

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ И АНАЛИЗА ДАНЫХ РЕНТГЕНОВСКОЙ ТОМОГРАФИИ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

САМАРА
Издательство СГАУ
2007

УДК 681.3, 621.372.542

ББК 22.16

М744



**Инновационная образовательная программа
"Развитие центра компетенции и подготовка
специалистов мирового уровня в области
аэрокосмических и геоинформационных технологий"**

Рецензенты: зав. кафедрой геоинформатики СГАУ д-р.техн.наук, проф.
Сергеев В.В.; доц. кафедры безопасности информационных
систем СамГУ канд.физ.-мат.наук Осипов М.Н.

Авторы: *А.О. Корепанов, Н.Ю. Ильясова, А.В. Куприянов, В.А. Соيفер*

М744 **Методы обработки и анализа данных рентгеновской томографии:**
учеб. пособие / *А.О. Корепанов* [и др.] – Самара: Изд-во Самар. гос. аэ-
рокосм. ун-та, 2007. – 112 с.: ил.

ISBN 978-5-7883-0620-9

Учебное пособие посвящено рассмотрению вопросов, связанных с реконструкцией трехмерных древовидных объектов по данным проекционной ангиографии. В учебном пособии рассматриваются различные аспекты компьютерной томографии, геометрическая и физическая модели процессов трансмиссионной томографии. Изложены теоретические основы реконструктивной томографии, а также приведены методы и алгоритмы реконструкции изображений по проекциям, могущие быть полезными при решении ряда задач анализа проекционных данных.

Учебное пособие содержит краткое описание широко распространенного формата хранения медицинской информации DICOM, а также ссылки на источники, необходимые для дальнейшего знакомства с техническими деталями реализации формата.

Учебное пособие предназначено для обучения студентов специальности 190500 – «Биотехнические и медицинские аппараты и системы» по дисциплинам, связанным с обработкой медицинских диагностических изображений.

УДК 681.3, 621.372.542

ББК 22.16

ISBN 978-5-7883-0620-9

- © А.О. Корепанов, Н.Ю. Ильясова,
А.В. Куприянов, В.А. Соифер, 2007
- © Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2007

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1. СХЕМА ФОРМИРОВАНИЯ ДАННЫХ РЕНТГЕНОВСКОЙ ТОМОГРАФИИ	7
1.1 СХЕМА ФОРМИРОВАНИЯ ДАННЫХ.....	7
1.2 ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СЪЕМКИ..	9
1.2.1 Основные понятия геометрической алгебры векторного пространства.....	9
1.2.3 Геометрическая модель формирования данных	13
1.3 ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕГИСТРАЦИИ ПРОЕКЦИИ. ОБЩИЙ ПРИНЦИП ТРАНСМИССИОННОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ ..	19
1.4 ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ	21
1.5 ЗАДАЧА С НЕПОЛНЫМИ ДАННЫМИ.....	23
ГЛАВА 2. РЕКОНСТРУКЦИЯ ФУНКЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЛОТНОСТИ	25
2.1 ФОРМУЛЫ ОБРАЩЕНИЯ.....	25
2.2 АЛГОРИТМЫ РЕКОНСТРУКЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЛОТНОСТИ.....	28
2.2.1 Алгоритм обратного проецирования	29
2.2.2 Алгоритм сверточного типа.....	33
2.2.3 Фурье-алгоритм.....	36
2.2.4 Алгебраические алгоритмы реконструкции.....	40
ГЛАВА 3. РЕКОНСТРУКЦИЯ ГЕОМЕТРИИ СОСУДОВ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЛОТНОСТИ	45
3.1 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ	45
3.1.1 Математическая модель пространственного древовидного объекта.....	45
3.1.2 Математическая модель нечетких наблюдений древовидного объекта.....	51
3.1.3 Математическая модель проекции древовидного объекта	53
3.1.4 Компьютерное моделирование центральной линии ветви	60

3.2	МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ДРЕВОВИДНЫХ ОБЪЕКТОВ	63
3.2.1	Пространственная трассировка	64
3.2.2	Реконструкция геометрии сосудов при наличии априорной информации о геометрии сосудов на проекциях..	74
3.3	АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ВЗАИМНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ПРОЕКЦИЙ НА ВОЗМОЖНОСТЬ РЕКОНСТРУКЦИИ ОБЪЕКТА	89
3.3.1	Степень наблюдаемости объекта на наборе проекций...	89
3.3.2	Анализ неблагоприятных случаев расположения проекций	90
3.3.3	Исследование зависимости величины погрешности восстановленной центральной линии от взаимного расположения проекций	92
ГЛАВА 4. ОБЩЕЕ ЗНАКОМСТВО С ФОРМАТОМ DICOM		96
4.1	ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ.....	96
4.2	СПЕЦИФИКАЦИЯ ФОРМАТА	98
4.3	ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ СТАНДАРТА DICOM В РОССИИ	103
4.4	АЛЬТЕРНАТИВНЫЙ ФОРМАТ HL7	104
ЗАКЛЮЧЕНИЕ		106
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ		107
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК		109

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие посвящено рассмотрению различных аспектов компьютерной томографии и методов реконструкции пространственной плотности и геометрии древовидных объектов.

Предметом исследования настоящей работы является класс нечетко наблюдаемых древовидных объектов. Одним из наиболее ярких примеров задачи восстановления пространственной формы и оценивания геометрических характеристик древовидных объектов по нечетким проекционным данным является задача восстановления пространственной структуры коронарных сосудов человека по результатам рентгеновской ангиографии. Рентгеновская ангиография широко распространена в кардиологии и используется для выявления патологических изменений кровеносных сосудов сердца человека. На основе данных рентгеновской ангиографии выносится решение об операбельности пациента. В связи с широким распространением рентгеновской ангиографии в кардиологических клиниках задача реконструкции пространственной структуры древовидных объектов по нечетким проекционным данным представляется актуальной.

Помимо рентгеновской ангиографии задача реконструкции пространственной структуры древовидных объектов по нечетко наблюдаемым проекциям возникает в целом ряде биомедицинских задач, связанных с анализом сосудистой системы человека, таких как задача анализа сосудов глазного дна человека, задача компьютерной томографии сосудов головного мозга и др. Следует также отметить, что восстановление пространственной структуры древовидных объектов может найти свое применение при реконструкции некоторых нерегулярных пространственных форм, например, костной системы человека.

Будем предполагать, что объект исследования в процессе получения проекционных данных может в некоторой степени изменять свою пространственную конфигурацию (подвергаться возмущениям), а

проекции на этапе регистрации подвергаются воздействию шумов и искажений. В работе такие проекции называются нечетко наблюдаемыми, а сами наблюдения – нечеткими. Восстановление пространственной формы объекта в какой-либо определенный момент времени по таким данным не всегда представляется возможным методами классической реконструктивной томографии. Вследствие этого помимо методов реконструктивной томографии, применяемых в условиях наблюдения статического объекта, в учебном пособии изложены методы реконструкции пространственной формы объекта по набору нечетких проекционных данных, в том числе и для случая наличия динамических искажений объекта исследования в процессе съемки.

Для более полного понимания физической основы реконструктивной томографии в учебное пособие включено описание геометрической и физической модели процессов трансмиссионной томографии.

ГЛАВА 1. СХЕМА ФОРМИРОВАНИЯ ДАННЫХ РЕНТГЕНОВСКОЙ ТОМОГРАФИИ

1.1 Схема формирования данных

Коронарография – рентгеноконтрастный метод исследования, который является наиболее точным и достоверным способом диагностики ишемической болезни сердца, позволяя точно определить характер, место и степень сужения коронарной артерии. Этот метод является «золотым стандартом» в диагностике сердечно-сосудистых заболеваний и позволяет решить вопрос о выборе и объеме проведения в дальнейшем таких лечебных процедур, как баллонная ангиопластика и коронарное шунтирование [1].

Процесс коронарографии производится на специализированном оборудовании, как правило, это операционный рентгеновский аппарат типа C-ARM (наиболее крупными производителями оборудования являются такие компании как Philips, Toshiba и др.). Примеры рентгеновских аппаратов типа C-ARM представлены на рисунке 1.1.



Рис. 1.1 Примеры рентгеновских установок типа C-апп

Схема формирования данных в рентгенодиагностике коронарных сосудов основана на использовании принципов *трансмиссионной компьютерной томографии*. Формирование данных происходит следующим образом: врач задает ракурс съемки, пучок рентгеновских лучей сканирует область тела пациента, изменение интенсивности излучения фиксируется матрицей детекторов, затем эти данные обраба-

тываются на компьютере – и в результате получается двумерное изображение, которое выводится на экран монитора.

Установка состоит из источника рентгеновского излучения и приемника, соединенных между собой дугообразным держателем. Держатель жестко закреплен на подвижной опоре. Такая конструкция обеспечивает две степени свободы камеры в пространстве. Помимо того сама камера может перемещаться относительно держателя в продольном направлении, обеспечивая масштабирование изображения.

Пространственное положение камеры характеризуется парой углов: *первичным углом* поворота камеры и *вторичным углом*. Первичный угол (будем обозначать f_1) обеспечивается поворотом держателя камеры вместе с опорой относительно балки крепления. Вторичный угол (будем обозначать f_2) поворота обеспечивается скольжением дугообразного держателя по направляющей опоры, при этом камера и источник излучения движутся по дуге окружности. Таким образом, ракурс проекции определяется вектором $f = (f_1, f_2)^T$, элементы которого имеют смысл сферических координат, характеризующих поворот камеры в момент фиксации проекции. Проекцию, характеризуемую вектором углов f , для краткости будем называть f -проекцией.

В рентгеновских аппаратах типа С-ARM используется *конусная схема* сканирования. Съемка производится расходящимся пучком рентгеновского излучения, угол расхождения пучка определяется техническими характеристиками сканирующего устройства и, как правило, имеет значение 10-12°. Масштаб изображения проекции определяется положением тела пациента в пространстве между источником и приемником, а также расстоянием от источника излучения до камеры. В процессе съемки одной проекции движение камеры не происходит, однако может происходить изменение масштаба, а также движение кровати вместе с пациентом в горизонтальной плоскости.

Следует отметить, что для каждой проекции снимается последовательность кадров (фильм), при этом время съемки составляет 3-5

секунд, после чего врач изменяет ракурс съемки и процесс повторяется. Вследствие этого возникает еще одна задача (которую мы оставим за рамками данного пособия), связанная с выбором из последовательности кадров единственного кадра наиболее информативного с точки зрения представления геометрических характеристик исследуемого объекта.

Все данные, полученные в результате коронарографии, сохраняются в формате *DICOM* (Digital Imaging and Communications in Medicine), речь о котором пойдет в главе 4.

1.2 Геометрическое моделирование процесса съемки

Для описания геометрии пространственных объектов и их проекций будем использовать геометрическую алгебру [2], [3], [4]. Прежде чем перейти к описанию геометрической модели формирования данных рассмотрим некоторые вспомогательные понятия геометрической алгебры.

1.2.1 Основные понятия геометрической алгебры векторного пространства

Пусть V^n - n -мерное векторное пространство над полем действительных чисел \mathbf{R} . Геометрическая алгебра Cl_n формируется из V^n введением мультилинейной, ассоциативной операции геометрического произведения, удовлетворяющей следующему свойству:

$$a^2 = \sigma_a |a|^2, \quad \forall a \in V^n,$$

где $\sigma_a \in \{-1, 0, 1\}$ - знак элемента a , величина $|a| > 0$, если $a > 0$ является модулем элемента a . В нашем случае $\sigma_a = 1$.

Мультилинейность означает, что:

$$a_1 \dots (b_1 + \dots + b_s) \dots a_t = (a_1 \dots b_1 \dots a_t) + \dots + (a_1 \dots b_s \dots a_t),$$

для $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s \in V^n$ и произвольного положения сомножителя в скобках в произведении. Элементы геометрической алгебры называются мультивекторами.

Внутреннее и внешнее произведение.

Для геометрического произведения могут быть определены два новых произведения для $\forall a, b \in V^n$: коммутативное, вещественно-значное произведение:

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba) = b \cdot a,$$

называемое *внутренним произведением*; и антикоммутативное произведение:

$$a \wedge b = \frac{1}{2}(ab - ba) = -b \wedge a,$$

называемое *внешним произведением*. Тогда:

$$ab = a \cdot b + a \wedge b.$$

Произведение мультивекторов.

Вся геометрическая алгебра строится путем последовательного перемножения векторов [2]. Внешнее произведение набора r линейно независимых векторов называется r -гранью или гранью ранга r . Линейная комбинация r -граней называется r -вектором или однородным вектором ранга r . Множество r -векторов определяет подпространство CI_n^r размерности C_n^r . Тогда произвольный мультивектор M описывается суммой r -векторов M_r различных рангов:

$$M = \sum_{r=0}^n M_r \text{ и, следовательно, } CI_n = \sum_{r=0}^n CI_n^r.$$

Пусть заданы две грани $A_r = a_1 \wedge \dots \wedge a_r$ и $B_s = b_1 \wedge \dots \wedge b_s$. Тогда их внешнее произведение определяется как:

$$A_r \wedge B_s = a_1 \wedge \dots \wedge a_r \wedge b_1 \wedge \dots \wedge b_s,$$

и внутренне произведение:

$$\begin{aligned}
& (a_1 \wedge \dots \wedge a_r) \cdot (b_1 \wedge \dots \wedge b_s) = \\
& = \begin{cases} ((a_1 \wedge \dots \wedge a_r) \cdot b_1) \cdot (b_2 \wedge \dots \wedge b_s) & \text{если } r \geq s, \\ (a_1 \wedge \dots \wedge a_{r-1}) \cdot (a_r \cdot (b_1 \wedge \dots \wedge b_s)) & \text{если } r < s, \end{cases}
\end{aligned}$$

где

$$(a_1 \wedge \dots \wedge a_r) \cdot b_1 = \sum_{i=1}^r (-1)^{r-i} a_1 \wedge \dots \wedge a_{i-1} \wedge (a_i \cdot b_1) \wedge a_{i+1} \wedge \dots \wedge a_r,$$

$$a_r \cdot (b_1 \wedge \dots \wedge b_s) = \sum_{i=1}^s (-1)^{i-1} b_1 \wedge \dots \wedge b_{i-1} \wedge (a_r \cdot b_i) \wedge b_{i+1} \wedge \dots \wedge b_s.$$

Для произвольного мультивектора $M \in Cl_n$ внешнее и внутренне умножение на скаляр $\lambda \in \mathbf{R}$ определяется следующим образом:

$$\lambda \cdot M = M \cdot \lambda = 0,$$

$$\lambda \wedge M = M \wedge \lambda = \lambda M.$$

Операция сопряжения.

Главный автоморфизм геометрической алгебры называется обращением и определяется следующим образом. Для $\forall M \in Cl_n$:

$$\langle M^\dagger \rangle_i = (-1)^{\frac{i(i-1)}{2}} \langle M \rangle_i, \quad 0 \leq i \leq n. \quad (1.1)$$

Главный антиавтоморфизм геометрической алгебры называется геометрическим сопряжением и определяется следующим образом. Для $\forall M \in Cl_n$:

$$\langle M^* \rangle_i = (-1)^i \langle M \rangle_i, \quad 0 \leq i \leq n. \quad (1.2)$$

Обратный элемент.

Обратным элементом к мультивектору M , если он существует, является элемент M^{-1} , такой что $MM^{-1} = M^{-1}M = 1$. В случае, когда M является версором, т.е. может быть получен геометрическим произведением набора векторов $M = m_1 \dots m_r$, если он не вырожден, обратный элемент представляется в виде:

$$M^{-1} = \frac{M^\dagger}{MM^\dagger}. \quad (1.3)$$

Двойственный элемент.

В Cl_n максимальный ранг грани равен n и произвольная грань A_n ранга n называется псевдоскаляром. Будем обозначать I_n псевдоскаляр, модуль которого равен единице (единичный псевдоскаляр).

Двойственным мультивектора M в Cl_n является элемент

$$M^- = MI_n^{-1}.$$

Двойственной к грани ранга r является грань ранга $(n-r)$.

Проекция и отклонение.

Пусть B_r - невырожденный r -вектор в Cl_n , $x \in V^n$ - произвольный вектор. Тогда проекция вектора x на r -вектор B_r определяется по формуле:

$$P_{B_r}(x) = (x \cdot B_r) B_r^{-1}. \quad (1.4)$$

Отклонение вектора x от r -вектора B_r определяется формулой:

$$P_{B_r}^\perp(x) = (x \wedge B_r) B_r^{-1}. \quad (1.5)$$

Следовательно, $x = P_{B_r}(x) + P_{B_r}^\perp(x)$.

Пересечение.

Пусть M и N - два мультивектора, таких, что $grade(M) + grade(N) \geq n$, тогда их пересечение $M \vee N$ определяется как

$$M \vee N = \tilde{M} \cdot N.$$

Операция пересечения удовлетворяет правилу:

$$(M \vee N)^\sim = \tilde{M} \wedge \tilde{N}.$$

Пересечение может быть интерпретировано как алгебраическое представление пересечения векторных подпространств [4].

Вращение.

Спинором называется четный версор, такой, что $RR^\dagger = |R|^2$, т.е.

$$R^{-1} = \frac{R^\dagger}{|R|^2}.$$

Для произвольного мультивектора $M \in Cl_n$ вращение можно представить в виде

$$R(M) = RMR^{-1},$$

где R спинор. В случае, когда спинор нормирован, т.е. $|R|^2 = 1$, вращение будет иметь вид:

$$R(M) = RMR^\dagger.$$

В евклидовом пространстве версор, осуществляющий вращение, может быть представлен в виде [3]:

$$R = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)B, \quad (1.6)$$

где B - бивектор, определяющий плоскость вращения. В случае, когда производится вращение вектора x , лежащего в плоскости бивектора B , оператор вращения может быть представлен в виде:

$$R(x) = xR, \quad (1.7)$$

где

$$R = \cos(\theta) + \sin(\theta)B. \quad (1.8)$$

Следует отметить, что при записи формул внутреннее и внешнее произведения имеют приоритет над геометрическим. Прописными буквами в основном будем обозначать вектора в проективном пространстве, а также мультивекторы.

1.2.3 Геометрическая модель формирования данных

Для реконструкции пространственной плотности и оценивания геометрических параметров объекта необходимо иметь информацию о взаимном расположении проекций в момент фиксации проекций. Та-

кую информацию обеспечивает знание механики движения камеры и характеристики этого движения в процессе съемки проекций. Геометрическая модель съемки проекций позволяет решить две задачи: определить связь локальной системы координат каждой из проекций с некоторой фиксированной пространственной системой координат (которую в дальнейшем мы будем называть мировой системой координат), а также получить явное выражение координат проекционного образа произвольной пространственной точки в локальной системе координат, связанной с проекцией.

Вторая задача требует отдельного рассмотрения для случая параллельной схемы сканирования и конусной схемы сканирования, в то время как первая задача является универсальной для обеих схем.

Первая задача. Рассмотрим рентгенографическую установку в момент времени, когда $f_1 = f_2 = 0$ и введем в рассмотрение систему координат $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 . Вектор e_3 направим вдоль нормали к плоскости приемника излучения, вектор e_1 будет лежать в плоскости С-образного держателя перпендикулярно вектору e_3 и направлен от установки (то есть вдоль тела пациента), вектор $e_2 = \langle e_1, e_3 \rangle$ (то есть направлен влево от пациента). Положим $\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1$. Таким образом, векторы e_1, e_2, e_3 образуют правую ортонормальную тройку векторов.

Вследствие неподвижности приемника излучения относительно С-образного держателя можно приближенно считать, что в процессе съемки движение плоскости приемника происходит по поверхности сферы S^2 фиксированного радиуса r , причем точка касания не меняет своего положения на указанной плоскости. Величину r будем считать известной, она является характеристикой установки и может быть найдена в технической документации.

Тогда в аффинном пространстве \mathbf{A}^3 , ассоциированным с введенным векторным пространством, удобно поместить начало координат O в точку, являющуюся центром сферы S^2 . Систему координат Oe будем называть *мировой системой координат*.

Рассмотрим произвольную проекцию, ракурс которой определяется вектором углов f , и определим на ней локальную систему координат $O\check{y}$, где $O\check{y}$ - точка касания плоскости приемника сферы S^2 , в идеале являющаяся точкой проекции центра сферы S^2 на плоскость проекции, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ – набор базисных векторов системы координат. Векторы a_1 и a_2 называются направляющими векторами, они определяют ориентацию плоскости. Будем описывать ориентацию плоскости бивектором $A = a_1 \wedge a_2$. Вектор a_3 называется вектором смещения и, соответственно, определяет смещение начала координатной системы плоскости проекции O' от начала O пространственной системы координат. Такое задание плоскости проекции (далее, просто проекции) позволяет пространство \mathbf{R}^3 ассоциировать с проективным пространством \mathbf{P}^2 , в котором плоскости проекций (пространства \mathbf{R}^2) являются аффинными картами [5].

Для установления взаимосвязи между координатными системами $O\check{y}$ и Oe необходимо задать механизм определения базисных векторов a_1 и a_2 координатной системы $O\check{y}$, лежащих в плоскости f -проекции, а также смещение начала координат локальной координатной системы, то есть вектора $a_3 = O\check{y}$. Этот механизм полностью определяется механикой движения камеры и вектором углов f посредством действия пары операторов вращения на мировую систему координат.

Определим явные выражения для векторов a_1 и a_2 . Эти векторы являются результатом вращения соответственно векторов e_1 и e_2 . Ра-

курс съемки достигается движением плоскости проекции по поверхности сферы, которое описывается двумя последовательными поворотами: на угол ϕ_1 относительно оси Oe_1 и, далее, поворотом на угол ϕ_2 относительно оси Oa_2 , где вектор a_2 получен из вектора e_2 после первого поворота. Имеем:

$$a_2 = e_2 R_{\phi_1},$$

где R_{ϕ_1} - мультивектор, осуществляющий поворот на угол ϕ_1 относительно оси e_1 :

$$R_{\phi_1} = \cos \phi_1 + \sin \phi_1 e_2 \wedge e_3.$$

Тогда:

$$a_2 = \cos \phi_1 e_2 + \sin \phi_1 e_3.$$

Обозначим:

$$a_2^1 = 0,$$

$$a_2^2 = \cos \phi_1,$$

$$a_2^3 = \sin \phi_1. \quad (1.9)$$

Далее поворот на угол ϕ_2 осуществляется относительно вектора a_2 . Определим оставшиеся векторы:

$$a_1 = e_1 R_{\phi_2},$$

где R_{ϕ_2} - оператор поворота на угол ϕ_2 относительно оси Oa_2 .

$$R_{\phi_2} = \cos \phi_2 + \sin \phi_2 e'_3 \wedge e_1,$$

$$e'_3 = e_3 R_{\phi_1} = \cos \phi_1 e_3 - \sin \phi_1 e_2.$$

Тогда:

$$a_1 = \cos \phi_2 e_1 - \sin \phi_2 e'_3 = \cos \phi_2 e_1 + \sin \phi_1 \sin \phi_2 e_2 - \cos \phi_1 \sin \phi_2 e_3.$$

Обозначим:

$$a_1^1 = \cos \phi_2,$$

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 &= \sin \phi_1 \sin \phi_2, \\ \alpha_1^3 &= -\cos \phi_1 \sin \phi_2. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Вектор смещения в начальный момент равен $-re_3$. Тогда:

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= -re'_3 R_{\phi_2} = -r(\cos \phi_2 e'_3 + \sin \phi_2 e_1) = \\ &= -r(\sin \phi_2 e_1 - \sin \phi_1 \cos \phi_2 e_2 + \cos \phi_1 \cos \phi_2 e_3). \end{aligned}$$

Аналогично предыдущим случаям обозначим:

$$\begin{aligned} \alpha_3^1 &= -r \sin \phi_2, \\ \alpha_3^2 &= r \sin \phi_1 \cos \phi_2, \\ \alpha_3^3 &= -r \cos \phi_1 \cos \phi_2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Тогда преобразование координат запишется в виде:

$$a_k = \sum_{j=1}^3 a_k^j e_j, \quad k=1, 2, 3.$$

Координаты произвольной точки x изображения проекции в \mathbf{P}^2 (в мировой системе координат) имеют вид:

$$x = \sum_{i=1}^3 x^i a_i, \quad (1.12)$$

где (x^1, x^2) - координаты точки изображения, $x^3 \equiv 1$.

Проекция произвольной пространственной точки x на плоскость проекции согласно (1.4) имеет вид:

$$x' = (x \cdot a_1 \wedge a_2) a_2 \wedge a_1 = (x \cdot a_1) a_1 + (x \cdot a_2) a_2. \quad (1.13)$$

Отклонение точки от проекции согласно (1.5) имеет вид:

$$x^\perp = (x \wedge a_1 \wedge a_2) a_2 \wedge a_1 = x - (x \cdot a_1) a_1 - (x \cdot a_2) a_2. \quad (1.14)$$

Вторая задача. Рассмотрим два случая: случай плоскопараллельной проекции и случай центральной проекции.

Параллельная схема сканирования. Параллельная схема сканирования имеет место в случае, когда съемка производится плоскопарал-

лельным пучком излучения. В нашем случае это не верно, однако в ряде случаев удобно сделать предположение о плоскопараллельности пучка излучения, что существенно облегчит решение некоторых задач реконструкции. Кроме того, такое предположение не лишено основания в случае, когда размеры исследуемого объекта малы по сравнению с расстоянием от источника излучения до приемника. На практике это предположение зачастую оказывается приемлемым.

В этом случае для описания проекционного образа произвольной точки $x \in A^3$, принадлежащей области пространства, подвергающейся проецированию на f -проекцию, достаточно знать только пространственную ориентацию проекции без учета расстояния от источника и приемника до проецируемого объекта. Действие оператора проецирования на произвольную точку x в этом случае сводится к применению формулы (1.13) и обнулению последней координаты.

Центральная проекция. В этом случае для определения координат проекционного образа точки на f -проекцию необходимо иметь дополнительную информацию о расстоянии между источником излучения и приемником в момент фиксации проекции, которое может меняться в процессе съемки. Эта информация может быть найдена в заголовке файла формата DICOM. Обозначим это расстояние d и будем считать его известной величиной.

Известно, что при расходящемся пучке рентгеновского излучения будут происходить перспективные искажения. Если объект имеет протяженные размеры, то масштаб объекта будет заметно меняться в пределах одного кадра, что приводит к тому, что различные части одного и того же объекта будут иметь различные размеры. Масштабирование изображения в этом случае может производиться двумя способами: приближением (удалением) исследуемого объекта к приемнику, или же удалением (приближением) самого приемника от источника излучения, не меняя положения объекта.

Действие оператора проецирования на произвольную точку $x \in \mathbf{O R}^3$ в этом случае сводится к применению формулы проецирования (1.13) с учетом отклонения точки от плоскости проекции, определяемой формулой (1.14), и смещения самой плоскости в аффинном пространстве от начала координат, определяемым вектором a_3 по формуле (1.11):

$$x \check{y} = a_d \frac{\check{y} x \check{C} \check{H}_1}{\check{K}} a_1 + (x \check{C} \check{H}_2) a_2 \frac{\Pi}{\mathbb{B}}, \quad (1.15)$$

где $a_d = \frac{d}{d - \|x^\wedge + a_3\|}$.

1.3 Физическая модель регистрации проекции. Общий принцип трансмиссионной компьютерной томографии

Упрощенную схему процесса формирования проекций можно описать следующим образом. Совокупность тонких пучков рентгеновских лучей исходит из источника излучения и, проходя сквозь биологические ткани пациента, лучи ослабляются и попадают в приемник, где фиксируются матрицей детекторов. Затем эти данные обрабатываются на компьютере, и в результате получается двумерное изображение, которое выводится на экран монитора. Изображение формируется за счет разницы коэффициентов поглощения рентгеновского излучения различными биологическими тканями.

Рассмотрим упрощенную физическую модель формирования изображения. Пусть $f(x)$ – коэффициент поглощения рентгеновских лучей биотканями в точке x , т.е. относительное уменьшение интенсивности рентгеновского излучения на малом отрезке Dx в точке x составляет:

$$\frac{DI}{I} = f(x)Dx. \quad (1.16)$$

Обозначим через I_0 начальную интенсивность прямолинейного луча L , а через I_1 — его интенсивность после прохождения через тело. В силу (1.16):

$$\frac{I_1}{I_0} = \exp \int_L f(x) dx \quad (1.17)$$

Введем обозначение $g(L) = \ln \frac{I_1}{I_0}$, тогда из формулы (1.17) получим:

$$g(L) = \int_L f(x) dx, \quad (1.18)$$

т.е. в результате сканирования изображение g формируется как совокупность линейных интегралов функции f по каждой из прямых L . По совокупности этих интегралов можно восстановить исходную функцию f .

Отображение функции, заданной на \mathbb{R}^3 , в множество её линейных интегралов называется лучевым преобразованием. Таким образом, задача восстановления сводится к нахождению обратного лучевого преобразования на \mathbb{R}^3 .

Следует отметить, что здесь рассмотрена упрощенная схема формирования данных, позволяющая понять формальную связь рентгенографии с интегральной геометрией и перейти к рассмотрению математических аспектов реконструктивной томографии. На практике используется гораздо более сложная модель формирования изображения, учитывающая результаты предварительной калибровки установки, статистику фотонов, погрешности дискретизации, проблемы, связанные с полихроматичностью рентгеновского излучения и другие аспекты.

В настоящей работе мы не будем останавливаться на технических аспектах рентгенодиагностики, исчерпывающую информацию по указанной теме можно найти, например, в [6].

1.4 Определения и основные свойства некоторых интегральных операторов

Из (1.18) следует, что изображение проекции есть результат лучевого преобразования функции пространственной плотности f . Лучевое преобразование относится к классу интегральных преобразований и является обратимым в некотором классе функций. Рассмотрим более подробно вид лучевого преобразования в трехмерном пространстве.

Пусть в \mathbb{R}^3 определена функция f , принадлежащая пространству Шварца [7] $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$, введем обозначение S^2 – единичная сфера в \mathbb{R}^3 . Введем также обозначение:

$$q = (\sin f_2 \sin f_1, \sin f_2 \cos f_1, \cos f_2)^T, \quad q \in OS^2.$$

Лучевое преобразование \mathbf{P} отображает функцию, определенную в \mathbb{R}^3 во множество её линейных интегралов. Точнее, если $q \in OS^2$ и $x \in \mathbb{R}^3$, то

$$\mathbf{P}f(\theta, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + t\theta) dt \quad (1.19)$$

представляет собой интеграл функции f по прямой, проходящей через точку x в направлении q . Очевидно, что величина $\mathbf{P}f(q, x)$ не меняется при смещении точки x в направлении q , поэтому будем полагать, что $x \in \hat{q}$, где \hat{q} – подпространство ортогональное q , тем самым, определяя $\mathbf{P}f$ на касательном расслоении:

$$T = \{(q, x) : q \in OS^2, x \in \hat{q}\}$$

сферы S^2 . Введем также обозначение

$$\mathbf{P}_q f(x) = \mathbf{P}f(q, x). \quad (1.20)$$

Иногда $\mathbf{P}_q f$ называют проекцией f на \hat{q} .

Существует также ряд других интегральных преобразований, тесно связанных с лучевым преобразованием, наиболее важными из которых являются преобразование Радона и веерное преобразование.

Преобразование Радона \mathbf{R} отображает функцию, определенную в \mathbb{R}^3 , во множество её интегралов по гиперплоскостям в \mathbb{R}^3 . Точнее, если $q \in OS^2$ и $s \in \mathbb{R}^1$, то

$$\mathbf{R}f(q, s) = \int_{x \cdot q = s} f(x) dx = \int_{\hat{q}} f(sq + y) dy \quad (1.21)$$

представляет собой интеграл функции f , принадлежащей пространству Шварца $\mathbf{J}(\mathbb{R}^3)$, по гиперплоскости, перпендикулярной вектору q и расположенной на расстоянии s (с учётом знака) от начала координат. Очевидно, что $\mathbf{R}f$ - четная функция, определенная на единичном цилиндре $Z = S^2 \times \mathbb{R}^1$ в \mathbb{R}^3 , т.е. $\mathbf{R}f(-q, -s) = \mathbf{R}f(q, s)$.

Введем также обозначение

$$\mathbf{R}_q f(s) = \mathbf{R}f(q, s). \quad (1.22)$$

Между лучевым преобразованием и преобразованием Радона имеется следующая очевидная связь. $\mathbf{R}f(w, s)$ можно представить в виде интеграла от $\mathbf{P}f$: для любого $q \in OS^2$, такого что $q \wedge w$:

$$\mathbf{R}f(w, s) = \int_{x \in Oq^\wedge, x \cdot w = s} \mathbf{P}f(q, x) dx. \quad (1.23)$$

Последнее выражение позволит нам использовать для исследования лучевого преобразования результаты, полученные для преобразования Радона.

Веерное преобразование:

$$\mathbf{D}f(a, q) = \int_0^\Gamma f(a + tq) dt \quad (1.24)$$

представляет собой интеграл функции f по лучу с началом $a \in \mathbb{O}\mathbb{R}^3$, направлением $q \in OS^2$. Введем также обозначение

$$\mathbf{D}_a f(q) = \mathbf{D}f(a, q). \quad (1.25)$$

Если $f \in \mathbf{OJ}(\mathbf{R}^3)$, то функции $\mathbf{R}_\theta f$, $\mathbf{P}_\theta f$, $\mathbf{R}f$ и $\mathbf{P}f$ принадлежат пространствам Шварца, заданным на \mathbf{R}^1 , \hat{q} , Z и T соответственно. Пространства на Z и T задаются с помощью локальных координат методом, рассмотренным ранее.

1.5 Задача с неполными данными

Как показано ранее, задача восстановления пространственного объекта сводится к нахождению обратного лучевого либо веерного преобразования на \mathbf{R}^3 . Существует явная формула обращения, однако в практических вычислениях формула обращения имеет ограниченные возможности и решает задачу лишь частично.

На практике значения интегралов (1.19), (1.25) можно вычислить только для конечного числа прямых L . Расположение этих прямых определяется схемой сканирования (в работе рассматриваются две основные схемы: параллельная и конусная). Главная задача реконструктивной томографии заключается в восстановлении функции по конечному числу её линейных интегралов, причем процедура восстановления должна соответствовать схеме сканирования. Указанная задача относится к классу задач с неполными (существенно неполными) данными и, следовательно, является некорректной. Действительно, для получения трехмерного изображения динамического объекта (например, бьющегося сердца) нужно решать трехмерную задачу, в которой линейные интегралы по всем участкам тела вычисляются одновременно. Поскольку возможные ракурсы съемки проекций ограничены техническими возможностями рентгеновской установки, а количество проекций – максимально допустимой дозой облучения пациента, неполнота данных в этом случае является не исключением, а правилом. Кроме того, даже при наличии необходимого количества проекций практически невозможно произвести одновременную съемку всех проекций (в настоящее время существуют биплановые установки, позволяющие производить одно-

временную съемку пары проекций), что в условиях наблюдения динамического объекта приводит к рассогласованию данных, содержащихся на различных проекциях. В этом случае восстановление исходного объекта становится невозможно в принципе, и задача реконструкции становится существенно некорректной.

В свете всего вышесказанного возникает необходимость разработки альтернативных классическому подходу реконструктивной томографии методов оценивания геометрических характеристик объекта по данным проекционной ангиографии. В качестве таких методов в работе представлены методы пространственной трассировки сосудов. Наряду с этим в работе описываются классические методы реконструктивной томографии применительно к решаемой задаче.

ГЛАВА 2. РЕКОНСТРУКЦИЯ ФУНКЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЛОТНОСТИ

Основные результаты реконструкции пространственной плотности в этой главе получены для преобразования Радона в виду исключительной практической ценности последнего. Однако существующая связь между интегральными преобразованиями, описанными в предыдущей главе позволяет распространить результаты этой главы на другие операторы. Например, формула (1.23) может быть использована для обращения лучевого преобразования.

2.1 Формулы обращения

Явные формулы обращения нужны не только для разработки алгоритмов восстановления. Они также играют важную роль при изучении локальной зависимости решений от исходных данных. Мы получим формулы обращения для операторов \mathbf{R} и \mathbf{P} .

Введем в рассмотрение несколько вспомогательных понятий. Определим операторы обратного проецирования \mathbf{R}^* и \mathbf{P}^* , образующие двойственные пары в смысле интегральной геометрии к операторам \mathbf{R} и \mathbf{P} соответственно. Оператор \mathbf{R} задает интегрирование по всем точкам плоскости, а оператор \mathbf{R}^* задает интегрирование по всем плоскостям, проходящим через данную точку. Аналогичная связь имеется у пары операторов \mathbf{P} и \mathbf{P}^* . Формулы двойственных операторов имеют вид:

$$\mathbf{R}^* f(x) = \int_{S^2} f(q, x \mathbf{C}_q) dq, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{P}^* f(x) = \int_{S^2} f(q, q^\wedge \mathbf{C}_q) dq, \quad (2.2)$$

где запись $q^\wedge \mathbf{C}_q$ означает ортогональную проекцию вектора x на подпространство q^\wedge .

Между парами двойственных операторов имеется связь, определяемая следующими выражениями:

$$\mathbf{R}^* \mathbf{R} f = 2p |x|^{-1} * f, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{P}^* \mathbf{P} f = 2 |x|^{-2} * f. \quad (2.4)$$

Для $a < n$ определим линейный оператор \mathbf{I}^a , называемый *потенциалом Рисса*:

$$(\mathbf{I}^a f)^\wedge(x) = |x|^{-a} \mathcal{F}(x).$$

Когда оператор \mathbf{I}^a применяется к функциям, определенным на единичном цилиндре Z или на касательном расслоении сферы T он действует по второй переменной. Если $f \in \mathbf{OJ}(\check{Y}^3)$, то выполняется следующее равенство:

$$\mathbf{I}^{-a} \mathbf{I}^a f = f.$$

Следующая теорема определяет формулы обращения лучевого оператора и оператора Радона.

Теорема 2.1. Пусть $f \in \mathbf{OJ}(\check{Y}^3)$. Тогда для любого $a < n$ при $g = \mathbf{R}f$:

$$f = \frac{1}{8p^2} \mathbf{I}^{-a} \mathbf{R} \mathbf{I}^{a-2} g, \quad (2.5)$$

при $g = \mathbf{P}f$:

$$f = \frac{1}{2p} \mathbf{I}^{-a} \mathbf{P}^* \mathbf{I}^{a-1} g. \quad (2.6)$$

■

Рассмотрим важный частный случай для формулы обращения преобразования Радона, который в дальнейшем будет положен в основу ряда алгоритмов реконструкции.

Положив $a = 0$ в формуле (2.5), получим

$$f = \frac{1}{8p^2} \mathbf{R}^* \mathbf{I}^{-2} g, \quad (2.7)$$

где \mathbf{I}^{-2} применяется к функции, определенной на \mathbf{R}^1 . Можно показать, что для произвольной функции $g \in \mathcal{O}(\mathbf{R}^1)$ выполняется равенство:

$$\mathbf{I}^{-2} g = \mathbf{H}^2 g^{(2)}, \quad (2.8)$$

где \mathbf{H} - преобразование Гильберта, $g^{(2)}$ - вторая производная функции g по второй скалярной координате.

Тогда выражение (2.7) можно переписать в виде:

$$f = \frac{1}{8p^2} \mathbf{R}^* \mathbf{H}^2 g^{(2)}. \quad (2.9)$$

То есть обратное преобразование Радона заключается в последовательном действии на радоновский образ тройки операторов: оператора взятия второй производной, оператора Гильберта \mathbf{H}^2 и оператора обратного проецирования \mathbf{R}^* .

Заметим, что преобразование Гильберта в нашем случае имеет вид:

$$\mathbf{H}^2 = -1.$$

Тогда выражение (2.9) переписывается

$$f = - \frac{1}{8p^2} \mathbf{R}^* g^{(2)}, \quad (2.10)$$

или в явном виде:

$$f(x) = - \frac{1}{8p^2} \int_{s^2} g^{(2)}(q, x) \mathcal{C} q \, dq. \quad (2.11)$$

Следует отметить, что аналогичный результат может быть получен, если в формуле (2.5) положить $a = 2$.

Следует также отметить, что формула обращения для P практически бесполезна, так как для её применения нужно знать всю совокупность линейных интегралов, тогда как на практике можно измерить лишь небольшую их часть. Однако связь между преобразованием Радона и лучевым преобразованием, рассмотренная ранее, позволяет использовать рассмотренный математический аппарат для реконструкции исходной функции по образу лучевого преобразования.

2.2 Алгоритмы реконструкции пространственной плотности

Поскольку лучевое преобразование однозначно связано с преобразованием Радона соотношением (1.23) (а для дискретного случая производится численное интегрирование в правой части выражения), то, если обратное не оговорено явно, мы будем ограничиваться рассмотрением алгоритмов реконструкции исходной функции по радоновскому образу, для которых в ряде случаев существует более удобные с практической точки зрения формулы [9].

Существует множество различных подходов к восстановлению исходной функции по радоновскому образу, основанных, как правило, на использовании различных комбинаций операторов, входящих в выражение (2.9), а также на специальном их представлении как в непрерывном, так и в дискретном виде. Помимо этого существует ряд эмпирических алгоритмов, не обладающих строгим доказательством сходимости, однако часто применяемых на практике в силу их простоты и достаточной эффективности. Можно условно выделить несколько групп алгоритмов реконструкции, использующих сходные математические техники:

1. Алгоритмы обратного проецирования.
2. Алгоритмы сверточного типа.
3. Фурье-алгоритмы.
4. Алгебраические алгоритмы.
5. Алгоритмы r' -фильтрации проекций.

Следует отметить, что все разнообразие алгоритмов не ограничивается перечисленными выше, кроме того, на практике используются комбинированные алгоритмы, позволяющие повысить точность реконструкции. В конкретных задачах наряду с указанными выше широко используются эмпирические методы [6,9], учитывающие специфику задачи и обладающие меньшей вычислительной сложностью. Далее рассмотрим более подробно каждую из перечисленных групп.

2.2.1 Алгоритм обратного проецирования

Наипростейший алгоритм реконструкции состоит в том, что оценку плотности в произвольной точке находят путем сложения лучевых сумм для всех лучей, проходящих через данную точку. Это – алгоритм *суммирования* или *обратного проецирования*, который может быть использован как для реконструкции по радоновскому образу, так и (с тривиальными изменениями) по образу лучевого преобразования.

Данный алгоритм является, по сути, реализацией оператора обратного проецирования, задаваемого формулой (2.1).

Пусть определен радоновский образ $g = \mathbf{R}f$, где $f \in \mathbf{J}(\mathbf{R}^3)$. Оценка исходной функции f , получаемая применением оператора обратного проецирования к радоновскому образу, имеет вид:

$$\hat{f} = \mathbf{R}^* \mathbf{R} f, \quad (2.12)$$

или явная формула:

$$\hat{f}(x) = \int_{S^2} \mathbf{R} f(q, x \cdot \mathbf{C}q) dq. \quad (2.13)$$

Сравнивая выражение (2.12) с явной формулой обращения преобразования Радона (2.9) можно прийти к следующему выводу. Обратное преобразование Радона выполняется при помощи трех последовательных операций (не считая операции нормирования): дифференцирования, преобразования Гильберта и обратного проецирования. Использование для реконструкции только оператора обратного проецирования, вообще говоря, мало

обоснованно и должно приводить к размытию (то есть низкочастотной фильтрации) результирующего изображения. Эффект размытия результирующего изображения следует также из анализа формулы (2.3), где низкочастотная фильтрация обуславливается наличием в формуле нескомпенсированной сворачивающей функции $|x|^{-1}$.

При наличии малого количества проекций на результирующем пространственном изображении наблюдаются линейные артефакты, которые будут ослабляться при увеличении объема проекционных данных, однако, полностью нивелируются лишь при наличии полного радоновского образа.

Несмотря на указанные недостатки, этот метод имеет право на существование и в ряде случаев позволяет получить представление о структуре восстанавливаемого объекта, обладая при этом относительно низкой вычислительной сложностью. Следует отметить, что традиционная реконструктивная томография [6], по существу, является реализацией метода обратного проецирования.

Рассмотрим дискретную реализацию алгоритма обратного проецирования. Рассмотрим выборку значений функции $g = \mathbf{R}f$ в точках (q_j, s_l) , $j = \overline{0, m}$, $l = \overline{-k, k}$, где $q_j \in OS^2$. Для каждого ракурса q_j будем предполагать единую равномерную дискретизацию радоновского образа по второй переменной, то есть:

$$s_l = hl, h = \frac{1}{2k + 1}. \tag{2.14}$$

Предположим также равномерную дискретизацию множества q_j , то есть, переходя к сферическим координатам $f = (f_1, f_2)$ (здесь f_1, f_2 имеют смысл первичного и вторичного углов поворота камеры), для нечетных m имеем:

$$f_1^j = \frac{ip}{m + 1}, i = \overline{0, m},$$

$$0 < f_2^{(m+1)/2} < \dots < f_2^2 < f_2^1 < \frac{p}{2}, \quad (2.15)$$

$$f_2^{-j} = p - f_2^j, \quad j = \overline{1, (m+1)/2}.$$

$$q_j = \left(\sin f_2^j \sin f_1^j, \sin f_2^j \cos f_1^j, \cos f_2^j \right)^T.$$

Для вычисления обратной проекции в (2.12) воспользуемся квадратурной формулой интегрирования по S^2 с узлами q_j , $j = \overline{1, p}$ [8]:

$$\mathbf{R}_d^* f(\mathbf{x}) = \sum_{j=-\frac{(m+1)/2}{2}}^{\frac{(m+1)/2}{2}} A_j \mathbf{e}^m \mathbf{R} f(q_j, x \mathbf{C}_j), \quad (2.16)$$

где $A_j = \frac{3p}{2m} + 1 \frac{\prod_{i=1}^m \sin f_2^i}{\prod_{i=1}^m \sin f_2^i}$, которая верна в случае, когда функция $\mathbf{R} f$

есть полином степени не выше $2m$, где m – нечетное.

Так как радоновский образ является дискретным также по второму аргументу, то значение $\mathbf{R}_{q_j} f(x \mathbf{C}_j)$ может не присутствовать в проекционных данных, то есть точка $x \mathbf{C}_j$ может попасть между узлами радоновской проекции $\mathbf{R}_{\theta_j} f$. Чтобы решить эту проблему, используется интерполирование проекционных данных. В реконструктивной томографии, как правило, используются два вида интерполяции: интерполяция по ближайшему соседу и линейная интерполяция по паре соседей. Обозначим \mathbf{T} – оператор выбора интерполированного значения радоновской проекции по значению второй переменной $x \mathbf{C}_j$.

При интерполяции по ближайшему соседу действие оператора \mathbf{T} заключается в выборе такого n , чтобы минимизировать величину $|\pi h - x \mathbf{C}_j|$, тогда:

$$\text{TR}_{q_j} f(x \Psi_j) = \mathbf{R}_{q_j} f(n).$$

При линейной интерполяции действие оператора \mathbf{T} заключается в выборе такого n , что:

$$nh \leq x \Psi_j \leq (n+1)h,$$

а значение функции:

$$\text{TR}_{q_j} f(x \Psi_j) = \frac{(n+1)h - x \Psi_j}{h} \mathbf{R}_{q_j} f(n) + \frac{x \Psi_j - nh}{h} \mathbf{R}_{q_j} f(n+1).$$

Тогда выражение (2.16) окончательно переписется в виде:

$$\mathbf{R}_d^* f(x) = \sum_{j=-\frac{(m+1)/2}{2}}^{\frac{(m+1)/2}{2}} \mathbf{e}^{A_j} \mathbf{e}^{i=0} \text{TR} f(q_j, x \Psi_j). \quad (2.17)$$

Выражение (2.17) является точным для случая равномерной дискретизации (2.14), (2.15) при нечетном m для функции $\mathbf{R}f$, которая является или может быть аппроксимирована полиномом степени не выше $2m$ (согласно теореме отсчетов [10]). Данная формула может также быть применена для функций, нарушающих перечисленные условия, однако в этом случае не гарантируется достаточная точность результата.

Однако на практике перечисленные выше условия выполняются не всегда. Если условие (2.14), а также условие аппроксимируемости радоновского образа полиномом степени не выше $2m$ являются приемлемыми, то условие (2.15) практически всегда таковым не является. Вследствие этого в практических приложениях можно пользоваться следующей упрощенной формулой, которая не гарантирует высокую точность как (2.17), однако не накладывает жестких условий и позволяет получить результаты, приемлемые для дальнейшего анализа геометрии результирующего объекта. Для произвольной выборки значений функции $g = \mathbf{R}f$ в точках (q_j, s_l) , $j = \overline{0, m}$, $l = \overline{-k, k}$, где $q_j \in OS^2$ имеем:

$$\mathbf{R}_d^* f(x) = \mathbf{e} \sum_{i=0}^m \text{TR} f(q_i, x \mathbf{C}_j). \quad (2.18)$$

2.2.2 Алгоритм сверточного типа

Алгоритм сверточного типа является одним из наиболее простых и эффективных алгоритмов восстановления, вследствие чего он обрел широкое распространение в медицинских приложениях. Основная идея сверточного алгоритма заключается в замене оператора дифференцирования и оператора Гильберта, входящих в выражение (2.9), сверткой (откуда и происходит название алгоритма) исходной функции g с некоторой регуляризующей функцией с последующим применением оператора обратного проецирования. Сверточный алгоритм можно рассматривать как численную реализацию формулы обращения (2.9).

Прежде чем перейти к непосредственному рассмотрению алгоритма, сформулируем теорему, которая лежит в основе алгоритма сверточного типа.

Теорема 2.1 Пусть $f \in \mathbf{OJ}(\mathbf{R}^3)$, $w \in \mathbf{OJ}(Z)$, тогда:

$$(\mathbf{R}^* w)^* f = \mathbf{R}^* (w * \mathbf{R} f), \quad (2.19)$$

где символ $*$ обозначает операцию свертки. ■

Введем обозначение:

$$\mathbf{W}_a = \mathbf{R}^* w_a. \quad (2.20)$$

Идея алгоритма заключается в выборе такого приближения w_a функции w из условия теоремы, чтобы выполнялось условие:

$$\lim_{a \in \Gamma} (\mathbf{W}_a)^* f = f, \quad (2.21)$$

то есть величина \mathbf{W}_a должна аппроксимировать d -функцию

$$\lim_{a \in \Gamma} \mathbf{W}_a = d,$$

и, следовательно, семейство функций W_a должно представлять собой семейство фильтров низких частот с предельной частотой a .

$$W_a(x) = \frac{1}{(2p)^{3/2}} \mathcal{F}_a(|x|), \quad (2.22)$$

где $\mathcal{F}_a(s)$ - некоторая одномерная функция, удовлетворяющая условиям теоремы регуляризации [6]:

1. $0 \leq \mathcal{F}_a(s) \leq 1$, $\mathcal{F}_a(s) = 0$ при $s \geq \frac{a}{2}$,
2. $\mathcal{F}_a(s)$ - монотонно невозрастающая функция s ,
3. $\lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{F}_a(s) = 1$,

для $s \in \mathbb{R}^1$, $s > 0$.

Возникает вопрос о выборе функции w_a , ответом на который служит следующая

Теорема 2.2 Пусть $g \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^1)$, тогда:

$$(\mathcal{R}^* g)^\wedge(x) = \frac{2p}{|x|^2} \int_{\mathbb{R}^1} \mathcal{F}_a(x_e, |x|) + \mathcal{F}_a(-x_e, -|x|) \mu_B^\mathbb{R} \quad (2.23)$$

где $x_e = \frac{x}{|x|}$. ■

Подставив в качестве функции g из условия теоремы функцию w_a с учетом (2.20), получим:

$$W_a(x) = \frac{2p}{|x|^2} \int_{\mathbb{R}^1} \mathcal{F}_a(x_e, |x|) + \mathcal{F}_a(-x_e, -|x|) \mu_B^\mathbb{R} \quad (2.24)$$

Поскольку \mathcal{W}_a есть радиально-симметричная функция, опуская первый аргумент функции \mathcal{W}_a и учитывая её четность по второму аргументу, из (2.22) и (2.24) получим одномерную функцию:

$$\mathcal{W}_a(s) = \frac{1}{2} (2p)^{\frac{5}{2}} s^2 \mathcal{U}_a(s). \quad (2.25)$$

Таким образом, для восстановления исходной функции f по радоновскому образу $\mathbf{R}f$ согласно (2.19) нужно выполнить одномерную операцию свертки $w_a * \mathbf{R}_q f$ для каждого направления q из S^2 (то есть для каждого сечения радоновского образа), а затем применить оператор обратного проецирования \mathbf{R}^* . Функция w_a находится из условия (2.25) для некоторой наперед заданной функции \mathcal{U}_a , удовлетворяющей условия теоремы регуляризации. В качестве примера такой функции можно рассмотреть следующую:

$$\mathcal{U}_a = \begin{cases} \text{sinc}^2 \frac{3p}{2a} s & |s| \leq a \\ 0 & |s| > a \end{cases}.$$

Тогда значение w_a при $a = \frac{p}{h}$ вычисляется по формуле:

$$w_a(s_l) = \begin{cases} a^3 & |l| > 1, \\ \frac{a^3}{8p^5} & |l| = 0, \\ 1 & |l| = 1. \end{cases}$$

При таком выборе функции \mathcal{U}_a дискретная операция свертки с ядром w_a сводится к вычислению разностных отношений второго порядка. Это согласуется с тем, что оператор \mathbf{H}^2 является тождественным и (2.9) сводится к обратному проецированию производной второго порядка (формула (2.10)).

Рассмотрим дискретный вариант сверточного алгоритма. Алгоритм реализует дискретный аналог формулы (2.9). Рассмотрим выборку значений функции $g = \mathbf{R}f$ в точках (q_j, s_l) , $j = \overline{0, m}$, $l = \overline{-k, k}$, где

$$q_j \in OS^2, s_l = hl, h = \frac{1}{2k+1}.$$

В дискретном случае свертка $w_a * g$ в правой части (2.19) заменяется дискретной сверткой:

$$w_a^d * g(q_j, s) = h \sum_{l=-k}^k w_a(s - s_l) g(q_j, s_l). \quad (2.26)$$

Далее к результирующей функции (2.26) применяется оператор обратного проецирования с использованием формуле (2.17) либо (2.18). Окончательная формула для дискретного случая имеет вид:

$$f_d^0 = \mathbf{R}_d^* w_a^d * g. \quad (2.27)$$

Вследствие того, что оператор \mathbf{H}^2 является тождественным и обратное преобразование Радона сводится к обратному проецированию производной второго порядка по формуле (2.10), рассмотренный алгоритм с точность совпадает с так называемым алгоритмом r -фильтрации.

2.2.3 Фурье-алгоритм

В основе Фурье-метода реконструкции пространственной плотности лежит следующая

Теорема 2.3 (проекционная теорема) Пусть $f \in \mathbf{OJ}(\check{Y}^3)$, тогда:

$$(\mathbf{R}_q f)^\wedge(s) = 2p \mathcal{F}(sq), \quad (2.28)$$

где $s \in \mathbf{OR}^1$. ■

Согласно теореме, одномерный спектр радоновской проекции $\mathbf{R}_\theta f$ для фиксированного ракурса q равен спектру исходного изображения, взя-

того на прямой, проходящей через начало координат, с направляющим вектором q , то есть на прямой «коллинеарной» радоновской проекции.

Из теоремы 2.3 вытекает простая идея алгоритма реконструкции, состоящего из трех шагов:

1. Получить спектры радоновских проекций $\mathbf{R}_\theta f$ и расположить их в пространстве согласно ракурсам этих проекций с центром в начале координат частотной области.

2. Интерполировать получившийся трехмерный спектр для нахождения значений спектра, попавших «между плоскостями», на которых спектр определен согласно п.1.

3. Вычислить обратное трехмерное преобразование Фурье для функции, полученной в п.2, получив тем самым требуемую оценку восстанавливаемой функции.

Указанный алгоритм называется *Фурье-алгоритмом* реконструкции и является непосредственной численной реализацией проекционной теоремы:

$$\mathcal{F}(sq) = \frac{1}{2p} (\mathbf{R}f)^{\text{III}}(q, s). \quad (2.29)$$

Применяя формулу обратного преобразования Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{(2p)^{3/2}} \int_{\mathbf{R}^3} \mathcal{F}(x) e^{ix \cdot \xi} dx, \quad (2.30)$$

получим формулу обратного преобразования Радона, включающую преобразование Фурье.

Пусть $f \in C_0^1(\mathbf{W}^p)$ и пусть мы располагаем выборкой значений функции $g = \mathbf{R}f$ в точках (q_j, s_l) , $j = \overline{1, p}$, $l = \overline{-q, q}$, где $q_j \in S^2$ и $s_l = hl$, $h = 1/q$.

Прежде чем перейти к описанию алгоритма дискретизации формулы (2.29), рассмотрим некоторые проблемы, связанные с дискретной реализацией формулы (2.30).

Очевидно, что при дискретизации радоновских проекций формулы (2.29), (2.30) реализуются с использованием дискретного преобразования Фурье, вследствие чего возникает вопрос о шаге дискретизации \bar{h} радоновской проекции в частотной области. Ответом на этот вопрос служит теорема отсчетов [10], связывающая количество отсчетов в сигнале, частоту дискретизации в пространственной области и частоту дискретизации в частотной области, согласно которой:

$$2q \Psi \bar{h} = 2p ,$$

откуда:

$$\bar{h} = \frac{p}{q \Psi} ,$$

и окончательно с учетом того, что $h = \frac{1}{q}$ получим:

$$\bar{h} = p . \tag{2.31}$$

Таим образом, при дискретизации радоновской проекции с шагом h на $2q$ отсчетов шаг дискретизации функции $\mathcal{F}(sq)$ в частотной области будет равен \bar{h} .

Очевидно, что реализацию формулы (2.29) удобнее производить в сферических координатах. Однако при реализации формулы (2.30) мы сталкиваемся с проблемой перехода от прямоугольной сетки отсчетов, заданной в сферических координатах, к прямоугольной сетке, заданной в декартовых прямоугольных координатах. Решение этой проблемы заключается в выборе адекватного метода интерполяции промежуточных значений сетки в сферических координатах. Перейдем к рассмотрению алгоритма.

Стандартный Фурье-алгоритм есть непосредственная дискретная реализация формул (2.29) и (2.30). Для расположения дискретных радоновских проекций в частотной области будем использовать сетку в сферических координатах. Согласно (2.31) шаг дискретизации радоновских проекций в частотной области $\overline{h} = p$, тогда сетка имеет вид:

$$G_{p,q} = \{prq_j : r = \overline{-q, q-1}, j = \overline{1, p}\}.$$

Стандартный Фурье-алгоритм состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Для $j = \overline{1, p}$ вычисляются приближенные значения \mathcal{G}_{jr} функции $\mathcal{G}(q_j, rp)$ по формуле:

$$\mathcal{G}(q_j, rp) = \frac{h^{q-1}}{\sqrt{2p^{1-q}}} e^{-iLr} g(q_j, s_j) e^{-\frac{r^2}{q}}, \quad r = \overline{-q, q-1}. \quad (2.32)$$

Первый шаг работы алгоритма позволяет найти значения функции $\mathcal{F}(x)$ на сетке $G_{p,q}$. Согласно (2.29) имеем:

$$\mathcal{F}(rpq_j) = \frac{1}{2p} \mathcal{G}(q_j, rp), \quad rpq_j \in G_{p,q}.$$

Шаг 2. На этом шаге производится определение функции $\mathcal{F}(x_k)$, где $x_k = pk$, $k \in \mathbf{Z}^3$, $|k| < q$ на сетке в прямоугольной декартовой системе координат, для того чтобы можно было произвести вычисление обратного преобразования Фурье с использованием ДПФ. С этой целью производится интерполяция значений функции $\mathcal{F}(rpq_j)$, заданной на сетке $G_{p,q}$ и определение интерполированных значений в узлах сетки в прямоугольной системе координат.

Обозначим $S_r^2 = \{x = rpq\}$ - сфера, радиуса pr , $r = \overline{-q, q}$, $q \in S^2$. Совокупность всех сфер содержит все узлы сетки $G_{p,q}$. Процесс интерполяции состоит из двух частей.

1. Интерполяция значений функции на сферах S_r^2 .

В результате получим функцию $\mathcal{F}_S(x)$, определенную на множестве сфер S_r^2 , $r = \overline{-q, q}$.

2. Интерполяция значений функции в точках, не принадлежащих сферам S_r^2 .

В результате получим оценку функции $\mathcal{F}(x_k)$.

Шаг 3. Выполняется обратное трехмерное преобразование Фурье для функции $\mathcal{F}(x_k)$, полученной на предыдущем шаге по формуле:

$$\mathcal{Y}(hm) = \left(\frac{p}{2}\right)^{3/2} e \sum_{|k| < q} \mathcal{F}(x_k) e^{i \frac{p}{q} m k}, \quad |m| < q.$$

К сожалению, стандартный Фурье-алгоритм приводит к появлению значительных артефактов и сильно проигрывает в точности другим алгоритмам восстановления. Важной особенностью Фурье-алгоритма является применение быстрого преобразования Фурье (БПФ). Без БПФ этот алгоритм проигрывал бы другим в эффективности.

2.2.4 Алгебраические алгоритмы реконструкции

Алгебраические алгоритмы реконструкции образуют большую группу алгоритмов реконструкции. Их название исторически сложилось абсолютно случайно: в них нет чего-либо более «алгебраического», чем в методах, рассмотренных ранее.

Проблема реконструкции может быть сведена к вычислению вектора пространственного изображения f , для которого справедливо соотношение:

$$g = \mathbf{R}f + e,$$

где g - вектор измеренных значений. Вычисления производятся путем наложения таких условий на векторы изображения f и вектор погрешностей e , чтобы последние удовлетворяли определенным критериям оптимальности.

Все алгебраические алгоритмы реконструкции являются итерационными. Основная идея заключается в приведении преобразования Радона (1.21) к системе линейных уравнений относительно вектора изображения и решению её итерационными методами. Другими словами, с их помощью получают такую последовательность векторов $f^{(0)}, f^{(1)}, f^{(2)}, \dots$, которая сходится к оценке \hat{f} искомой функции f . Рассмотрим идею алгебраических методов реконструкции более подробно.

Пусть, как и прежде, мы располагаем выборкой значений функции $g = \mathbf{R}f$ в точках (q_j, s_l) , $j = \overline{1, p}$, $l = \overline{-q, q}$ где $q_j \in OS^2$, однако в этом случае не накладывается условие равномерности дискретизации скалярного аргумента.

Введем в рассмотрение оператор \mathbf{R}_k° :

$$\mathbf{R}_k^{\circ} f = \mathbf{R}f(q_j, s_l), \tag{2.33}$$

где j, l фиксированы и однозначно связаны с номером k , причем $k = \overline{1, K}$, где $K = 2pq$, $\mathbf{R}_k^{\circ} f \in \mathbf{R}^1$. То есть оператор \mathbf{R}_k° представляет собой интегрирование функции f по единственной плоскости P_k , имеющей нормалью вектор q_j и отстоящий от начала координат на

расстоянии s_l . Способ сопоставления номеру k пары номеров j, l произвольный. Преобразование Радона (1.21) для указанной выборки значений (q_j, s_l) можно записать в виде:

$$g_k = \mathcal{R}_k^0 f. \quad (2.34)$$

Прежде всего, заметим, что оператор \mathcal{R}_k^0 является линейным оператором, то есть:

$$\mathcal{R}_k^0 (a_1 f + a_2 f_2) = a_1 \mathcal{R}_k^0 f_1 + a_2 \mathcal{R}_k^0 f_2. \quad (2.35)$$

Преобразуем интегральное уравнение (2.34) в систему линейных уравнений методом коллокации с кусочно-постоянными координатными функциями. Проведем дискретизацию функции f , разлагая её на *элобы* (элементы объема): покроем область определения радоновского образа малыми кубиками S_m , $m = \overline{1, M}$ и будем считать функцию f постоянной на каждом элементе, т. е. заменим функцию f вектором $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^M$, у которого m -я компонента равна среднему значению f на S_m . При достаточно малых S_m можно приближенно считать, что:

$$f(S_m) = \mathbf{f}_m.$$

Тогда систему (2.34) в силу (2.35) можно переписать в виде:

$$g_k = \mathbf{e} \sum_{m=1}^M \mathbf{f}_m \mathcal{R}_k^0 E_m, \quad (2.36)$$

где $E_m(x) = \begin{cases} 1, & x \in S_m \\ 0, & x \notin S_m \end{cases}$.

Заметим, что $\mathcal{R}_k^0 E_m = |P_k \cap S_m|$, где $|P_k \cap S_m|$ - площадь пересечения плоскости P_k с элементарным объемом S_m . Обозначим

$$a_{km} = \mathbf{R}_k^0 E_m,$$

$$a_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kM})^T,$$

тогда система (2.34) окончательно примет вид:

$$a_k^T \mathbf{f} = g_k, \quad k = \overline{1, K}. \quad (2.37)$$

Таким образом, задача сводится к решению системы линейных уравнений (2.37) относительно неизвестного вектора \mathbf{f} .

Алгебраические методы реконструкции представляют собой итерационный процесс решения последней системы. k -й шаг итерации можно описать функцией g_k , такой, что:

$$\mathbf{f}^{(k)} = g_k(\mathbf{f}^{(k-1)}, g_k, a_k). \quad (2.38)$$

Различные алгебраические алгоритмы отличаются друг от друга способом выбора последовательности функций g_k . Для определения указанной последовательности функций воспользуемся методом избыточных релаксаций [6]. В этом случае один шаг итерации алгебраического алгоритма реконструкции имеет вид:

$$\mathbf{f}^{(k)} = \mathbf{f}^{(k-1)} + l (g_k - a_k^T \mathbf{f}^{(k-1)}) \frac{a_k}{|a_k|^2}, \quad k = \overline{1, K}, \quad (2.39)$$

где l - параметр релаксации.

В качестве начального приближения первого шага итерации $\mathbf{f}^{(0)}$ берется произвольный вектор. Каждый последующий шаг итерации осуществляется по той же формуле (2.39), но в качестве начального приближения выбирается вектор $\mathbf{f}^{(k)}$, полученный на предыдущем шаге итерации. Шаги продолжаются до тех пор, пока происходит изменение вектора $\mathbf{f}^{(k)}$ относительно начального значения этого вектора для текущего шага итерации. То есть условием выхода является выполнение на очередном шаге итерации следующего условия:

$$\left| \mathbf{f}^{(0)} - \mathbf{f}^{(k)} \right|_J \leq e, \quad (2.40)$$

для некоторого наперед заданного $e > 0$.

Проанализируем выражение (2.39). Сомножитель $(g_k - a_k^T \mathbf{f}^{(k-1)})$ во втором слагаемом определяет разность между измеренным значением элемента радоновской проекции g_k и соответствующим значением радоновской проекции функции, определяемой вектором $\mathbf{f}^{(k)}$ (то есть k -го приближения функции f). При $\mathbf{f}^{(k-1)} \approx f$ значение $(g_k - a_k^T \mathbf{f}^{(k-1)}) \approx 0$. На этом факте основано условие выхода из алгоритма (2.40).

Благодаря нормированному сомножителю $\frac{a_k}{|a_k|^2}$ во втором слагаемом на каждом шаге происходит добавление к $\mathbf{f}^{(k-1)}$ вектора, «приближающего» $\mathbf{f}^{(k)}$ к исходной функции f .

Коэффициент l - параметр релаксации – (имеет смысл аналогичный коэффициенту, например, в методе Ньютона) регулирует величину шагов и скорость сходимости алгоритма и позволяет избежать «перепрыгивания» через оптимальное значение.

Явным преимуществом алгебраического алгоритма реконструкции является его универсальность. Этим алгоритмом можно пользоваться для любых схем сканирования, а также в задачах с неполными данными.

ГЛАВА 3. РЕКОНСТРУКЦИЯ ГЕОМЕТРИИ СОСУДОВ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЛОТНОСТИ

Результатом работы алгоритмов реконструкции пространственной плотности является трехмерное изображение, содержащее информацию о распределении плотности вещества внутри исследуемого объема в момент съемки. Полученное изображение не слишком подходит для оценивания геометрических параметров представленных на нем объектов, однако может быть визуализировано с использованием воксельной графики. Оценивание же геометрических параметров древовидных объектов подразумевает обнаружение таких объектов на изображении и идентификацию параметров геометрической модели, используемой для описания объектов.

В этой главе мы рассмотрим геометрическую модель древовидных объектов, использующуюся для их математического описания. Далее рассмотрим различные подходы к оцениванию геометрических параметров древовидных объектов, такие как метод пространственной трассировки и метод, основанный на анализе центральных линий ветвей древовидных объектов на проекциях.

3.1 Математическое моделирование

3.1.1 Математическая модель пространственного древовидного объекта

Характеристика древовидных объектов

Существует широкий класс объектов, характеризующихся наличием древовидных структур. К таким объектам с некоторой степенью приближения можно отнести русла рек, сети дорог, ветви деревьев, сосуды кровеносной системы человека и другие. Все описанные объекты имеют схожую структуру. В работах S. Aylward, S. Pizer, E. Bullitt, D. Eberl [11], E. Bullitt, S.R. Aylward. [12, 13, 14], N. Niki, Y. Kawata, H. Satoh, T. Kumazaki [15] для описания пространственной структуры

древовидных объектов предлагается использовать графы. Будем также использовать графы, однако в отличие от рассмотренных работ будем использовать их не только для определения связанности элементов древовидного объекта, но и для описания его геометрических и топологических характеристик.

Структура древовидного объекта описывается ориентированным деревом, в котором корневой элемент соответствует началу объекта, листья являются крайними точками объекта, а все промежуточные вершины графа характеризуют точки ветвления. Каждый элемент дерева ассоциируется с некоторым пространственным геометрическим объектом (точка, линия), что позволяет описывать геометрические характеристики древовидного объекта. Основной геометрической характеристикой древовидного объекта является его центральная линия.

Далее рассмотрена математическая модель пространственного древовидного объекта, его структура, геометрические характеристики и топология. Вводятся понятия сегмента, ветви, узловой точки и корня древовидного объекта.

Структура древовидного объекта.

Рассмотрим ориентированное дерево конечного порядка $G = (V, S)$, где $V = \{v_i, i = \overline{1, N}\}$ - множество вершин дерева, $S = \{s_i, i = \overline{1, N - 1}\}$ - множество ориентированных ребер дерева.

Ребро s_i представляет собой упорядоченную пару чисел (s_i^1, s_i^2) , $1 \leq s_i^1 < s_i^2 \leq N$, такую, что вершины $v_{s_i^1}, v_{s_i^2}$ - инцидентны ребру s_i . При этом полагаем, что порядок всех вершин графа, за исключением концевых, равен трем, порядок последних равен единице (рис. 3.1). Концевая вершина v_1 называется *началом* или *корнем дерева*.

Узловые точки.

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство \mathbf{R}^3 и определим в нем координатную систему с началом в точке O и ортогональным базисом e_1, e_2, e_3 . Каждой вершине v_i из множества V поставим в соответствие пространственную точку $p_i = p_i^j e_j$ (здесь и далее, если это не вызывает неоднозначности, подразумевается суммирование по повторяющимся индексам), а также некоторое вещественное число $r_i > 0$ такое, что $r_m \geq r_n$ при $m > n$.

Пространственные точки p_i , соответствующие вершинам дерева, называются узловыми точками или просто узлами. Множество узловых точек обозначим через P . Область пространства, ограниченная замкнутым шаром $B(p_i, r_i)$ называется узловой областью i -й узловой точки.

Сегмент древовидного объекта.

В качестве веса ребра $s_i, i = 1, N - 1$ рассмотрим некоторую гладкую пространственную кривую без самопересечений:

$$x_i = x_i(l) = x_i^j(l) e_j, \quad 0 \leq l \leq L_i, \quad (3.1)$$

которая называется *центральной линией* сегмента древовидного объекта. При параметрическом задании центральной линии (3.1), как правило, будем использовать натуральный параметр, тогда L_i равно длине центральной линии.

Центральная линия сегмента проходит через пару узловых точек, соответствующих вершинам, инцидентным ребру s_i . Это определяет краевые условия для кривой (3.1):

$$x_i(0) = p_{s_i^1}, \quad x_i(L_i) = p_{s_i^2}.$$

Определим понятие сегмента древовидного объекта. Для этого поставим в соответствие каждому ребру дерева s_i некоторую гладкую

вещественнозначную положительную функцию $r_i(l)$ (функцию радиуса сегмента) и рассмотрим множество замкнутых шаров $B_{\mathbb{R}^3}(x_i(l), r_i(l))$ в трехмерном пространстве с центрами, лежащими на центральной линии сегмента $x_i(l)$. Множество точек, принадлежащих объединению замкнутых шаров $\bigcup_{0 \leq l \leq L_i} B_{\mathbb{R}^3}(x_i(l), r_i(l))$, называется *сегментом* пространственного древовидного объекта (рис. 3.1).

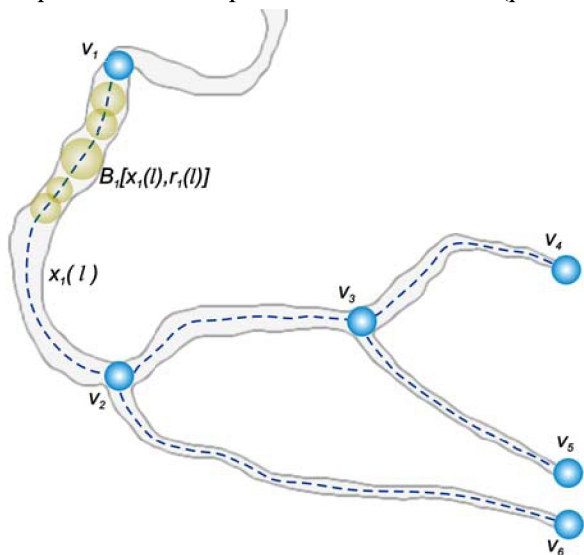


Рис. 3.1 Структура древовидного объекта

Как и в случае центральной линии необходимо определить краевые условия для функции $r_i(l)$:

$$r_i(0) = r_{s^1}, \quad r_i(L_i) = r_{s^2}.$$

Наличие «объемности» сегмента накладывает ограничение на множество допустимых значений центральной линии, связывающее

кривизну центральной линии с функцией радиуса сегмента. Для любого $0 \leq l \leq L_i$

$$R_i(l) > r_i(l),$$

где $R_i(l)$ - радиус кривизны пространственной кривой (3.1) – величина обратно пропорциональная кривизне, определяемой в случае задания кривой через натуральный параметр следующим выражением [7]:

$$k(l) = \frac{d^2 r(l)}{dl^2}.$$

Отсутствие самопересечений сегментов пространственного древовидного объекта накладывает ограничение на взаимное расположение сегментов. Для любых двух точек $x_i(l_1)$, $x_j(l_2)$, принадлежащих центральной линии древовидного объекта, должно выполняться условие:

$$\|x_i(l_1) - x_j(l_2)\|_{\mathbb{R}^3} > r_i(l_1) + r_j(l_2).$$

Ветвь древовидного объекта.

В работе будет также использован термин *ветвь древовидного объекта*. Под ветвью древовидного объекта, ассоциированной с i -й концевой вершиной, понимается совокупность сегментов, соединяющих i -ю вершину с корнем дерева. По сути, математическая модель ветви древовидного объекта не отличается от модели сегмента. Все предположения, сделанные о центральной линии сегмента, также распространяются на центральную линию ветви древовидного объекта.

Древовидный объект.

Древовидным объектом называется совокупность сегментов и узловых точек, соответствующих некоторому ориентированному дереву.

Возмущение древовидного объекта.

Исследуемый древовидный объект является динамическим, то есть меняет свою пространственную форму с течением времени. Будем полагать, что объект претерпевает малые возмущения (т.е. является слабоменяющимся с течением времени). Далее определим условия, при которых выполняется последнее предположение.

Движение объекта описывается движением его центральной линии. Без ограничения общности будем считать, что пространственная точка, соответствующая началу дерева, сохраняет свое пространственное положение. Предположим также, что при движении объекта не происходит сжатий или растяжений центральной линии, а также нарушения её гладкости, вследствие чего каждая гладкая кривая длины L переходит в гладкую кривую той же длины. Рассмотрим движение древовидного объекта на примере одной ветви.

Пусть $\xi(l)$, $l \in O_{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}}, L_{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}}$ - центральная линия ветви древовидного объекта в некотором стационарном состоянии, $x(l, t)$ - центральная линия ветви в произвольный момент времени $t \in 0$ (возмущенное состояние объекта). Тогда центральную линию в произвольный момент времени можно представить в виде суммы:

$$x(l, t) = \xi(l) + e(l, t), \quad (3.2)$$

где $e(l, t)$ - непрерывная пространственная кривая, описывающая возмущение центральной линии объекта. Её непрерывность следует из непрерывности центральной линии в произвольный момент времени, а из неподвижности начальной точки ветви следует, что $e(0, t) = 0$.

На множестве гладких кривых определим норму:

$$\|x\|_r = \max_{l \in O_{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}}, L_{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}}} \|x(l)\|,$$

где x - гладкая пространственная кривая, $\| \cdot \|$ - норма в пространстве \mathbb{R}^3 . Древоподобный объект является слабоменяющимся, если существует некоторое $\epsilon > 0$ такое, что в произвольный момент времени $t \in \mathbb{R}$ выполняется условие:

$$L^{-1} \|e(l, t)\| \leq \epsilon.$$

3.1.2 Математическая модель нечетких наблюдений древоподобного объекта

Под нечеткими наблюдениями будем понимать наблюдение проекций возмущенных состояний объекта. Термин «нечеткость наблюдений» в работе используется для характеристики физических свойств системы наблюдения и подразумевает наличие геометрических искажений наблюдаемого объекта, а также присутствие шумов регистрации.

Наблюдение проекции древоподобного объекта будем описывать проецированием его центральной линии. Рассмотрим проецирование на примере центральной линии одной ветви древоподобного объекта (рис. 3.2). Пусть определен набор плоскостей проекций $A_i, i = \overline{1, N}$, в которых наблюдается объект и $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2}$ - оператор проецирования точек трехмерного пространства на плоскость A_i . Тогда проекция центральной линии ветви на плоскость A_i в момент времени t_i будет

$$x_i(s_i, t_i) = \mathcal{P}_{\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2} x(t_i)(l),$$

где $s_i = s_i(l)$ - натуральный параметр кривой $x_i(s_i, t_i), s_i \in [0, S_i]$.

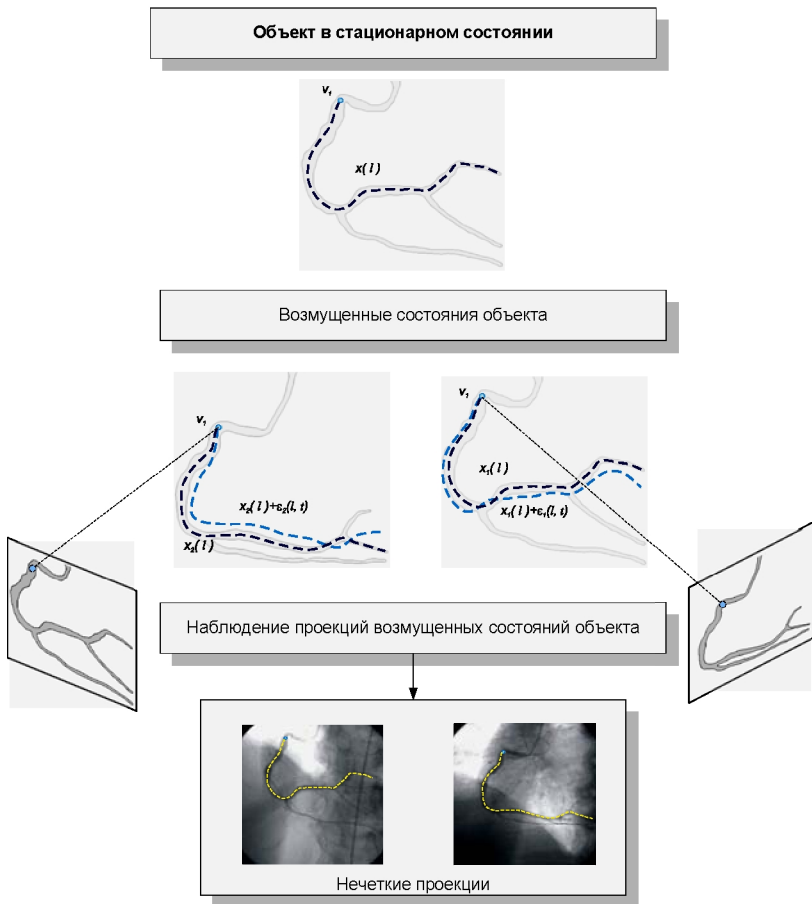


Рис. 3.2 Модель нечетких наблюдений древовидного объекта

В результате нечетких наблюдений имеется набор проекций возмущенного объекта, полученных в различные моменты времени, который будем называть набором нечетких проекций:

$$x_i(s_i, t_i) = \underset{\mathbb{H}}{\overset{\mathbb{P}}{\mathbb{Y}}} \left(\underset{\mathbb{B}}{\mathbb{E}} + e(t_i) \right) \underset{\mathbb{B}}{\mathbb{H}}(l).$$

Так как i -ю проекцию будем ассоциировать с проекцией объекта в t_i -й момент времени, то далее будем опускать параметр t_i при записи характеристик проекций, например, $x_i(s_i) = x_i(s_i, t_i)$.

В силу аддитивности оператора проецирования можно записать:

$$x_i(s_i) = \mathfrak{E}_i(s_i) + e_i(s_i), \quad (3.3)$$

где $\mathfrak{E}_i(s_i) = \overset{\text{P}}{\mathfrak{H}} \overset{\text{Ш}}{\mathfrak{H}}(l)$ - проекция объекта в стационарном состоянии (четкая проекция), $e_i(s_i) = \overset{\text{P}}{\mathfrak{H}} e(t_i) \overset{\text{Ш}}{\mathfrak{H}}(l)$ - возмущение четкой проекции. Очевидно, что для кривой $e_i(s_i)$ также выполняется условие ограниченности возмущений:

$$L^{-1} \|e(s_i)\|_{\text{H}} \leq J c.$$

3.1.3 Математическая модель проекции древовидного объекта

Результатом наблюдения объекта является набор его проекций. Под проекцией понимается пара объектов:

$$A_i = (A_i, f_i(x)), \quad (3.4)$$

где A_i - плоскость проекции, $f_i(x)$ - функция изображения проекции.

Плоскость проекции.

Для описания геометрии будем использовать понятия геометрической алгебры [3, 4, 16]. Плоскость проекции будем определять единичным бивектором $A_i = a_i^1 \overset{\text{Ш}}{\mathfrak{H}} a_i^2$, где a_i^1, a_i^2 - единичные вектора, задающие базис i -й проекции [2]. Единичный вектор нормали плоскости проекции определяется выражением:

$$n_i = A_i I^{-1},$$

где $I = e_1 \overset{\text{Ш}}{\mathfrak{H}} e_2 \overset{\text{Ш}}{\mathfrak{H}} e_3$, $I^{-1} = -I$ [4].

За начало координатной системы на i -й плоскости O_i примем проекцию точки O на эту плоскость.

Проекция пространственной точки x на плоскость проекции определяется выражением (1.4). Отклонение пространственной точки от плоскости проекции определяется выражением (1.5).

Проекция центральной линии ветви древовидного объекта.

Прежде чем определить функцию изображения проекции, рассмотрим проекцию центральной линии ветви древовидного объекта.

Обозначим $x(l, i) = x(l, t_i)$. В результате параллельного проецирования на i -ю плоскость гладкой пространственной кривой $x(l, i)$ согласно (1.13) получится кривая:

$$x_i(s_i) = (x(l, i) \mathbb{C}h_i) A_i^{-1}, \quad (3.5)$$

необязательно гладкая. В отличие от центральной линии пространственной ветви, её проекция может иметь самопересечения.

Рассмотрим вопрос о соотношении натуральных параметров s_i и параметра l и определим точки, в которых проекция центральной линии теряет гладкость. Для этого необходимо установить связь между производной пространственной центральной линии в некоторой точке и производной её проекции в соответствующей точке. Обозначим $y(l, i)$ и $y_i(s_i)$ производные функций $x(l, i)$ и $x_i(s_i)$ соответственно. Так как параметр l является натуральным для функций $x(l, i)$, то $\|y(l, i)\| \in 1$, аналогично для натурального параметра s_i кривой $x_i(s_i)$, $\|y_i(s_i)\| \in 1$. Тогда проекция пространственной производной определяется бивектором $Y_i(l) = y(l, i) \mathbb{C}h_i$ [16]. Тогда:

$$\frac{\mathbb{C}h_i}{\mathbb{C}h_i} y(l, i) \mathbb{C}h_i(l) = A_i \mathbb{C}h_i Y_i(l),$$

где символ $\dot{\cup}$ означает пересечение мультивекторов, причем $\left\| \dot{\cup}_{\mathbb{H}} y(l, i) \dot{\cup}_{\mathbb{H}} \dot{\cup}(l) \right\| = \left\| Y_i(l) \right\|_{Cl}$, где $\left\| \dot{\cup} \right\|_{Cl}$ - норма мультивектора [16]. Очевидно, направление производной $y_i(s_i)$ на проекции совпадает с направлением проекции пространственной производной $\dot{\cup}_{\mathbb{H}} y(l, i) \dot{\cup}_{\mathbb{H}} \dot{\cup}(l)$ в соответствующей точке $s_i = s_i(l)$ всюду, за исключением точек, в которых $Y_i(l) = 0$. В силу гладкости пространственной кривой $x(l, i)$ кривая $x_i(s_i(l))$ также является гладкой на интервалах, где величина $\left\| Y_i(l) \right\|_{Cl}$ не обращается в ноль и может терять свою гладкость только в точках $s_i = s_i(l)$, где:

$$Y_i(l) = 0. \quad (3.6)$$

Рассмотрим теперь условие, когда в точке $s_i(l)$, в которой $Y_i(l) = 0$, функция $x_i(s_i)$ сохраняет свою гладкость. Так как значение функции $y_i(s_i)$ в рассматриваемой точке терпит разрыв первого рода, то можно доопределить функцию $y_i(s_i)$ в точке $s_i(l)$ так, чтобы она была либо непрерывной слева, либо непрерывной справа (это будет использовано при решении задачи выделения центральных линий на проекциях). Рассмотрим вектор-функцию $z(l, i) = (x(l, i))' \dot{\cup}$ второй производной пространственной центральной линии сегмента. Вследствие того, что l является натуральным параметром, вектор $z(l, i)$ ортогонален вектору $y(l, i)$ [17, стр. 39], и вследствие (3.6) вектор $z(l, i)$ лежит в плоскости проекции A_i . Тогда для того, чтобы

функция $y_i(t)$ была непрерывна в точке $s_i(l)$ при $Y_i(l) = 0$ необходимо и достаточно выполнение условия:

$$z(l, i) \text{Ш} y_i(s_i(l)) \text{Ш} n_i = 0. \quad (3.7)$$

Т.е. необходимо, чтобы векторы, входящие в выражение, лежали в одной плоскости.

Таким образом, проекцией центральной линии $x(l, i)$ сегмента ветви древовидного объекта является кривая $x_i(s_i)$ вида (3.5) кусочно-гладкая и теряющая свою гладкость в точках, в которых выполняется условие (3.6) и не выполняется (3.7). При этом производная $y_i(s_i)$ является кусочно-непрерывной функцией, имеющей разрывы первого рода.

Определим теперь зависимость натурального параметра s_i функции $x_i(s_i)$ от натурального параметра l пространственной центральной линии $x(l, i)$. Длина кривой $x_i(s_i(l))$ определяется по формуле:

$$d_i(l) = \int_0^l \left\| \frac{\partial}{\partial r} y_i(l, i) \Big|_{Cl} \right\| dr = \int_0^l \left\| Y_i(r) \Big|_{Cl} \right\| dr.$$

Тогда, для того чтобы параметр s_i был натуральным для кривой $x_i(s_i(l))$, он должен быть равен её длине от начальной точки ($s_i = 0$), т.е. $s_i = d_i(l)$ или:

$$s_i = s_i(l) = \int_0^l \left\| Y_i(r) \Big|_{Cl} \right\| dr. \quad (3.8)$$

Выражение (3.8) определяет связь между натуральным параметром пространственной центральной линии и натуральным параметром проекции центральной линии. Как видно из формулы,

одному значению параметра s_i может соответствовать интервал значений параметра l в случае, когда выполняется условие (3.6).

Математическая модель изображения проекции.

Свойства изображения проекций древовидного объекта целиком определяются способом формирования проекций. В работе при построении математической модели изображения проекции сделаны некоторые упрощения, что позволяет не привязываться к конкретным методам проецирования, а описать некоторые общие свойства проекций, характерные для широкого класса систем регистрации пространственных древовидных объектов. Более сложные модели рентгеновской ангиографической съемки, описывающие, например, калибровку рентгеновской камеры, учет фотонов, пределы чувствительности приемника и пр. предложены в работах [6, 9].

Рассмотрим модель изображения древовидного объекта на примере одной ветви. Изображение проекции ветви $f_i^{obj}(x)$ может быть описано проекцией его центральной линии и функцией профиля. Проекция центральной линии ветви древовидного объекта – кривая $x_i(s_i)$ – рассмотрена ранее. Под функцией профиля $h_i(s_i, r)$ для некоторого фиксированного значения s_i понимается функция, в качестве своих значений имеющая значения интенсивности изображения, взятые на прямой, перпендикулярной к $x_i(s_i)$.

Функция $h_i(s_i, r)$ при фиксированном значении s_i определяет вид профиля проекции ветви и целиком зависит от способа получения изображения (способа проецирования). Непосредственно использовать модель профиля проекции ветви мы не будем, однако далее будет сделано предположение о спектральных характеристиках изображения проекции ветви древовидного объекта, которое наложит некоторые ограничения на возможный вид функции профиля. Различные модели профиля проекции сегмента древовидного объекта

рассмотрены в работах [18, 19]. Приведем несколько примеров возможных видов функции профиля.

- Проекция эллипса. Профиль сегмента древовидного объекта в общем случае представляет собой эллипс с известными параметрами и проецируется на изображение в виде полуокружности (рис. 3.3 а). Такая модель адекватна в случае ангиографической съемки сегментов больших диаметров.

- Прямоугольный импульс. Наиболее простая модель, в этом случае профиль сегмента древовидного объекта аппроксимируется функцией прямоугольного импульса (рис. 3.3 б). Такая модель адекватна в случае съемки непрозрачных для данного излучения объектов.

- Вторая производная от функции Гаусса. Эта модель с подчеркнутыми границами и ярко выраженным центром профиля (рис. 3.3 в) хорошо подходит для аппроксимации тонких сегментов древовидного объекта в случае рентгеновской ангиографической съемки объекта.

- Разность второй производной от функции Гаусса и функции Гаусса. В этой модели резко подчеркивается контур сегмента и менее центральная точка (рис. 3.3 г).

Предлагаемые методы анализа изображений древовидных структур позволяют работать с любым из предложенных видов функции профиля.

При построении модели изображения проекции необходимо учитывать, что в пределах области пространства, подлежащей регистрации, помимо древовидного объекта имеются другие объекты, которые также регистрируются и присутствуют на изображениях проекций. Примером таких объектов в случае рентгеновской ангиографической съемки коронарных сосудов могут служить ткани сердца, ребра и т.п., тени которых видны на ангиограммах. Назовем такие объекты фоновыми. Обозначим $f_i^{bg}(x)$ - изображение проекции всех фоновых объектов, присутствующих в пределах области, подлежащей наблюдению.

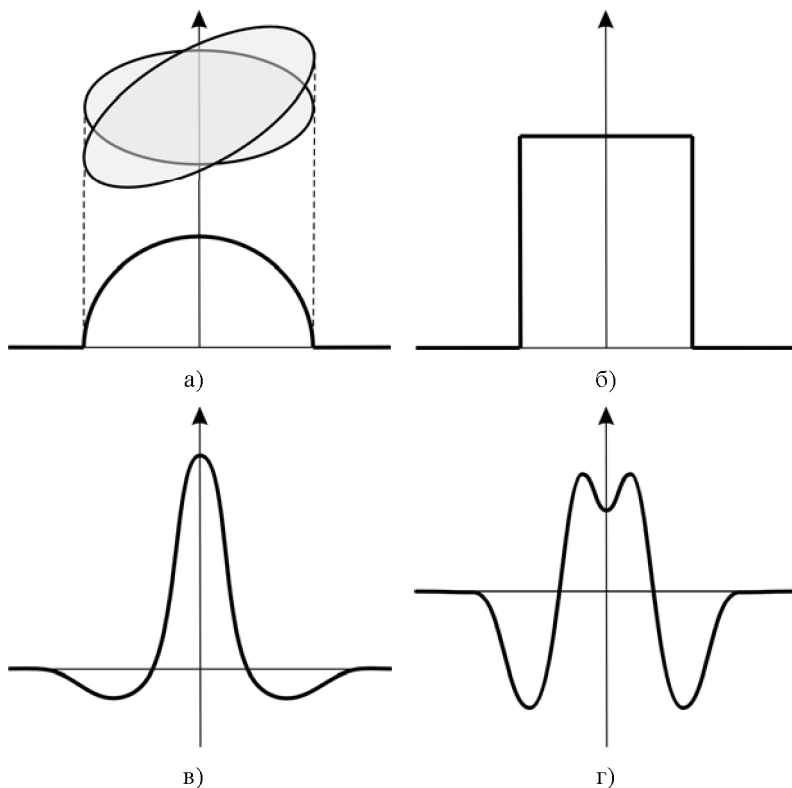


Рис. 3.3 Различные виды функции профиля

При описании модели изображения проекции необходимо также учесть наличие в системе регистрации некоторых шумов $x_i(x)$. Тогда результирующее изображение проекции можно записать в виде:

$$f_i(x) = f_i^{obj}(x) + f_i^{bg}(x) + x_i(x). \quad (3.9)$$

Слагаемые в (3.9), отвечающие за фоновые объекты и шум, осложняют процесс восстановления функции $f_i^{obj}(x)$ по наблюдаемым значениям функции $f_i(x)$. О виде функций $f_i^{bg}(x)$ и $x_i(x)$ априорно ничего не известно. Сделаем следующее

предположение. Будем считать, что спектр функции $f_i^{bg}(x)$ имеет эффективный носитель, локализованный в окрестности низких частот. Это означает, что фоновая компонента является наиболее слабо меняющейся составляющей изображения. Аналогично, спектр функции $x_i(x)$ локализован «равномерно» на всей спектральной области и не имеет каких-либо преобладающих частотных компонент. Эффективный носитель спектра функция f_i^{obj} локализован также в некоторой полосе частот промежуточной по отношению к двум рассмотренным ранее. Сделанное предположение опирается на результаты наблюдений широкого класса изображений древовидных объектов окружающего мира. Например, такое различие спектральных характеристик фона, объекта и шума наблюдается на изображениях ангиографических проекций коронарных сосудов, изображениях глазного дна и др. На таком различии частотных характеристик основан рассмотренный далее алгоритм выделения центральных линий ветвей древовидного объекта на проекциях.

3.1.4 Компьютерное моделирование центральной линии ветви

Рассмотрим процесс компьютерного моделирования пространственной ветви древовидного объекта. Компьютерная модель может быть полезна при разработке новых методов реконструкции и необходима для анализа точности их работы. Предлагаемая модель описывает геометрию центральной линии ветви древовидного объекта (без описания функции диаметра) и содержит две основные составляющие: детерминированную и стохастическую. Таким образом, модельный древовидный объект представляет собой искусственно сгенерированную пространственную дискретную центральную линию ветви с известными характеристиками.

Пусть определена координатная система $O\mathbf{e}$, где $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$. В качестве центральной линии ветви выбрана кривая, представляющая собой участок спирали $x = x(n)$:

$$x(n) = a_c (\cos(b_c n) - 1)e_1 + a_c \sin(b_c n)e_2 + ne_3,$$

где $n = \overline{0, N_c}$, a_c - радиус спирали, $b_c = \frac{2\pi\nu_c}{N_c}$ - частота спирали,

$\nu_c \in \mathbf{R}$ - количество витков спирали. То есть вид рассмотренной кривой зависит от параметров a_c, n_c, L_c .

Наблюдаются проекции возмущенных состояний ветви древовидного объекта. Моделью возмущений является следующий случайный процесс.

Пусть $\mathfrak{f}(n)$ - ветвь в возмущенном состоянии, проекция которой наблюдается, $x_i(s(n))$, $u(n) = x(n) - x(n-1)$, $O, n = \overline{1, N_c}$. Тогда в соответствии с рассмотренной моделью возмущений:

$$\mathfrak{f}(0) = x(0).$$

Модуль вектора $\mathfrak{f}(n)$. Угловое отклонение вектора $\mathfrak{f}(n)$ от $u(n)$ определяется парой углов $a_1(n), a_2(n)$ (рис. 3.4).

Величины $a_k(n)$ являются независимыми случайными процессами с нулевым математическим ожиданием и автокорреляционной функцией (АКФ) вида:

$$B_k(m) = s_k^2 r^{m^2},$$

где $r = e^{-a}$, $a \in \mathbb{R}^+$. Оба процесса имеют одинаковые характеристики АКФ. При этом вводится ограничение на максимальное отклонение a_{\max} по каждому из углов. Среднеквадратическое отклонение

s_k определяется величиной a_{\max} и выбирается из условия

$$3s_k = a_{\max}.$$

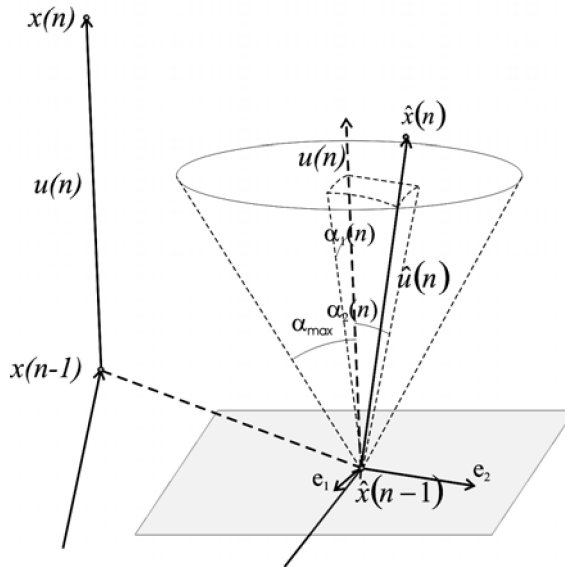


Рис. 3.4 Угловое отклонение вектора $\hat{x}(n)$ от $u(n)$

Таким образом, величина $\hat{x}(n)$ является случайной и в явном виде может быть записана как:

$$\hat{x}(n) = \hat{x}(n-1) + \frac{\|u(n)\|}{\|\hat{x}(n)\|} \hat{x}(n),$$

$$\hat{x}(n) = \frac{u(n)}{\|u(n)\|} + \operatorname{tg}(a_1(n))r_1(n) + \operatorname{tg}(a_2(n))r_2(n),$$

где $r_1(n) = \frac{1}{\|u(n)\|} (u_2(n), -u_1(n), 0)$,

$$r_2(n) = \frac{1}{\|u(n)\|^2} (u_1(n)u_3(n), u_2(n)u_3(n), - (u_1(n) + u_2(n))) -$$

векторы, образующие вместе с вектором $u(n)$ ортогональный базис.

В соответствии с рассмотренной моделью возмущений длина ветви в возмущенном состоянии должна быть равна длине ветви в стационарном состоянии. На рис. 3.5 приведены примеры различных реализаций возмущений ветви модельного древовидного объекта с характеристиками $a = 0.05$, $a_{\max} = 30^\circ$.

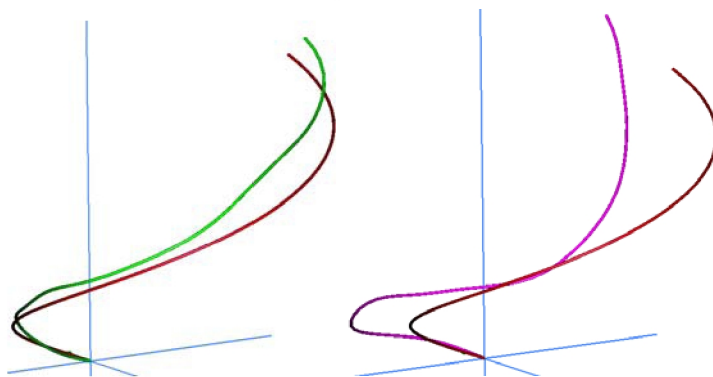


Рис. 3.5 Примеры различных реализаций возмущений ветви модельного древовидного объекта

3.2 Математические методы оценивания геометрических параметров древовидных объектов

Согласно принятой модели, параметры ветви древовидного объекта условно можно разделить на две части: параметры, описывающие центральную линию древовидного объекта, и параметры, описывающие распределение диаметра вдоль центральной линии. В работе мы коснемся лишь оценки параметров центральной линии в силу исключительной важности последней для задач диагностики. Кроме того, в ряде случаев будем описывать работу алгоритмов для единственной

ветви древовидного объекта, полагая, что алгоритм тривиальным образом обобщается на все дерево сосудов.

3.2.1 Пространственная трассировка

Общие принципы пространственной трассировки.

Основой для работы алгоритма пространственной трассировки является изображение пространственного распределения плотности вещества. Пространственной области, где в момент съемки помещался исходный объект, будет соответствовать минимум пространственной интенсивности на изображении. Другими словами, наиболее темная область пространства соответствует исходному объекту и несет в себе информацию о его структуре. Полнота информации зависит от количества проекций и от информативности каждой из проекций.

В предлагаемом методе предполагается, что известна точка в пространстве, соответствующая началу дерева сосудов. Основная идея метода заключается в выборе направления движения на основе анализа распределения интенсивностей в некоторой окрестности текущей точки. Далее производится движение в выбранном направлении и нахождение новой точки трассы, после чего последовательность действий повторяется. Таким образом, алгоритм является итерационным, на каждом его шаге производится следующая последовательность действий:

1. производится анализ пространственной интенсивности в окрестности текущей точки и выбор возможных направлений движения;
2. все обнаруженные возможные направления движения помещаются в стек направлений;
3. из стека извлекается одно направление и производится движение в выбранном направлении. Новая точка трассы сохраняется в составе структуры, описывающей дерево сосудов.

Шаги итерации продолжаютя до полного исчерпания возможных направлений движения в стеке направлений. Рассмотрим более подробно все этапы работы алгоритма.

Анализ пространственной интенсивности

Пусть имеется функция пространственной плотности $f(x)$, $x \in \mathbf{O} \mathbf{R}^3$ и p - текущая точка в пространстве. Анализ пространственной интенсивности производится на сферическом сечении функции $f(x)$. Для определения возможных направлений движения используется сферическая поверхность фиксированного радиуса с центром в текущей точке и определенной на её поверхности функцией. В простейшем случае эта функция является соответствующим сферическим сечением функции $f(x)$, в общем же случае построение этой функции производится на основе анализа функции пространственной плотности внутри сферы. Указанная функция служит критерием для выбора возможных направлений движения, вследствие чего будем называть её *критериальной* функцией и обозначим $g(q)$, где $q \in \mathbf{O} \mathbf{S}^2$.

Сфера с распределенной на ней критериальной функцией в дальнейшем будем называть *сферой возможных направлений*, подразумевая то, что на её основе будет производиться выбор оптимального направления движения на каждом шаге (рис. 3.6).

Рассмотрим этап формирования сферы возможных направлений более детально. Пусть в \mathbf{R}^3 определена единичная сфера S^2 , и пусть на поверхности сферы задано семейство точек q_{kl} , $k = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, N}$ такое, что q_{kl} представляет собой сетку на S^2 (желательно регулярную), в узлах которой будет определена критериальная функция в дискретном виде.

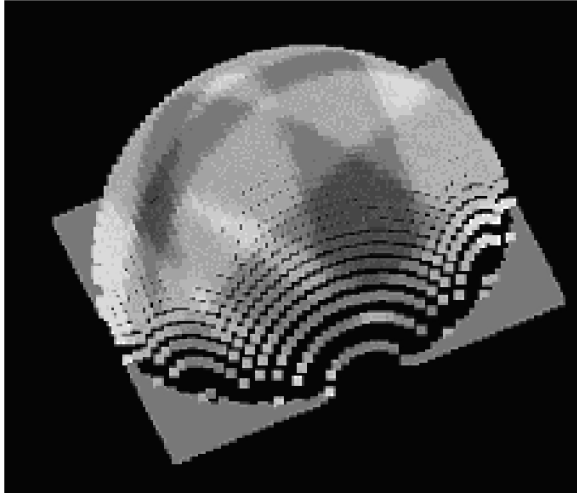


Рис. 3.6 Пример полусферы возможных направлений

Указанное семейство q_{kl} может быть получено в качестве вершин многогранника, вписанного в единичную сферу. Однако, согласно [19] не существует регулярного многогранника, вписанного в сферу с количеством вершин более 20, вследствие чего придется отказаться от равномерности сетки. Примем за основу для построения квази-регулярной сетки на поверхности единичной сферы многогранник, вписанный в S^2 , состоящий из 12 вершин (рис. 3.7).

Процесс построения является итерационным, на каждом шаге которого производятся следующие действия:

1. Для каждого ребра находим его центр и помещаем новую вершину в ближайшую к нему точку на поверхности сферы.
2. Удаляем все старые грани и для каждой смежной тройки вершин формируем новую грань.

Количество граней, ребер и вершин (обозначим их соответственно F_n , E_n , V_n , где n – количество итераций) возрастает чрезвычайно быстро и может быть вычислено по следующей рекурсивной формуле.

$$\begin{aligned} M_n^F &= 4F_{n-1} \\ E_n &= 2E_{n-1} + 3F_{n-1}, \\ V_n &= V_{n-1} + E_{n-1} \end{aligned}$$

где характеристики исходного многогранника:

$$(F_0, E_0, V_0) = (20, 30, 12).$$

Последнее выражение можно переписать в явном виде:

$$\begin{aligned} M_n^F &= 20 \Phi^n \\ E_n &= 30 \Phi^n \\ V_n &= 2 + 10 \Phi^n \end{aligned}$$

Итерационный процесс формирования сетки останавливается при достижении требуемой точности. В качестве узлов искомой сетки q_{kl} примем вершины результирующего многогранника. Полученная таким образом сетка не будет регулярной, однако будет близка к таковой.

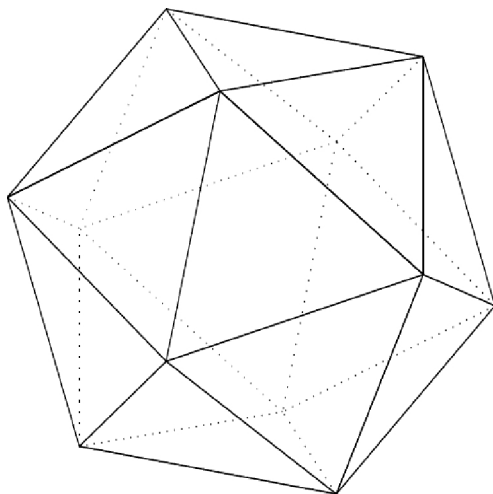


Рис. 3.7 Исходный многогранник

Положим, что сфера возможных направлений имеет радиус r .
Определение критериальной функции на q_{kl} может производиться различными способами:

- собственно сечение функции $f(x)$;
- усреднение значений критериальной функции для сфер различного радиуса;

Выбор метода обуславливается качеством изображений проекций, а также выбранным методом поиска минимумов критериальной функции на сфере, о которых будет сказано позже.

Опишем подробнее каждый из способов определения критериальной функции.

1. Сферическое сечение функции $f(x)$.

Для текущей точки трассы p имеем:

$$g(q_{kl}) = f(p + r q_{kl}).$$

2. Усреднение значений критериальной функции для сфер различного радиуса.

В этом случае необходимо задать минимальное и максимальное значение радиуса сферы возможных направлений. Обозначим их r_{\min} и r_{\max} соответственно. Тогда:

$$g(q_{kl}) = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f(p + r q_{kl}) dr .$$

Описанные выше методы применяются в зависимости от качества исходных изображений проекций, а также от выбранного метода поиска минимумов на сфере. Набор интенсивности по точкам сферы хорош в случае, когда проекции имеют относительно низкий уровень шумов и не требуется, чтобы распределение интенсивностей на сфере было размытым. Метод наиболее прост в реализации и позволит ускорить работу программы по сравнению со вторым методом. Набор про-

пространственной интенсивности по лучам дает слабое размытие областей постоянной интенсивности на сфере. Этот метод более устойчив к случайным помехам.

После построения сферы возможных направлений необходимо найти на ней области, которые на проекциях соответствуют изображениям сосуда. Так как на изображении сосуда имеет более темную интенсивность, чем фон, то и в пространстве область, соответствующая сосуду, даст минимум интенсивности (рис. 3.8).

На втором этапе определения оптимального направления движения необходимо найти область минимума интенсивности, центр которой и даст искомое пространственное направление по сосуду. Метод поиска минимумов на сфере основан на квадратичной аппроксимации значений критериальной функции.

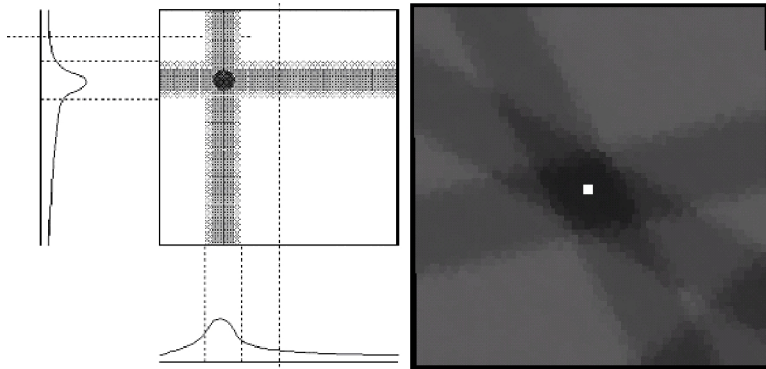


Рис. 3.8 Аддитивное наложение интенсивностей с проекций

Поиск локальных минимумов основан на аппроксимации функции в пределах скользящей маски квадратичной поверхностью:

$$F(x) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_1x_2 + dx_1 + ex_2 + f,$$

где $x = (x_1, x_2)^T$.

Далее мы определяем точку минимума функции $F(x)$. Если такая точка существует и лежит достаточно близко к центру маски, то она фиксируется. Теперь опишем это более подробно.

Коэффициенты аппроксимирующей функции вычисляются по критерию МНК:

$$\underset{x \in W}{e} (ax_1^2 + bx_2^2 + cx_1x_2 + dx_1 + ex_2 + f - g(x))^2 \text{ @ min .}$$

Приравнявая частные производные нулю, получаем систему линейных уравнений. С точки зрения скорости вычислений существенно то, что в нашем случае нет необходимости решать эту систему, например, методом Гаусса, а имеется аналитическое решение (обратная матрица найдена вручную). Оно требует меньше операций и позволяет находить коэффициенты независимо друг от друга. Это решение имеет вид:

$$a = (2M + 1)^{-2} \frac{45m_{20}}{M(M+1)(4M^2 + 4M - 3)} - \frac{15m_{00}}{(4M^2 + 4M - 3)}$$

$$b = (2M + 1)^{-2} \frac{45m_{02}}{M(M+1)(4M^2 + 4M - 3)} - \frac{15m_{00}}{(4M^2 + 4M - 3)}$$

$$c = \frac{9m_{11}}{M^2(M+1)^2(2M+1)^2};$$

$$d = \frac{3m_{10}}{M(M+1)(2M+1)^2};$$

$$e = \frac{3m_{01}}{M(M+1)(2M+1)^2}.$$

Здесь предполагается, что начало координат находится в центре маски размером $(2M + 1) \times (2M + 1)$, а величины m_{kl} определяются по формуле:

$$m_{kl} = \underset{x \in W}{e} g(x)x_1^k x_2^l.$$

Стандартный метод нахождения минимума функции двух переменных состоит в нахождении критической точки из условия:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \text{ и проверки выполнения в ней достаточных условий}$$

минимума:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} > 0, \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} > 0.$$

В нашем случае вторые частные производные являются константами:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2a, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2b, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = c.$$

Это позволяет дополнительно сократить объём вычислений.

Шаг 1. Вычисляем коэффициент a . Если $a \leq 0$, то минимума нет.

Шаг 2. Вычисляем коэффициенты b, c и величину $D = 4ab - c^2$. Если $D \leq 0$, то минимума нет.

Шаг 3. Вычисляем коэффициенты $d, \mathcal{E}(n)$ и координаты минимума: $\mathcal{E}(n)$. Если эта точка лежит достаточно близко к началу координат, то запоминаем её координаты (рис. 3.9).

Так как нельзя требовать близости к началу координат меньше, чем на 1 (в силу дискретизации и наличия шумов), то получаем не отдельные точки минимумов, а группы точек вокруг истинной точки минимума. На следующем этапе мы формируем эти группы из условия, что точки из одной группы образуют восьмисвязную область. Если количество точек в группе мало, то эта группа игнорируется – этот минимум ложный, полученный за счёт влияния шумов. В результирующий список точек локальных минимумов заносится по одной точке (центру тяжести) из каждой группы. На примере, изображённом на рис. 3.9, имеем 6 точек, которые на рисунке обозначены цифрами.

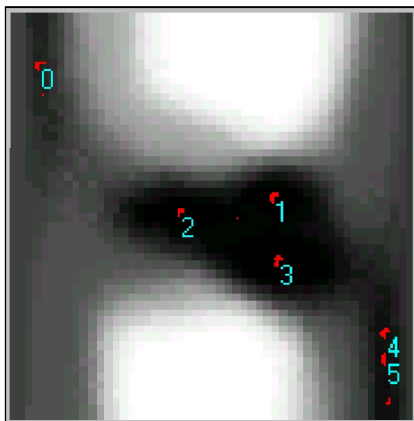


Рис. 3.9 Результат работы алгоритма

После нахождения минимума на полусфере возможных направлений, который фактически задает направление движения в пространстве, остается только сделать шаг в выбранном направлении.

Помещение возможных направлений в стек.

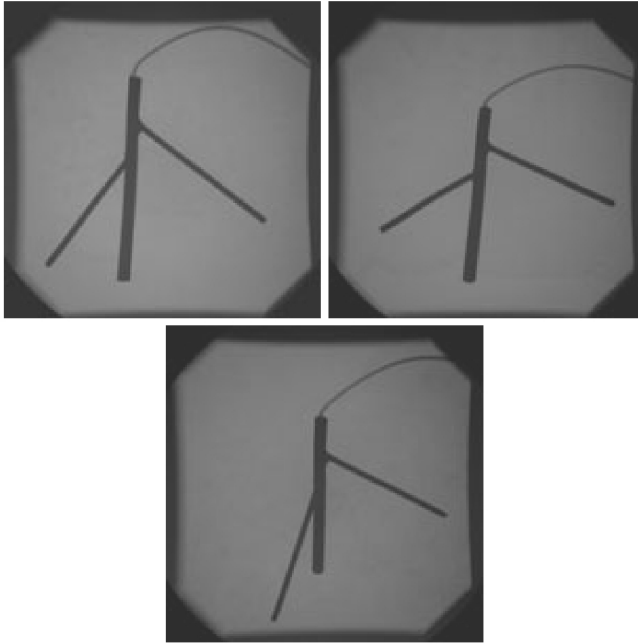
После анализа интенсивностей в окрестности текущей точки все обнаруженные возможные направления движения, за исключением «обратного» направления, последовательно помещаются в стек направлений.

Нахождение новой точки.

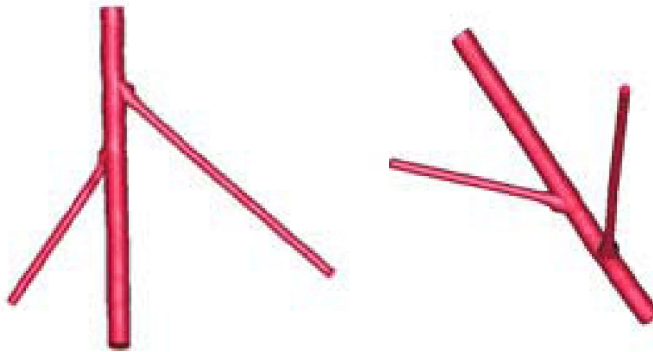
Из стека извлекается одно направление и производится движение в выбранном направлении с фиксированным шагом h . Как правило, шаг выбирается равным r .

Новая точка трассы сохраняется в составе структуры, описывающей дерево сосудов.

Работа алгоритма продолжается до полного исчерпания элементов стека направлений. Пример реконструкции фантома кровеносных сосудов, содержащего три ветви, приведен на рис. 3.10. Изображение пространственной плотности восстановлено методом обратного проецирования по трем проекциям.



а)



б)

Рис. 3.10 Примеры восстановления пространственной структуры фантома кровеносных сосудов: а) изображения проекций; б) восстановленная структура

3.2.2 Реконструкция геометрии сосудов при наличии априорной информации о геометрии сосудов на проекциях

В случае, когда объект исследования является динамическим (например, бьющееся сердце), задача реконструкции пространственной плотности является существенно некорректной, поскольку наличие динамики в момент съемки приводит к рассогласованию данных, содержащихся на различных проекциях. Вследствие этого решение задачи реконструкции пространственной плотности описанными ранее методами представляется невозможным. Однако получение геометрической информации об объекте исследования по проекционным данным возможно и в этом случае. Сменив парадигму, при решении указанной задачи следует опираться не на информацию, заключенную в изображении пространственной плотности, а на информацию о геометрии объекта, представленную на проекциях при априорном знании о принадлежности объекта исследования к классу древовидных объектов. Как и прежде будем оценивать центральные линии ветвей древовидного объекта, при этом полагаем, что центральные линии на проекциях найдены и известно их соответствие (см., например, [21]). Рассмотрим задачу реконструкции центральной линии одной ветви древовидного объекта.

Восстановление пространственной структуры ветви древовидного объекта по набору центральных линий проекций.

Задачу восстановления пространственной структуры древовидного объекта по набору центральных линий проекций можно сформулировать в следующем виде. Пусть имеется набор проекций A_i , $i = \overline{1, N_A}$ ветви древовидного объекта (3.4). По имеющимся проекциям необходимо произвести восстановление пространственной ветви древовидного объекта, которая наилучшим образом была бы согласована с имеющимися проекциями. Вследствие нелинейности искажений, возникающих в системе наблюдения при регистрации объекта, мы вынуждены отказаться от существующих линейных подходов к

реставрации пространственных изображений [22]. В ряде работ [23, 24, 25] предлагаются различные критерии согласованности, использующиеся для восстановления пространственной ветви, при наличии априорной информации о соответствии друг другу наборов точек на проекциях. Однако такая информация зачастую недоступна, поэтому при выборе критерия будем считать, что точек пространственной привязки проекций нет.

Согласно (3.3) в качестве критерия согласованности можно использовать минимум суммарной энергии возмущения проекций, т.е.:

$$e = \sum_{i=1}^{N_{PA}} \int_0^L \|e_i(s_i(l))\|^2 dl \quad \text{min}, \quad (3.10)$$

причем соотношение между натуральными параметрами центральных линий на проекциях s_i и натуральным параметром l восстанавливаемой пространственной кривой определяется выражением (3.8), величина L также подлежит определению. В таком виде задача является задачей глобальной оптимизации и может быть решена методами динамического программирования, однако является чрезвычайно трудоемкой. С целью уменьшения её сложности предлагается следующий критерий согласованности пространственного объекта с имеющимися проекциями.

Непрерывный случай. Рассмотрим критерий согласованности сначала для случая непрерывной пространственной центральной линии, а затем перенесем его на случай дискретной центральной линии.

Будем считать, что на каждой проекции A_i определена центральная линия ветви древовидного объекта – регулярная кривая $x_i(s_i)$, такая, что $x_i(0) = O_i$, где s_i - натуральный параметр кривой. Далее, если это не вызывает неоднозначности, будем опускать индекс i параметра s_i . Пусть определена кривая $y_i(s) = \frac{dx_i(s)}{ds}$. Пусть также оп-

ределена некоторая регулярная пространственная кривая $\mathfrak{K}(l)$, где l - натуральный параметр, $\mathfrak{K}(0) = O$, а также её производная

$$\mathfrak{K}'(l) = \frac{d\mathfrak{K}(l)}{dl}.$$

Под соответствием точек проекций $x_i(s_i)$ пространственной точке $\mathfrak{K}(l)$ понимается соответствие (3.8) значений параметров s_i и l . То есть некоторому значению параметра $l = l_0$ на i -й проекции соответствует значение параметра s_i^0 , равное длине кривой, полученной при проецировании кривой $\mathfrak{K}(l)$ при $l \in [0, l_0]$ на Π_i . Точку $x_i(s_i^0)$ будем называть *идеальной проекцией* пространственной точки $\mathfrak{K}(l_0)$ на i -ю плоскость (рис. 3.11).

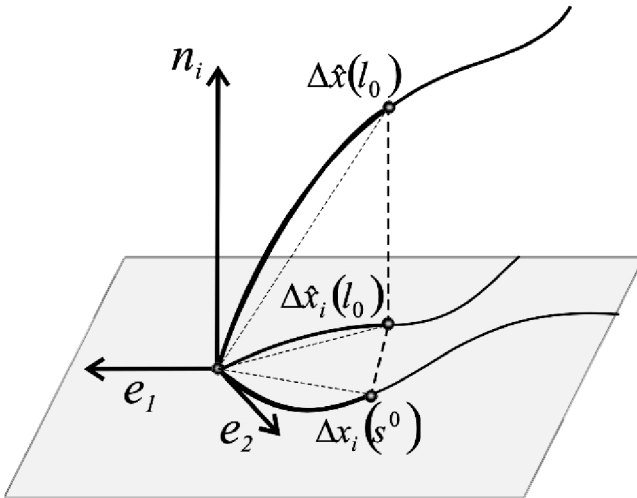


Рис. 3.11 Отклонение проекции пространственного объекта от центральных линий наблюдаемых проекций

Рассмотрим теперь пространственную точку $\mathfrak{E}(l)$, которой на проекциях соответствуют точки $x_i(s)$. Рассмотрим приращение пространственной кривой - вектор $D\mathfrak{E}(l) = \mathfrak{E}(l + Dl) - \mathfrak{E}(l)$, который в проекции на i -ю плоскость дает вектор $D\mathfrak{E}_i(l) = \frac{\dot{Y}_i}{\dot{X}_i} D\mathfrak{E}_{i\text{ш}}(l)$. Идеальной проекцией точки $\mathfrak{E}(l + Dl)$ на i -й плоскости является точка:

$$x_i(s + \|D\mathfrak{E}_i\| + o(Dl)),$$

где $Dx_i(s) = x_i(s + \|D\mathfrak{E}_i\| + o(Dl)) - x_i(s)$. Тогда критерий согласованности пространственного объекта с наблюдаемыми проекциями можно записать в виде:

$$\lim_{Dl \rightarrow 0} \mathbf{e} \sum_{i=1}^{N_{PA}} \|D\mathfrak{E}_i(l_0) - Dx_i(s^0)\|_{D\mathfrak{E}(l)}^2 \mathbb{R} \min. \quad (3.11)$$

То есть необходимо найти точку $\mathfrak{E}(l + Dl)$, для которой вектор $D\mathfrak{E}(l)$ имел бы в проекциях минимальное среднеквадратическое отклонение от соответствующих векторов $Dx_i(s)$ в пределе при $Dl \rightarrow 0$. Тогда:

$$\lim_{Dl \rightarrow 0} (D\mathfrak{E}(l)) = d\mathfrak{E}(l), \quad d\mathfrak{E}(l) = \mathfrak{E}(l)dl,$$

$$\lim_{Dl \rightarrow 0} (D\mathfrak{E}_i(l)) = (A_i \mathfrak{Y}_i(l))dl,$$

$$dx_i(s) = y_i(s) \left\| \dot{Y}_i(l) \right\|_{Cl} dl,$$

и критерий согласованности (3.11) запишется в виде:

$$\mathbf{e} \sum_{i=1}^{N_p} \left\| \left\| \dot{Y}_i(l) \right\|_{Cl} y_i(s) - (A_i \mathfrak{Y}_i(l)) \right\|^2 s \mathfrak{E}(l) s \mathbb{R} \min. \quad (3.12)$$

В результате минимизации (3.12) для каждого значения параметра l получаем некоторое значение производной $\mathcal{E}(l)$. Тогда искомое значение функции $\mathcal{E}(l)$ в произвольной точке равно:

$$\mathcal{E}(l) = \int_0^l \mathcal{E}(t) dt .$$

Дискретный случай. Под дискретным случаем подразумевается дискретность пространственной центральной линии, при этом будем полагать, что двумерные центральные линии на проекциях являются непрерывными.

Центральная линия ветви древовидного объекта в дискретном представлении получается в результате дискретизации гладкой кривой (3.1) и описывается последовательностью точек пространства

$$X = \left\{ x(n) \right\}_{n=0, N}, \quad \text{либо} \quad \text{последовательностью} \quad \text{векторов,}$$

$$Y = \left\{ y(n) \right\}_{n=0, N-1}, \quad \text{где} \quad y(n) = x(n+1) - x(n) \quad [21].$$

Расстояние между соседними точками дискретного представления центральной линии фиксировано:

$$\|y(n)\| = D, \quad n = \overline{0, N-1}, \quad (3.13)$$

где D - положительная константа дискретизации.

Пусть по-прежнему на каждой проекции A_i определена центральная линия ветви древовидного объекта – регулярная кривая $x_i(s)$. Будем искать дискретную пространственную центральную линию \mathcal{X} с равномерной дискретизацией, т.е. последовательность точек $\mathcal{E}(n)$, такую, что $\|\mathcal{E}(n)\| = D$. Аналогично непрерывному случаю в качестве критерия можно выбрать дискретный аналог критерия (3.12), где дифференциал заменяется приращением, производные – дискрет-

ными разностями. Для дискретного случая критерий (3.12) переписывается в виде:

$$\mathbf{e} \sum_{i=1}^{N_p} \left\| y_i(s(n)) - (A_i \mathcal{Y} Y_i(n)) \right\|^2 \text{ s } \mathcal{S}_{\mathcal{X}(n)} \mathcal{S}^{\mathbb{R}} \min, \quad (3.14)$$

где вектор $y_i(s(n)) = x_i(s(n) + D_i) - x_i(s(n))$, $D_i = \left\| Y_i(n) \right\|_{CI}$, $Y_i(n) = \mathcal{X}(n) \mathcal{P} \Pi_i$, $\mathcal{Y} \mathcal{X}(n) = A_i \mathcal{Y} Y_i(n)$ - проекция вектора $\mathcal{X}(n)$ на i -ю плоскость. Здесь, как и в непрерывном случае, считаем, что было найдено соответствие (дискретный аналог (3.8)) точек проекций $x_i(s(n))$ пространственной точке $\mathcal{X}(n)$ по принципу:

$$s_i(n) = \mathbf{e} \sum_{k=1}^n \left\| Y_i(k) \right\|_{CI}. \quad (3.15)$$

Метод пространственной трассировки с пошаговым согласованием пространственных и проекционных направлений.

Для решения задачи восстановления пространственной структуры древовидного объекта предлагается метод, основанный на пространственной трассировке с пошаговым согласованием пространственных направлений с направлениями центральных линий на проекциях. Каждый шаг трассировки можно разделить на два основных этапа.

Поиск оптимального в смысле (3.14) вектора центральной линии. Минимизация (3.14) производится методом градиентного спуска по функции, заданной на поверхности сферы, которая определяет в пространстве множество возможных положений следующей точки центральной линии.

После нахождения вектора определяется следующая точка пространственной центральной линии и соответствующие ей точки на проекциях (т.е. её идеальные проекции).

После выполнения обоих этапов производится следующий шаг трассировки. Построение пространственной центральной линии про-

должается до тех пор, пока, по крайней мере, на одной из проекций не будет достигнут конец центральной линии наблюдаемой проекции. Общая схема метода представлена на рис. 3.12. Далее рассмотрены подробно этапы каждого шага восстановления пространственной структуры.

Поиск оптимального вектора.

Пусть на предыдущем шаге определена точка $\mathcal{E}(n)$ пространственной центральной линии, а также определены соответствующие ей точки на проекциях $x_i(s(n))$. Т.к. далее мы будем анализировать вектора, то без ущерба для решения поместим пространственное начало координат O в точку $\mathcal{E}(n)$, а начало координат O_i на каждой проекции в точку $x_i(s(n))$ (соответственно производится перенос начала отсчета параметров s_i) [26].

Так как вектор $\mathcal{E}(n)$ пространственной центральной линии имеет фиксированную длину D , то можно определить пространственную сферу S радиуса $D : \|y\| = D$ с центром в точке O , задающую множество возможных положений последующей точки пространственной центральной линии (или возможные положения конца вектора $\mathcal{E}(n)$) [27]. Рассмотрим i -ю плоскость проекции A_i и лежащую на ней центральную линию $x_i(s)$.

На поверхности сферы можно определить функцию $f_i(y)$ как квадрат расстояния от проекции y_i вектора y на плоскость A_i до соответствующей ей точки на кривой $x_i(s(n))$ (до идеальной проекции),

т.е.:

$$f_i(y) = \|y_i - x_i(\|y_i\|)\|^2, \quad (3.16)$$

где $y_i = (y \cdot A_i)A_i^{-1}$ - проекция вектора y на плоскость A_i ,
 $A_i = a_i^1 \Pi q_i^2$ - бивектор, определяющий плоскость A_i .

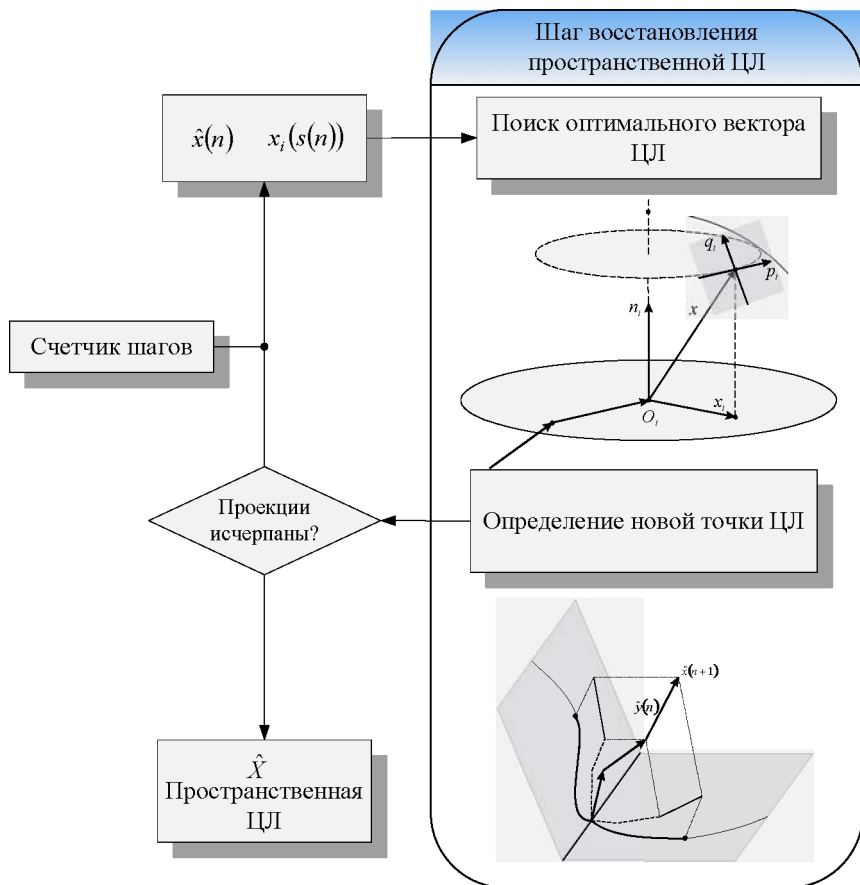


Рис. 3.12 Общая схема метода восстановления пространственной центральной линии древовидного объекта по набору центральных линий проекций

Определим некоторые свойства функции (3.16). Для некоторого $r \in J \cap D$ имеем точку кривой $x_i(r)$. Определим множество $C_{\pm}(r)$ то-

чек сферы S , для которых точка $x_i(r)$ является идеальной проекцией, т.е. таких, что $\|y_i\| = r$ (рис. 3.13). Последнее выражение определяет на плоскости A_i окружность $C_i(r)$. Точкой на этой окружности ближайшей к точке кривой $x_i(r)$ (т.е. к своей идеальной проекции), является проекция точки $x_i(r)$ на окружность $C_i(r)$ (рис. 3.13):

$$y_i^{\min} = r \bar{x}_i(r), \quad (3.17)$$

где $\bar{x}_i(r) = \frac{x_i(r)}{\|x_i(r)\|}$. А наиболее удаленной точкой, соответственно,

является диаметрально противоположная к y_i^{\max} точка:

$$y_i^{\max} = -r \bar{x}_i(r). \quad (3.18)$$

При движении по окружности $C_i(r)$ от точки y_i^0 к точке y_i^1 расстояние до точки $x_i(r)$ монотонно увеличивается.

Пространственный вектор y^{\min} длины D , проекцией которого на плоскость A_i является вектор y_i^{\min} , определяется выражением:

$$y^{\min} = y_i^{\min} \pm b n_i, \quad (3.19)$$

где $b = \sqrt{D^2 - r^2}$, n_i нормаль плоскости A_i . Будем называть её *минимальной точкой* для радиуса r (рис. 3.13).

Точки множества $C_{\pm}(r)$ определяются выражением:

$$y(j) = R_j y^{\min} R_j^{\dagger},$$

где $R_j = \cos \frac{j}{2} + \sin \frac{j}{2} A_i$, $j \in \mathbb{O} \frac{\mathbb{H}}{\mathbb{K}} p, p \frac{\mathbb{H}}{\mathbb{B}}$. Т.е. множество точек $C_{\pm}(r)$ определяет пару окружностей в пространстве, симметричных относи-

тельно плоскости A_i и лежащих в плоскостях ей компланарных. Заметим, что $y(p) = y(-p) = y^{\max}$.

Рассмотрим окружность $C_+(r)$, лежащую в положительной (относительно плоскости A_i) полусфере, и рассмотрим значения функции $f_i(y)$ на этой окружности. При $j = 0$ достигается минимальное значение функции $f_i(y)$ (равно квадрату расстояния от точки y_i^{\min} до точки $x_i(r)$), при $j = \pm p$ - максимальное (равно квадрату расстояния от точки y_i^{\max} до точки $x_i(r)$). При движении по окружности $C_+(r)$ от точки y^{\min} к точке y^{\max} значение функции $f_i(y)$ монотонно возрастает. Аналогично для окружности $C_-(r)$ второй полусферы.

Представим теперь векторы y^{\min} и y^{\max} как функции от параметра $r \in \mathbb{D}_F^{\mathbb{H}}, \mathbb{D}_F^{\mathbb{H}}$. Вектор-функция $y^{\min}(r)$ определяет на поверхности сферы S кривую, обладающую тем свойством, что значения функции $f_i(y^{\min}(r))$ на этой кривой минимальны среди значений этой функции на окружности $y(r, j) = R_j y^{\min}(r) R_j^\dagger$. Будем называть эту кривую – *минимальной кривой* (рис. 3.13). Аналогично вектор-функция $y^{\max}(r)$ определяет *максимальную кривую*. Функция $f_i(y)$ на кривых $y^{\min}(r)$, $y^{\max}(r)$ является неубывающей при изменении параметра r от 0 до D .

Точки сферы $o_i^+ = D n_i$ и $o_i^- = -D n_i$ являются, соответственно, положительным и отрицательным полюсами сферы для i -й проекции.

Точка на поверхности сферы в общем виде описывается следующим выражением:

$$y(f, j) = aQ_j, \quad (3.20)$$

где $a = a_1 R_{2f}$, $Q_j = \cos j + \sin j a \text{Ш}q_3$. Тогда прямая $y_f(j)$ на поверхности сферы, соединяющая полюса, определяется выражением (3.20) для фиксированного угла f как функция от j . Можно показать, что на произвольной прямой $y_f(j)$ функция $f_i(y_f(j))$ не обладает монотонностью, как в предыдущем случае.

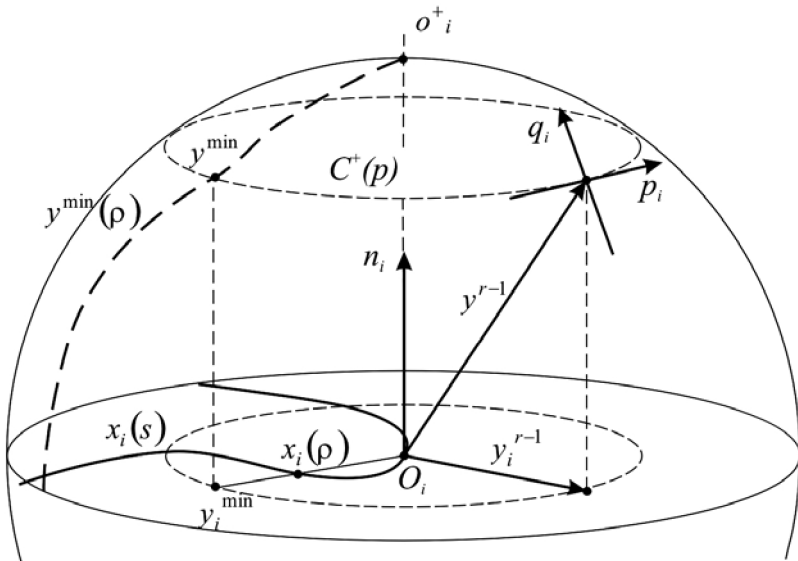


Рис. 3.13 Определение критериальной функции

Рассмотрим теперь всю совокупность проекций A_i , $i = \overline{1, N_A}$ и построим на поверхности сферы S суммарную функцию:

$$f(y) = \mathbf{e} \sum_{i=1}^{N_A} f_i(y), \quad \|y\| = D. \quad (3.21)$$

Поиск точки минимума этой функции на сфере соответствует минимизации критерия (3.14). Функцию (3.21) будем называть *критериальной* [28, 27].

Поиск минимума производится итерационно методом градиентного спуска. Пусть на $r - 1$ -й итерации найдено приближение y^{r-1} искомого вектора y . Его проекция на i -ю плоскость $y_i^{r-1} = (y^{r-1} \cdot A_i) A_i^{-1}$ имеет длину $r_i = \|y_i^{r-1}\|$. Тогда минимальная точка для радиуса r_i на i -й проекции определяется по формуле (3.17)

$$y_i^{\min} = r_i \bar{x}_i(r_i).$$

Определим градиент функции (3.21):

$$Cf(y^{r-1}) = \mathbf{e} \sum_{i=1}^{N_A} Cf_i(y^{r-1}). \quad (3.22)$$

Далее найдем вектора $Cf_i(y^{r-1})$. Выражение для градиента имеет

вид:

$$Cf_i(y^{r-1}) = \left(f_i(y^{r-1}) \right)_{p_i} p_i + \left(f_i(y^{r-1}) \right)_{q_i} q_i,$$

где $\left(f_i(y^{r-1}) \right)_{p_i}$, $\left(f_i(y^{r-1}) \right)_{q_i}$ - производные по направлениям, p_i , q_i - пара ортогональных единичных векторов касательных к сфере S в точке y^{r-1} (рис. 3.13). В качестве вектора p_i выберем вектор параллельный плоскости A_i , а в качестве q_i - вектор ортогональный к p_i , такой что $n_i \cdot q_i = 0$ (рис. 3.13).

Вектор p_i определим как единичный вектор нормали к плоскости $y^{r-1} \Pi_i$, т.е.:

$$p_i = \frac{(y^{r-1} \Pi q_i)^{\sim}}{\left\| (y^{r-1} \Pi q_i)^{\sim} \right\|_{cl}} = \frac{-y^{r-1} \cdot a_i^2 a_i^1 + y^{r-1} \cdot a_i^1 a_i^2}{\sqrt{(y^{r-1} \cdot a_i^1)^2 + (y^{r-1} \cdot a_i^2)^2}}. \quad (3.23)$$

Вектор q_i определим как единичный вектор нормали к плоскости $y^{r-1} \Pi p_i$, т.е.:

$$\begin{aligned} q_i &= \frac{(y^{r-1} \Pi p_i)^{\sim}}{\left\| (y^{r-1} \Pi p_i)^{\sim} \right\|_{cl}} = \\ &= \frac{-y^{r-1} \cdot (a_i^1 + n_i) a_i^1 - y^{r-1} \cdot (a_i^2 + n_i) a_i^2 + y^{r-1} \cdot (a_i^1 + a_i^2) n_i}{\left((y^{r-1} \cdot (a_i^1 + n_i))^2 + (y^{r-1} \cdot (a_i^2 + n_i))^2 + (y^{r-1} \cdot (a_i^1 + a_i^2))^2 \right)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Определим производную $(f_i(y^{r-1}))_{p_i}$. Значение функции (3.16):

$$f_i(y^{r-1}) = \left\| y_i^{r-1} - x_i(r_i) \right\|^2 = \left\| x_i(r_i) \right\|^2 + r_i^2 - 2 \left\| x_i(r_i) \right\| r_i \cos q_i,$$

где q_i - угол между векторами y_i^{\min} и y_i^{r-1} . Тогда:

$$(f_i(y^{r-1}))_{p_i} = \frac{1}{r_i} (f_i(y^{r-1}))_q = 2 \left\| x_i(r_i) \right\| \sin q_i. \quad (3.25)$$

Определим производную $(f_i(y^{r-1}))_{q_i}$.

$$(f_i(y^{r-1}))_{q_i} = (f_i(y^{r-1}))_{r_i} \sin j_i,$$

где j_i - угол между плоскостью A_i и вектором y^{r-1} . Введем обозна-

чения $w_i = \frac{\partial}{\partial x_i} (r_i)$, $\dot{w}_i = \frac{\partial}{\partial y_i} (r_i)$, $g_i = \frac{r_i}{\left\| x_i(r_i) \right\|}$. Тогда:

$$\left(f_i(y^{r-1})\right)_{q_i} = 2 \frac{\Psi_i}{\mathbb{K}} (1 - g_i \Psi \cos q_i) \Psi w_i + (1 - g_i^{-1} \Psi \cos q_i) \Psi r_i \frac{\Psi}{\mathbb{B}} \sin j_i. \quad (3.26)$$

Градиент функции $f_i(y^{r-1})$ равен:

$$\begin{aligned} Cf_i(y^{r-1}) = & \frac{-2 \|x_i(r_i)\| \sin q_i}{\left((y^{r-1} a_i^1)^2 + (y^{r-1} a_i^2)^2\right)^{\frac{1}{2}}} (y^{r-1} a_i^2 a_i^1 - y^{r-1} a_i^1 a_i^2) + \\ & + 2 \frac{\Psi_i}{\mathbb{K}} (1 - g_i \Psi \cos q_i) \Psi w_i + (1 - g_i^{-1} \Psi \cos q_i) \Psi r_i \frac{\Psi}{\mathbb{B}} \sin j_i \Psi \\ & \frac{\Psi - y^{r-1} \cdot (a_i^1 + n_i) a_i^1 - y^{r-1} \cdot (a_i^2 + n_i) a_i^2 + y^{r-1} \cdot (a_i^1 + a_i^2) n_i}{\left((y^{r-1} \cdot (a_i^1 + n_i))^2 + (y^{r-1} \cdot (a_i^2 + n_i))^2 + (y^{r-1} \cdot (a_i^1 + a_i^2))^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Градиент $Cf(y^{r-1})$ функции (3.21) определяется из формул (3.22), (3.27).

С учетом того, что нам необходимо найти минимум функции, следующее приближение y^r вектора $\mathcal{F}(n)$ определяется выражением:

$$y^r = \frac{D}{\|v\|} v, \\ v = y^{r-1} - a Cf(y^{r-1}),$$

где $a \in (0, 1)$.

Итерации продолжаются до тех пор, пока не будет выполнено условие:

$$\|y^r - y^{r-1}\| \leq \epsilon,$$

для некоторого $\epsilon > 0$. Если R - номер последней итерации, то искомым вектором $\mathcal{F}(n) = y^R$.

Определение точки центральной линии и её идеальных проекций.

Найденный вектор $\mathfrak{E}(n)$ определяет очередную точку пространственной центральной линии:

$$\mathfrak{E}(n + 1) = \mathfrak{E}(n) + \mathfrak{E}(n).$$

Идеальные проекции точки $\mathfrak{E}(n + 1)$ определяются из выражения (3.15):

$$s_i(n + 1) = s_i(n) + \|\mathfrak{E}_i(n)\|.$$

Пример реконструкции пространственной структуры левой коронарной артерии по трем проекциям представлен на рис. 3.14.



Рис. 3.14 Примеры пространственных структур левых коронарных сосудов

3.3 Анализ влияния взаимного расположения проекций на возможность реконструкции объекта

3.3.1 Степень наблюдаемости объекта на наборе проекций

Рассматривая задачу восстановления объектов по проекциям, можно ввести некоторую характеристику, которая показывала бы, насколько полно рассматриваемый объект представлен на той или иной проекции. Пусть $x(l)$ - исследуемая пространственная центральная линия, $y(l) = (x(l))\check{y}$. Тогда в качестве такой характеристики предлагается использовать величину:

$$I_k = \frac{1}{L} L_k,$$

где L_k - длина наблюдаемой проекции центральной линии, определяемая выражением (3.8), L - длина исследуемой пространственной центральной линии, $k = \overline{1, N_{PA}}$ - номер проекции. Величину I_k будем называть *степенью наблюдаемости объекта* на проекции. Степень наблюдаемости объекта на проекции может принимать значения от 0 (в случае, если объект полностью лежит на прямой, перпендикулярной плоскости проекции) до 1 (объект полностью лежит в плоскости компланарной плоскости проекции). Очевидно, в случае, когда $I_k = 1$, возможно восстановление объекта по одной проекции.

Однако рассмотренная характеристика не может быть использована для оценки количества полезной информации об объекте, содержащейся в наборе проекций. Под «полезностью» информации понимается возможность её использования для восстановления объекта. Примером этому может служить «эффект книги», когда каждая проекция отдельно несет информацию ($I_k > 0$), однако восстановление

формы объекта по такому набору проекций невозможно. Рассмотрим характеристику количества полезной информации в наборе проекций.

Рассмотрим сначала пару проекций. Для оценивания количества полезной информации (т.е. наблюдаемости) пары проекций предлагается использовать величину:

$$I_{ij} = \frac{1}{L} \int_0^L n_{ij} \Psi_{ij}(l) dl,$$

где $n_{ij} = n_i \Psi n_j$, l - натуральной параметр исследуемой пространственной центральной линии $x(l)$. Будем называть величину I_{ij} степенью наблюдаемости объекта на паре проекций. То есть наблюдаемость объекта на паре проекций равна среднему значению проекции единичного касательного вектора центральной линии на линию пересечения проекций. Тогда для набора проекций степень наблюдаемости объекта будет:

$$I = \frac{1}{C_{N_A}^2} \prod_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^{N_A} I_{ij}.$$

Степень наблюдаемости объекта на наборе проекций максимальна в случае, когда центральная линия объекта параллельна всем проекциям, и равна 0 (т.е. минимальна) в случае, когда восстановление по данному набору проекций невозможно.

3.3.2 Анализ неблагоприятных случаев расположения проекций

Набор проекций (или взаимное расположение проекций) является вырожденным, если для $i, j = \overline{1, N_{PA}}$ выполняется условие:

$$n_i \Psi n_j = 0.$$

Это означает, что все плоскости компланарны. Восстановление объекта по такому набору проекций, очевидно, невозможно, если

только I_k №1. Однако существуют ситуации, когда для невырожденного набора проекций восстановление объекта тоже оказывается невозможным.

Рассмотрим значения i -го слагаемого критериальной функции (3.21) на минимальной кривой для i -й проекции. В случае, когда исследуемый участок центральной линии на проекции не является прямой, значения функции вдоль минимальной кривой монотонно возрастают от полюсов к точке пересечения с плоскостью проекции. В противном случае, т.е. когда участок центральной линии является прямой, то значения вдоль всей минимальной кривой тождественно равны нулю. Нас будет интересовать именно второй случай.

Пусть теперь имеется невырожденный набор проекций, на каждой из которых рассматриваемый участок центральной линии является прямой, задаваемой вектором $c_i = a_i^1 a_i^1 + a_i^2 a_i^2$. В случае, когда минимальные кривые всех проекций совпадают на поверхности сферы, возникает неоднозначность определения оптимального вектора. Критериальная функция вдоль всей кривой имеет минимальное возможное значение и тождественно равна нулю. Любая точка этой кривой может быть решением (рис. 3.15).

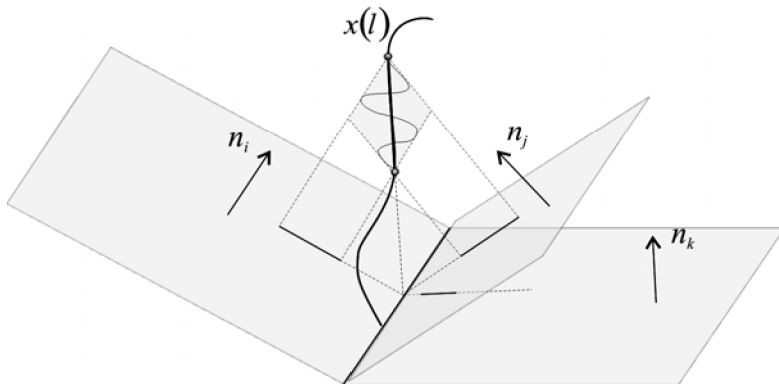


Рис. 3.15 Взаимное расположение проекций и элемента объекта, при котором наблюдается «эффект книги»

Описанную ситуацию, связанную с невозможностью восстановления участка пространственной центральной линии при невырожденном взаимном расположении плоскостей будем называть «эффектом книги» [29].

Условия возникновения эффекта книги запишется в виде:

$$c_i \cdot \Pi \Pi_i \cdot \Pi(c_j + n_j) = 0, \quad (3.28)$$

для $i, j = \overline{1, N_{PA}}$. Из (3.28) следует, что все проекции пересекаются по одной прямой и все векторы c_i перпендикулярны ей (рис. 3.15). Наблюдаемость рассматриваемого элемента объекта на таком наборе проекций $I = 0$.

3.3.3 Исследование зависимости величины погрешности восстановленной центральной линии от взаимного расположения проекций

Для исследования влияния взаимного расположения проекций на качество реконструкции производится компьютерное моделирование ветви древовидного объекта методами, описанными в разделе 3.1.4. Далее, зафиксировав проекции модельного объекта, производится реконструкция трехмерного объекта по проекционным данным. Результирующий объект сравнивается с исходным модельным объектом.

Рассмотрим простейший случай, когда модельный объект без искажений является участком прямой с фиксированными параметрами. Зафиксируем параметры искажений $\alpha = 0.01$, $\alpha_{\max} = 10$, а также количество проекций $N_{PA} = 3$. Наблюдаемые проекции располагаются следующим образом. Рассмотрим единичную полусферу:

$$(e_3, x) = \cos(\beta), \quad (3.29)$$

где $\beta \in [0, \pi/2]$, и зафиксируем угол β . Для фиксированного значения β выражение (3.29) определяет окружность. Выберем на окружности N_{PA} равно отстоящих друг от друга точек, которые будут определять векторы нормалей плоскостей проекций (рис. 3.16).

В явном виде нормали можно записать:

$$n_1 = (0, 0, \cos \beta),$$

$$n_i = R^{i-1} n_1, \quad i = 2, \overline{N_{PA}},$$

где $R = \cos \frac{2\pi}{N_{PA}} + \sin \frac{2\pi}{N_{PA}} e_1 \wedge e_2$.

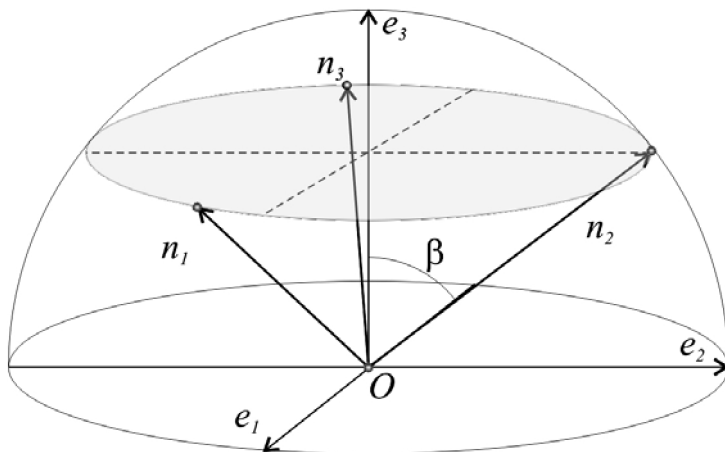


Рис. 3.16 Векторы нормалей плоскостей проекций ($N_{PA} = 3$)

При таком выборе объекта и расположении проекций степень наблюдаемости объекта на наборе проекций без учета возмущений равна:

$$I = \frac{2 \sin(\beta)}{(N_{PA} - 1)} S_0,$$

где $S_0 = \sum_{i=1}^{(N_{PA}-1)/2} \sin \frac{2\pi}{N_{PA}} i$.

Исследуем величину отклонения восстановленной центральной линии от исходной в зависимости от угла β , т.е. $\delta = \delta(\beta)$. Значение β меняется в пределах от 5° до 85° с шагом 5° . Для каждого фиксированного значения угла β производится 20 испытаний с различными

реализациями случайных процессов $\hat{x}_m(n)$, где m -номер проекции. Для каждой реализации рассчитывается среднеквадратическое отклонение δ_0 возмущенных центральных линий от исходной. Для анализа качества работы алгоритма восстановления используется величина *относительного отклонения*:

$$\delta_{отн}(\cdot, k) = \frac{\delta(\cdot, k)}{\delta_0(k)},$$

где $\delta(\cdot, k)$ - среднеквадратическое отклонение восстановленной центральной линии от исходной, k - номер реализации случайного процесса $\hat{x}_m(n)$. Это позволяет исключить зависимость отклонения восстановленной центральной линии от величины возмущений центральной линии.

Для графического представления зависимости относительного отклонения восстановленной центральной линии от угла β используется усредненное по реализациям значение относительного отклонения:

$$\bar{\delta}_{отн}(\beta) = 0.05 \sum_{k=1}^{20} \delta_{отн}(\beta, k).$$

График зависимости $\bar{\delta}_{отн}(\beta)$ приведен на рис. 3.17.

Из приведенных графиков видно, что с увеличением угла β значение величины относительного отклонения падает. Это связано с взаимным расположением исходной центральной линии и плоскостей проекций, а именно, с увеличением угла β степень наблюдаемости объекта на наборе проекций увеличивается, вследствие чего снижается влияние возмущений на восстановление пространственной центральной линии.

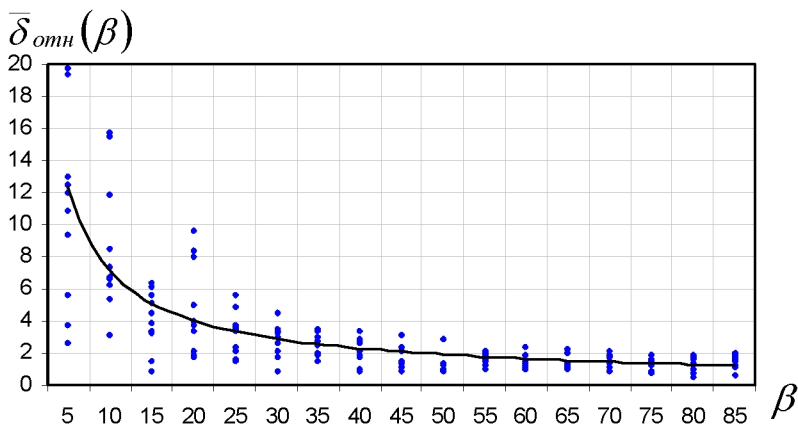


Рис. 3.17 График зависимости величины усредненного относительного отклонения восстановленных центральных линий от угла β

На рис. 3.18 приведен график зависимости степени наблюдаемости объекта на наборе проекций $I(\beta)$ от угла β . Из графика видно, с увеличением угла β значение $I(\beta)$ возрастает, вследствие чего относительное отклонение восстановленных центральных линий убывает.

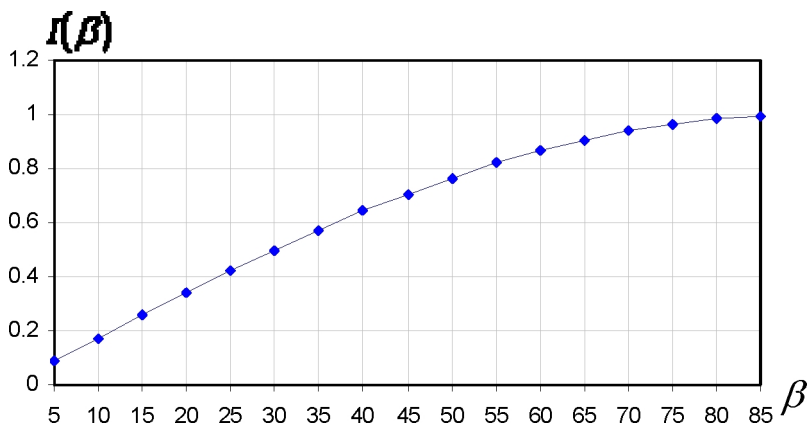


Рис. 3.18 График зависимости степени наблюдаемости объекта на наборе проекций от угла β

ГЛАВА 4. ОБЩЕЕ ЗНАКОМСТВО С ФОРМАТОМ DICOM

4.1 Общее описание

Система ведения компьютеризованной истории болезни аккумулирует данные, поступающие из разных источников в виде электронных документов, и предоставляет их лечащему врачу для принятия решения о диагностическом или лечебном назначении. Чем лучше упорядочены и структурированы передаваемые данные, тем больше информации можно из них извлечь с помощью компьютерной программы и тем более обоснованным может быть врачебное решение. Поэтому в последние годы значительное внимание уделяется стандартизации формы и содержания электронных медицинских документов.

Задача стандартизации электронных документов с результатами лабораторных анализов достаточно успешно решена в европейском стандарте ENV 1613 и в соответствующих разделах североамериканского стандарта HL7 (1994 год). Гораздо сложнее стандартизовать структуру документов с результатами диагностических исследований, например, рентгенологических, гистологических, эндоскопических. В настоящее время наиболее удачное решение указанных проблем воплотил в себе стандарт DICOM 3.0.

DICOM (Digital Imaging and Communications in Medicine – цифровые изображения и обмен ими в медицине, зарегистрирован под названием NEMA PS3) является совместной разработкой Американского института радиологии ACR (American College of Radiology) и Национальной ассоциации производителей электрического оборудования NEMA (National Electrical Manufacturers Association) и предназначен для обмена изображениями лучевой диагностики и сопутствующими им данными. DICOM – это основной индустриальный стандарт для передачи радиологических изображений и другой медицинской информации между компьютерами, опирающийся на стандарт Open System Interconnection (OSI), разработанный Международной организаци-

ей по стандартам (International Standards Organization, ISO). Поддерживается основными производителями медицинского оборудования и медицинского программного обеспечения. Стандарт DICOM описывает "паспортные" данные пациента, условия проведения исследования, положение пациента в момент получения изображения и т.п., для того чтобы в последствии было возможно провести медицинскую интерпретацию данного изображения. В данный момент базируется на протоколе TCP и имеет трехуровневый протокол — нижний, сразу над TCP – DUL, над ним – DIMSE, и собственно сам DICOM.

Протокол коммуникации DICOM использует TCP/IP для общения между системами передачи медицинской информации. Файлы DICOM могут быть обменены между двумя объектами, которые способны получать изображения и данные о пациенте в формате DICOM. Стандарт позволяет организовать цифровую связь между различным диагностическим и терапевтическим оборудованием, использующимся в системах различных производителей. DICOM позволяет производить интеграцию рабочих станций, компьютерных (КТ) и магнитно-резонансных томографов (МРТ), микроскопов, УЗ-сканеров, общих архивов, хост-компьютеров и мэйнфреймов от разных производителей, расположенных в одном или нескольких городах в единую систему передачи и архивирования медицинской информации с возможностью обмена информацией с использованием открытых сетей по стандартным протоколам, например, TCP/IP.

Сетевой протокол включает в себя ряд стандартных сетевых сервисов:

1. Store — запоминание (сохранение) изображений и другой информации.
2. Storage Commitment — подтверждение сохранения изображений в архиве.
3. Query/Retrieve — запрос/получение, запрос списка пациентов или исследований с другого (удалённого) устройства DICOM.

4. Modality Worklist — запрос списка работ-исследований по заданной методике исследования, например, рентгенографии, с данными о пациентах и исследованиях.

5. Modality Performed Procedure Step — подтверждение выполнения какого-либо действия (шага), например, при выполнении исследования по заданной методике исследования.

6. Print — DICOM-печать на специализированных (как правило, плёночных) принтерах.

Данный стандарт получил широкое распространение в США, Японии, Германии и других странах.

4.2 Спецификация формата

Стандарт DICOM является полным коммуникационным стандартом, включающим в себя описание базовых сервисов двустороннего обмена информацией, связанной с изображениями, а также спецификацию обмена самими изображениями. Спецификация стандарта состоит из 18 частей и может быть найдена на сайте разработчиков [30]. Ниже приводится краткое описание основных частей формата (табл. 4.1).

Таблица 4.1. Содержание версии 3 стандарта DICOM

Обозначение стандарта	Название	Содержание	Стр.
PS 3.1-1999	Часть 1. Введение	История разработки стандарта, его назначение, рамки, цели и структура. Кроме того, эта часть содержит краткое описание остальных частей стандарта	20

Таблица 4.1 (продолжение)

PS 3.2-1999	Часть 2. Соответствие стандарту	Описание цели и структуры заявления о соответствии стандарту, а также общих требований, которым должна удовлетворять каждая реализация стандарта	56
PS 3.3-1999	Часть 3. Определение информационных объектов	Абстрактное определение реальных объектов применительно к передаче цифровой медицинской информации	492
PS 3.4-1999	Часть 4. Спецификации классов и сервисов	Комплекс определений классов сервисов, предлагающих абстрактное определение реальных действий применительно к передаче цифровой медицинской информации	264
PS 3.5-1999	Часть 5. Структура и семантика данных	Описываются типы данных и правила кодирования, используемые при передаче данных из одной системы в другую	92
PS 3.6-1999	Часть 6. Словарь данных	Реестр всех элементов данных стандарта и всех определенных в нем уникальных идентификаторов	68

Таблица 4.1 (продолжение)

PS 3.7-1999	Часть 7. Обмен сообщениями	Описание элемента сервиса сообщения DIMSE (DICOM Message Service Element)	124
PS 3.8-1999	Часть 8. Обеспечение обмена сообщениями в сетевых средах	Определение сервисов и протоколов верхних уровней, необходимых для передачи прикладных объектов в сетевой среде	67
PS 3.9-1999	Часть 9. Обеспечение обмена сообщениями при прямом соединении абонентов	Определение сервисов и протоколов верхних уровней, необходимых для передачи прикладных объектов при прямом соединении абонентов	68
PS 3 (set)	Комплект частей стандарта DICOM	Части PS3.1 -PS3.14	
PS 3.10-1999	Часть 10. Носители данных и форматы файлов	Описание общей модели хранения медицинских изображений на различных внешних носителях данных	44

Таблица 4.1 (продолжение)

PS 3.11-1999	<p>Часть 11. Прикладные характеристики хранения данных на внешних носителях</p>	<p>Описываются требования к данным, которые должны храниться на внешних носителях. Описания имеют клиническую направленность, например, задают, какие данные должны храниться на внешних носителях при проведении ангиографии</p>	48
PS 3.12-1999	<p>Часть 12. Форматы носителей и физическая среда хранения данных</p>	<p>Спецификация различных носителей данных, которые могут использоваться для хранения медицинских изображений</p>	28
PS 3.13-1999	<p>Часть 13. Управление выводом на печатающие устройства при прямом соединении</p>	<p>Описание протоколов и сервисов, необходимое для вывода изображения на печатающее устройство. Управление взаимодействием по прямому соединению соответствует стандарту ISO 7498-1. Кроме того, используются протоколы нижних уровней, совместимые с существующими аппаратными средствами "твердой копии"</p>	56

Таблица 4.1 (продолжение)

PS 3.14-1999	Часть 14. Стандартные функции монохромного изображения	Определение стандартизованных функций изображения монохромных изображений. К системам изображения относятся, например, мониторы с соответствующей электроникой	60
--------------	---	--	----

Остановимся более подробно на использовании формата передачи изображений стандарта DICOM. Изображения этого типа должны кодироваться в соответствии с форматом Generic DICOM File Format, определенным в стандарте DICOM, часть 10, Media Storage and File Format (NEMA PS3.10). Это кодирование должно выполняться согласно определениям информационного объекта изображения (Image Information Object Definitions), приведенным в стандарте DICOM, часть 3 (NEMA PS3.3), определениям структуры и семантики данных (Data Structure and Semantics), приведенным в стандарте DICOM, часть 5 (NEMA PS3.5), и в соответствии со словарем данных (Data Dictionary), приведенным в стандарте DICOM, часть 6 (NEMA PS3.6).

Формат Generic DICOM File Format состоит из двух частей: заголовка DICOM File Meta Information Header, непосредственно за которым следуют данные (DICOM Data Set). Эти данные содержат одно или несколько изображений в соответствии с частью 10 стандарта DICOM.

Заголовок DICOM File Meta Information Header наряду с прочей информацией содержит уникальный идентификатор синтаксиса передачи (Transfer Syntax UID), который полностью определяет способ кодирования данных в соответствии с частью 5 стандарта DICOM.

Способ кодирования определяет порядок следования битов изображения в байтах (big endian, little endian byte ordering), а также метод сжатия изображений, наследуемый из стандарта JPEG (Joint

Photographics Experts Group), опубликованный в документах ISO/IS 10918-1 и 10918-2. Идентификатор синтаксиса передачи закодирован с использованием упорядочения битов little endian, как это требуется в части 10 стандарта DICOM.

4.3 Практическое применение стандарта DICOM в России

В силу целого ряда причин большая часть устройств медицинской визуализации, используемых в настоящее время в российских лечебно-профилактических учреждениях, произведена за пределами нашей страны. В ближайшем будущем это положение, по-видимому, сохранится, особенно в части устройств, использующих цифровую обработку сигналов. Как правило, программное обеспечение таких устройств не русифицировано и их интеграция в уже существующие и вновь разрабатываемые российские медицинские информационные системы оказывается достаточно затруднительной.

Поскольку многие из вновь разработанных устройств медицинской визуализации обеспечивают возможность передачи создаваемых ими изображений в стандарте DICOM, это может значительно облегчить задачу интеграции. Структура сообщений стандарта DICOM позволяет без особого труда вычленивать из сообщений само изображение, игнорируя другую информацию. Тем самым разработчик может начать с самой простой задачи - приема и визуализации изображений, передаваемых с устройств вторичного сбора данных (secondary capture devices), например, сканеров рентгеновских снимков, но при этом применять свою программу для обработки сообщений, полученных и другими методами визуализации, пропуская дополнительную информацию. Конечно, на этом пути тоже встретятся немалые трудности, особенно если производитель оборудования применяет собственные алгоритмы уплотнения вместо JPEG. Если же эти трудности удастся обойти, то на рабочие места врачей можно передавать не только сканированные рентгеновские снимки, но также и изображения, полу-

ченные большинством других методов медицинской визуализации. Затем программу анализа сообщений DICOM можно дополнять функциональными модулями, обеспечивающими обработку информации, специфической для конкретного метода медицинской визуализации.

В целом использование стандарта DICOM представляется интересной и важной задачей, решение которой способно принести ощутимую пользу конечным потребителям медицинских изображений - лечащим врачам и консультантам. Здесь надо иметь в виду одно очень важное обстоятельство: пока речь будет идти об интерпретации снимков одного пациента, то передача условий проведения исследований, описанная в стандарте DICOM, вряд ли будет немедленно востребована врачами. Значительную часть этой информации они могут получить, глядя на снимок, на основании знания сложившейся практики проведения исследований, надписей со значениями параметров, сделанных на изображении, текстов описаний и заключений, приложенных к снимку. Передача условий проведения исследований гораздо важнее для последующей автоматизированной обработки результатов исследований, особенно той, что проводится с научно-методическими целями. Поэтому затраты на активное внедрение стандарта DICOM надо рассматривать как долгосрочные инвестиции, необходимые для постепенной автоматизации не только процесса передачи, но также и клинической интерпретации медицинских изображений.

4.4 Альтернативный формат HL7

Другой широко распространенный формат HL7 (Health Level 7) – медицинское сообщение высшего смыслового уровня, синтаксический стандарт для обмена, управления и интеграции электронной медицинской информации. «Седьмой уровень» — аналогия с высшим уровнем коммуникационной модели открытых систем (OSI). Седьмой уровень поддерживает выполнение таких задач, как безопасность, идентификация участников, доступность, достижение согласованности передач,

и, самое важное, структурирование передаваемых данных плюс возможности проектирования систем.

Разработкой, развитием, внедрением, накоплением медицинских знаний занимается мощная бесприбыльная добровольческая организация Health Level Seven Inc., созданная в 1987 году, штаб-квартира расположена в городе Энн Арбор шт. Мичиган, США.

Ключевой элемент HL7 — Связанная информационная модель (англ. *The Reference Information Model, RIM*) — средство построения карты медицинской системы, описания жизненного цикла событий, осуществляемых с помощью сообщений, представления семантических и контекстуальных связей между полями передаваемых сообщений.

Архитектура клинического документа (АКД, CDA, англ. Clinical Document Architecture) ANSI-сертифицированный стандарт для HL7. В АКД определён синтаксис и комплекс структур (англ. framework) для полного выражения семантики клинического документа. АКД использует язык разметки информационных объектов XML, хотя для простейших документов могут быть использованы и другие средства, например, графический или текстовый файл. АКД хорошо работает при обмене быстро изменяющейся медицинской исследовательской информацией [31].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии изложены основы компьютерной томографии, рассмотрены упрощенные схемы и модели трансмиссионной компьютерной томографии, а также методы реконструкции пространственной плотности по проекционным данным. В пособии рассмотрены математические модели древовидного объекта и его нечетких наблюдений. В работе приведен алгоритм компьютерного моделирования ветви древовидного объекта.

Рассмотренные методы реконструкции можно разделить на две группы: методы реконструкции пространственной плотности объекта исследования и методы реконструкции геометрии объекта. Первая группа методов имеет ограниченную применимость, связанную с необходимым требованием статичности объекта исследования, однако позволяет производить реконструкцию пространственной плотности с высокой точностью. Вторая группа методов использует результаты реконструкции пространственной плотности, либо непосредственно геометрическую информацию с проекционных данных для получения геометрической информации о пространственном объекте и оценивания его характеристик.

Учебное пособие также содержит краткое описание формата DICOM, а также ссылки на источники, необходимые для дальнейшего знакомства с техническими деталями реализации формата.

Учебное пособие может быть полезным при обучения студентов специальности 190500 – «Биотехнические и медицинские аппараты и системы» в дисциплинах, связанных с обработкой медицинских диагностических изображений.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автокорреляционная функция	3.1.4
Алгебраический алгоритм	2.2.4
Алгоритм r -фильтрации проекций	2.2.4
Алгоритм обратного проецирования	2.2.1
Алгоритм сверточного типа	2.2.2
Аффинное пространство	1.2.3
Аффинная карта	1.2.3
Бивектор	1.2.3
Веерное преобразование	1.4
Ветвь древовидного объекта	3.1.1
Внешнее произведение	1.2.1
Внутреннее произведение	1.2.1
Геометрическая алгебра	1.2
Геометрическое произведение	1.2.1
Древовидный объект	3.1.1
Идеальная проекция	3.2.2
Интерполяция по ближайшему соседу	2.2.1
Критериальная функция	3.2.1
Критерий согласованности	3.2.2
Линейная интерполяция	2.2.1
Лучевое преобразование	1.4
Максимальная кривая	3.2.2
Метод градиентного спуска	3.2.2
Метод избыточных релаксаций	2.2.4
Минимальная кривая	3.2.2
Мультивектор	1.2.1
Мультилинейность	1.2
Наблюдаемость объекта	3.3
Нечеткие наблюдения	3.1.2
Параллельная схема сканирования	1.2.3

Потенциал Рисса	2.1
Преобразование Гильберта	2.1
Преобразование Радона	1.4
Преобразование Фурье	2.2.3
Проективное пространство	1.2.3
Проекция древовидного объекта	3.1.3
Пространство Шварца	1.4
Сегмент древовидного объекта	3.1.1
Спинор	1.2.1
Степень наблюдаемости объекта	3.3
Сфера возможных направлений	3.2.1
Трансмиссионная компьютерная томография	1.1
Узловые точки	3.1.1
Формат HL7	4.4
Формат DICOM	4.1
Фурье-алгоритм	2.2.3
Центральная проекция	1.2.3

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Информационный портал Wikipedia. <http://ru.wikipedia.org/wiki/>, раздел «коронарография».
2. Тарханов, В.И. Геометрическая алгебра - язык творческого мышления / В.И.Тарханов. – СПб.: Айрэс, 2004.
3. Geometric Computing with Clifford Algebras: Theoretical Foundations and Applications in Computer Vision and Robotics / Ed.: G. Sommer. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 2001, p. 542.
4. Suter, J., Geometric Algebra Primer, <http://home.student.utwente.nl/j.suter/>, 2003.
5. Винберг, Э.Б., Курс алгебры / Э.Б.Винберг. – М.: Факториал Пресс, 2002. 544 с.
6. Хермен, Г. Восстановление изображений по проекциям: Основы реконструктивной томографии [пер. с англ.] / Г.Хермен. – М.: Мир, 1983.
7. Шварц, Дж. Дифференциальная геометрия и топология / Дж.Шварц. – М.: Мир, 1970.
8. Наттерер, Ф. Математические аспекты компьютерной томографии [пер. с англ.] / Ф.Наттерер. – М.: Мир, 1990.
9. Реконструкция изображений [пер. с англ.] / под ред. Г.Старка. – М.: Мир, 1992.
10. Методы компьютерной обработки изображений / под ред. В.А.Сойфера. – М.: Физматлит, 2001.
11. Aylward, S.R. Intensity ridge and widths for tabular object segmentation and registration / S.R.Aylward, S.Pizer, E.Bullitt [et.al.] // *in Wksp on Math. Methods in Biomed. Image Analysis*, 1996, pp. 131-138.
12. Bullitt, E. Analysis of time-varying images using 3D vascular models / E.Bullitt, S.R.Aylward // *in Proc. Applied Imagery Pat. Recog. Works.*, October 2001, pp. 9-14.
13. Bullitt, E. 3D graph description of the intracerebral vasculature from segmented MRA and test of accuracy by comparison with x-ray angiograms / E.Bullitt, S.R.Aylward, A.Liu [et.al.] // *Information Processing in Medical Imaging*, vol. 1613, 1999, pp. 308-321.

14. Bullitt, E. Symbolic description of intracerebral vessels segmented from mra and evaluation by comparison with x-ray angiograms / E.Bullitt, S.R.Aylward, S.Smith [et.al.] // *IEEE Medical Image Analysis*, vol. 5, 2001, pp. 157-169.
15. Niki, N. 3D imaging of blood vessels using x-ray rotational angiographic system / N.Niki, Y.Kawata, H.Satoh [et.al.] // *IEEE Med. Imaging Conf.*, vol. 3, 1993, pp. 1873-1877.
16. Hestenes, D. Projective Geometry with Clifford Algebra / D.Hestenes, R.Ziegler // *Acta Applicandae Mathematicae*, Vol. 23, 1991, 25-63.
17. Дубровин, Б.А. Современная геометрия: Методы и приложения / Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко. – М.: Эдиториал УРСС, Т.1., 1998, 334 с.
18. O'Donnell, T. The extruded generalized cylinder: A deformable model for object recovery / T.O'Donnell, T.E.Boult, X.Fang [et.al.] // *in Proc. of the IEEE Conf. on CVPR*, 1994, pp. 174-181.
19. Rueckert, D. Automatic tracking of the aorta in cardiovascular mr images using deformable models / D.Rueckert, P.Burger, S.M.Forbat [et.al.] // *IEEE Trans. on Med. Img.*, vol. 16, 1997, pp. 581-590.
20. Coxeter, H.S.M. Regular polytopes / H.S.M.Coxeter. – Dover Publications, 1973.
21. Korepanov, A.O., Central lines extraction on the diagnostic vessel images using the methods of wavelet-analysis and differential geometry / A.O.Korepanov // *Proceedings of the 7th International Conference on Pattern Recognition and Image Analysis (PRIA-7-2004)*, Vol. 3, 2004, pp. 740-743.
22. Прэтт, У. Цифровая обработка изображений / У.Прэтт. – М.: Мир, 1982. Кн. 2. 790 с.
23. Parker, D.L. Three dimensional vascular reconstruction from projections: A theoretical review / D.L.Parker, J.Wu, R.E. van Bree // *in IEEE Conf. Eng. in Medicine and Bio*, 1988.
24. Prinnet, V. Multi-dimensional vessel extraction using crest lines / V.Prinnet, O.Monga, J.M.Rocchisani // *in IEEE Conf. Eng. in Medicine and Bio.*, vol. 1, 1997, pp. 393-394.
25. Stevenson, D.J. Working towards the automatic detection of blood vessels in x-ray angiograms / D.J.Stevenson // *Pattern Rec. Let.*, vol. 6, 1987, pp. 107-112.

26. Ильясова, Н.Ю. Метод определения оптимального пространственного направления сосудов в задаче восстановления 3D топологии коронарной системы / Н.Ю.Ильясова, А.О.Корепанов, А.В.Куприянов [и др.] // Труды 6-й международной конференции РОАИ-2002. – Спб.: Айрэс, 2002. С. 299-303.
27. Korepanov, A.O. A Method for Determination of an Optimal Spatial Direction of Vessels in the Problem of Reconstructing the 3D Topology of a Coronary System / A.O.Korepanov, N.Yu.Ilyasova, A.V.Kupriyanov [et.al.] // Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 13, No. 2, 2003, p. 287-289.
28. Метод определения оптимального пространственного направления сосудов в задаче восстановления 3D топологии коронарной системы: сб. / Н.Ю.Ильясова, А.О.Корепанов, А.В.Куприянов [и др.] // Компьютерная оптика, 2002. №24. С. 152-154.
29. Метод пространственного восстановления коронарных артерий по малому числу ангиографических проекций: сб. / А.О.Корепанов, А.В.Куприянов, А.В.Устинов [и др.] // Компьютерная оптика, 2004. №26.
30. Официальный сайт организации NEMA, <http://medical.nema.org/>
31. Информационный портал Wikipedia, <http://ru.wikipedia.org/wiki/>, раздел «HL7 (медицинский стандарт)».

Учебное издание

*Корепанов Андрей Олегович
Ильясова Наталья Юрьевна
Куприянов Александр Викторович
Сойфер Виктор Александрович*

**Методы обработки и анализа данных рентгеновской
томографии**

Учебное пособие

Редакторская обработка Т.К.Кренинина
Компьютерная верстка
Доверстка

Подписано в печать _____ г. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Печ. л. 7,0.
Тираж 120 экз. Заказ _____ . ИП – Ж80/2007.

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.