 1 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & ... & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 1 & ... & 0 & ... & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 & ... & 1 & ... & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}_{(m+n)\times mn} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \dots \\ x_{1n} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ \dots \\ x_{2n} \\ \dots \\ x_{m1} \\ x_{m2} \\ \dots \\ x_{mn} \end{pmatrix}_{mn\times 1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}_{(m+n)\times 1} \qquad (14.4)$$

Из (14.3), (14.4) видно, что транспортная задача является задачей линейного программирования (целевая функция и ограничения линейны). Легко показать, что ранг системы ограничения (14.4) (а следовательно и количество базисных переменных задачи) равен

$$r=m+n-1$$

Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно выполнения *условия баланса*:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \,.$$

В этом случае транспортная задача (14.1)-(14.3) называется сбалансированной.

Транспортная задача, как и любая ЗЛП, имеет двойственную. Обозначим переменные двойственной задачи $u_1, u_2, ..., u_m$ и $v_1, v_2, ..., v_m$ (их $m+n$ штук по количеству ограничения в системе (14.3)), которые называются потенциалами пунктов $A_i$ и $B_j$ соответственно. Физический смысл потенциалов:

$u_i$ – себестоимость производства сырья в пункте $A_i$

$v_j$ – приращение стоимости сырья в пункте $B_j$ (наценка).

**Теорема 14.1**

Пусть $X^* = \left\{x_{11}^*, \dots, x_{1n}^*, x_{21}^*, \dots, x_{2n}^*, \dots, x_{m1}^*, \dots, x_{mn}^*\right\}$ и $Y^* = \left\{u_1^*, u_2^*, \dots, u_m^*, v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*\right\}$ – оптимальные решения прямой и двойственной задач соответственно. Тогда

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}^* = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i^* + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j^*,$$

т.е. суммарные транспортные издержки равны суммарной наценке минус суммарная себестоимость ($u_i \le 0$).

**Теорема 14.2.** Для оптимальности плана $X^*$ необходимо и достаточно существование таких $X^*$ и $Y^*$, что $u_i + v_j \le c_{ij}$ и при этом для любого базисного решения $u_i + v_j = c_{ij}$, т.е.

- если $v_j < c_{ij} + (-u_i)$, то перевозка нерентабельна $\Rightarrow$ $x_{ij} = 0$,
- если $v_j = c_{ij} + (-u_i)$, то перевозка рентабельна $\Rightarrow$ $x_{ij} \ne 0$ – базисная.

На практике могут встречаться задачи, в которых уравнение баланса не выполнено. В этом случае вводятся фиктивные пункты назначения или производства сырья с нулевыми транспортными расходами.

## 14.2. Метод решения транспортной задачи.

3 этапа:

1. Найти начальное допустимое базисное решение.
2. Выделить из числа небазисных переменную, вводимую в базис. Если все небазисные переменные удовлетворяют условию оптимальности симплекс-метода, который в данном случае будет иметь вид: $\Delta_{ij} = \left(u_i + v_j\right) - c_{ij} \le 0$, закончить вычисления, иначе к этапу 3.
3. Выбрать переменную, выводимую из базиса, перейти к новому базису, далее к этапу 2.

Опр. 14.2. Опорным планом транспортной задачи называют любое её допустимое базисное решение (Заметим, что в этом решении отличных от нуля переменных не более $r = m + n - 1$).

## 14.3. Метод северо-западного угла.

Рассмотрим на примере.

Пусть имеется ТЗ, в которой $\{a_i\}$={15, 20, 10}, $\{b_j\}$={10, 5, 25, 5}. Видно, что задача является сбалансированной.

Строим таблицу. В строчке пишем неудовлетворённые потребности, а в столбцах справа – остатки невывезенного товара (табл. 14.2).

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_{i(0)}$ | $a_{i(1)}$ | $a_{i(2)}$ | $a_{i(3)}$ | $a_{i(4)}$ | $a_{i(5)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 10 | 5 | 0 | 0 | 15 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $A_2$ | 0 | 0 | 20 | 0 | 20 | 20 | 20 | 0 | 0 | 0 |
| $A_3$ | 0 | 0 | 5 | 5 | 10 | 10 | 10 | 10 | 5 | 0 |
| $b_{j(0)}$ | 10 | 5 | 25 | 5 | | | | | | |
| $b_{j(1)}$ | 0 | 5 | 25 | 5 | | | | | | |
| $b_{j(2)}$ | 0 | 0 | 25 | 5 | | | | | | |
| $b_{j(3)}$ | 0 | 0 | 5 | 5 | | | | | | |
| $b_{j(4)}$ | 0 | 0 | 0 | 5 | | | | | | |
| $b_{j(5)}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | |

табл. 14.2

Заполнение начинаем с ячейки $\left(A_1, B_1\right)$. Выбираем $x_{11} = min\left\{a_{1(0)}, b_{1(0)}\right\} = 10$. Записываем в ячейку $\left(A_1, B_1\right)$ это значение. Заполняем нулями первый столбец. $a_{1(1)} = 5$ – остаток товара. Переходим к ячейке $\left(A_1, B_2\right)$, куда записываем значение $x_{12} = min\left\{a_{1(1)}, b_{2(1)}\right\} = 5$. Строка и столбец обнуляется.

Алгоритм метода северо-западного угла

1. Составляем матрицу $X$ и заносим ограничения $a_i$, $b_j$.

Определяем $x_{11} = min\left\{a_{1(0)}, b_{1(0)}\right\}$. Возможны три случая:

1) $a_1 < b_1 \Rightarrow x_{11} = a_1$, ячейки 1-ой строки заполняются нулями;

2) $a_1 > b_1 \Rightarrow x_{11} = b_1$, ячейки 1-го столбца заполняются нулями;

3) $a_1 = b_1 \Rightarrow x_{11} = a_1 = b_1$, ячейки 1-ой строки и 1-го столбца заполняются нулями.

2. Выполняем таким же образом $k$-ый шаг.

3. Определяем на $\left(k+1\right)$ шаге верхний левый элемент незаполненной части матрицы $X$. Пусть это будет $x_{\lambda\mu}$ ($\lambda + \mu = k + 2$).

$$x_{\lambda\mu} = min\left\{a_{\lambda(k)}, b_{\mu(k)}\right\},$$

где $a_{\lambda(k)} = a_\lambda - \sum_{j=1}^{\mu-1} x_{\lambda j}$, $b_{\mu(k)} = b_\mu - \sum_{i=1}^{\lambda-1} x_{i\mu}$.

Если $a_{\lambda(k)} < b_{\mu(k)}$, то заполняем нулями $\lambda$-ю строку с $(\mu+1)$-го элемента, иначе – оставшеюся часть $\mu$-го столбца.

## 14.4. Метод потенциалов.

Громоздкость транспортных таблиц обуславливает использование более простых методов решения ТЗ. Метод потенциалов предложен в 1949 г. Л.В. Канторовичем и М.К. Гавуриным. Данный метод позволяет за конечное число итераций найти оптимальный план.

***Алгоритм***

Предварительный этап.

Записываем матрицу перевозок и определяем начальный опорный план $X_0$ (методом северо-западного угла). Вычисляем предварительные потенциалы задачи:

- строим схему ТЗ из основных коммуникаций плана
- образуем индексные множества связи объектов $A$ с $B$. Например, $J_1$ – множество индексов $B_j$, связанных с $A_1$ основными коммуникациями. $I_1$ – множество индексов тех $A_i$, которые связаны с $B_j$, $j \in J_1$, $J_2$ – тех, кто связан с $A_i$ $i \in I_1$ и т.д.
- определяем потенциалы всех пунктов отправления $A_i$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$, и назначения $B_j$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$ по следующей схеме: выбираем за начало отсчета (ноль) потенциал любого пунктов, например, $u_1^{(0)} = 0$ и вычисляем систему потенциалов относительно $A_1$ по формуле

$$v_j^{(0)} = c_{1j} - u_1^{(0)},$$

где $j \in J_1$.

Затем по $v_j^{(0)}$ определяем потенциалы пунктов $A_i$ $\left(i \in I_1\right)$ используя формулу:

$$u_i^{(0)} = c_{ij} - v_j^{(0)},$$

где $i \in I_1$, $j \in J_1$.

- определяем аналогично потенциалы $v_j^{(0)}$ $\left(j \in J_1\right)$ и т.д.

Строим матрицу оценок (симплекс-разностей):

$$\Delta_1 = \left(u_i^{(0)} + v_j^{(0)}\right) - c_{ij}\,.$$

Если эта матрица не содержит положительных элементов, то $X_0$ – оптимальный план. Иначе – к следующему шагу.

Пусть произведено $k$ итераций. Переходим к выполнению $\left(k+1\right)$-й итерации целью которой является построение матрицы симплекс-разностей $\Delta_{k+1}$, а также установление оптимальности плана $X_k$ (первый цикл), либо нахождение более экономичного плана $X_{k+1}$ (второй цикл).

Первый цикл

Вычисляем матрицу $\Delta_{k+1}$ на основе $\Delta_k$ по следующей схеме:

- выбираем наибольший положительный элемент матрицы $\Delta_k$ (например, $c_{\lambda\mu}^k = c_k$)
- выделяем строку, содержащую элемент $c_{\lambda\mu}^k$, а элементы этой строки, отвечающие базисным переменным плана $X_k$, образуют множество, которое обозначим $G_1$
- выделяем столбцы матрицы $\Delta_k$, содержащие элементы множества $G_1$. При этом множество элементов в столбцах, которые отличны от элементов $G_1$, обозначим как $G_r$. Процесс выделения продолжаем до тех пор, пока очередное множество не окажется пустым.

Строим матрицу $\Delta_{k+1}$, для чего:

- прибавляем $c_k$ ко всем выделенным столбцам и вычитаем из всех выделенных строк матрицы $\Delta_k$. При этом все выделенные элементы матрицы $\Delta_k$ остаются равными нулю. Обращается в ноль элемент $c_{\lambda\mu}^k$.
- Если все элементы матрицы $\Delta_{k+1}$ неположительны, то $X_k$ – оптимальный план, иначе переходим ко второму циклу.

Второй цикл

Осуществляем улучшение плана $X_k$, для чего:

- выбираем наибольший положительный элемент матрицы $\Delta_{k+1}$ (например, $c_{i_0 j_0}^{(k+1)} = c_{k+1}$);

- составляем цепочку из положительных элементов плана $X_k$, которая замыкается на вводимой в новый базис решения переменной $x_{i_0 j_0}$ методом *вычеркивания;*

- находим в получившейся цепочке минимальный нечётный по порядку следования элемент $\theta_{k+1} = \min\limits_{\varnothing \le \mu \le s} x_{i_\mu j_{\mu+1}}^{(k)}$, который выводится из базиса;

- прибавляем $\theta_{k+1}$ ко всем чётным элементам цепочки и к элементу $x_{i_0 j_0}$;

- вычитаем $\theta_{k+1}$ из всех нечётных элементов. Остальные элементы $X_k$ остаются бех изменений.

План $X_{k+1}$ построен. Он является опорным, поскольку не изменилось число его ненулевых перевозок.

Если плану $X_k$ соответствовало значение целевой функции $f_k\left(x_{ij}\right)$, то новое значение целевой функции для плана $X_{k+1}$ будет $f_{k+1}\left(x_{ij}\right) = f_k\left(x_{ij}\right) - c_{k+1}\theta_{k+1}$,. Т.к. $c_{k+1} > 0$, $\theta_{k+1} > 0$, то $f_{k+1}\left(x_{ij}\right) < f_k\left(x_{ij}\right) \Rightarrow$ план $X_{k+1}$ является улучшенным опорным планом. Переходим к выполнению $(k+2)$ итерации.

### 14.5. Метод вычёркивания.

Этот метод позволяет выделить в произвольном плане $X$ замкнутую цепочку, если она существует, и по ней произвести вывод переменной из базиса.

В плане $X$ выделяют множество ненулевых элементов $K$ (включая вводимую в базис переменную) и выясняют, существует ли в этом множестве циклы. Для этого посматривают план $X$ построчно и вычёркивают те из строк, в которых нет элементов $K$, если их число не больше одного.

Затем просматривают столбцы и вычёркивают содержащие не более одного элемента $K$, при этом ранее вычеркнутые элементы во внимание не принимаются.

Процесс повторяется (поочерёдной просмотр строк и столбцов). В результате конечного числа шагов возможен один из следующих исходов:

1. Все строки (столбцы) вычеркнуты $\Rightarrow$ из элементов $K$ нельзя составить цикл, и допустимый план, составленный из элементов $K$, является опорным.

2. Получена подматрица в $\lambda$-й(м) строке (столбце), которой не менее двух элементов $K$ $\Rightarrow$ множество содержит циклы из невычеркнутых элементов $K$, и допустимый план не является опорным.

## ГЛАВА 3

# Квадратичное программирование

Рассмотрим задачу квадратичного программирования:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} b_j x_j + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \to \min, \\ c_{i0} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \le 0,\ i = \overline{1,m}, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{1}$$

Построим функцию Лагранжа, даже несмотря на то, что ограничения заданы в форме неравенств:

$$L(\mathbf{x}, \Lambda) = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \left( c_{i0} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \right). \tag{2}$$

Преобразуем органичение-неравенство в равенство, дополнив задачу переменными $q_i$:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} b_j x_j + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \to \min, \\ c_{i0} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j + q_i = 0,\ i = \overline{1,m}, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}, \\ q_i \ge 0,\ i = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{3}$$

Построим функцию Лагранжа для модифицированной задачи:

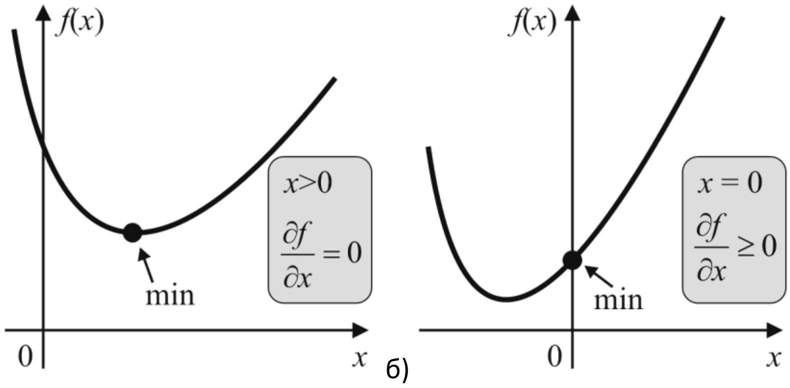
$$\tilde{L}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \Lambda) = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \left( c_{i0} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j + q_i \right). \tag{4}$$

Эта функция отличается от ранее введенной функции Лагранжа $L(\mathbf{x}, \Lambda)$ дополнительными переменными $q_i$. Очевидно, эта функция является квадратичной формой. Можно показать, что она положительно определена. Следовательно, эта функция выпуклая.

Минимум выпуклой функции в области неотрицательных значений переменных достигается в двух возможных случаях (рис. 2):

а) Минимум функции (без учета неотрицательности переменных) достигается в области неотрицательных значений переменных (рис. 2а).

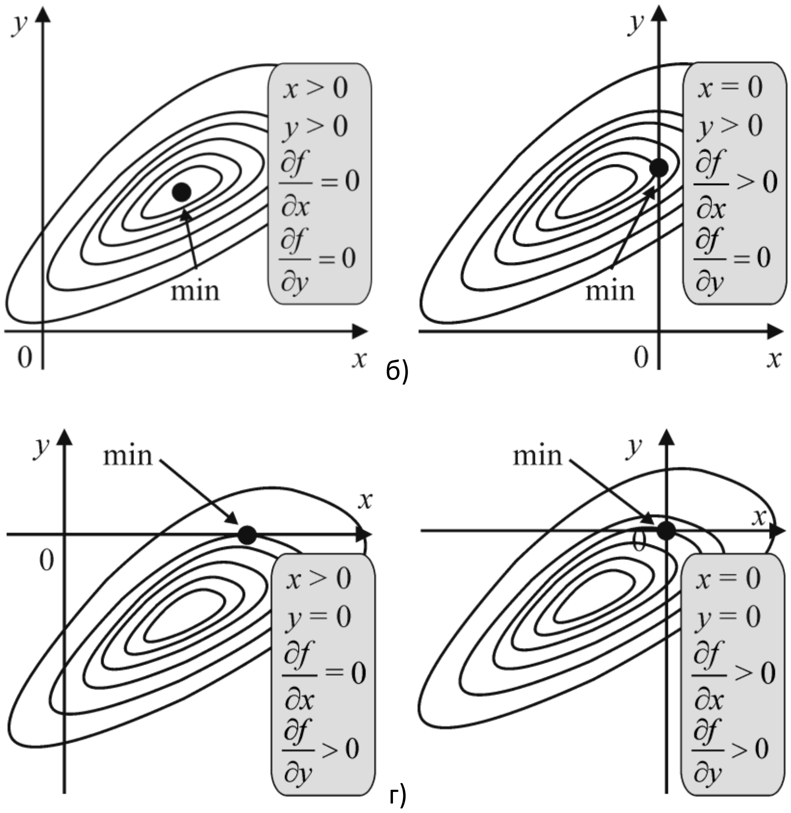
б) Минимум функции (без учета неотрицательности переменных) достигается в области отрицательных значений переменных (рис. 2б). В этом случае минимум в допустимой области достигается на ее границе в точке $x = 0$. Производная в этом случае, очевидно, неотрицательна.




а) б)

Рис. 1

В двумерном случае варианты аналогичны, но их уже четыре. На рис. 3 показаны линии уровня некоторой выпуклой функции двух переменных, точка минимума которой расположена в одной из четырех координатных четвертей.




а) б) в) г)

Рис. 2

Аналогично и в многомерном случае. То есть для точки минимума в области неотрицательных значений выполняется три условия:

– значение любой переменной $x_j$ неотрицательно,

– значение частной производной по любой переменной $x_j$ неотрицательно,

– произведение любой переменной $x_j$ на частную производную по $x_j$ равно нулю.

Таким образом, чтобы найти минимум модифицированной функции Лагранжа (4), надо найти точку, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\begin{cases} x_j \dfrac{\partial \tilde{L}}{\partial x_j} = 0,\ j = \overline{1,n}, \\ q_i \dfrac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i} = 0,\ i = \overline{1,m}, \\ \lambda_i \dfrac{\partial \tilde{L}}{\partial \lambda_i} = 0,\ i = \overline{1,m}, \\ x_j, q_i, \lambda_i \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}, \\ \dfrac{\partial \tilde{L}}{\partial x_j} \ge 0,\ j = \overline{1,n}, \\ \dfrac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i} \ge 0,\ i = \overline{1,m}, \\ \dfrac{\partial \tilde{L}}{\partial \lambda_i} \ge 0,\ i = \overline{1,m}, \end{cases} \tag{5}$$

В последнем неравенстве можно поставить знак равенства, так как для решения задачи (3) должно выполняться ограничение-равенство. Поэтому третье неравенство в (5) будем игнорировать. Выразим в полученном выражении частные производные модифицированной функции Лагранжа через исходную функцию Лагранжа (2). Обозначим $\partial L/\partial x_j = p_j$. С учетом равенства ,получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = b_j + 2\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i c_{ij} = p_j,\ j = \overline{1,n}, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = c_{i0} + \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_j = -q_i,\ i = \overline{1,m}, \\ x_j p_j = 0,\ j = \overline{1,n}, \\ q_i \lambda_i = 0,\ i = \overline{1,m}, \\ x_j, p_{j,} q_i, \lambda_i \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{6}$$

Получена система $(m+n)$ линейных уравнений с $2(m+n)$ неизвестными, которая дополнена $(m+n)$ нелинейными уравнениями: $x_j p_j = 0$ и $\lambda_i q_i = 0$. Можно в каждом из этих уравнений произвольно приравнять нулю $x_j$ либо $p_j$, $\lambda_i$ либо $q_i$. Тогда первые два уравнения будут представлять собой систему $(m+n)$ линейных уравнений с $(m+n)$ неизвестными. Решив ее, получим значения оставшихся переменных $x_j$, $p_j$, $\lambda_i$, $q_i$ , но данный способ никак не гарантирует неотрицательность полученных значений. Поэтому поступают следующим образом: вводят невязки $w_j$ между левыми и правыми частями в первом равенстве (6), а также невязки $y_i$ между левыми и правыми частями во втором равенстве (6), причем так, чтобы константы были неотрицательны:

$$
\begin{aligned}
&w_j = \operatorname{sign}\left(b_j\right)\left[b_j - \left(-2\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j - \sum_{i=0}^{m} \lambda_i c_{ij} + p_j\right)\right],\\
&y_i = \operatorname{sign}\left(y_i\right)\left[y_i - \left(c_{i0} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j + q_i\right)\right].
\end{aligned} \qquad (6)
$$

Решается задача линейного программирования для минимизации суммарной невязки по переменным $y_i$. Если полученное минимальное значение равно нулю, то решается другая задача линейного программирования – минимизация суммарной невязки по переменным $w_j$, при этом переменные $y_i$ уже не рассматриваются, т.е. вычеркиваются из симплекс-таблицы.

Решение обеих задач линейного программирования отличается от стандартного симплекс-метода тем, что при выборе направляющего элемента в таблице на каждом шаге надо следить, чтобы переменные $x_j$ и $p_j$ или $\lambda_i$ и $q_i$ не оказались одновременно в базисе (см. пример ниже).

Пример.

В треугольнике, показанном на рис. 3 (закрашен серым цветом), найти точку, ближайшую к точке с координатами (5, 4).

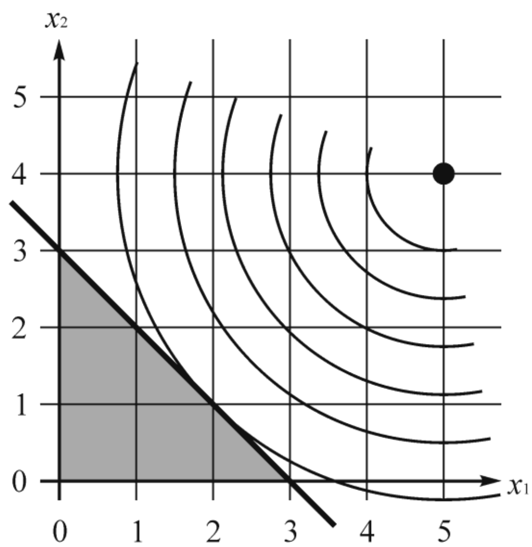



Рис. 3

Т.е. требуется решить следующую задачу квадратичного программирования:

$$
\begin{aligned}
&f\left(x_1, x_2\right) = \left(x_1 - 5\right)^2 + \left(x_2 - 4\right)^2 \to \min,\\
&x_1 + x_2 \le 3,\\
&x_1, x_2 \ge 0;
\end{aligned}
$$

Решение:

Построим эквивалентную задачу:

$$f\left(x_1, x_2\right) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 8x_2 + 41 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 - 3 \le 0,$$
$$x_1, x_2 \ge 0;$$

Строим функцию Лагранжа:

$$L\left(x_1, x_2, \lambda_1\right) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 8x_2 + 41 + \lambda_1\left(x_1 + x_2 - 3\right).$$

Находим ее производные:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 10 + \lambda_1 = p_1, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 8 + \lambda_1 = p_2, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x_1 + x_2 - 3 = -q_1. \end{cases}$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 10 + \lambda_1 - p_1 = 0, \\ 2x_2 - 8 + \lambda_1 - p_2 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3 + q_1 = 0, \\ x_1 p_1 = 0, \\ x_2 p_2 = 0, \\ \lambda_1 q_1 = 0, \\ x_1, x_2, \lambda_1, p_1, p_2, q_1 \ge 0. \end{cases}$$

Для решения системы вводятся невязки:

$$\begin{cases} w_1 = 10 - \left(2x_1 + \lambda_1 - p_1\right), \\ w_2 = 8 - \left(2x_2 + \lambda_1 - p_2\right), \\ y_1 = 3 - \left(x_1 + x_2 + q_1\right). \end{cases}$$

С помощью Симплекс-метода находится минимум суммы невязок $y_i$ (т.е. ищется опорное решение):

| | C | $x_1$ | $x_2$ | $\lambda_1$ | $p_1$ | $p_2$ | $q_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sum y_i$ | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $y_1$ | 3 | **1** | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $w_1$ | 10 | 2 | 0 | 1 | –1 | 0 | 0 |
| $w_2$ | 8 | 0 | 2 | 1 | 0 | –1 | 0 |

| | C | $y_1$ | $x_2$ | $\lambda_1$ | $p_1$ | $p_2$ | $q_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sum y_i$ | **0** | –1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x_1$ | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $w_1$ | 4 | −2 | −2 | 1 | −1 | 0 | −2 |
| $w_2$ | 8 | 0 | 2 | 1 | 0 | −1 | 0 |

Получилось, что минимальная суммарная невязка по переменным $y_i$ равна нулю. Вычеркиваем столбец $y_1$ и решим задачу минимизации суммарной невязки по переменным $w_j$:

| | C | $x_2$ | $\lambda_1$ | $p_1$ | $p_2$ | $q_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sum w_j$ | 12 | 0 | 2 | −1 | −1 | −2 |
| $x_1$ | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $w_1$ | 4 | −2 | **1** | −1 | 0 | −2 |
| $w_2$ | 8 | 2 | 1 | 0 | −1 | 0 |

| | C | $x_2$ | $w_1$ | $p_1$ | $p_2$ | $q_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sum w_j$ | 4 | 4 | −2 | 1 | −1 | 2 |
| $x_1$ | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $\lambda_1$ | 4 | −2 | 1 | −1 | 0 | −2 |
| $w_2$ | 4 | **4** | −1 | 1 | −1 | 2 |

В базис будет вводиться переменная $x_2$, так как $p_1$ и $q_1$ вводить в базис нельзя, потому что должно быть $x_1p_1 = 0$ и $\lambda_1q_1 = 0$, но $x_1$ и $\lambda_1$ уже в базисе.

| | C | $w_2$ | $w_1$ | $p_1$ | $p_2$ | $q_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sum w_j$ | 0 | −1 | −1 | 0 | 0 | 0 |
| $x_1$ | 2 | −¼ | | | | |
| $\lambda_1$ | 6 | ½ | | | | |
| $x_2$ | 1 | ¼ | −¼ | ¼ | −¼ | ½ |

Т.е. $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

## Глава 4

**Динамическое программирование**

Теория

Пусть $F$ – функционал от двух функций $y$ и $y'$, каждая из которых зависит от $x$. Будем предполагать, что $F$ непрерывна вместе с частными производными первого порядка. Пусть надо минимизировать следующий функционал:

$$J\left[y(x)\right]=\int_a^b F\left(x,y,y'\right)\mathrm{d}x, \qquad (1)$$

т.е. требуется найти такую функцию $y^*(x)$, что для других кривых $y(x)$ будет выполняться неравенство:

$$J\left[y^*(x)\right]\leq J\left[y(x)\right]. \qquad (2)$$

Если функция $y^*(x)$ является решением, то любое возмущение функции $y^*(x)$ будет увеличивать функционал $J$. Пусть $g(x) = y^*(x) + \varepsilon\eta(x)$ – возмущение функции $y^*(x)$, где $\eta(x)$ – дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Зафиксируем функции $y^*(x)$ и $\eta(x)$. Тогда интеграл (1) становится функцией параметра $\varepsilon$ ($\varepsilon$ – вещественное число, таким образом, $J$ больше не является функционалом, а является функцией). Следовательно, мы можем применить традиционное исчисление для поиска минимума функции

$$J\left(\varepsilon\right)=\int_a^b F\left(x,g,g'\right)\mathrm{d}x. \qquad (3)$$

Продифференцируем функцию $J(\varepsilon)$ по $\varepsilon$:

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\varepsilon}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\int_a^b F\left(x,g,g'\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\mathrm{d}F\left(x,g,g'\right)}{\mathrm{d}\varepsilon}\mathrm{d}x. \qquad (4)$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial g}{\partial\varepsilon}=\eta(x) \text{ и } \frac{\partial g'}{\partial\varepsilon}=\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}=\eta'(x),$$

получим:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\varepsilon}&=\left(\frac{\partial F}{\partial g}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial\varepsilon}\right)+\left(\frac{\partial F}{\partial g'}\right)\left(\frac{\partial g'}{\partial\varepsilon}\right)=\\&=\left(\frac{\partial F}{\partial g}\right)\eta(x)+\left(\frac{\partial F}{\partial g'}\right)\eta',\end{aligned}. \qquad (5)$$

т.е.

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\varepsilon}=\int_a^b\left[\left(\frac{\partial F}{\partial g}\right)\eta+\left(\frac{\partial F}{\partial g'}\right)\eta'\right]\mathrm{d}x. \qquad (6)$$

Так как для функции $y^*(x)$ достигается минимум функционала, должно быть $J'(0) = 0$:

$$J'(0)=\int_a^b\left[\left(\frac{\partial F}{\partial y*}\right)\eta+\left(\frac{\partial F}{\partial y*'}\right)\eta'\right]\mathrm{d}x=0. \qquad (7)$$

Проинтегрируем второе слагаемое в левой части по частям:

$$\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y*'}\right)\eta'\,\mathrm{d}x=\eta\left(\frac{\partial F}{\partial y*'}\right)\Bigg|_a^b-\int_a^b\eta\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\partial F}{\partial y*'}\right]\right)\mathrm{d}x\,.(8)$$

Первое слагаемое равно нулю, т.е. $\eta\left(\frac{\partial F}{\partial y*'}\right)\Big|_a^b=0$, так как $\eta(a)=\eta(b)=0$. Тогда (8) упрощается:

$$\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y*'}\right)\eta'\,\mathrm{d}x=-\int_a^b\eta\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\partial F}{\partial y*'}\right]\right)\mathrm{d}x. \qquad (9)$$

Подставляя (9) в (7), получим:

$$\begin{aligned}J'(0)&=\int_a^b\left[\left(\frac{\partial F}{\partial y*}\right)\eta-\int_a^b\eta\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\partial F}{\partial y*'}\right]\right)\right]\mathrm{d}x=\\&=\int_a^b\eta(x)\left[\left(\frac{\partial F}{\partial y*}\right)-\left(\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial y*'}\right]\right)\right]\mathrm{d}x=0.\end{aligned}\qquad (10)$$

Множитель $\eta(x)$ – произвольный, поэтому условие (10) может выполняться только в случае, когда:

$$\frac{\partial F}{\partial y*}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\partial F}{\partial y*'}\right]=0. \qquad (11)$$

Это уравнение называется уравнением Эйлера-Лагранжа и позволяет находить стационарные точки функционала (1).

Пример

Докажем, что кратчайшей кривой, соединяющей две точки, $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$, является прямая (рис. 1).

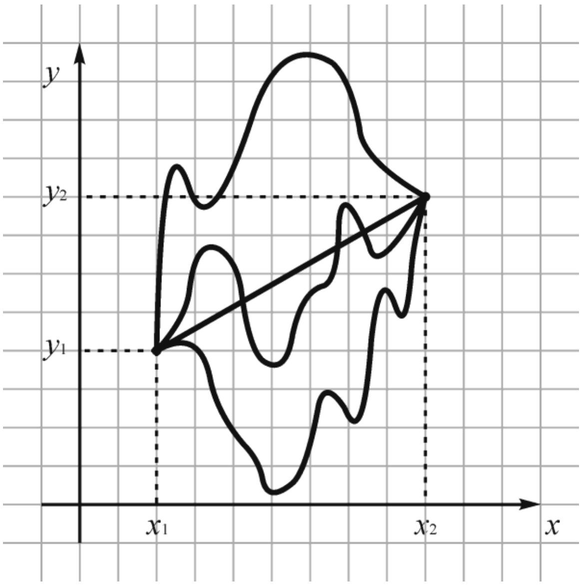



Рис. 1

Рассмотрим множество всевозможных непрерывных однозначных функций $y(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} y(x_1) &= y_1, \\ y(x_2) &= y_2. \end{aligned} \qquad (1)$$

Длина кривой от точки $A_1$ до точки $A_2$ равна

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\, \mathrm{d}x, \qquad (2)$$

т.е. в нашем случае

$$F(x, y, \dot{y}) = \sqrt{1 + \dot{y}^2}\ . \qquad (3)$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}\right), \\ &\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \end{aligned}\ . \qquad (4)$$

и уравнение Эйлера-Лагранжа примет вид:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}\right) = 0\,, \qquad (5)$$

из которого следует, что

$$\dot{y} = a = \mathrm{const}\,, \qquad (6)$$

а значит

$$y(x) = ax + b\,, \qquad (7)$$

где числа $a$ и $b$ определяются из граничных условий (1).

Проверим, что найденная функция (7) доставляет минимум функционала (2).

Сначала используем критерий Лежандра:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}^2} = \frac{1}{\left(1+\dot{y}^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{\left(1+a^2\right)^{3/2}} \geq 0\,. \qquad (8)$$

Затем используем критерий Вейерштрассе:

$$\begin{aligned}
&F\left(x,y,q\right) - F\left(x,y,\dot{y}\right) - \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\left(q-\dot{y}\right) = \\
&= \sqrt{1+q^2} - \sqrt{1+a^2} - \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\left(q-a\right) = \\
&= \frac{\sqrt{1+q^2}\sqrt{1+a^2} - \left(1+aq\right)}{\sqrt{1+a^2}} = \\
&= \frac{\sqrt{1+a^2q^2+\left(a^2+q^2\right)} - \sqrt{1+a^2q^2+2aq}}{\sqrt{1+a^2}} \geq 0,
\end{aligned} \qquad . \quad (9)$$

так как $a^2 + q^2 \geq 2aq$.

# Глава 5

# Выпуклое программирование

## Теоремы отделимости

**Лемма** теоремы об отделимости

Пусть *A* – выпуклое замкнутое множество (т.е. вместе с любой последовательностью элементов из этого множества в нем содержится и предел последовательности). Пусть также дана точка *y* вне множества *A*: $y \notin A$. Тогда существует единственная точка $x^0$, ближайшая к *y* (рис. 1), т.е.

$$\forall x \in A \quad x \neq x^0 \Rightarrow \left\| y - x^0 \right\| < \left\| y - x \right\|.$$

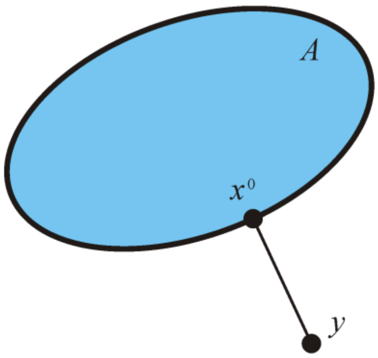



Рис. 1

**Доказательство:**

Сначала докажем существование такой точки $x^0$.

Пусть множество *A* ограниченно. Тогда существует точка $x^0$, для которой достигается минимум функции $||y - x||$.

Пусть множество *A* ограниченно. Тогда выберем произвольную точку $x^*$ в *A* и построим множество $A' \subset A$, такое что $A' = \left\{ x \in A, \left\| y - x \right\| \leq \left\| y - x^0 \right\| \right\}$. Множество $A'$ ограниченно и в нем также существует точка $x^0$, для которой достигается минимум функции $||y - x||$.

Теперь докажем, что точка $x^0$ единственная.

Пусть в *A* существует отличная от $x^0$ точка $x^1$, такая, что

$$\left\| y - x^1 \right\| = \left\| y - x^0 \right\|.$$

Возьмем среднюю точку между $x^0$ и $x^1$ и рассмотрим расстояние от нее до $y$:

$$\left\|y-\frac{x^0+x^1}{2}\right\|^2=\left\|\frac{y-x^0}{2}+\frac{y-x^1}{2}\right\|^2=\left\|\frac{y-x^0}{2}\right\|^2+\left\|\frac{y-x^1}{2}\right\|^2+2\left(\frac{y-x^0}{2},\frac{y-x^1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left\|y-x^0\right\|^2+\frac{1}{4}\left\|y-x^0\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|y-x^0\right\|\left\|y-x^0\right\|\cos\left(y-x^0\wedge y-x^1\right)<\left\|y-x^0\right\|^2.$$

Лемма доказана.

Замечание. Точка $x^0$, обеспечивающая минимум функции $||y-x||$, называется проекцией внешней точки $y$ на выпуклое замкнутое множество$A$.

**Теорема** об отделимости выпуклого замкнутого множества и не принадлежащей ему точки

Пусть $A$ – выпуклое замкнутое множество и дана точка $y$ вне $A$: $y\notin A$. Тогда эта точка может быть отделена от множества $A$ некоторой гиперплоскостью с вектором нормали $a$ (рис. 2), т.е.

$\exists a:\ \forall x\in A\ \left(a,y\right)>\left(a,x\right)$.

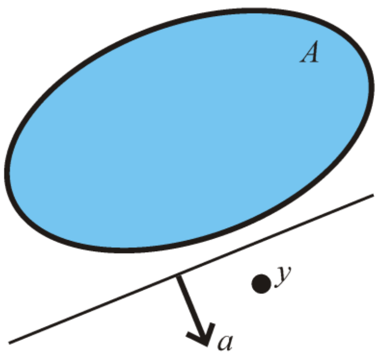



Рис. 2

**Доказательство:**

Пусть $x^0$ – проекция $y$ на $A$. Очевидно, что $\left\|y-x^0\right\|>0$, так как $y\notin A$. Выберем вектор $a$ следующим образом:

$a=y-x^0$.

Тогда $\left(a,y-x^0\right)>0$, а значит $\left(a,y\right)>\left(a,x^0\right)$.

Покажем теперь, что для любого $x\in A$ выполняется неравенство $\left(a,x^0\right)\geq\left(a,x\right)$.

Из леммы следует, что $\left\|a\right\|^2\leq\left\|y-x\right\|^2$ для всех $x\in A$. Рассмотрим точку $x^1=(1-t)x^0+tx$, где $0<t<1$. Очевидно, это неравенство верно и для точки $x^1$, т.е.

$$\|a\|^2 \le \|y-x^1\|^2 = \|y-(1-t)x^0-tx\|^2 = \Big\|\underbrace{y-x^0}_{a}-t\left(x-x^0\right)\Big\|^2 =$$

$$=\|a\|^2+t^2\|x-x^0\|^2-2t\left(a,x-x^0\right).$$

Сокращая $||a||^2$, получим неравенство

$$t^2\|x-x^0\|^2 \ge 2t\left(a,x-x^0\right),$$

причем верное для любых сколь угодно малых значений $t$. Такое возможно только в том случае, когда скалярное произведение в правой части этого неравенства неположительно:

$$\left(a,x-x^0\right)\le 0.$$

Итак, для любой точки $x\in A$ показано, что

$$\left(a,x\right)\le\left(a,x^0\right)<\left(a,y\right).$$

**Теорема** об отделимости двух выпуклых замкнутых непересекающихся множеств.

Пусть $A$ и $B$ – выпуклые замкнутые множества, причем $A\cap B=\varnothing$. Тогда эти множества могут быть отделены друг от друга некоторой гиперплоскостью с вектором нормали $a$ (рис. 3), т.е.

$$\exists a:\ \forall x\in A\,\forall y\in B\ \ \left(a,x\right)<\left(a,y\right).$$

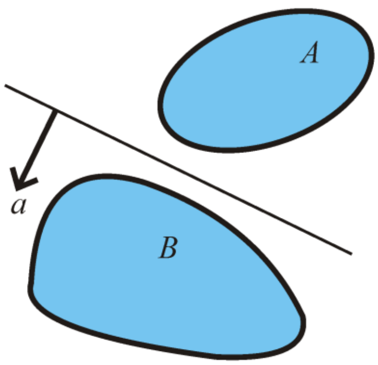



Рис. 3

**Доказательство:**

Построим множество $Z$ разностей элементов из $A$ и $B$:

$$Z=A-B=\left\{z:z=a-b,\ \forall a\in A,\ \forall b\in B\right\}.$$

Докажем, что это множество выпуклое. Для этого рассмотрим два элемента $z^1$ и $z^2$ из $Z$ (причем $z^1 = a^1 - b^1$, $z^2 = a^2 - b^2$) и их выпуклую линейную комбинацию:

$$tz^1+(1-t)z^2=ta^1-tb^1+(1-t)a^2-(1-t)b^2=\left[\underbrace{ta^1+(1-t)a^2}_{\in A}\right]-\left[\underbrace{tb^1+(1-t)b^2}_{\in B}\right]\in Z\ .$$

Так как множества *A* и *B* не пересекаются, нулевой вектор не принадлежит множеству *Z*, а значит, по предыдущей теореме, *Z* можно отделить от нуля:

$$\exists a:\ \forall z\in Z\ \ (a,0)>(a,z).$$

Но элемент *z* – разность произвольных элементов *x* из *A* и *y* из *B*, а значит

$$\forall x\in A\,\forall y\in B\ \ \exists a:\ (a,x-y)<0\,.$$

Теорема доказана.

## Необходимое условие оптимальности для выпуклого программирования и теорема Милютина-Дубовицкого

Рассмотрим задачу выпуклого программирования:

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) \to \min, \\ g_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = \overline{1,m}, \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

Согласно основной теореме методов оптимизации, точка $\mathbf{x}^0$ является решением задачи (1) тогда и только тогда, когда пусто пересечение следующих множеств:

$$\bigcap_{i=0}^{m} G_i = \varnothing, \tag{2}$$

где

$$G_0 = \left\{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}^0)\right\},\ G_i = \left\{\mathbf{x} : h_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = \overline{1,m}\right\}. \tag{3}$$

Рассмотрим конусы возможных направлений движения из точки $\mathbf{x}^0$. Это конус направлений, улучшающих значение функции:

$$\Gamma^0_{\mathbf{x}^0} = \left\{\mathbf{e} : \exists \lambda > 0 : f(\mathbf{x}^0 + \lambda \mathbf{e}) < f(\mathbf{x}^0)\right\} \tag{4}$$

и конусы направлений, не нарушающих ограничения:

$$\Gamma^i_{\mathbf{x}^0} = \left\{\mathbf{e} : \exists \lambda > 0 : g_i(\mathbf{x}^0 + \lambda \mathbf{e}) \le 0\right\}. \tag{5}$$

**Теорема** Милютина-Дубовицкого:

Для того, чтобы пересечение выпуклых конусов $\Gamma^i_{\mathbf{x}^0},\ i = \overline{0,m}$ было пусто, необходимо и достаточно, чтобы в сопряженных конусах нашлись такие вектора $\mathbf{c}^i \in \left(\Gamma^i_{\mathbf{x}^0}\right)^*$, не равные одновременно нулю, чтобы тем не менее

$$\sum_{i=0}^{m} \mathbf{c}^i = 0. \tag{6}$$

**Доказательство**:

Рассмотрим пространство $\tilde{\square} = \square_n^{m+1}$, представляющее собой $(m+1)$-ю степень $n$-мерного Евклидова пространства. В пространстве $\tilde{\square}$ рассмотрим два множества $\tilde{E}_{\mathbf{x}^0}$ и $\Pi$:

$$\tilde{E}_{\mathbf{x}^0} = E^0_{\mathbf{x}^0} \times E^1_{\mathbf{x}^0} \times .. \times E^m_{\mathbf{x}^0}, \tag{7}$$

где

$$E^i_{\mathbf{x}^0} = \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \lambda_i \mathbf{e}^i,\ \lambda_i \geq 0, \mathbf{e}^i \in \Gamma^i_{\mathbf{x}^0} \right\} \tag{8}$$

Множества (8) представляют собой множества точек, в которые можно попасть, двигаясь из точки $\mathbf{x}^0$ в направлениях, задаваемых конусом $\Gamma^i_{\mathbf{x}^0}$.

Множество $\Pi$ – диагональ пространства $\tilde{\square}$, т.е. множество векторов с одинаковыми значениями компонент:

$$\Pi = \left\langle \Pi(0), ..., \Pi(m) \right\rangle, \forall i, j : \Pi(i) = \Pi(j). \tag{9}$$

Нетрудно показать, что множества $\tilde{E}_{\mathbf{x}^0}$ и $\Pi$ выпуклы и имеют не более одной общей точки. Тогда по теореме отделимости через точку **x**0 можно провести отделяющую гиперплоскость с ненулевым вектором нормали $\mathbf{C} = \left\langle \mathbf{c}^0, ..., \mathbf{c}^m \right\rangle$:

$$\forall z_\Gamma \in \tilde{E}_{\mathbf{x}^0}, \forall z_\Pi \in \Pi : \left(\mathbf{C}, z_\Gamma\right) \geq \left(\mathbf{C}, z_\Pi\right), \tag{10}$$

или в покомпонентном виде

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{m} \left(\mathbf{c}^i, z_\Gamma(i)\right) \geq \sum_{i=0}^{m} \left(\mathbf{c}^i, z_\Pi(i)\right) \\ &\Rightarrow \sum_{i=0}^{m} \left(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}^0 + \lambda_i \mathbf{e}^i\right) \geq \left(\sum_{i=0}^{m} \mathbf{c}^i, \Pi\right) \\ &\Rightarrow \sum_{i=0}^{m} \left(\mathbf{c}^i, \lambda_i \mathbf{e}^i\right) \geq \left(\sum_{i=0}^{m} \mathbf{c}^i, \Pi - \mathbf{x}^0\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Положим $\lambda_i = 0$ при $i \neq s$ и $\Pi = \mathbf{x}^0$. Тогда

$$\forall s \left(\mathbf{c}^s, \lambda_s \mathbf{e}^s\right) \geq 0.$$

Последнее неравенство означает, что $\forall s\ \mathbf{c}^s \in \left(\Gamma^s_{\mathbf{x}^0}\right)^*$.

Пусть теперь вектора $\mathbf{c}^i$, хоть и принадлежат сопряженным конусам $\left(\Gamma^s_{\mathbf{x}^0}\right)^*$, не удовлетворяют условию (6). Выберем в (11) все числа $\lambda i$ равными нулю. Тогда для абсолютно любых векторов $\Pi$ должно выполняться условие

$$\left( \sum_{i=0}^{m} \mathbf{c}^i, \Pi - \mathbf{x}^0 \right) \leq 0 . \tag{12}$$

Это условие невозможно при

$$\sum_{i=0}^{m} \mathbf{c}^i \neq 0 ,$$

так как иначе, в силу произвольности $\Pi$, можно заменить $\Pi$ на $2\mathbf{x}^0 - \Pi$ и получить противоположное неравенство.

Теорема доказана.

## Метод множителей Лагранжа в выпуклом программировании

Рассмотрим задачу выпуклого программирования:

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) \to \min, \\ h_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = \overline{1,m}, \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть некоторая точка $\mathbf{x}^0$ является решением задачи (1). Тогда в силу теоремы Милютина-Дубовицкого существует набор векторов $\mathbf{c}^i$, не равных одновременно нулю, таких, что, тем не менее,

$$\sum_{i=0}^{m} \mathbf{c}^i = 0, \tag{2}$$

где все вектора $\mathbf{c}^i$ принадлежат конусам, сопряженным с конусами $\Gamma^i_{\mathbf{x}^0}$, $\Gamma^0_{\mathbf{x}^0}$ – конус направлений, улучшающих функцию $f(\mathbf{x})$, а $\Gamma^i_{\mathbf{x}^0}$ – конусы направлений, не выводящих за границы допустимой области.

Рассмотрим вектор $\mathbf{c}^0 \in \left(\Gamma^0_{\mathbf{x}^0}\right)^*$. Очевидно, что конус $\Gamma^0_{\mathbf{x}^0}$ состоит из направлений, составляющих тупой угол с градиентом целевой функции $\nabla f\left(\mathbf{x}^0\right)$. Сопряженный с ним конус будет включать в себя только антиградиент и вектора, коллинеарные с ним, т.е. $\mathbf{c}^0 = \mu_0 \nabla f\left(\mathbf{x}^0\right),\ \mu_0 < 0$.

Пусть точка $\mathbf{x}^0$ – не находится на границе области, задаваемой *i*-м ограничением. Тогда, чтобы не нарушить *i*-е ограничение, можно передвигаться в любом направлении, а значит, конус $\Gamma^i_{\mathbf{x}^0}$ совпадает с пространством $\mathbb{R}^n$. Следовательно, сопряженный конус $\left(\Gamma^i_{\mathbf{x}^0}\right)^*$ состоит из нулевого вектора и $\mathbf{c}^i = \mathbf{0}$.

Пусть теперь точка $\mathbf{x}^0$ находится на границе области, задаваемой *i*-м ограничением. Тогда, чтобы не нарушить *i*-е ограничение, можно передвигаться в любом направлении, составляющим тупой угол с градиентом $\nabla h_i\left(\mathbf{x}^0\right)$. Т.е. сопряженный конус $\left(\Gamma^i_{\mathbf{x}^0}\right)^*$ состоит из векторов, коллинеарных с антиградиентом к функции $h_i\left(\mathbf{x}^0\right)$, а потом $\mathbf{c}^i = \mu_i \nabla h_i\left(\mathbf{x}^0\right),\ \mu_i < 0$.

Из теоремы Милютина-Дубовицкого следует, что существует набор векторов $\mathbf{c}^i$, не равных одновременно нулю, таких, что

$$\mu_0 \nabla f\left(\mathbf{x}^0\right) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla h_i\left(\mathbf{x}^0\right) = 0. \tag{3}$$

Пусть выполнено условие Слейтера, т.е. $\mu_0 \ne 0$ (это условие выполняется для внутренних точек области допустимых значений). Тогда (3) можно переписать в виде:

$$\nabla f\left(\mathbf{x}^0\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nabla h_i\left(\mathbf{x}^0\right)=0, \qquad (4)$$

где все числа $\lambda_i$ неотрицательны.

Легко заметить, что в левой части (4) записан градиент функции Лагранжа.

## Теоремы о Седловой точке функции Лагранжа (необходимое и достаточное условия оптимальности)

Рассмотрим задачу выпуклого программирования

$$\begin{cases} f\left(\mathbf{x}\right)\to\min, \\ h_i\left(\mathbf{x}\right)\le 0,\ i=\overline{1,m}, \\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n. \end{cases} \qquad (5)$$

Построим функцию Лагранжа, даже несмотря на то, что ограничения в (5) – неравенства:

$$L\left(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}\right)=f\left(\mathbf{x}\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i h_i\left(\mathbf{x}\right). \qquad (6)$$

**Определение**: точка $\left(\overline{\mathbf{x}},\overline{\boldsymbol{\lambda}}\right)$ называется Седловой точкой функции Лагранжа, если она удовлетворяет неравенствам:

$$\forall\boldsymbol{\lambda}\ge 0\ L\left(\overline{\mathbf{x}},\boldsymbol{\lambda}\right)\le L\left(\overline{\mathbf{x}},\overline{\boldsymbol{\lambda}}\right)\le L\left(\mathbf{x},\overline{\boldsymbol{\lambda}}\right)\ \forall\mathbf{x}. \qquad (7)$$

**Теорема** (достаточное условие):

Для того, чтобы точка $\overline{\mathbf{x}}$ являлась решением задачи (5), достаточно, чтобы нашлись такие неотрицательные числа $\lambda_i$, чтобы пара векторов $\left(\overline{\mathbf{x}},\overline{\boldsymbol{\lambda}}\right)$ являлась седловой точкой функции Лагранжа.

**Доказательство**:

Пусть $\left(\overline{\mathbf{x}},\overline{\boldsymbol{\lambda}}\right)$ – седловая точка функции Лагранжа. Тогда

$$\forall \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \; L\left(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda}\right) \leq L\left(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}\right)$$

$$\Rightarrow \forall \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \;\; f\left(\bar{\mathbf{x}}\right) + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i h_i\left(\bar{\mathbf{x}}\right) \leq f\left(\bar{\mathbf{x}}\right) + \sum_{i=0}^{m} \bar{\lambda}_i h_i\left(\bar{\mathbf{x}}\right) - \text{в том числе и для } \lambda_i = 0.$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sum_{i=0}^{m} \underbrace{\bar{\lambda}_i}_{\geq 0} \underbrace{h_i\left(\bar{\mathbf{x}}\right)}_{\leq 0} \tag{8}$$

$$\Rightarrow \forall i \; \bar{\lambda}_i h_i\left(\bar{\mathbf{x}}\right) = 0.$$

$$\forall \mathbf{x} \; L\left(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}\right) \leq L\left(\mathbf{x}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}\right)$$

$$\Rightarrow \forall \mathbf{x} \;\; f\left(\bar{\mathbf{x}}\right) + \underbrace{\sum_{i=0}^{m} \bar{\lambda}_i h_i\left(\bar{\mathbf{x}}\right)}_{0} \leq f\left(\mathbf{x}\right) + \sum_{i=0}^{m} \bar{\lambda}_i h_i\left(\mathbf{x}\right) \tag{9}$$

$$\Rightarrow \forall \mathbf{x} \;\; f\left(\bar{\mathbf{x}}\right) \leq f\left(\mathbf{x}\right) + \sum_{i=0}^{m} \underbrace{\bar{\lambda}_i}_{\geq 0} \underbrace{h_i\left(\mathbf{x}\right)}_{\leq 0} \leq f\left(\mathbf{x}\right).$$

Теорема доказана.

**Теорема** (необходимое условие):

Пусть точка $\bar{\mathbf{x}}$ – решение задачи (5). Тогда существует набор неотрицательных чисел $\lambda_i$, что пара векторов $\left(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}\right)$ является седловой точкой функции Лагранжа.

**Доказательство**:

Пусть $\bar{\mathbf{x}}$ – решение задачи (5). Тогда по теореме Милютина-Дубовицкого существует набор $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ неотрицательных чисел $\bar{\lambda}_i$, для которых градиент функции Лагранжа равен нулю:

$$\nabla L\left(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}\right) = \nabla f\left(\bar{\mathbf{x}}\right) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \nabla h_i\left(\bar{\mathbf{x}}\right) = 0. \tag{10}$$

Условие (10) является необходимым условием минимума функции Лагранжа $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ по переменным $\mathbf{x}$. Так как функции $f(\mathbf{x})$ и $h_i(\mathbf{x})$ выпуклы, то и функция Лагранжа выпуклая переменным $\mathbf{x}$, а значит необходимое условие минимума является также и достаточным.

Производные функции Лагранжа по переменным $\lambda_i$ неположительные и в точке $\left(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}\right)$ равны $h_i\left(\bar{\mathbf{x}}\right)$, причем $\partial L\left(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}\right) / \partial \lambda_i < 0$ при $\bar{\lambda}_i = 0$, так как $\bar{\lambda}_i h_i\left(\bar{\mathbf{x}}\right) = 0$. Это означает, что в области неотрицательных значений переменных $\lambda_i$ функция Лагранжа в точке $\left(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}\right)$ имеет максимум по переменным $\lambda_i$.

Теорема доказана.

## Метод возможных направлений

Рассмотрим следующую задачу нелинейного программирования с ограничениями-равенствами:

$$
\begin{cases}
f\left(\mathbf{x}\right) \to \min, \\
h_j\left(\mathbf{x}\right) \le 0,\ j = \overline{1,k}, \\
\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.
\end{cases}
$$

Область допустимых значений показана на рис. 1.

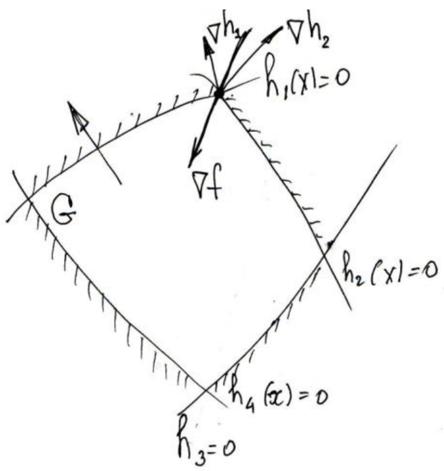



Рис. 1. Область допустимых значений для задачи (1) в случае четырех ограничений-неравенств.

Перепишем задачу (1) в канонической форме, чтобы целевая функция стала линейной:

$$
\begin{cases}
x_{n+1} = \left(\mathbf{p}, \mathbf{x}\right) \to \min, \\
h_j\left(\mathbf{x}\right) \le 0, \\
f\left(\mathbf{x}\right) \le x_{n+1}, \\
\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1},
\end{cases}
$$

$$\mathbf{p} = \left(0, 0, \ldots, 0, 1\right),\ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Введем управляющую константу $\delta\,(\delta > 0)$, которая определяет являются ли ограничения существенными. Если $h_l(\mathbf{x}^k) \le -\delta$ ,то граница $h_l\left(\mathbf{x}\right) = 0$ является близкой (на рис. 2 *l*-я и *s*-я границы области являются близкими, а значит ограничения-неравенства, задающие эти границы – существенными).

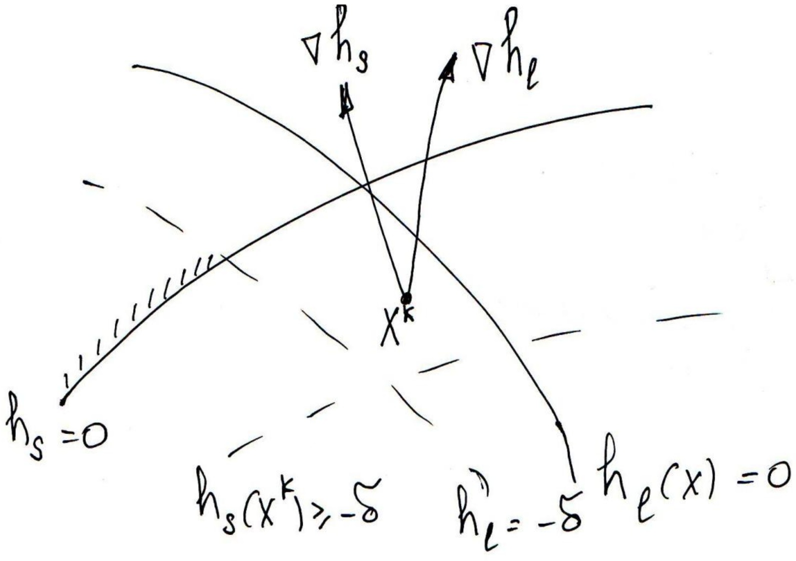



Рис. 2. Существенные ограничения

Для того, что бы при переходе от одной точки, находящейся вблизи границы области, к другой точке в направлении вектора $\xi$, необходимо (рис. 3), чтобы для существенных ограничений выполнялось неравенство:

$$\left(\nabla h_i, \boldsymbol{\xi}\right) \leq -\lambda,$$

где $\lambda$ ($\lambda > 0$) – вторая управляющая константа, которая показывает проекцию направления $\xi$ на градиент *i*-го существенного ограничения $\nabla h_i$.

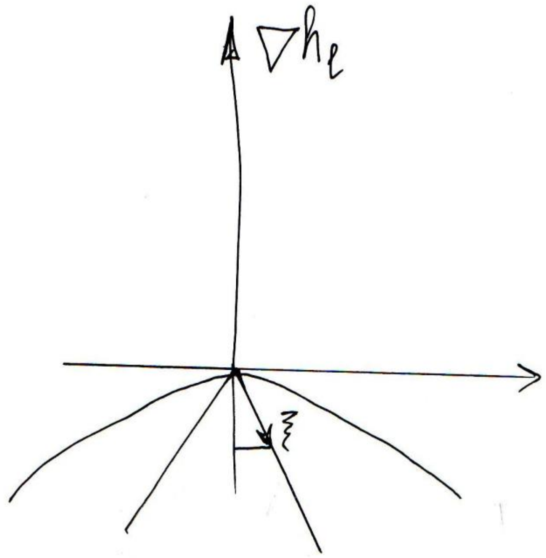



Рис. 3. Конус возможных направлений $\xi$, двигаясь в которых можно оставаться в допустимой области.

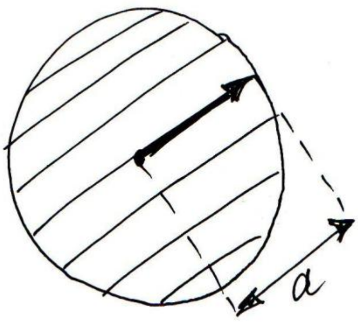
Если не ограничить вектор $\xi$, то угол раскрытия конуса будет большим, близким к 180°, и тогда выбранное алгоритмом направление $\xi$ может совпасть с касательной к границе области и тогда следующая точка окажется недопустимой. Чтобы этого избежать, вектор $\xi$ ограничивают. Это можно сделать несколькими способами.

1. Ограничение по модулю: $\|\xi\| \le a$ (рис. 4*а*).

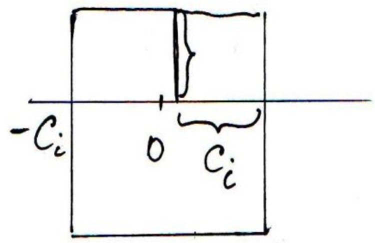
Недостаток этого способа заключается в том, что задаются нелинейные ограничения.

2. Ограничение по модулю компонент вектора, т.е. $|\xi_j| \le c_j$ (рис. 4*б*).

В отличие от ограничения по модулю всего вектора, в этом случае приходится вводить в два раза больше ограничений. Но достоинством этого способа является линейность новых ограничений, поэтому выберем как раз этот способ.




а)




б)

Рис. 4. Ограничение вектора по модулю (а) и ограничение по модулю компонент вектора (б).

Формальная схема метода возможных направлений следующая.

1. На каждом шаге для точки $\mathbf{x}^k$ строится множество существенных ограничений:

$$S = \left\{ j \middle| h_j(\mathbf{x}^k) \ge -\delta \right\}.$$

2. Решается вспомогательная задача линейного программирования, позволяющая найти направление, как можно более похожее на направление антиградиента, но позволяющее оставаться в допустимой области:

$$\begin{cases} (\mathbf{p}, \boldsymbol{\xi}) \to \min, \\ (\nabla h_i(\mathbf{x}^k), \boldsymbol{\xi}) \le -\lambda, \ \forall j \in S, \\ |\xi_j| \le c_j. \end{cases}$$

3. При решении задачи (3) возможно несколько случаев.

а) Решение не существует.

Но форма не может быть ограничена снизу, т.к. все $|\xi_j| \le c_j$. Может оказаться, что область допустимых значений вспомогательной задачи линейного программирования пуста. Это означает, что либо даже далекие границы области считаются близкими и потому попадают в список существенных ограничений, либо конусы возможных направлений слишком узки, либо и то и другое. В этом случае, чтобы шире раскрыть конус, полагают $\delta = \delta/m$ (может также $\lambda = \lambda/r$) и переходят к шагу 1.

б) Решение существует, но (**p**, $\xi$) > 0.

Переходить к новой точке в направлении **p** нет смысла, так как значение целевой функции только возрастет. В этом случае также причиной может оказаться слишком узкие конусы возможных направлений. Поэтому и в этом случае полагают $\lambda = \lambda/r$ и переходят к шагу 2.

в) Решение существует, но $-\delta < (\mathbf{p}, \boldsymbol{\xi}) < 0$.

Это означает, что в полученном направлении $\xi$ функция будет убывать, но медленно. В полученном направлении осуществляют переход к новой точке:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + t\boldsymbol{\xi}.$$

Но после перехода, как и в случае (а) полагают $\delta = \delta/2$ и $\lambda = \lambda/2$.

4. Если задача линейного программирования успешно решения и ни один из описанных в пункте 3 случае не выполнился, осуществляют переход к новой точке:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + t\boldsymbol{\xi}.$$

Величину шага *t* выбирают так, чтобы не нарушить ни одно из ограничений. Для этого решают нелинейные уравнения

$$h_i\left(\mathbf{x}^k + t_i\boldsymbol{\xi}\right) = 0,$$

чтобы определить точку пересечения выбранного направления и границы области. Затем из всех найденных значений $t_i$ выбирается минимальное:

$$t = \min\left\{t_i\right\}.$$

Алгоритм прекращает свою работу при выполнении условия $||t\boldsymbol{\xi}|| \le \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – некоторая константа, задающая точность обнаружения минимума. Если это условие не выполняется, то осуществляется переход к шагу 1, но уже для новой точки $\mathbf{x}^{k+1}$.

Данному алгоритму свойственны следующие недостатки:

– нет рекомендаций по выбору управляющих констант $\lambda$ и $\delta$,

– метод не позволяет решить задачу с ограничениями типа равенств,

– на самом первом шаге требуется точка, уже находящаяся в допустимой области.

Последний недостаток легко устраняется, так как внутреннюю точку можно также найти методом, похожим на метод возможных направлений, начиная с произвольной точки $\mathbf{x}^0$:

1. Пусть $\mathbf{x}^0 \notin G$ - произвольная точка.

Строится множество нарушенных ограничений $S_1 = \{\, j \,|\, h_j(\mathbf{x}^0) > 0\}$.

если $S_1 = \varnothing$, то внутренняя точка уже получена. В противном случае строится множество не нарушенных, но существенных ограничений $S = \{\, j \,|\, j \notin S_1 \wedge h_j(\mathbf{x}^0) > -\delta\}$.

2. Выбирается некоторое нарушенное ограничение $l \in S_1$ и решается вспомогательная задача линейного программирования, состоящая в поиске такого направления $\xi$, чтобы ненарушенные ограничения оставались ненарушенными, но при для новой точки было также ненарушенным и *l*-е ограничение:

$$\begin{cases} \left(\nabla h_l\left(\mathbf{x}^0\right), \boldsymbol{\xi}\right) \to \min, \\ \left(\nabla h_l\left(\mathbf{x}^0\right), \boldsymbol{\xi}\right) \le -\lambda, \qquad\qquad \forall j \in S \\ \left|\xi_j\right| \le c_j. \end{cases}$$

3. Возможные особые варианты решения те же самые, что и в основном алгоритме (см. выше). При их возникновении поступают аналогично.

4. Осуществляют переход к новой точке:

$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + t\boldsymbol{\xi}$

Параметр *t* выбирается исходя из условий:

а) $t_l : h_l\left(\mathbf{x}^k + t_l\boldsymbol{\xi}\right) \le 0$.

т.е. в данном направлении следует двигаться до тех пор, пока *l*-е ограничение не перестанет быть нарушенным. Если не существует такого $t_l$ (т.е. нет допустимых точек в этом направлении), то выбирается такое значение, чтобы нарушение было как можно слабее, т.е.

$t_l = \min\limits_t h_l\left(\mathbf{x}^k + t\boldsymbol{\xi}\right)$.

б) Для всех ненарушенных ограничений решается уравнение:

$t_i : h_i\left(\mathbf{x}^k + t_i\boldsymbol{\xi}\right) = 0 \qquad i \notin S_1$.

Выбирается величина шага:

$t = \min\{t_i\}, \left(i \notin S_1 \text{ или } i = l\right)$.

Полученное значение *t* позволяет определить, на какое расстояние можно перейти так, чтобы не нарушить остальные ограничения.

$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + t\boldsymbol{\xi}$;

Далее осуществляется переход к шагу 1, но уже для новой точки $\mathbf{x}^{k+1}$.

## Метод аппроксимации границ области

Данный метод позволяет решать следующую каноническую задачу нелинейного программирования с ограничениями-неравенствами:

$$\begin{cases} (\mathbf{p}, \mathbf{x}) \to \min, \\ h_i(\mathbf{x}) = 0,\ i = \overline{1, m}, \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \qquad (1)$$

Будем считать, что множество допустимых решений *G* ограниченно. Тогда, очевидно, это множество является подмножеством некоторого гиперпараллелепипеда $Q_0$ (рис. 1), задаваемого неравенствами

$$a_j \le x_j \le b_j,\ j = \overline{1, n}.$$

Возьмем произвольную внутреннюю точку $\mathbf{x}^0$ в *G* и решим вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} (\mathbf{p}, \mathbf{x}) \to \min, \\ \mathbf{x} \in Q_0. \end{cases}$$

Очевидно, это задача линейного программирования. Решив ее, получим точку $\mathbf{q}^1$, не принадлежащую *G*. На прямой, соединяющей точки $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{q}^1$ найдем точку $\mathbf{x}^1$, лежающую на границе области *G*:

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + t\left(\mathbf{q}^1 - \mathbf{x}^0\right),$$

где *t* – некоторое вещественное число из интервала (0, 1).

Точка $\mathbf{x}^1$ принадлежит области *G*, а значит

$$\min_{\mathbf{x} \in G} (\mathbf{p}, \mathbf{x}) \le \left(\mathbf{p}, \mathbf{x}^1\right).$$

Область *G* включена в область $Q_0$, а значит

$$\min_{\mathbf{x} \in Q_0} (\mathbf{p}, \mathbf{x}) \le \min_{\mathbf{x} \in G} (\mathbf{p}, \mathbf{x}).$$

Таким образом, получена оценка сверху и оценка снизу минимума функции (**p**, **x**) в области *G*:

$$\alpha_1 \le \min_{\mathbf{x} \in G} (\mathbf{p}, \mathbf{x}) \le \beta_1,$$

где $\alpha_1 = \min_{\mathbf{x} \in Q_0} (\mathbf{p}, \mathbf{x}),\ \beta_1 = \left(\mathbf{p}, \mathbf{x}^1\right).$

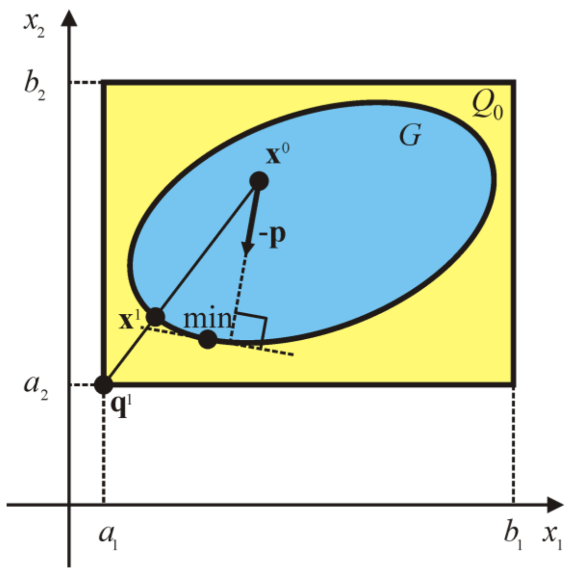



Рис. 1

Пусть точка $\mathbf{x}^1$ лежит на границе G, описываемой *l*–й кривой в (1), т.е. $h_l(\mathbf{x}^1) = 0$. Построим отсекающую гиперплоскость, касательную к области G в этой точке и рассмотрим следующую область $\mathbf{Q}_1$:

$$\mathbf{Q}_1 = \left\{ \mathbf{x}: \ \ \mathbf{x} \in Q_0 \ \ \ \& \ \ \left( \nabla h_l \left( \mathbf{x}^1 \right), \mathbf{x} - \mathbf{x}^1 \right) \le 0 \right\}.$$

Эта область изображена на рис. 2.

Аналогично предыдущему шагу, снова решается вспомогательная задача линейного программирования:

$$\begin{cases} (\mathbf{p}, \mathbf{x}) \to \min, \\ \mathbf{x} \in Q_1. \end{cases}$$

Решив ее, получим точку $\mathbf{q}^2$, не принадлежащуюю *G*. На прямой, соединяющей точки $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{q}^2$ найдем точку $\mathbf{x}^2$, лежающую на границе области *G*. Аналогично получается оценка сверху и оценка снизу минимума функции $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ в области *G*:

$$\alpha_2 \le \min_{\mathbf{x} \in G} (\mathbf{p}, \mathbf{x}) \le \beta_2 .$$

где $\alpha_2 = \min\limits_{\mathbf{x} \in Q_1} (\mathbf{p}, \mathbf{x}), \ \beta_2 = \left( \mathbf{p}, \mathbf{x}^2 \right).$

Так как $Q_1 \subseteq Q_0$, для оценки снизу справедливо неравенство: $\alpha_2 \ge \alpha_1$.

Может оказаться, что $(\mathbf{p}, \mathbf{x}^2) \ge (\mathbf{p}, \mathbf{x}^1)$, поэтому в качестве оценки сверху вместо $(\mathbf{p}, \mathbf{x}^2)$ выберем

$$\beta_2 = \min \left\{ \beta_1, \left( \mathbf{p}, \mathbf{x}^2 \right) \right\}.$$

В итоге получается последовательность сходящихся оценок, а точки $\mathbf{x}^k$ будут приближаться к решению задачи (1).

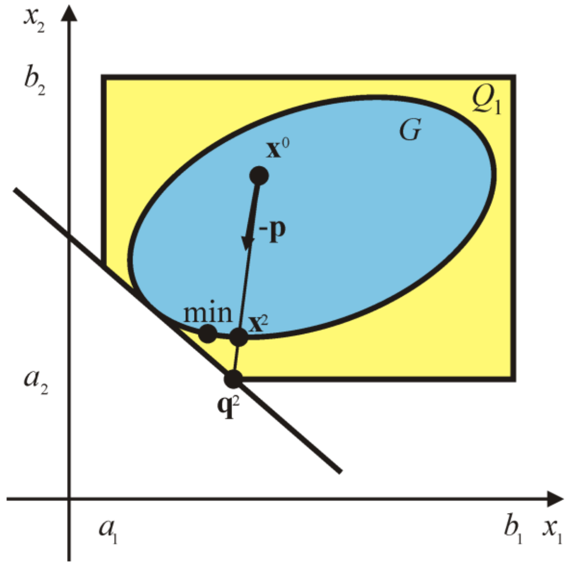



Рис. 2

## Метода оптимизации функций при наличии ограничений.

### *§1. Метод штрафной функции (ШФ).*

Достоинства метода штрафа: простота принципа и практическая эффективность.

Оптимизацию нелинейной функции при наличии функциональных ограничений не обязательно выпуклых можно свести к задаче безусловной оптимизации. Рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned} & f(x) \to \min \\ & g_i(x) \le 0, i = 1...m \qquad (1.1) \\ & f, g_i - \text{непрерывны в} \quad R^n \end{aligned}$$

Метод ШФ основан на преобразовании исходной задачи с ограничениями в одну или последовательность задач безусловной оптимизации. С помощью функций, задающих ограничения, строится так называемый штраф, который добавляется к целевой функции исходной задачи так, что нарушение какого-либо ограничения становится невыгодным с точки зрения полученной задачи безусловной оптимизации.

Рассмотрим функцию:

$$\varphi(y) = \begin{cases} 0, y \le 0 \\ y^2, y \ge 0 \end{cases} \qquad (1.2)$$

Положим:

$$\psi(x,r) = r\sum_{i=1}^{m}\varphi(g_i(x)), r > 0 \qquad (1.3)$$

<u>Опр 1.1</u> функцию $\psi(x,r)$, определенную для всех $r > 0$ на множестве X, будем называть штрафной функцией целевой задачи (1.1)

В допустимой области $\psi(x,r) = 0$, в недопустимых $\psi(x,r) \to \infty$

Т.о. вместо задачи (1.1) решается при достаточно большом r задача:

$$F(x,r) = f(x) + \psi(x,r) \to \min_{x \in R^n} \qquad (1.4)$$

Установим формально некоторые условия применимости метода ШФ.

<u>Теорема 1.1 (о сходимости метода ШФ)</u>

Пусть $f(x)$ и $g_i(x), i = 1...m$ - непрерывная задача (1.1) имеет непустую область допустимых решений:

$D = \{x \in R^n \mid g_i(x) \le 0, i = 1...m\}$ и $\forall c \quad D_c(r) = \{x \in R^n \mid F(x,r) \le c\}$ - компакт

Тогда

1. $\exists M = \min_{x \in D} f(x)$ и $\forall r \quad \exists x(r) : \min_{x \in R^n}\{F(x,r)\} = F(x(r),r) = M(r) \le M$

2. $\exists$ последовательность $\{x(r_k)\} \to x^*$, где $x^*$ - оптимальное решение (1.1) и выполняется $\{M(r_k)\} \to M$

<u>Док-во:</u>

Самостоятельно.

<u>Пример 1.1</u>

Рассмотрим задачу:

$$f(x) = -x \to \min$$
$$g(x) = x \le 0$$

Решение:

Положим $\psi(x,r) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ rx^2, x > 0 \end{cases}$

$$F(x,r) = \begin{cases} -x, x \le 0 \\ -x + rx^2, x > 0 \end{cases} \to \min_{x \in R^n}$$

Дифференцируем и находим точки min:

$$x^*(r) = \frac{1}{2} r, m(r) = -\frac{1}{4} r =>$$
$$=> \lim_{r \to \infty} x^*(r) = x^* = 0, \lim_{r \to \infty} M(r) = 0$$

### *§2. Метод отсекающей гиперплоскости.*

Рассмотрим задачу:

$$c^T x \to \min, g(x) \le 0 \qquad (2.1)$$

Где $g(x)$ - выпуклая

Пусть допустимое множество $D = \{x \mid g(x) \le 0\} \ne 0$ и ограниченное => можно найти ограниченное множество $S_0 = \{x \mid A_n^T x \le b_n, n = 1...l\} : D \subseteq S_0$ (например, гиперкуб).

Рассмотрим задачу:

$$c^T x \to \min, x \in S_0 \qquad (2.2)$$

Пусть $x^*$ - ее оптимальное решение ($\exists$ всегда т.к. $S_0$ -компакт)

Построим такую гиперплоскость $p_0^T x = \alpha$ :

$$\forall x \in D \qquad p_0^T x \le \alpha \text{ и } p_0^T x_0^* > \alpha \qquad (2.3)$$

- отсекающая гиперплоскость.

Пусть $p_0$ - субградиент функции $g(x)$ в точке $x_0^*$. Рассмотрим гиперплоскость:

$$H_0 = \{x \in S_0 \mid p_0^T x = \alpha = p_0^T x_0^* - g(x_0^*)\} \qquad (2.4)$$

Уравнение $p_0^T x = \alpha$ (2.5)

Где $\alpha = p_0^T x_0^* - g(x_0^*)$, - это уравнение отсекающей гиперплоскости.

Покажем это:

Если $x_0^* \notin S_0$ то из $g(x_0^*) > 0$ и $p_0^T x_0^* = \alpha + g(x_0^*) \Rightarrow p_0^T x_0^* > \alpha$

Если $x \in S_0$ из выпуклости $g(x)$ следует

$$g(x) - g(x_0^*) \geq p_0^T (x - x_0^*) \qquad (2.6)$$

Т.к. $g(x \leq 0)$ из (2.6) => $0 \geq g(x) \geq p_0^T (x - x_0^*) + g(x_0^*)$, т.е.

$$p_0^T x \leq p_0^T x_0^* - g(x_0^*) = \alpha$$

Т.о. предложена процедура построения последовательность пробных точек $\{x_k^*\}$. Если на некотором шаге алгоритма получим $x_i^* \in D$, то найдено оптимальное решение, в противном случае получим последовательность недопустимых точек $\{x_k^*\}$. Из предположения об ограниченности множества $S_0$ => что последовательность $\{x_k^*\}$ ограничена в $S_0$. Из всех ограниченных последовательностей можно выделить одну сходящуюся подпоследовательность, т.е. $\exists \hat{x} = \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k}^*$

Можно показать, что при ограниченности субградиента функции $g(x)$ на множестве $S_0$:

$$\lim_{k \to \infty} g(x_{n_k}^*) = g(\hat{x}) = 0$$

Т.о. если $\hat{x}$ - предельная точка $\{x_k^*\}$, то $g(\hat{x}) = 0$, а также если $x^*$ - оптимальное решение исходной задачи (2.1), то $c^T x^* \geq c^T x_k{}^*$ (т.е. $D \subseteq S_k$)

Из непрерывности функции $c^T x$ => $c^T x^* \geq c^T \hat{x}$, т.е. $\hat{x}$ - оптимальное решение (2.2)

### *§3. Метод условного градиента.*

Рассмотрим задачу:

$$f(x) \to \min_{x \in D} \qquad (3.1)$$

D – Выпуклое замкнутое непустое ограниченное множество.

f(x) – дифференцируемая функция

пусть $x_k$ - пробная точка из D. Рассмотрим схему минимизации

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k \qquad (3.2)$$

В определении для любой внутренней точки $x_k$ приращение можно представить в виде:

$$f(x) - f(x_k) = \langle grad \quad f(x_k), x - x_k \rangle + o(\| x - x_k \|) =>$$

Определим направление вектора $p_k$, решая задачу:

$$\langle grad \quad f(x_k), x - x_k \rangle \to \min_{x \in D} \qquad (3.3)$$

Пусть решением этой задачи является точка $z_k$

$$z_k = \arg\min_{x \in D} \langle grad \quad f(x_k), x - x_k \rangle$$

Т.е. $\forall x \in D$ выполняется условие: $\langle grad \quad f(x_k), x \rangle \ge \langle grad \quad f(x_k), z_k \rangle$

В качестве направления минимизации выберем $p_k = z_k - x_k$. Т.к. $z_k \in D$, - выпуклое множество => точки вида:

$$x = \lambda z_k + (1-\lambda) x_k = x_k + \lambda (z_k - x_k),$$

при $\lambda \in [0,1]$ - допустимые точки исходной задачи => длина шага определяется из решения задачи: $f(x_k + f(z_k - x_k)) \to \min\limits_{0 \le \alpha_k \le 1}$ =>

получим схему решения задачи.

Проанализируем ее.

Пусть f(x) – непрерывная дифференцируемая функция: в области задания существует константа Липшица, для ее градиента: $\| grad \quad f(x) - grad \quad f(y) \| \le L \| x - y \|$

Оценим значение функции в точке $x_{k+1}$. Обозначим $x_\theta = x_k + \theta p_k$

Тогда $f(x_{k+1}) = f(x_k) + \alpha_k \langle grad \quad f(x_\theta) - grad \quad f(x_k), p_k \rangle + \alpha_k \langle grad \quad f(x_k), p_k \rangle \le$

$$\le f(x_k) + \alpha_k \langle grad \quad f(x_\theta), p_k \rangle + (\alpha_k)^2 L \| p_k \|^2$$

Обозначим через $\delta_k$ величину равную $\delta_k = (-\frac{1}{2}) \frac{\langle grad \quad f(x_k), p_k \rangle}{L \| p_k \|^2}$

Тогда при $\alpha_k^* = \min\{\delta_k, 1\}$ (3.4)

Выполняется $f(x_{k+1}) < f(x_k)$. В качестве условия окончания расчетов примем $\langle grad \quad f(x_k), p_k \rangle = 0$, т.е. $x_{k+1} = x_k$

Пример 3.1

$$x_1^2 + x_2 \to \min$$
$$-x_1 - x_2 + 1 \le 0, x_1 \le 1, x_2 \le 1$$

$$1. x_1 = (x_1', x_2') = (1,1). grad \quad f(x_1) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решая задачу ЛП: $\langle grad \quad f(x_1), x - x_1 \rangle_{x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = 2x_1 + x_2 - 3 \to \min\limits_{x \in D}$

Получим: $z_1 = (0,1)^T$, $p_1 = z_1 - x_1 = (1,0)^T$

Т.к. $\langle grad \quad f(x_1), p_1 \rangle = -2 < 0$, решая задачу

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = (1 - \alpha_1)^2 + 1 \to \min_{\alpha_1}$$

Получаем $\alpha_1^* = 1, x_2 = x_1 + \alpha_1^* p_1 = (0,1)^T$. Переходим к следующей итерации:

$2. grad \quad f(x_2) = (0,1)^T$. Решая: $x_2 - 1 \to \min\limits_{x \in D}$ получим

$z_2 = (1,0), p_2 = (1,-1)^T$ и $\langle grad \quad f(x_2), p_2 \rangle = -1 < 0$

Решая $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \alpha_2^2 + (1 - \alpha_2) \to \min\limits_{\alpha_2}$, получим:

$\alpha_2^* = 1/2, x_3 = (1/2, 1/2)^T$. Переходим к следующей итерации

$3. grad \quad f(x_3) = (1,1)^T$. Решая $x_1 + x_2 - 1 \to \min\limits_{x \in D}$, получим:

$z_3 = (1,0), p_3 = (-1/2, 1/2)^T$ и $\langle grad \quad f(x_3), p_3 \rangle = 0 \Rightarrow x_3 = x^* = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

# Глава 6

**Оптимизационные задачи на графах**

Предполагается, что слушатели знакомы с основами теории графов (курс «Дискретная математика»).

### Гл.1 Оптимизационные задачи на неориентированных графах

Наиболее интересной в этом разделе является задача построения остовного дерева минимального веса. Решается с помощью алгоритма Прима.

В терминах неориентированных графов формулируется ряд уже рассмотренных задач, в частности – задача о назначениях. Решается с помощью алгоритма Мака.

### Гл.2 Оптимизационные задачи на ориентированных графах

Основные вопросы:

1. Кратчайший путь между выделенной парой вершин
2. Кратчайший путь между выделенной вершиной и всеми остальными вершинами
3. Длины путей между всеми парами вершин и что это за пути.

#### § 1 Алгоритм Дейкстры поиска: кратчайшего пути в орграфе с неотрицательными весами

Пусть орграф $G=(X,U)$; $\lambda$-й дуге $(x_i x_j)\in U$ графа G поставим в соответсвтие число $c(x_i x_j)\geq 0$. Если дуга отсутствует, то полагаем $c(x_i x_j)=\infty$. $c(x_i x_j)$ - это вес дуги, или длина дуги.

Длина пути – это сумма длин дуг, составляющих путь. $\forall$ 2х вершин s и t графа G может существовать несколько путей. Тот, который имеет минимальную длину называется **кратчайшим**. Один из наиболее эффективных алгоритмов решения задачи поиска кратчайшего пути между парой вершин является алгоритм Дейкстры (1959).

**Основная идея алгоритма Дейкстры:** Пусть s – начальная вершина, и известно m ближайших к ней вершин (близость определяется длиной кратчайшего пути). Пусть известны кратчайшие пути из s в эти m вершин: $x_k,\ k=\overline{1,m}$. Определяем (m+1)-ю вершину ближайшую к s. Для этого: пометим s и $x_k,\ k=\overline{1,m}$. Для $\lambda$ из непомеченных вершин $x_k$ $(k=m+1,m+2,\ldots)$ построим пути непосредственно соединяющие с помощью дуг $(x_k, x_k)$ $\lambda$-ю помеченную вершину $x$ с $x_k$. Выберем из этих путей кратчайший – его будем считать условно кратчайшим путем из вершины s в вершину $x_k$. (m+1) –й ближайшей вершиной к s является та, у которой условно кратчайший путь имеет минимальную длину.

Начиная с m=1 процедура повторяется пока не будет получен кратчайший путь в вершину s.

**Алгоритм Дейкстры**

Перед началом – все вершины не помечены и дуги не окрашены. Пусть $l(x_i)$ - длина кратчайшего пути из s в $x_i$ .

**Минимизация:** Пусть $l(s)=0$ - постоянная пометка s, - временные пометки. Положим p=s – последняя из окрашенных вершин.

**<u>Основной цикл</u>**

**<u>Шаг 1</u>** *(обновление пометок):* Для всех $x_i \in \Gamma(p)$ - (множество вершин, соединенных с $x_i$ ), пометки которых временные, изменить пометки в соответствии со следующим выражением:

$$l(x_i) \leftarrow \min\left(l(x_i), l(p)+l(p,x_i)\right)$$

**<u>Шаг 2</u>** (*превращение пометки в постоянную)*

Среди всех вершин с временными пометками нашли такую, для которой $l\left(x_i^*\right)=\min\left\{l(x_i)\right\}$. Считать пометку вершины $x_i^*$ постоянной и положить $p=x_i^*$. Кроме того, окрасить дугу, ведущую в выбранную на данном шаге вершину $x_i^*$.

**<u>Шаг 3:</u>** Если p=t, то $l(p)$ - длина кратчайшего пути => stop. Кратчайший путь – единственный путь из s в t, составленный из окрашенных ребер. Если p=t перейти к шагу 1.

Сложность алгоритма $\dfrac{3n(n-1)}{2}$ - операций (сложения, сравнения) + выявление помеченных/непомеченных вершин. => сложность $Oc_{n^2}$

### § 2 Алгоритм Флойда поиска кратчайшего пути между всеми парами вершин орграфа в случае общей матрицы весов.

Пусть требуется найти кратчайшие пути между всеми парами вершин в случае общей матрицы весов, в которой допускаются циклы отрицательной длины. Возможно решение с многократным применением алгоритма Дейкстры для всевозможных начальных вершин, но это накладно в вычислительном смысле.

Алгоритм Флойда базируется на последовательном преобразовании начальной матрицы весов. На kой итерации матрица содержит длины кратчайших путей между $\lambda$ -й парой вершин с тем ограничением, что путь между $x_i$ и $x_j$ $\left(\text{äëÿ}\ \forall x_i, x_j\right)$ содержит в качестве промежуточных только вершины из множества $\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right)$.

Введем обозначения: Перенумеруем вершины исходного графа целыми числами от 1 до n.

Положим в начальной матрице весов $c^*=\left[c_{ij}^*\right]$ для всех $i=\overline{1,n}$, $c_{ii}^0=0$ и $c_{ij}=\infty$, если в графе отсутствует дуга $\left(x_i, x_j\right)$.

**<u>Инициализация:</u>** k=0.

**<u>Основной цикл</u>**

**<u>Шаг 1:</u>** k=k+1

**<u>Шаг 2:</u>** для всех $i \neq k$ : $c_{ik}^{k} \neq \infty$ и для всех $j \neq k$ : $c_{kj}^{k} \neq \infty$ определить по величинам элементов матрицы $C^{k-1}$ величины элементов $c^{k}$ используя рекурсивное соотношение:

$$c_{ij}^{k} = \min\left\{c_{ij}^{k-1}, c_{ik}^{k-1} + c_{kj}^{k-1}\right\}$$

При определении величины $\lambda$ элемента матрицы $C^{k}$ фиксировать соответствующие кратчайший путь.

**<u>Шаг 3</u>** *(проверка на окончание):*

a) Если существует номер *i*: $c_{ii}^{k} < 0$ ,то в графе G существует цикл отрицательного веса, содержащий вершину $x_i$ и решения нет =>stop.

b) Если все $c_{ii}^{k} > 0$ и k=n, то получено решение. Матрица $C^{n} = \left[c_{ij}\right]$ дает длины всех кратчайших путей => stop.

c) Если все $c_{ii}^{k} \geq 0$ на k<n, то перейти к шагу 1.

Кратчайшие пути можно найти аналогично алгоритму Дейкстеры или процедурой предложенной Ху: в дополнение к матрице весов хранится и обновляется вторая $\left(n \times n\right)$ матрица $0 = \left[0_{ij}\right]$. Элемент $0_{ij}$ указывает вершину, непосредственно предшествующую вершине $x_j$ в кратчайшем пути от $x_i$ к $x_j$, т.е. $0_{ij} = \left\{x_i \middle| x_i \to x_j\right\}$. Начальные значения $0_{ij} = x_i$ для вех $x_i$ и $x_j$.

На шаге 3 алгоритма происходит обновление матрицы:

$$0_{ij} = \begin{cases} 0_{kj} \text{ ,åñëè } \left(c_{ik} + c_{kj}\right) < c_{kj} \\ 0_{ij} \text{ - èí à÷å} \end{cases}$$

В конце алгоритма кратчайшие пути получатся непосредственно из заключительной матрицы 0. Кратчайший путь между $x_i$ и $x_j$ образует такую последовательность вершин $x_i, x_a, \ldots, x_b, x_n, x_j$:

$$x_a = 0_{ij} = \left\{x_a \middle| x_a \to x_j\right\}, x_b = 0_{ia} = \left\{x_b \middle| x_b \to x_a\right\}$$

и т. д. до $x_i = 0_{is} = \left\{x_i \middle| x_i \to x_s\right\}, \ldots, x_a = 0_{ij}, x_b = 0_{ia}$ и до $x_i = 0_{is}$.

Если всем $c_{ii}$ придать начальные значения $\gamma$, а не 0, то конечное значение $c_{ii}$ будут равны весу цепи, проходящей через вершину $x_i$. Из матрицы 0 легко найти цикл отрицательного веса, если достигается $c_{ii} < 0$.

Алгоритм Флойда требует $O\left(\left|x\right|^{3}\right)$.

Другие задачи решаемые на графах:

- Построение максимального потока и минимального разряда (алгоритм Форда-Фалкерсона)
- Построение заданного потока минимальной стоимости

**Задачи на методы поиска**

1. Решить методом наискорейшего спуска задачу безусловной минимизации

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 + x_2 - 5 \to \min$$

$$\varepsilon = 0.4, x^{(0)} = (0, 2)$$

2. Решить методом Ньютона задачу безусловной оптимизации

$$f(x) = x_1^3 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_1x_2 + x_1 - 3x_2 - 4 \to \min$$

$$\varepsilon = 0.2, x^{(0)} = (2, 2)$$

3. Решить методом Флетчера-Ривса

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 2x_2, \quad x^0 = (1,0)$$

4.Решить методом Гаусса-Зайделя

$$f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 12x_1, \quad x^0 = (5,3)$$

5.Решить методом Ньютона-Рафсона

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2, \quad x^0 = (5,10)$$

6.Решить методом покоординатного спуска

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2, \quad x^0 = (4,5)$$

7.Решить методом наискорейшего спуска

$$f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 6x_1 - 32x_2, \quad x^0 = (0,0)$$

8.Решить методом Ньютона-Рафсона

$$f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2, \quad x^0 = (1,2)$$

9.Решить методом Флетчера-Ривса

$$f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2, \quad x^0 = (2,0)$$

10.Решить методом Гаусса-Зайделя задачу безусловной оптимизации

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + x_1 - 3x_2 - 2 \to \min$$

$$\varepsilon = 0.2, x^{(0)} = (2, 0)$$

11. Решить методом штрафных функций с использованием овражного метода

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 - 3x_2 - 2 \to \min$$

$$x_1x_2 = 2$$

$$\varepsilon = 0.2, x^{(0)} = (2, 0)$$

12. Решить методом штрафных функций с использованием овражного метода

$$f(x) = x_1^2 - 3x_2^2 + x_1 + x_2 \to \min$$

$$x_1 x_2 = 1$$

$$\varepsilon = 0.2, x^{(0)} = (1, 0)$$

**Задачи на симплекс-метод**

**Задачи**

Решить задачу симплекс–методом, найдя начальное базисное допустимое решение методом икусственного базиса:

1) $-x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 10x_4 \longrightarrow \min$,

$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0,\ x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 11,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0;$

2) $-x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 \longrightarrow \min$,

$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 3,\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 \leq 4,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0;$

3) $-x_1 - 10x_2 + x_3 - 5x_4 \longrightarrow \min$,

$x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1,\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2,\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 5,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0;$

4) $-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \longrightarrow \min$,

$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 5,\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 5,\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 4,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0;$

5) $-x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \longrightarrow \min$,

$3x_1+x_2+x_3+x_4-2x_5 = 10,\ 6x_1+x_2+2x_3+3x_4-4x_5 = 20,\ 10x_1+x_2+3x_3+6x_4-7x_5 = 30,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0;$

6) $-x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 \longrightarrow \min$,

$x_2 + x_3 - 2x_4 + 7x_5 = 2,\ x_1 + x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 2,\ x_1 + x_2 - 2x_4 + 7x_5 = 2,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0.$

## Задачи на двойственный симплекс-метод

### Задачи

Решить с помощью двойственного симплекс–метода задачу, выбрав базис $B^0$ в качестве исходного базиса:

1) $-x_1 - 2x_2 + 4x_3 \longrightarrow \min$,

$x_1 + x_2 - 3x_3 = 0,\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$,

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$,

$B^0 = (A_1, A_2)$;

2) $-x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 35x_4 \longrightarrow \min$,

$2x_1 + 6x_2 - 8x_3 - 30x_4 = 6,\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -5$,

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$,

$B^0 = (A_1, A_2)$;

3) $-x_1 - x_2 - x_3 + x_5 \longrightarrow \min$,

$x_1 + x_2 - 4x_4 + 2x_5 = -2,\ x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = -2,\ x_1 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = -2$,

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$,

$B^0 = (A_1, A_2, A_3)$.

## Задачи на выпуклое программирование

### Задачи

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на множестве $X$:

1) $f(x) = x_1x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 + x_1$,
$X = \{x \mid x_1 \in [0,1],\ x_2 \in [0,1]\}$;

2) $f(x) = x_1^3 - 4x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$,
$X = \{x \mid |x_1| \le 5,\ |x_2| \le 1\}$;

3) $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$,
$X = \{x \mid x_1 \in [0,2],\ x_2 \in [-1,2]\}$;

4) $f(x) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 7)^2$,
$X = \{x \mid x_1 + 2x_2 \le 12,\ x_1 + x_2 \le 9,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\}$;

5) $f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2$,
$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 \le 10,\ 2x_1 + 2x_2 = 5\}$;

6) $f(x) = x_1(\pi - x_1)\sin x_2 + x_2 \cos x_1$,
$X = \{x \mid x_1 \in [0,\pi],\ x_2 \ge 0\}$;

7) $f(x) = x_1 + x_2 + x_3$,
$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 \le x_3,\ x_3 \le 1\}$;

8) $f(x) = 2x_1x_2 + x_3$,
$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 = 1,\ 0 \le x_3 \le 2x_1 + 1\}$;

9) $f(x) = x_1^2 - x_2^2$,
$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 \le 16\}$;

10) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 + 16x_2$,
$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 \le 25\}$;

11) $f(x) = \operatorname{arctg} x_1 - \ln x_2$,
$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 \le 4,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 1\}$;

12) $f(x) = x_1 + x_2 - x_3$,
$X = \{x \mid x_1x_2x_3 \le 1,\ -x_1 + x_2 - x_3 \le 0\}$;

13) $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3|x_1 + x_2 + 2|$,
$X = E_2$;

# Задачи на штрафные функции

Пример со штрафами 05.10.2011


$$\begin{cases} x^3+y^3 \to max, \\ x^2+y^2=1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^3-y^3 \to min, \\ x^2+y^2-1=0; \end{cases}$$

$$g(x,y) = -x^3-y^3+\alpha\left(x^2+y^2-1\right)^2,$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = -3x^2+4\alpha x\left(x^2+y^2-1\right)=0, \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = -3y^2+4\alpha y\left(x^2+y^2-1\right)=0; \end{cases}$$

а) $\lrcorner\ x\neq 0,\ y\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x=4\alpha\left(x^2+y^2-1\right), \\ 3y=4\alpha\left(x^2+y^2-1\right) \end{cases} \Rightarrow \cancel{x=y}$

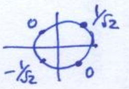
$x=y;$

$3x=4\alpha\left(2x^2-1\right);$

$2x^2-\frac{3}{4\alpha}x-1=0;$

$$x=\frac{1}{4}\left[\frac{3}{4\alpha}\pm\sqrt{\left(\frac{3}{4\alpha}\right)^2+8}\right]\xrightarrow[\alpha\to\infty]{}\pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$y=x=\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}.$




б) $\lrcorner\ x=0,\ y\neq 0 \Rightarrow 3y=4\alpha\left(y^2-1\right); \Rightarrow y^2-\frac{3}{4\alpha}y-1=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}\left[\frac{3}{4\alpha}\pm\sqrt{\left(\frac{3}{4\alpha}\right)^2+4}\right]=\pm 1.$$

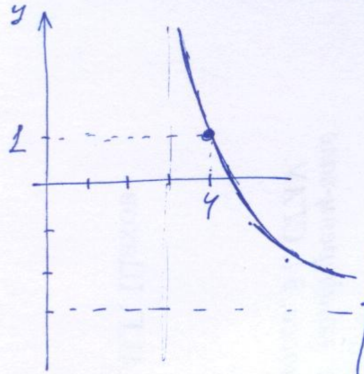

в) — " — $y=0,\quad x=\pm 1.$

г) $x=y=0$, но $x^2+y^2\neq 1$!

Ответ: $x=0,\ y=1$ и $x=1,\ y=0$.

# Задача со штрафом

12.10.2011




$(x-3)(y+3)=4$.

Найти т., ближайшую к $(0,0)$.

Решение:

$$L(x,y)=x^2+y^2+\alpha\left[(x-3)(y+3)-4\right]^2 \to \min_{x,y},$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x+2\alpha(y+3)\left[\ \dots\ \right]=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y+2\alpha(x-3)\left[\ \dots\ \right]=0. \end{cases}$$

$\lrcorner$ $x-3=u$, $y+3=v$

$$\Rightarrow \begin{cases} u+3+\alpha v(uv-4)=0, \\ v-3+\alpha u(uv-4)=0. \end{cases}$$

$$+\Rightarrow \quad u+v+\alpha(u+v)(uv-4)=0,$$

$\lrcorner$ $u+v\neq 0 \Rightarrow 1+\alpha(uv-4)=0 \Rightarrow uv-4=-1/\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow u+3+\alpha v(-1/\alpha)=0 \Rightarrow v=u+3 \Rightarrow$

$\Rightarrow u(u+3)-4=-1/\alpha \Rightarrow u^2+3u-(4-1/\alpha)=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow u=\frac{-3\pm\sqrt{9+4(4-1/\alpha)}}{2} \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} \frac{-3\pm 5}{2},$$

$u_1=1$, $u_2=-4$, $v_1=4$, $v_2=-1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow (x_1,y_1)=(4,1)$, $(x_2,y_2)=(-1,-4)$.

# Задачи по нелинейному программированию

Ниже будет рассмотрено несколько задач выпуклого программирования, которые допускают возможность аналитического решения с помощью теоремы Милютина-Дубовицкого. В первых двух задачах ограничения заданы линейными функциями, т.е. область допустимых значений – выпуклый многоугольник, но, в отличие от задач линейного программирования, целевая функция нелинейная. В первой задаче решение находится на одной из сторон многоугольника, во второй – на одной из его вершин. Третья задача является примером, когда как ограничения, так и целевая функция, являются нелинейными. В четвертой задаче целевая функция линейна, ограничения нелинейные. В третьей задаче решение находится внутри области допустимых значений, а в четвертой – на ее границе, причем в точке пересечения двух кривых. В пятой задаче рассмотрен случай, когда также нелинейные и целевая функция и ограничения, но, в отличие от предыдущих задач, решение не одно, а будет найдено целых пять точек локального минимума, среди которых выбрана наилучшая. Кроме того, в этой задаче будет продемонстрировано, что с помощью теоремы Милютина-Дубовицкого можно получить точку, удовлетворяющую необходимым условиям экстремума, но на самом деле не являющуюся ей.

## Задача 1

$$\begin{cases} x^3 + y^3 \to \min, \\ x + y \geq 4, \\ 2x - y \leq 5, \\ 2y - x \leq 5. \end{cases} \tag{1}$$

Область допустимых значений $G$ находится между двумя кривыми на рис. 1.

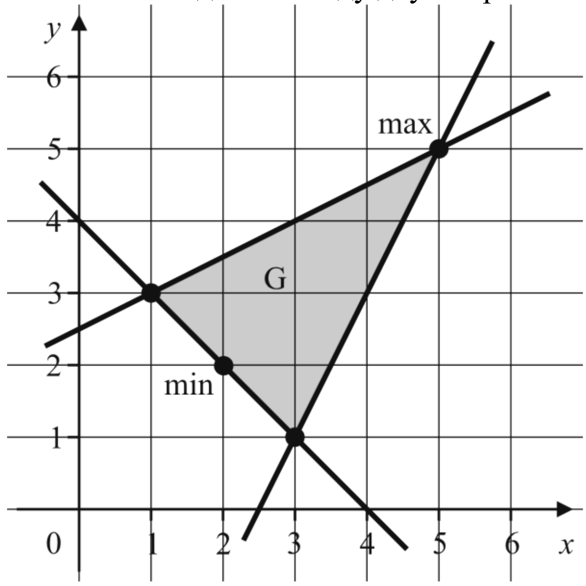



Рис. 1

**Решение**

Перепишем задачу в каноническом виде:

$$\begin{cases} f(x,y) = x^3 + y^3 \to \min, \\ h_1(x,y) = 4 - x - y \le 0, \\ h_2(x,y) = 2x - y - 5 \le 0, \\ h_3(x,y) = 2y - x - 5 \le 0. \end{cases} \tag{2}$$

Найдем градиенты целевой функции и функций, задающих ограничения-неравенства:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 3x^2 \\ 3y^2 \end{bmatrix}, \nabla h_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \nabla h_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \nabla h_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

По теореме Милютина-Дубовицкого для точки минимума $(x, y)$ должны существовать неотрицательные числа $\lambda_1$, $\lambda_2$, такие что:

$$\begin{cases} \nabla f + \lambda_1 \nabla h_1 + \lambda_2 \nabla h_2 = 0, \\ \lambda_1 h_1 = 0, \\ \lambda_2 h_2 = 0, \\ \lambda_3 h_3 = 0, \end{cases} \tag{4}$$

или

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = -3x^2, \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = -3y^2, \\ \lambda_1 (4 - x - y) = 0, \\ \lambda_2 (2x - y - 5) = 0, \\ \lambda_3 (2y - x - 5) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Возможны несколько вариантов:

- Случай 1. Все числа $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ равны нулю.

В этом случае из первых двух уравнений системы (5) следует, что $x = y = 0$. Но точка $(0, 0)$ не принадлежит области допустимых значений $G$, так как в (2) нарушается первое неравенство.

- Случай 2. $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 \neq 0$.

Тогда из первых двух уравнений системы (5) получим:

$$\begin{cases} \lambda_3 = 3x^2, \\ 2\lambda_3 = -3y^2. \end{cases} \tag{6}$$

Так как все переменные вещественные, единственным решением системы (6) снова является точка $(0, 0)$, не принадлежащая области допустимых значений $G$.

- Случай 3. $\lambda_{1,3} = 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

Аналогично, из первых двух уравнений системы (5) получим:

$$\begin{cases} 2\lambda_2 = -3x^2, \\ \lambda_2 = 3y^2. \end{cases} \tag{7}$$

И снова, так как все переменные вещественные, единственным решением системы (7) является точка $(0, 0)$, не принадлежащая области допустимых значений $G$.

- Случай 4. $\lambda_{2,3} = 0$, $\lambda_1 \neq 0$.

Тогда из (5) получим:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3x^2, \\ \lambda_1 = 3y^2, \\ 4 - x - y = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Из первых двух уравнений следует, что либо $x = y$, либо $x = -y$. В последнем случае из третьего уравнения получается, что $4 = 0$. Значит, возможен только случай, когда $x = y = 2$. Эта точка удовлетворяет необходимому условию минимума.

- Случай 5. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} \neq 0$.

Тогда из (5) получим:

$$\begin{cases} 2\lambda_2 - \lambda_3 = -3x^2, \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 = -3y^2, \\ 2x - y - 5 = 0, \\ 2y - x - 5 = 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Из последних двух уравнений получаем, что $x = y = 5$. Тогда из первых двух уравнений следует, что $\lambda_2 = \lambda_3 = -75 < 0$. Т.е. точка (5, 5) не является решением задачи (1).

- Случай 6. $\lambda_2 = 0$, $\lambda_{1,3} \neq 0$.

Тогда из (5) получим:

$$\begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_3 = -3x^2, \\ -\lambda_1 + 2\lambda_3 = -3y^2, \\ 4 - x - y = 0, \\ 2y - x - 5 = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Из последних двух уравнений получаем, что $x = 1$, $y = 3$. Тогда из первых двух уравнений следует, что $\lambda_1 = 11$, $\lambda_3 = -8 < 0$. Т.е. точка (1, 3) не является решением задачи (1).

- Случай 7. $\lambda_3 = 0$, $\lambda_{1,2} \neq 0$.

Тогда из (5) получим:

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 = -3x^2, \\ -\lambda_1 - \lambda_2 = -3y^2, \\ 4 - x - y = 0, \\ 2x - y - 5 = 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Из последних двух уравнений получаем, что $x = 3$, $y = 1$. Тогда из первых двух уравнений следует, что $\lambda_1 = 11$, $\lambda_3 = -8 < 0$. Т.е. точка (3, 1) не является решением задачи (1).

- Случай 8. $\lambda_{1,2,3} \neq 0$.

Тогда из (5) получим:

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = -3x^2, \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = -3y^2, \\ 4 - x - y = 0, \\ 2x - y - 5 = 0, \\ 2y - x - 5 = 0. \end{cases} \qquad (12)$$

Последние три уравнения данной системы несовместны.

Итак, из всех рассмотренных вариантов только точка (2, 2) может являться решением задачи (1).
Эта задача является примером, когда ее решение – точка на границе области допустимых значений, а не внутри нее. Эта точка находится на одной из кривых, задающих границу, а не на пересечении таких кривых. Этим и объясняется, что для точки (2, 2) только одно из значений $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ оказалось не равным нулю (случай 4).

## Задача 2

Область допустимых значений та же самая, что и в предыдущей задаче, но теперь у целевой функции требуется найти максимум:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 \to \max, \\ x + y \ge 4, \\ 2x - y \le 5, \\ 2y - x \le 5. \end{cases} \tag{13}$$

**Решение**
Перепишем задачу в каноническом виде:

$$\begin{cases} f(x, y) = -x^3 - y^3 \to \min, \\ h_1(x, y) = 4 - x - y \le 0, \\ h_2(x, y) = 2x - y - 5 \le 0, \\ h_3(x, y) = 2y - x - 5 \le 0. \end{cases} \tag{14}$$

Найдем градиенты целевой функции и функций, задающих ограничения-неравенства:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} -3x^2 \\ -3y^2 \end{bmatrix}, \nabla h_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \nabla h_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \nabla h_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

По теореме Милютина-Дубовицкого для точки минимума ($x$, $y$) должны существовать неотрицательные числа $\lambda_1$, $\lambda_2$, такие что:

$$\begin{cases} \nabla f + \lambda_1 \nabla h_1 + \lambda_2 \nabla h_2 = 0, \\ \lambda_1 h_1 = 0, \\ \lambda_2 h_2 = 0, \\ \lambda_3 h_3 = 0, \end{cases} \tag{16}$$

или

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = -3x^2, \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = -3y^2, \\ \lambda_1 (4 - x - y) = 0, \\ \lambda_2 (2x - y - 5) = 0, \\ \lambda_3 (2y - x - 5) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Возможны несколько вариантов:

- Случай 1. Все числа $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ равны нулю.

В этом случае из первых двух уравнений системы (17) следует, что $x = y = 0$. Но точка (0, 0) не принадлежит области допустимых значений $G$.

- <u>Случай 2</u>. $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 \neq 0$.

Тогда из первых двух уравнений системы (17) получим:

$$\begin{cases} \lambda_3 = -3x^2, \\ 2\lambda_3 = 3y^2. \end{cases} \qquad (18)$$

Так как все переменные вещественные, единственным решением системы (18) снова является точка (0, 0), не принадлежащая области допустимых значений $G$.

- <u>Случай 3</u>. $\lambda_{1,3} = 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

Аналогично, из первых двух уравнений системы (17) получим:

$$\begin{cases} 2\lambda_2 = 3x^2, \\ \lambda_2 = -3y^2. \end{cases} \qquad (19)$$

И снова, так как все переменные вещественные, единственным решением системы (19) является точка (0, 0), не принадлежащая области допустимых значений $G$.

- <u>Случай 4</u>. $\lambda_{2,3} = 0$, $\lambda_1 \neq 0$.

Тогда из (17) получим:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -3x^2, \\ \lambda_1 = -3y^2, \\ 4 - x - y = 0. \end{cases} \qquad (20)$$

Эта система уравнений не имеет вещественных решений при $\lambda_1 > 0$. Если же $\lambda_1 = 0$, то третье уравнение противоречиво.

- <u>Случай 5</u>. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} \neq 0$.

Тогда из (17) получим:

$$\begin{cases} 2\lambda_2 - \lambda_3 = 3x^2, \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 = 3y^2, \\ 2x - y - 5 = 0, \\ 2y - x - 5 = 0. \end{cases} \qquad (21)$$

Из последних двух уравнений получаем, что $x = y = 5$. Тогда из первых двух уравнений следует, что $\lambda_2 = \lambda_3 = 75 \geq 0$. Т.е. точка (5, 5) удовлетворяет необходимому условию решения задачи (13).

- <u>Случай 6</u>. $\lambda_2 = 0$, $\lambda_{1,3} \neq 0$.

Тогда из (17) получим:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = -3x^2, \\ \lambda_1 - 2\lambda_3 = -3y^2, \\ 4 - x - y = 0, \\ 2y - x - 5 = 0. \end{cases} \qquad (22)$$

Из последних двух уравнений получаем, что $x = 1$, $y = 3$. Тогда из первых двух уравнений следует, что $\lambda_1 = -11 < 0$, $\lambda_3 = 8$. Т.е. точка (1, 3) не является решением задачи (13), так как $\lambda_1 < 0$.

- <u>Случай 7</u>. $\lambda_3 = 0$, $\lambda_{1,2} \neq 0$.

Тогда из (17) получим:

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 = -3x^2, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = -3y^2, \\ 4 - x - y = 0, \\ 2x - y - 5 = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Из последних двух уравнений получаем, что $x = 3$, $y = 1$. Тогда из первых двух уравнений следует, что $\lambda_1 = -11 < 0$, $\lambda_2 = 8$. Т.е. точка (3, 1) не является решением задачи (13) , так как $\lambda_1 < 0$.

- Случай 8. $\lambda_{1,2,3} \neq 0$.

Тогда из (17) получим:

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = -3x^2, \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = -3y^2, \\ 4 - x - y = 0, \\ 2x - y - 5 = 0, \\ 2y - x - 5 = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Последние три уравнения данной системы несовместны.

Итак, из всех рассмотренных вариантов только точка (5, 5) может являться решением задачи (13). Эта задача, также как и предыдущая, является примером, когда ее решение – точка на границе области допустимых значений, а не внутри нее. Но точка (5, 5) находится не на одной из кривых, задающих границу, а на пересечении таких кривых. Этим и объясняется, что для точки (5, 5) сразу два из значений $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ оказались не равными нулю (случай 5).

Далее рассмотрим случай, когда, в отличие от предыдущих двух задач, минимум целевой функции достигается не на границе, а внутри области допустимых значений. Кроме того, ограничения в следующем примере нелинейные.

## Задача 3

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 \to \min, \\ x + y \le 4, \\ x^2 + y^2 \le 16. \end{cases} \tag{25}$$

Область допустимых значений $G$ находится между окружностью и прямой на рис. 2. Из вида целевой функции ясно, что надо в области $G$ найти точку, ближайшую к точке с координатами (1, 1). Очевидно, что это и есть точка с координатами (1, 1).

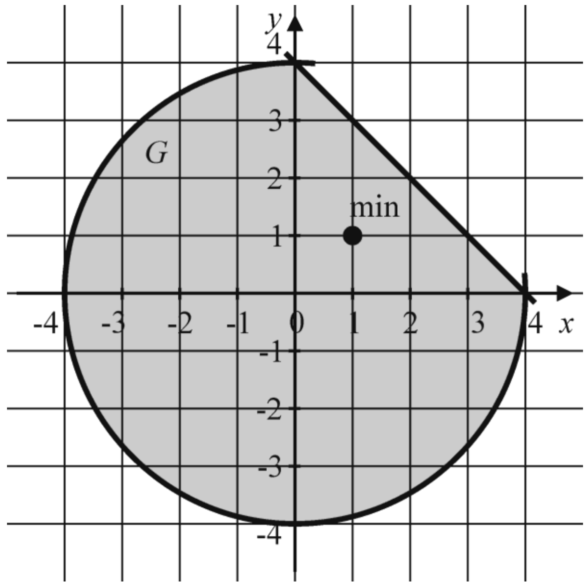


Рис. 2

**Решение**

Перепишем задачу в каноническом виде:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 \to \min, \\ x + y - 4 \le 0, \\ x^2 + y^2 - 16 \le 0. \end{cases} \tag{26}$$

Найдем градиенты целевой функции и функций, задающих ограничения-неравенства:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2(x-1) \\ 2(y-1) \end{bmatrix}, \nabla h_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \nabla h_2 = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}. \tag{27}$$

По теореме Милютина-Дубовицкого для точки минимума ($x$, $y$) должны существовать неотрицательные числа $\lambda_1$, $\lambda_2$, такие что:

$$\begin{cases} \nabla f + \lambda_1 \nabla h_1 + \lambda_2 \nabla h_2 = 0, \\ \lambda_1 h_1 = 0, \\ \lambda_2 h_2 = 0, \end{cases} \tag{28}$$

или

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2x\lambda_2 = 2(1-x), \\ \lambda_1 + 2y\lambda_2 = 2(1-y), \\ \lambda_1 (x + y - 4) = 0, \\ \lambda_2 (x^2 + y^2 - 16) = 0. \end{cases} \tag{29}$$

Возможны четыре варианта:

- Случай 1. Оба числа $\lambda_1$, $\lambda_2$ равны нулю.

В этом случае из первых двух уравнений системы (29) следует, что $x = y = 1$. Эта точка (1, 1) принадлежит области допустимых значений $G$ и удовлетворяет необходимым условиям решения задачи (25).

- Случай 2. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

Тогда из первых двух уравнений системы (29) получим:

$$\begin{cases} x\lambda_2 = 1 - x, \\ y\lambda_2 = 1 - y, \\ x^2 + y^2 - 16 = 0. \end{cases} \tag{30}$$

Из первых двух уравнений системы выразим $x$ и $y$: $x = y = 1 / (1 + \lambda_2)$. Подставив эти значения в третье уравнение, получим $\lambda_2 = -1 \pm 1/\left(2\sqrt{2}\right) < 0$. Т.е. в этом случае нет точки, удовлетворяющей необходимым условиям решения задачи (25).

- Случай 3. $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$.

Аналогично, из первых двух уравнений системы (29) получим:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2(1 - x), \\ \lambda_1 = 2(1 - y), \\ x + y - 4 = 0. \end{cases} \tag{31}$$

Из этих уравнений следует, что $x = y = 2$, а значит $\lambda_1 = -2 < 0$. Т.е. точка (2, 2) не является решением задачи.

- Случай 4. $\lambda_{1,2} \neq 0$.

Тогда из (29) получим:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2x\lambda_2 = 2(1 - x), \\ \lambda_1 + 2y\lambda_2 = 2(1 - y), \\ x + y - 4 = 0, \\ x^2 + y^2 - 16 = 0. \end{cases} \tag{32}$$

Из третьего уравнения следует, что $y = 4 - x$. Подставим это в четвертое уравнение, и, решив полученное квадратное уравнение, получим две точки: (0, 4) и (4, 0). Рассмотрим случай, когда $x = 0$, $y = 4$. Второй случай рассматривается аналогично. Подставив найденные значения $x$ и $y$ в первые два уравнения системы (32), получим:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2, \\ \lambda_1 + 8\lambda_2 = -6. \end{cases} \tag{33}$$

Решив эту систему, получим значения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1 < 0$. Т.е. точка (0, 4) тоже не является решением задачи (25).

Итак, из четырех рассмотренных вариантов только точка (1, 1) может являться решением задачи (25).

Эта задача является примером, когда ее решение – точка внутри области допустимых значений, а не на ее границе. Этим и объясняется, что для точки (1, 1) оба значения $\lambda_1$, $\lambda_2$ оказались равны нулю (случай 1).

## Задача 4

$$\begin{cases} x - y \to \min, \\ xy \geq 6, \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 25. \end{cases} \tag{34}$$

Область допустимых значений находится между двумя кривыми на рис. 3. Стрелкой показан антиградиент целевой функции.

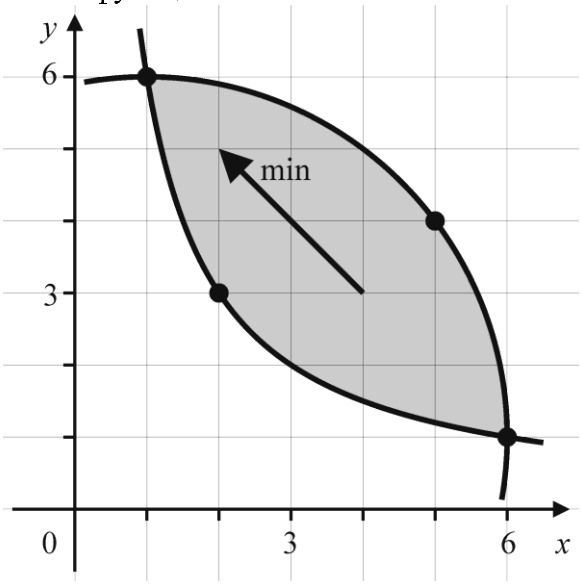



Рис. 3

**Решение**

Перепишем задачу в каноническом виде:

$$\begin{cases} f(x,y) = x - y \to \min, \\ h_1(x,y) = 6 - xy \le 0, \\ h_2(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 - 25 \le 0. \end{cases} \quad (35)$$

Найдем градиенты целевой функции и функций, задающих ограничения-неравенства:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \nabla h_1 = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}, \nabla h_2 = \begin{bmatrix} 2x-2 \\ 2y-2 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

По теореме Милютина-Дубовицкого для точки минимума ($x$, $y$) должны существовать неотрицательные числа $\lambda_1$, $\lambda_2$, такие что:

$$\begin{cases} \nabla f + \lambda_1 \nabla h_1 + \lambda_2 \nabla h_2 = 0, \\ \lambda_1 h_1 = 0, \\ \lambda_2 h_2 = 0, \end{cases} \quad (37)$$

или

$$\begin{cases} 1 - y\lambda_1 + 2(x-1)\lambda_2 = 0, \\ -1 - x\lambda_1 + 2(y-1)\lambda_2 = 0, \\ \lambda_1(6 - xy) = 0, \\ \lambda_2\left[(x-1)^2 + (y-1)^2 - 25\right] = 0. \end{cases} \quad (38)$$

Возможны несколько вариантов:

- Случай 1. Оба числа $\lambda_1$, $\lambda_2$ равны нулю.

В этом случае первые два уравнения системы (38) становятся противоречивыми:

$$\begin{cases} 1 = 0, \\ -1 = 0. \end{cases} \quad (39)$$

- Случай 2. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \ne 0$.

Тогда из (38) получим:

$$\begin{cases} 1+2(x-1)\lambda_2=0, \\ -1+2(y-1)\lambda_2=0, \\ (x-1)^2+(y-1)^2-25=0. \end{cases} \tag{40}$$

Выразив из первого уравнения ($x$ – 1) через $\lambda_2$, а из второго ($y$ – 1) через $\lambda_2$, получим из третьего уравнения:

$$\begin{cases} x-1=-\dfrac{1}{2\lambda_2}, \\ y-1=\dfrac{1}{2\lambda_2}, \\ \left(-\dfrac{1}{2\lambda_2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2\lambda_2}\right)^2-25=0, \end{cases} \tag{41}$$

что означает, что $\lambda_2=\pm 1\big/\left(5\sqrt{2}\right)$. Так как $\lambda_2 > 0$, выберем $\lambda_2=1\big/\left(5\sqrt{2}\right)$. Получим значения $x$ и $y$:

$$\begin{cases} x=1-\dfrac{5}{\sqrt{2}}, \\ y=1+\dfrac{5}{\sqrt{2}}. \end{cases} \tag{42}$$

Полученная точка находится на рис. 3 левее области допустимых значений, нарушается первое ограничение, и потому эта точка не является решением задачи (34).

- Случай 3. $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$.

Тогда из (38) получим:

$$\begin{cases} 1-y\lambda_1=0, \\ -1-x\lambda_1=0, \\ 6-xy=0. \end{cases} \tag{43}$$

Снова из первых двух уравнений выразим $x$ и $y$ через $\lambda_1$ и подставим в третье уравнение:

$$\begin{cases} y=1/\lambda_1, \\ x=-1/\lambda_1, \\ 6+\dfrac{1}{\lambda_1^2}=0. \end{cases} \tag{44}$$

Третье уравнение не имеет вещественных решений.

- Случай 4. $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

Тогда из (38) получим:

$$\begin{cases} 1-y\lambda_1+2(x-1)\lambda_2=0, \\ -1-x\lambda_1+2(y-1)\lambda_2=0, \\ 6-xy=0, \\ (x-1)^2+(y-1)^2-25=0. \end{cases} \tag{45}$$

Параметры $\lambda_1$ и $\lambda_2$ не входят в последние два уравнения (45), поэтому можно, решив сначала эти уравнения, найти $x$ и $y$, после чего первые два уравнения станут линейными и позволят легко определить $\lambda_1$ и $\lambda_2$. В общем случае решить систему двух нелинейных уравнений невозможно, но в данной задаче решение третьего и четвертого уравнений находится аналитически. Действительно, обозначив $x - 1 = a$, $y - 1 = b$, получим:

$$\begin{cases} (a+1)(b+1) = 6, \\ a^2 + b^2 = 25. \end{cases} \tag{46}$$

Перепишем эту систему в виде:

$$\begin{cases} a + b + ab = 5, \\ (a+b)^2 - 2ab = 25. \end{cases} \tag{47}$$

Выразив из первого уравнения произведение $ab$ через сумму $(a + b)$, подставив эту сумму во второе уравнение, и решив его как квадратное уравнение относительно суммы $(a + b)$, получим, что $a + b = -1 \pm 6$. Если $a + b = -7$, то $ab = 12$. Уравнение $a + 12/a = -7$ эквивалентно квадратному уравнению. Решив его, получим: $a = (-7 \pm 1)/2$, или $x = (-5 \pm 1)/2$. Т.е. получены две точки: $(-3, -2)$ и $(-2, -3)$. Обе эти точки находятся в третьей координатной четверти и не попадают в область допустимых значений $G$ на рис. 3. Рассмотрим теперь случай, когда $a + b = 5$. Тогда $ab = 0$, т.е. либо $a = 0$ (тогда $b = 5$), либо $b = 0$ (тогда $a = 0$). Т.е. получены две точки: $(1, 6)$ и $(6, 1)$. Обе эти точки попадают в область допустимых значений $G$ на рис. 3. Рассмотрим каждую из этих точек по отдельности.

- Случай 4*а*. $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $x = 1$, $y = 6$.

Тогда первые два уравнения из (45) примут вид:

$$\begin{cases} 6\lambda_1 = 1, \\ \lambda_1 - 10\lambda_2 = -1. \end{cases} \tag{48}$$

Решив ее, получим: $\lambda_1 = 1/6$, $\lambda_2 = 7/60$. Оба эти значения неотрицательны, а потому точка $(1, 6)$ обладает необходимыми признаками решения задачи (34).

- Случай 4*б*. $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $x = 6$, $y = 1$.

Тогда первые два уравнения из (45) примут вид:

$$\begin{cases} \lambda_1 - 10\lambda_2 = 1, \\ 6\lambda_1 = -1. \end{cases} \tag{49}$$

Решив ее, получим: $\lambda_1 = -1/6$, $\lambda_2 = -7/60$. Здесь есть отрицательные значения, а потому точка $(6, 1)$ не может являться решением задачи (34).

Итак, из всех рассмотренных вариантов только точка $(1, 6)$ может являться решением задачи (34).

## Задача 5

$$\begin{cases} x^3 + y^3 \to \max, \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} \le 1, \\ \dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{4} \le 1. \end{cases} \qquad (50)$$

Область допустимых значений находится внутри двух эллипсов на рис. 4. Тонкие кривые линии – линии уровня целевой функции, а стрелкой показан ее градиент.

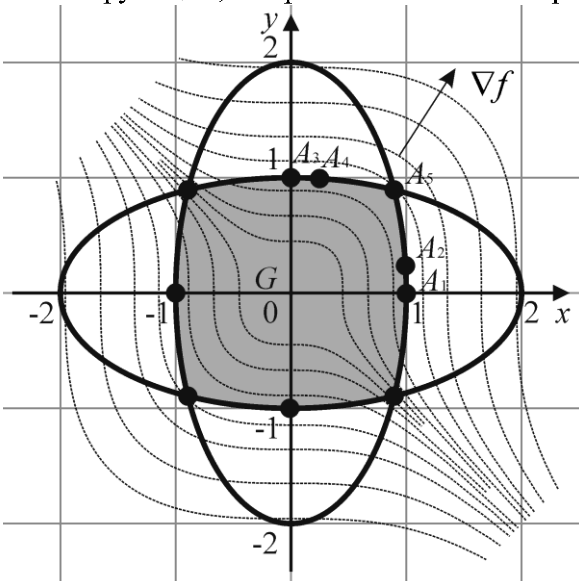



Рис. 4

**Решение**

Перепишем задачу в каноническом виде:

$$\begin{cases} f(x, y) = -x^3 - y^3 \to \min, \\ h_1(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4 \le 0, \\ h_2(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4 \le 0. \end{cases} \qquad (51)$$

Найдем градиенты целевой функции и функций, задающих ограничения-неравенства:

$$\nabla f = -3\begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix}, \nabla h_1 = 2\begin{bmatrix} x \\ 4y \end{bmatrix}, \nabla h_2 = 2\begin{bmatrix} 4x \\ y \end{bmatrix}. \qquad (52)$$

По теореме Милютина-Дубовицкого для точки минимума $(x, y)$ должны существовать неотрицательные числа $\lambda_1$, $\lambda_2$, такие что:

$$\begin{cases} \nabla f + \lambda_1 \nabla h_1 + \lambda_2 \nabla h_2 = 0, \\ \lambda_1 h_1 = 0, \\ \lambda_2 h_2 = 0, \end{cases} \qquad (53)$$

или

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x + 8\lambda_2 x = 3x^2, \\ 8\lambda_1 y + 2\lambda_2 y = 3y^2, \\ \lambda_1 \left(x^2 + 4y^2 - 4\right) = 0, \\ \lambda_2 \left(4x^2 + y^2 - 4\right) = 0. \end{cases} \qquad (54)$$

Возможны несколько вариантов:

- Случай 1. Оба числа $\lambda_1$, $\lambda_2$ равны нулю.

В этом случае из первых двух уравнений системы (54) следует, что $x = y = 0$. Эта точка удовлетворяет необходимым условиям минимума задачи (51), но, очевидно, что она не является точкой минимума, а является лишь точкой перегиба.

- Случай 2. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

Тогда из (54) получим:

$$\begin{cases} 8\lambda_2 x = 3x^2, \\ 2\lambda_2 y = 3y^2, \\ 4x^2 + y^2 - 4 = 0. \end{cases} \qquad (55)$$

Полученная система уравнений нелинейная, но она легко решается, если рассмотреть три возможных случая, когда $x = 0$, когда $y = 0$, и когда $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

- Случай 2*а*. $x = 0$.

Тогда из третьего уравнения следует, что $y = \pm 2$, а из второго – что $\lambda_2 = 3y/2 = \pm 3$. Так как должно быть $\lambda_2 > 0$, получим точку с координатами (0, 2). Легко видеть, что эта точка не принадлежит области допустимых значений, так как нарушается первое ограничение.

- Случай 2*б*. $y = 0$.

Тогда из третьего уравнения (55) следует, что $x = \pm 1$, а из первого – что $\lambda_2 = 3x/8 = \pm 3/8$. Так как должно быть $\lambda_2 > 0$, получим точку с координатами (1, 0) (точка $A_1$ на рис. 4). Она принадлежит допустимой области и, таким образом, удовлетворяет необходимым условиям решения задачи (50). Из рис. 4 видно, что линия уровня функции $f(x, y)$ в точке $A_1$ вертикальна и касательна к границе области. Чтобы из этой точки перейти к лучшему значению функции $f(x, y)$, надо сделать шаг вправо, но чтобы оставаться в допустимой области, можно делать шаги только влево. Т.е. точка (1, 0) действительно является точкой минимума функции $f(x, y)$, но, как будет показано ниже, только точкой локального минимума. Вычислим значение функции в ней: $f(1, 0) = -1$.

- Случай 2*в*. $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Тогда из первых двух уравнений (55) следует, что $\lambda_2 = 3x/8 = 3y/2$, т.е. $x = 4y$. Используя это, получим из третьего уравнения, что $x = \pm 8/\sqrt{65}$, $y = \pm 2/\sqrt{65}$. Так как должно быть $\lambda_2 > 0$, получим точку с координатами $\left(8/\sqrt{65}, 2/\sqrt{65}\right)$ (точка $A_2$ на рис. 4). Эта точка также удовлетворяет необходимым условиям решения задачи (50). Вычислим значение функции в ней: $f\left(8/\sqrt{65}, 2/\sqrt{65}\right) = -104/\left(13\sqrt{65}\right) \approx -0{,}992$. Это значение хуже, чем в случае 2*б*, т.е. точка $A_2$ – тоже точка только локального минимума.

- Случай 3. $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$.

Этот случай полностью аналогичен случаю 2. Из (54) получим:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x = 3x^2, \\ 8\lambda_1 y = 3y^2, \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0. \end{cases} \qquad (56)$$

Решим эту систему тем же способом, что и систему (55), т.е. рассмотрев три возможных случая.

- Случай 3*а*. $x = 0$.

Тогда из третьего уравнения следует, что $y = \pm 1$, а из второго – что $\lambda_1 = 3y/8 = \pm 3/8$. Так как должно быть $\lambda_2 > 0$, получим точку с координатами (0, 1). Легко видеть, что эта точка (точка $A_3$ на рис. 4) принадлежит области допустимых значений и удовлетворяет необходимым условиям решения задачи (50). Действительно, из рис. 4 видно, что линия уровня функции $f(x, y)$ в этой точке горизонтальна и касательна к границе области. Чтобы из этой точки перейти к лучшему значению функции $f(x, y)$, надо сделать шаг вверх, но чтобы оставаться в допустимой области, можно делать шаги только вниз. Т.е. точка (0, 1) действительно является точкой локального минимума функции $f(x, y)$. Вычислим значение функции в ней: $f(0, 1) = -1$.

- Случай 3*б*. $y = 0$.

Тогда из третьего уравнения следует, что $x = \pm 2$, а из первого – $\lambda_1 = 3x/2 = \pm 3$. Так как должно быть $\lambda_1 > 0$, получим точку с координатами (2, 0). Легко видеть, что эта точка не принадлежит области допустимых значений, так как нарушается второе ограничение.

- Случай 3*в*. $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Тогда из первых двух уравнений (56) следует, что $\lambda_1 = 3x/2 = 3y/8$, т.е. $y = 4x$. Используя это, получим из третьего уравнения, что $x = \pm 2/\sqrt{65}$, $y = \pm 8/\sqrt{65}$. Так как должно быть $\lambda_1 > 0$, получим точку с координатами $\left(2/\sqrt{65}, 8/\sqrt{65}\right)$ (точка $A_4$ на рис. 4). Эта точка также удовлетворяет необходимым условиям решения задачи (50). Вычислим значение функции в ней: $f\left(2/\sqrt{65}, 8/\sqrt{65}\right) = -104/\left(13\sqrt{65}\right) \approx -0,992$. Это значение хуже, чем в случае 3*а*, т.е. точка $A_4$ – тоже точка только локального минимума.

- Случай 4. $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

Тогда из (54) получим:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x + 8\lambda_2 x = 3x^2, \\ 8\lambda_1 y + 2\lambda_2 y = 3y^2, \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0, \\ 4x^2 + y^2 - 4 = 0. \end{cases} \tag{57}$$

Последние два уравнения – линейная система относительно переменных $x^2$ и $y^2$. Решив ее, получим: $x^2 = 4/5$, $y^2 = 4/5$. Это решение описывает четыре точки в углах области допустимых значений. Так как в этом решении $x \neq 0$ и $y \neq 0$, из первых двух уравнений также получается линейная система:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 8\lambda_2 = 3x, \\ 8\lambda_1 + 2\lambda_2 = 3y, \end{cases} \tag{58}$$

которая имеет решение

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1}{10}(4y - x), \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{10}(4x - y). \end{cases} \tag{59}$$

Так как $x = \pm 2/\sqrt{5}$, $y = \pm 2/\sqrt{5}$, а числа $\lambda_1$ и $\lambda_2$ должны быть положительными, то единственным решением (59) будет являться точка с координатами $\left(2/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}\right)$ (точка $A_5$ на рис. 4). Вычислим значение функции в этой точке:

$f\left(2/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}\right) = -16/\left(5\sqrt{5}\right) \approx -1{,}431$. Это значение лучше всех предыдущих найденных значений (в точках $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$) и является точкой глобального минимума в области допустимых значений.

Итак, данная задача является примером, когда оказалось целых шесть точек, удовлетворяющих необходимым условиям минимума. Точка $(0, 0)$ вовсе не является точкой минимума, хотя удовлетворяет необходимым условиям. Другие четыре точки – лишь точки локального минимума, и только одна точка с координатами $\left(2/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}\right)$ является наилучшей.

### Транспортные задачи

### ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ.

Фирма должна отправить некоторое количество кроватей с трёх складов в пять магазинов. На складах имеется соответственно 15, 25 и 20 кроватей, а для пяти магазинов требуется соответственно 20, 12, 5, 8 и 15 кроватей. Стоимость перевозки одной кровати со склада в магазин приведены в таблице.

| Склады | Магазины | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| А1 | | | | | |
| А2 | | | | | |
| А3 | | | | | |

Как следует спланировать перевозку, чтобы её стоимость была минимальной?

**Построение математической модели**

Пусть $X_{ij}$ – количество кроватей, отправляемых со склада i в магазин j. Все $X_{ij} \geq 0$, и в силу ограничений на возможности поставки со складов (предложение) и спрос в магазинах они удовлетворяют следующим условиям:

(для предложения)

$$\begin{cases} X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}+X_{15}=15 \\ X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}+X_{25}=25 \\ X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}+X_{35}=20 \end{cases}$$

(для спроса)

$$\begin{cases} X_{11}+X_{21}+X_{31}=20 \\ X_{12}+X_{22}+X_{32}=12 \\ X_{13}+X_{23}+X_{33}=5 \\ X_{14}+X_{24}+X_{34}=8 \\ X_{15}+X_{25}+X_{35}=15 \end{cases}$$

Стоимость перевозок равна:

$F = 1*X_{11}+0*X_{12}+3*X_{13}+4*X_{14}+2*X_{15}+5*X_{21}+ \ldots +4*X_{34}+3*X_{35}$.

Таким образом, имеем следующую математическую модель:

$$F = 1*X_{11}+0*X_{12}+3*X_{13}+4*X_{14}+2*X_{15}+5*X_{21}+\ldots+4*X_{34}+3*X_{35}$$

$$\begin{cases} X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}+X_{15}=15 \\ X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}+X_{25}=25 \\ X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}+X_{35}=20 \\ X_{11}+X_{21}+X_{31}=20 \\ X_{12}+X_{22}+X_{32}=12 \\ X_{13}+X_{23}+X_{33}=5 \\ X_{14}+X_{24}+X_{34}=8 \\ X_{15}+X_{25}+X_{35}=15 \\ X_{ij} \geq 0, i=1,2,3;\ j=1,2,3,4,5 \end{cases}$$

Рассмотренная задача является задачей линейного программирования, но специального вида. Её результат можно обобщить на транспортную задачу общего вида.

**Метод наименьшего элемента**

*Сущность метода в том, что на каждом шаге заполняется та клетка оставшейся части таблицы, которая имеет наименьший тариф; в случае наличия* *нескольких таких равных тарифов заполняется любая из них. В остальном действуют аналогично предыдущему способу.*

Построим опорный план.

Исходная транспортная таблица:

| | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A1 | 1 | 0 | 3 | 4 | 2 | 15 |
| A2 | 5 | 1 | 2 | 3 | 3 | 25 |
| A3 | 4 | 8 | 1 | 4 | 3 | 20 |
| | 20 | 12 | 5 | 8 | 15 | |

*Построение второй транспортной таблицы*

Находим в таблице наименьшую стоимость перевозки – это 0 в клетке A1B2. Записываем в этой клетке значение 12 (наименьшее из сумм по строке и столбцу).

| | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A1 | 1 | 0<br>12 | 3 | 4 | 2 | 15 |
| A2 | 5 | 1 | 2 | 3 | 3 | 25 |
| A3 | 4 | 8 | 1 | 4 | 3 | 20 |
| | 20 | 12 | 5 | 8 | 15 | |

Теперь вычеркиваем второй столбец, уменьшив сумму в первой строке на 12.

| | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A1 | 1 | 0<br>12 | 3 | 4 | 2 | ~~15~~<br>3 |
| A2 | 5 | 1 | 2 | 3 | 3 | 25 |
| A3 | 4 | 8 | 1 | 4 | 3 | 20 |
| | 20 | 12 | 5 | 8 | 15 | |

Находим следующую наименьшую по стоимости ячейку – их несколько, например, A1B1. Присваиваем ей значение 3, а сумму по столбцу заменяем на 17.

| | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A1 | 1<br>3 | 0<br>12 | 3 | 4 | 2 | ~~15~~<br>~~3~~ |
| A2 | 5 | 1 | 2 | 3 | 3 | 25 |
| A3 | 4 | 8 | 1 | 4 | 3 | 20 |
| | ~~20~~<br>17 | 12 | 5 | 8 | 15 | |

Вычеркиваем первую строку.

| | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A1 | 1<br>3 | 0<br>12 | 3 | 4 | 2 | ~~15~~<br>~~3~~ |
| A2 | 5 | 1 | 2 | 3 | 3 | 25 |
| A3 | 4 | 8 | 1 | 4 | 3 | 20 |
| | ~~20~~<br>17 | 12 | 5 | 8 | 15 | |

Выбираем ячейку А3В3, присваиваем ей значение 5. Вычеркиваем третий столбец. Сумму по третьей строке заменяем на 15.

| | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A1 | 1<br>3 | 0<br>12 | 3 | 4 | 2 | ~~15~~<br>~~3~~ |
| A2 | 5 | 1 | 2 | 3 | 3 | 25 |
| A3 | 4 | 8 | 1<br>5 | 4 | 3 | ~~20~~<br>15 |
| | ~~20~~<br>17 | 12 | 5 | 8 | 15 | |

Выбираем ячейку А2В5, записываем в ней 15, уменьшаем вторую строку на 15 и вычеркиваем пятый столбец.

| | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A1 | 1<br>3 | 0<br>12 | 3 | 4 | 2 | ~~15~~<br>~~3~~ |
| A2 | 5 | 1 | 2 | 3 | 3<br>15 | ~~25~~<br>10 |
| A3 | 4 | 8 | 1<br>5 | 4 | 3 | ~~20~~<br>15 |
| | ~~20~~<br>17 | 12 | 5 | 8 | 15 | |

Выбираем ячейку А3В1, присваиваем ей 15. Уменьшаем первый столбец на 15 и вычеркиваем третью строку.

| | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A1 | 1<br>3 | 0<br>12 | 3 | 4 | 2 | ~~15~~<br>~~3~~ |
| A2 | 5 | 1 | 2 | 3 | 3<br>15 | ~~25~~<br>10 |
| A3 | 4<br>15 | 8 | 1<br>5 | 4 | 3 | ~~20~~<br>~~15~~ |
| | ~~20~~<br>~~17~~<br>2 | 12 | 5 | 8 | 15 | |

Ячейке А2В1 присваиваем 2 и вычеркиваем первый столбец. Сумму по второй строке заменяем на 8.

| | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A1 | 1<br>3 | 0<br>12 | 3 | 4 | 2 | ~~15~~<br>~~3~~ |
| A2 | 5<br>2 | 1 | 2 | 3 | 3<br>15 | ~~25~~<br>~~10~~<br>8 |
| A3 | 4<br>15 | 8 | 1<br>5 | 4 | 3 | ~~20~~<br>~~15~~ |
| | ~~20~~<br>~~17~~<br>2 | 12 | 5 | 8 | 15 | |

Ячейке A2B4 присваиваем 8 и вычеркиваем четвертый столбец.

| | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A1 | 1<br>3 | 0<br>12 | 3 | 4 | 2 | ~~15~~<br>~~3~~ |
| A2 | 5<br>2 | 1 | 2 | 3<br>8 | 3<br>15 | ~~25~~<br>~~10~~<br>~~8~~ |
| A3 | 4<br>15 | 8 | 1<br>5 | 4 | 3 | ~~20~~<br>~~15~~ |
| | ~~20~~<br>~~17~~<br>2 | 12 | 5 | 8 | 15 | |

Опорный план построен.

$X_{11} = 3$, $X_{12} = 12$, $X_{21} = 2$, $X_{24} = 8$, $X_{25} = 15$, $X_{31} = 15$, $X_{33} = 5$.

Все остальные $X_{ij} = 0$.

F = 3*1+0*12+5*2+3*8+3*15+5*1 = 147

Найдём теперь оптимальный план для данной задачи.

Для этого воспользуемся методом потенциалов.

**Задача.** На четыре базы $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ поступил однородный груз в следующем количестве: $a_1$ тонн - на базу $A_1$, $a_2$ тонн - на базу $A_2$, $a_3$ тонн - на базу $A_3$, $a_4$ тонн - на базу $A_4$. Полученный груз требуется перевезти в пять пунктов: $b_1$ тонн - на базу $B_1$, $b_2$ тонн - на базу $B_2$, $b_3$ тонн - на базу $B_3$, $b_4$ тонн - на базу $B_4$, $b_5$ тонн - на базу $B_5$. Расстояния между пунктами назначений указаны в матрице расстояний.

| пункты отправления | пункты назначения | | | | | запасы |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | |
| $A_1$ | 30 | 24 | 11 | 12 | 25 | 21 |
| $A_2$ | 26 | 4 | 29 | 20 | 24 | 19 |
| $A_3$ | 27 | 14 | 14 | 10 | 18 | 15 |
| $A_4$ | 6 | 14 | 28 | 8 | 2 | 25 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| потребности | 15 | 15 | 15 | 15 | 20 | |

Стоимость перевозок пропорциональна количеству груза и расстоянию, на которое этот груз перевозится. Спланировать перевозки так, чтобы их общая стоимость была минимальной.

**Решение.** Проверим сбалансированность транспортной задачи, для этого необходимо чтобы

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j$$

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 21+19+15+25=80, \qquad \sum_{j=1}^{5} b_j = 15+15+15+15+20=80.$$

1. Решим задачу диагональным методом или методом северо-западного угла.

Процесс получения плана можно оформить в виде таблицы:

| пункты отправления | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | запасы | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 15 | 6 | — | — | — | 21 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $A_2$ | — | 9 | 10 | — | — | 19 | 19 | 19 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $A_3$ | — | — | 5 | 10 | — | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 10 | 10 | 10 |
| $A_4$ | — | — | — | 5 | 20 | 25 | 25 | 25 | 25 | 25 | 25 | 25 | 20 |
| потребности | 15 | 15 | 15 | 15 | 20 | | | | | | | | |
| | 0 | 15 | 15 | 15 | 20 | | | | | | | | |
| | 0 | 9 | 15 | 15 | 20 | | | | | | | | |
| | 0 | 0 | 15 | 15 | 20 | | | | | | | | |
| | 0 | 0 | 5 | 15 | 20 | | | | | | | | |
| | 0 | 0 | 0 | 15 | 20 | | | | | | | | |
| | 0 | 0 | 0 | 5 | 20 | | | | | | | | |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 20 | | | | | | | | |

Получен следующий план:

$$X_0 = \begin{array}{ccccc} 15 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 20 \end{array}$$

Полученный план невырожденный.
$F(X_0)=15\cdot30+6\cdot24+9\cdot4+10\cdot29+5\cdot14+10\cdot10+5\cdot8+20\cdot2=1170$.

2. Метод наименьшей стоимости.

| пункты отправления | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | запасы | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 6 $\boxed{30}$ | × $\boxed{24}$ | 15 $\boxed{11}$ | × $\boxed{12}$ | × $\boxed{25}$ | 21 | 21 | 21 | 21 | 21 | 6 | 6 |
| $A_2$ | 4 $\boxed{26}$ | 15 $\boxed{4}$ | × $\boxed{29}$ | × $\boxed{20}$ | × $\boxed{24}$ | 19 | 19 | 4 | 4 | 4 | 4 | 0 |
| $A_3$ | × $\boxed{27}$ | × $\boxed{14}$ | × $\boxed{14}$ | 15 $\boxed{10}$ | × $\boxed{18}$ | 15 | 15 | 15 | 15 | 0 | 0 | 0 |
| $A_4$ | 5 $\boxed{6}$ | × $\boxed{14}$ | × $\boxed{28}$ | × $\boxed{8}$ | 20 $\boxed{2}$ | 25 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| потребности | 15 | 15 | 15 | 15 | 20 | | | | | | | |
| | 15 | 15 | 15 | 15 | 0 | | | | | | | |
| | 15 | 0 | 15 | 15 | 0 | | | | | | | |
| | 10 | 0 | 15 | 15 | 0 | | | | | | | |
| | 10 | 0 | 15 | 0 | 0 | | | | | | | |
| | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | |
| | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | |

Получили вырожденный опорный план

$$X_0=\begin{matrix} 6 & 0 & 15 & 0 & 0 \\ 4 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{matrix}$$

$$F(X_0)=6\cdot30+15\cdot11+4\cdot26+15\cdot4+15\cdot10+5\cdot6+20\cdot2=729.$$

3. Метод двойного предпочтения.

| пункты отправления | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | запасы | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 6 $\boxed{30}$ | × $\boxed{24}$ | 15 $\boxed{11}$ | × $\boxed{12}$ | × $\boxed{25}$ | 21 | 21 | 21 | 21 | 21 | 6 | 6 |
| $A_2$ | 4 $\boxed{26}$ | 15 $\boxed{4}$ | × $\boxed{29}$ | × $\boxed{20}$ | × $\boxed{24}$ | 19 | 19 | 4 | 4 | 4 | 4 | 0 |
| $A_3$ | × $\boxed{27}$ | × $\boxed{14}$ | × $\boxed{14}$ | 15 $\boxed{10}$ | × $\boxed{18}$ | 15 | 15 | 15 | 15 | 0 | 0 | 0 |
| $A_4$ | 5 $\boxed{6}$ | × $\boxed{14}$ | × $\boxed{28}$ | × $\boxed{8}$ | 20 $\boxed{2}$ | 25 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| потребности | 15 | 15 | 15 | 15 | 20 | | | | | | | |
| | 15 | 15 | 15 | 15 | 0 | | | | | | | |
| | 15 | 0 | 15 | 15 | 0 | | | | | | | |
| | 10 | 0 | 15 | 15 | 0 | | | | | | | |
| | 10 | 0 | 15 | 0 | 0 | | | | | | | |
| | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Получили вырожденный опорный план

$$X_0=\begin{matrix} 6 & 0 & 15 & 0 & 0 \\ 4 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{matrix}$$

$$F(X_0)=6\cdot 30+15\cdot 11+4\cdot 26+15\cdot 4+15\cdot 10+5\cdot 6+20\cdot 2=729.$$

4. Метод аппроксимации Фогеля.

| пункты отправления | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | запасы | столбец-разность | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | × 30 | × 24 | 15 11 | 6 12 | × 25 | 21 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $A_2$ | × 26 | 15 4 | × 29 | 4 20 | × 24 | 19 | 16 | 16 | 4 | 4 | 9 | к | к |
| $A_3$ | × 27 | × 14 | × 14 | 5 10 | 10 18 | 15 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | к |
| $A_4$ | 15 6 | × 14 | × 28 | × 8 | 10 2 | 25 | 4 | 6 | 6 | к | к | к | к |
| потребности | 15 | 15 | 15 | 15 | 20 | | | | | | | | |
| строка-разность | 20 | 10 | 3 | 2 | 16 | | | | | | | | |
| | к | 10 | 3 | 2 | 16 | | | | | | | | |
| | к | к | 3 | 2 | 16 | | | | | | | | |
| | к | к | 3 | 2 | 6 | | | | | | | | |
| | к | к | 3 | 2 | к | | | | | | | | |
| | к | к | 3 | 2 | к | | | | | | | | |
| | к | к | к | к | к | | | | | | | | |

Получили невырожденный опорный план

$$X_0=\begin{matrix} 0 & 0 & 15 & 6 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \\ 15 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{matrix}$$

$$F(X_0)=15\cdot 6+15\cdot 4+15\cdot 11+5\cdot 10+4\cdot 20+6\cdot 12+10\cdot 18+10\cdot 2=717.$$

5. Для проверки оптимальности плана используем метод потенциалов. В качестве примера возьмем опорный план, полученный методом двойного предпочтения.
Так как взятый нами план является вырожденным, то вводим ε - некоторое число близкое к 0.

| | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_1$ | $6^-$ | | 15 | + | |
| $u_2$ | $4_+$ | 15 | | $\varepsilon_-$ | |
| $u_3$ | | | | 15 | |
| $u_4$ | 5 | | | | 20 |

Составим систему уравнений:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $u_1 + v_1 = 30$ | Пусть $u_1 = 0$ | $v_1 = 30$ | $u_1 + v_2 = 8 < c_{12} = 24$ |
| $u_1 + v_3 = 11$ | $u_2 = -4$ | $v_2 = 8$ | $u_1 + v_4 = 24 > c_{14} = 12$ |
| $u_2 + v_1 = 26$ | $u_3 = -14$ | $v_3 = 11$ | $u_1 + v_5 = 26 > c_{15} = 25$ |
| $u_2 + v_2 = 4$ | $u_4 = -24$ | $v_4 = 24$ | $u_2 + v_3 = 7 < c_{23} = 29$ |
| $u_2 + v_4 = 20$ | | $v_5 = 26$ | $u_2 + v_5 = 22 < c_{25} = 24$ |
| $u_3 + v_4 = 10$ | | | $u_3 + v_1 = 16 < c_{31} = 27$ |
| $u_4 + v_1 = 6$ | | | $u_3 + v_2 = -6 < c_{32} = 14$ |
| $u_4 + v_5 = 2$ | | | $u_3 + v_3 = 3 < c_{33} = 14$ |
| | | | $u_3 + v_5 = 12 < c_{35} = 18$ |
| | | | $u_4 + v_2 = -16 < c_{42} = 14$ |
| | | | $u_4 + v_3 = -13 < c_{43} = 28$ |
| | | | $u_4 + v_4 = 0 < c_{44} = 8$ |

Так как существуют суммы больше $c_{ij}$, то план не оптимален. Введем в базис переменную (1,4) (так как разность здесь максимальна).

$X_1=$

| | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_1$ | -6-ε | | 15 | ε+ | |
| $u_2$ | 4+ε | 15 | | | |
| $u_3$ | | | | -15 | + |
| $u_4$ | +5 | | | | 20- |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $u_1 + v_1 = 30$ | Пусть $u_1 = 0$ | $v_1 = 30$ | $u_1 + v_5 = 26 > c_{15} = 25$ |
| $u_1 + v_3 = 11$ | $u_2 = -4$ | $v_2 = 8$ | $u_2 + v_4 = 8 < c_{24} = 20$ |
| $u_1 + v_4 = 12$ | $u_3 = -2$ | $v_3 = 11$ | $u_3 + v_1 = 28 > c_{31} = 27$ |
| $u_2 + v_1 = 26$ | $u_4 = -24$ | $v_4 = 12$ | $u_3 + v_2 = 6 < c_{32} = 14$ |
| $u_2 + v_2 = 4$ | | $v_5 = 26$ | $u_3 + v_3 = 9 < c_{33} = 14$ |
| $u_3 + v_4 = 10$ | | | $u_3 + v_5 = 24 > c_{35} = 18$ |
| $u_4 + v_1 = 6$ | | | $u_4 + v_4 = -12 < c_{44} = 8$ |
| $u_4 + v_5 = 2$ | | | |

Так как существуют суммы больше $c_{ij}$, то план не оптимален. Введем в базис переменную (3,5) (так как разность здесь максимальна).

$F(X_1)=6\cdot30-30\varepsilon+15\cdot11+12\varepsilon+4\cdot26-26\varepsilon+15\cdot4+15\cdot10+5\cdot6+20\cdot2=729-46\varepsilon.$

$X_2=$

| | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_1$ | | | 15 | 6 | |
| $u_2$ | 4+ε | 15 | | | |
| $u_3$ | | | | 9+ε | 6- ε |
| $u_4$ | 11- ε | | | | 14+ ε |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $u_1 + v_3 = 11$ | Пусть $u_1 = 0$ | $v_1 = 24$ | $u_1 + v_1 = 24 < c_{11} = 30$ |
| $u_1 + v_4 = 12$ | $u_2 = 2$ | $v_2 = 2$ | $u_1 + v_2 = 12 < c_{12} = 24$ |
| $u_2 + v_1 = 26$ | $u_3 = -2$ | $v_3 = 11$ | $u_1 + v_5 = 20 < c_{15} = 25$ |

$u_2 + v_2 = 4$
$u_3 + v_4 = 10$
$u_3 + v_5 = 18$
$u_4 + v_1 = 6$
$u_4 + v_5 = 2$

$u_4 = -18$  $v_4 = 12$
$v_5 = 20$

$u_2 + v_3 = 13 < c_{23} = 29$
$u_2 + v_4 = 14 < c_{24} = 20$
$u_2 + v_5 = 22 < c_{25} = 24$
$u_3 + v_1 = 22 < c_{31} = 27$
$u_3 + v_2 = 0 < c_{32} = 14$
$u_4 + v_2 = -16 < c_{42} = 14$
$u_4 + v_3 = -7 < c_{43} = 28$
$u_4 + v_4 = -6 < c_{44} = 8$

Так как все суммы больше $c_{ij}$, то план оптимален. Число ε близко к 0, следовательно план примет вид

$X_3 =$

| | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_1$ | | | 15 | 6 | |
| $u_2$ | 4 | 15 | | | |
| $u_3$ | | | | 9 | 6 |
| $u_4$ | 11 | | | | 14 |

$= X^*$ - оптимальный план.

$F(X^*)=15\cdot 11+6\cdot 12+4\cdot 26+4\cdot 15+9\cdot 10+6\cdot 18+11\cdot 6+2\cdot 14=165+72+104+60+90+108+28+66=693.$

Задание.
С помощью метода потенциалов решить транспортную задачу, исходное опорное решение определить по правилу “северо-западного” угла.

**Самарский государственный аэрокосмический университет им. С.П.Королева**
**Кафедра технической кибернетики**

## Вопросы к зачету

*по курсу: «Методы оптимизма»*

1. Схема классификации МО. Основные понятия и определения оптимизации. Примеры оптимизационных задач.
2. Линейное программирование (ЛП): постановка задачи ЛП, геометрическая интерпретация решения задачи ЛП, выпуклое множество и крайние точки.
3. Симплекс-метод: общая идея решения задачи ЛП, теорема о связи между допустимым базисным решением и крайними точками.
4. Симплекс-метод: процесс перехода к новому допустимому базисному решению, теорема об оптимальности допустимого базисного решения.
5. Процедура решения задачи симплекс-методом.
6. Двухфазный метод решения ЗЛП. Правило Блэнда, устраняющее зацикливание.
7. Двойственный симплекс-метод, алгоритм двойственного симплекс-метода.
8. Двойственная задача ЛП: теорема двойственности, условие дополняющей нежёсткости.
9. Транспортная задача (ТЗ): постановка ТЗ, метод северо-западного угла, алгоритм метода; метод потенциалов.
10. Методы безусловной оптимизации: градиентные методы.
11. Методы безусловной оптимизации: методы прямого поиска.
12. Методы безусловной оптимизации: методы оптимизации функции одной переменной не использующие производной.
13. Выпуклое программирование: выпуклые функции и их связь с выпуклыми множествами, задача выпуклого программирования.
14. Выпуклое программирование: решение задачи условной оптимизации методом множителей Лагранжа.
15. Методы оптимизации функций при наличии ограничений: метод штрафной функции (с примером).
16. Динамическое программирование. Постановка задачи. Принцип оптимальности Беллмана.
17. Оптимизационные задачи на графах: алгоритм Дейкстры.
18. Оптимизационные задачи на графах: алгоритм Флойда.
19. Потоки в сетях: Алгоритм Форда.

Вопросы рассмотрены и утвержден на заседании кафедры ______________________

Заведующий кафедрой ______________________

## Вопрос 1

Следующая задача

$$\begin{cases} x^3 + y^2 + z \to \min, \\ x, y, z \geq 0. \end{cases}$$

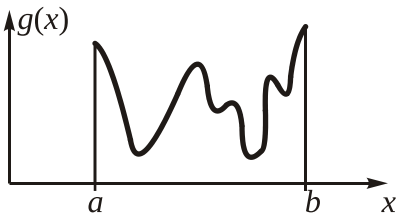
является задачей

1) Условной .оптимизации.
2) Безусловной .оптимизации.
3) Не является задачей оптимизации.

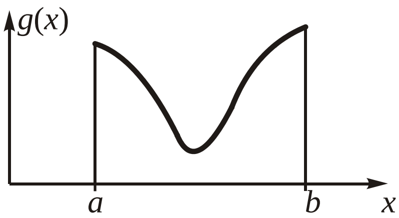
## Вопрос 2

Функции на каких рисунках являются унимодальными на отрезке [$a$, $b$]?

1) Обе являются унимодальными.
2) Обе не являются.
3) Только функция на рисунке ($а$).
4) Только функция на рисунке ($б$).

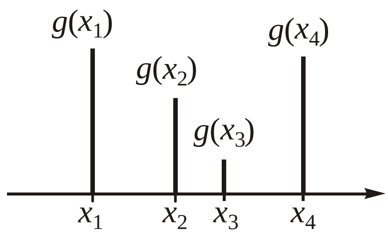



($а$)




($б$)

## Вопрос 3




На очередной итерации поискового метода получилось, что минимум функции $g(x)$ расположен на отрезке [$x_1$, $x_4$]. Измерения в точках $x_2$ и $x_3$ показали, что $g(x_2) > g(x_3)$. Как следует сузить интервал поиска минимума?

1) Минимум находится на отрезке [$x_1$, $x_2$].
2) Минимум находится на отрезке [$x_2$, $x_3$].
3) Минимум находится на отрезке [$x_3$, $x_4$].
4) Минимум находится на отрезке [$x_2$, $x_4$].
5) Минимум находится на отрезке [$x_1$, $x_3$].
6) Значений функции $g(x)$ в точках $x_2$ и $x_3$ недостаточно, чтобы сузить интервал поиска.

## Вопрос 4

Какие из следующих поисковых методов являются методами 0-го порядка?

- ☐ Метод Ньютона-Рафсона.
- ☐ Метод Розенброка.
- ☐ Метод наискорейшего спуска.

## Вопрос 5

Какие из следующих поисковых методов являются методами 1-го порядка?

- ☐ Метод Ньютона.
- ☐ Метод наискорейшего спуска.
- ☐ Метод Гаусса-Зайделя.
- ☐ Метод Флетчера-Ривса.

## Вопрос 6

Дана задача минимизации: $f(\mathbf{x}) \to \min$. Последовательность векторов $\mathbf{x}^k$ называется релаксационной, если

1) Для любого $k$ $f\left(\mathbf{x}^{k+1}\right) \geq f\left(\mathbf{x}^k\right)$.
2) $\lim\limits_{k\to} f\left(\mathbf{x}^k\right) = 0$.
3) Для любого $k$ $f\left(\mathbf{x}^{k+1}\right) \leq f\left(\mathbf{x}^k\right)$.

## Вопрос 7

Пусть дана задача условной оптимизации:

$$\begin{cases} f(x) \to \min, \\ g_i(x) = 0, i = \overline{1, m}. \end{cases} \qquad (1)$$

Пусть $x^*$ – решение задачи (1).

Должна ли точка $x^*$ являться точкой минимума функции Лагранжа?

- ☐ должна,
- ☐ не должна.

## Вопрос 8

Имеется задача условной оптимизации с ограничением-равенством:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \to \min, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Какая из перечисленных ниже функцией является функцией Лагранжа для указанной задачи?

1) $L(x,y,\lambda) = x + y - 5 + \lambda\left(x^2 + y^2\right).$

2) $L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x+y).$

3) $L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x+y-5).$

4) $L(x,y,\lambda) = \lambda\left(x^2 + y^2\right) + (1-\lambda)(x+y-5).$

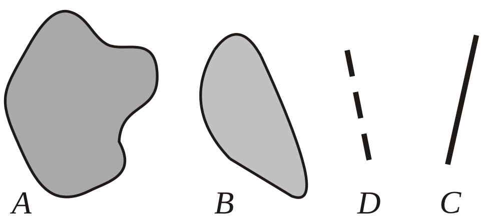
## Вопрос 9

Функции штрафа применяются

1) К задачам условной оптимизации
2) К задачам безусловной оптимизации
3) Могут применяться к задачам как условной, так и безусловной оптимизации

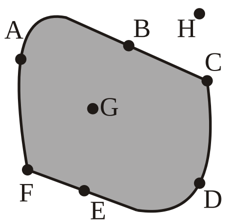
## Вопрос 10

Какие из изображенных множеств являются выпуклыми?




☐ Множество *A*. ☐ Множество *B*.
☐ Множество *C*. ☐ Множество *D*.

## Вопрос 11




Какие точки на изображенном множестве называются крайними?

1) A, B, C, D, E, F, G, H.
2) A, B, C.
3) C, F.
4) H.
5) G.
6) A, C, D, F.

## Вопрос 12

Из следующих четырех задач оптимизации

$(a)\begin{cases} xy^2 + z \to \max, \\ x + y \le 5, \\ x, y, z \ge 0. \end{cases}$ $(б)\begin{cases} x + y + z \to \max, \\ x + y \le 5, \\ x, z \ge 1. \end{cases}$

$(в)\begin{cases} x + y + z \to \max, \\ xyz \le 5, \\ x, y, z \ge 0. \end{cases}$ $(г)\begin{cases} xyz \to \max, \\ x + \sqrt{y} \le 5, \\ x, z \ge 1. \end{cases}$

задачей линейного программирования является:

☐ Задача *а*. ☐ Задача *б*.
☐ Задача *в*. ☐ Задача *г*.

## Вопрос 13

Множество допустимых решений задачи линейного программирования может быть

1) Выпуклым.
2) Вогнутым.
3) Произвольным.

## Вопрос 14

Симплекс-таблица с элементами $\alpha_{ij}$ для задачи минимизации является нормальной, если

☐ Все $\alpha_{0j} \ge 0,\ j = \overline{0,n}$.

☐ Все $\alpha_{0j} \ge 0,\ j = \overline{1,n}$, т.е. $\alpha_{00}$ может быть произвольным.

☐ Все $\alpha_{0j} \ge 0,\ j = \overline{1,n}$, но должно быть $\alpha_{00} < 0$.

## Вопрос 15

При достижении оптимального плана симплекс-методом итоговая симплекс-таблица

☐ Должна быть нормальной
☐ Не должна быть нормальной

## Вопрос 16

Направление, в котором функция нескольких переменных убывает быстрее всего, совпадает с

1) Дивергенцией функции.
2) Антиградиентом функции.
3) Ротором функции.
4) Градиентом функции.

## Вопрос 17

При переходе в задаче линейного программирования от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам количество переменных:

- ☐ увеличивается.
- ☐ уменьшается.
- ☐ не меняется.

**Вопрос 18**

Пересчет симплекс-таблицы при решении задачи линейного программирования соответствует

1) Переходу от одной грани многогранника к другой грани.
2) Переходу от одной вершины многогранника к другой вершине.
3) Не имеет геометрического смысла.
4) Переходу от одного ребра многогранника к другому ребру.

**Вопрос 19**

Симплекс метод для задачи линейного программирования позволяет найти

1) Точное решение
2) Приближенное решение

**Вопрос 20**

Пусть на некотором этапе решения задачи линейного программирования получена следующая симплекс-таблица:

| | *C* | *u* | *v* | *w* |
|---|---|---|---|---|
| *F* | 4 | –1 | 2 | 1 |
| *x* | 3 | 3 | –1 | 1 |
| *y* | 2 | 2 | 1 | 2 |

Какие столбцы годится в качестве направляющих?

- ☐ Столбец *C*.
- ☐ Столбец *v*.
- ☐ Столбец *u*.
- ☐ Столбец *w*.
- ☐ Ни один.

**Вопрос 21**

Какой элемент в следующей симплекс-таблице следует выбрать направляющим?

| | *C* | *u* | *v* | *w* |
|---|---|---|---|---|
| *F* | 2 | –1 | 1 | –1 |
| *x* | 4 | 5 | 1 | 1 |
| *y* | 3 | 2 | 1 | 2 |

1) Строка *F*, столбец *v*.
2) Строка *y*, столбец *w*.
3) Строка *y*, столбец *v*.
4) Строка *x*, столбец *v*.
5) Строка *x*, столбец *u*.
6) Ни один из перечисленных.

**Вопрос 22**

Какие из следующих симплекс-таблиц являются нормальными при задаче минимизации?

Таблица A

| | *C* | *u* | *v* |
|---|---|---|---|
| *F* | 4 | –1 | –2 |
| *x* | –3 | 3 | –1 |
| *y* | 2 | 2 | 1 |

Таблица B

| | *C* | *u* | *v* |
|---|---|---|---|
| *F* | 4 | 1 | 2 |
| *x* | 3 | 3 | 1 |
| *y* | 2 | 2 | 1 |

Таблица C

| | *C* | *u* | *v* |
|---|---|---|---|
| *F* | 4 | 1 | –2 |
| *x* | 3 | 3 | 1 |
| *y* | 2 | –2 | 1 |

Таблица D

| | *C* | *u* | *v* |
|---|---|---|---|
| *F* | –4 | –1 | –2 |
| *x* | –3 | 3 | –1 |
| *y* | 2 | 2 | 1 |

- ☐ Таблица *A*.
- ☐ Таблица *B*.
- ☐ Таблица *C*.
- ☐ Таблица *D*.

**Вопрос 23**

Если у задачи линейного программирования решение существует и конечно, то у двойственной задачи линейного программирования решение:

1) Не существует
2) Существует и целевые функции исходной и двойственной задач принимают равные значения
3) Существует, он целевые функции исходной и двойственной задач не обязаны принимать равные значения

**Вопрос 24**

Если в исходной задаче линейного программирования *n* переменных и *m* ограничений, то в двойственной задаче количество переменных равно

- ☐ *m*
- ☐ *n*
- ☐ *mn*
- ☐ *m* + *n*

**Вопрос 25**

Если в исходной задаче линейного программирования *n* переменных и *m* ограничений, то в двойственной задаче количество ограничений равно

☐ $m$

☐ $n$

☐ $mn$

☐ $m + n$

### Вопрос 26

Дана задача линейного программирования

$$\begin{cases} CX \to \max, \\ AX \le B, \\ X \ge 0. \end{cases} \qquad (1)$$

и двойственная к ней задача

$$\begin{cases} BY \to \min, \\ AY \ge C, \\ Y \ge 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Пусть $X^*$ и $Y^*$ – два допустимых (не обязательно оптимальных) решения задач (1) и (2) соответственно. Какое из следующих условий является верным:

☐ $CX^* \le BY^*$

☐ $CX^* = BY^*$

☐ $BX^* \ge CY^*$

☐ $CX^* \ge BY^*$

### Вопрос 27

Транспортная задача является частным случаем

☐ Задачи динамического программирования

☐ Задачи линейного программирования

☐ Задачи о назначениях

### Вопрос 28

Следующая транспортная задача

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m}, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,n}, \\ x_{ij} \ge 0. \end{cases}$$

является сбалансированной, если

1) $\prod_{i=1}^{m} a_i = \prod_{j=1}^{n} b_j$.

2) $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

3) $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j$.

### Вопрос 29

Для поиска опорного плана транспортной задачи подходят следующие методы:

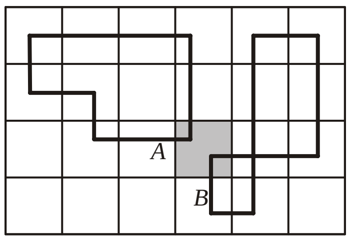
☐ Метод потенциалов.

☐ Метод северо-западного угла.

☐ Метод наименьшей стоимости.

☐ Распределительный метод.

### Вопрос 30




Для небазисной клетки (3-я строка, 4-й столбец) в таблице транспортной задачи построено два цикла, у цикла $A$ сумма отрицательная, у цикла $B$ – положительная. По какому из этих циклов следует осуществлять пересчет для снижения транспортных расходов?

1) По циклу $A$.
2) Не важно.
3) По циклу $B$.
4) Двух циклов быть не может.
5) Ни по какому циклу нельзя пересчитывать.

### Вопрос 31

При осуществлении сдвига по циклу транспортной задачи на величину $a$

1) Из всех вершин цикла вычитают величину $a$.
2) Ко всем вершинам цикла прибавляют величину $a$.
3) К вершинам цикла поочередно прибавляют и вычитают величину $a$, причем в небазисной клетке $a$ прибавляется.

### Вопрос 32

В каком из методов решения транспортной задачи можно вычислить сумму цикла, не строя сам цикл?

1) Метод потенциалов.
2) В обоих методах надо сначала построить цикл, чтобы узнать его сумму.
3) Распределительный метод.

**Вопрос 33**

Для решения задачи линейного целочисленного программирования можно

- ☐ Решить задачу без учета целочисленности переменных и полученное решение округлить.
- ☐ Итеративно решать задачу без учета целочисленности переменных и добавлять на каждом шаге правильное отсечение.
- ☐ Решить задачу без учета целочисленности переменных и полученное решение округлить в сторону увеличения для задачи максимизации и в сторону уменьшения для задачи минимизации.

**Вопрос 34**

Функция $f(\mathbf{x})$ называется выпуклой, если

- ☐ Она определена на выпуклом множестве.
- ☐ Для любых точек $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ выполняется неравенство: $f\left(t\mathbf{x}^1+(1-t)\mathbf{x}^2\right)\le tf\left(\mathbf{x}^1\right)+(1-t)f\left(\mathbf{x}^2\right)$.
- ☐ Она определена и непрерывна на выпуклом множестве.

**Вопрос 35**

Какие из следующих функций являются выпуклыми?

- ☐ $f(x)$ = sin(x) на интервале [-π, +π].
- ☐ линейная функция $f(\boldsymbol{x}) = (\mathbf{c},\mathbf{x})$.
- ☐ $f(x)$ = tg(x) на интервале [-π, +π].
- ☐ положительно определенная квадратичная форма.
- ☐ $f(x) = (1 - x^2)$ на интервале [-π, +π].

**Вопрос 36**

Производная непрерывной функции $f(x,y)$ по направлению, задаваемому единичным вектором $e$, находится как

1) Векторное произведение $[\nabla f, e]$.
2) Скалярное произведение $(\nabla f, e)$.

**Вопрос 37**

В задаче квадратичного программирования находится:

1) Экстремум квадратичной функции при линейных ограничениях.
2) Экстремум линейной функции при линейных ограничениях.
3) Экстремум квадратичной функции при квадратичных ограничениях.
4) Экстремум квадратичной функции при любых ограничениях.

**Вопрос 38**

Для решения задачи класического вариационного исчисления
$\int_a^b F\left(x,y,y'\right)\mathrm{d}x\to\min$

- ☐ Достаточно решить уравнение Эйлера-Лагранжа.
- ☐ Надо решить уравнение Эйлера-Лагранжа и применить достаточный признак Вейерштрасса или Лежандра.
- ☐ Надо решить уравнение Эйлера-Лагранжа и применить достаточный признак Коши или Д’Аламбера.

**Вопрос 39**

Теорема Дубовицкого-Милютина позволяет найти:

1) Глобальное решение задачи нелинейного программирования.
2) Локальное решение задачи линейного программирования.
3) Локальное решение транспортной задачи.
4) Локальное решение задачи нелинейного программирования.

**Вопрос 40**

В методе аппроксимации границ области для решения задачи нелинейного программирования на каждом шаге решается

1) Транспортная задача.
2) Задача о назначениях.
3) Задача линейного программирования.
4) Задача нелинейного программирования.

**Вопрос 41**

Для решения задачи глобальной оптимизации с помощью алгоритма Пиявского целевая функция должна

- ☐ Быть дважды дифференцируемой.
- ☐ Удовлетворять условию Липшица.
- ☐ Быть унимодальной.
- ☐ Удовлетворять условию Лежандра.