

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

*В.Р. КАРГИН, Б.В. КАРГИН*

# МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

## Часть 1

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программе высшего профессионального образования по направлению подготовки бакалавров 15.03.01 Машиностроение, 22.03.02 Metallургия

САМАРА  
Издательство СГАУ  
2015

УДК 539(075)

ББК 22.317

К218

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. В.А. Кирпичев,  
канд. техн. наук, доц. А.П. Быков

***Каргин В.Р.***

К218 **Механика сплошных сред. Ч. 1:** учеб. пособие / *В.Р. Каргин, Б.В. Каргин.* – Самара: Изд-во СГАУ, 2015. – 76 с.

**ISBN 978-5-7883-1037-4**

На современном уровне изложены основные разделы механики сплошных сред: теории напряжения и деформаций применительно к процессам обработки металлов давлением. Теоретический материал иллюстрирован примерами решения соответствующих задач.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям 22.03.02 Metallургия и 15.03.01 Машиностроение. Может быть полезно аспирантам, научным и инженерно-технологическим работникам предприятий металлургической и машиностроительной промышленности. Подготовлено на кафедре обработки металлов давлением.

УДК 539(075)

ББК 22.317

ISBN 978-5-7883-1037-4

© СГАУ, 2015

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b> .....	<b>4</b>
<b>Глава 1. Теория напряжений</b> .....	<b>10</b>
1.1. Внешние силы .....	10
1.2. Внутренние силы. Напряжения .....	12
1.3. Индексные обозначения .....	15
1.4. Тензор напряжений .....	16
1.5. Напряжения на наклонной площадке .....	20
1.6. Главные нормальные напряжения .....	22
1.7. Октаэдрические напряжения .....	30
1.8. Разложение тензора напряжений .....	31
1.9. Главные (максимальные) касательные напряжения .....	35
1.10. Равновесие сил и моментов .....	39
1.11. Диаграмма напряжений Мора .....	45
<b>Глава 2. Теория деформаций</b> .....	<b>49</b>
2.1. Понятие деформации. Тензор деформаций .....	49
2.2. Геометрические уравнения .....	54
2.3. Уравнения совместности деформаций .....	56
2.4. Главные деформации .....	60
2.5. Схемы главных деформаций .....	62
2.6. Разложение тензора деформаций .....	64
2.7. Однородная, равномерная и монотонная деформации .....	66
2.8. Большие деформации .....	68
2.9. Объемная деформация .....	71
2.10. Скорость деформации .....	72
<b>Библиографический список</b> .....	<b>75</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Механика сплошных сред является разделом механики. *Механика* – это наука, изучающая простейшую форму движения материи – *механическое движение*, т.е. изменение в пространстве с течением времени взаимного расположения тел или частей тела. В теоретической механике для описания этой формы движения используются абстрактные понятия материальной точки и абсолютно твердого тела.

*Материальной точкой* называется тело конечной массы, но пренебрежительно малых размеров.

*Абсолютно твёрдым телом* называется тело, состоящее из совокупности материальных точек, находящихся на неизменном расстоянии друг от друга под действием приложенных внешних сил.

Если допустить изменение взаимного расположения материальных частиц, то придём к понятию *сплошной среды*. К сплошным средам относятся газообразные, жидкие и твёрдые деформируемые тела, например воздух, смазка и металл соответственно.

*Механика сплошных сред* – это часть механики, посвященная изучению движения газообразных, жидких и твёрдых деформируемых тел.

В области обработки металлов давлением наибольший интерес представляет изучение движения только твёрдых деформируемых тел.

Основными формами движения твёрдых деформируемых металлических тел являются упругость и пластичность (упругая и пластическая деформация).

*Упругость* – это способность металлических тел после снятия внешних сил полностью восстанавливать свои прежние формы, размеры и объём. Если на металлическое тело действуют внешние растягивающие силы, то расстояние между соседними атомами в кристаллической решётке увеличивается в направлении действия этих сил. Если на тело действуют внешние сжимающие силы, расстояния между атомами уменьшаются. Если изменение расстояний между атомами много меньше периода

кристаллической решётки, после снятия внешних сил восстанавливаются прежние расстояния между атомами и в кристаллической решётке не остаётся никаких изменений. Такая деформация называется упругой. При упругой деформации кристаллическая решётка подобно пружине накапливает потенциальную энергию, которая называется энергией упругой деформации.

*Пластичность (деформируемость)* – это способность металлов под воздействием внешних сил изменять необратимо свою форму и размеры без разрушения. При увеличении внешних сил увеличивается энергия упругой деформации. По достижении определённой её величины начинается течение металла и в действие вступает новый механизм деформации – скольжение. При этом плоскости, в которых располагаются атомы, смещаются относительно друг друга под действием касательных напряжений на величину много большую, чем период кристаллической решётки. После снятия внешней нагрузки прежняя картина не восстанавливается, как это было при упругой деформации. Такая деформация тела называется пластической.

Состояние, при котором металлы приобретают эту способность (свойство), называется упругим или пластическим, пластическому состоянию всегда предшествует упругое состояние. Для металлических тел упругие деформации в процессах обработки металлов давлением обычно малы.

Пластичность как ценное свойство металлов широко используется в процессах обработки металлов давлением (горячей и холодной штамповке, прокатке, прессовании, волочении) для придания детали нужной формы.

Изучением действия внешних сил на упругие тела занимается теория упругости. Изучением действия внешних сил на пластические тела занимается теория пластичности. Теория упругости и пластичности – основные разделы механики сплошных сред. В них рассматриваются равновесие и движение деформируемых твёрдых тел с учётом изменения расстояния между материальными частицами при наложении внешнего воздействия, а также методы расчёта напряжённо-деформированного состояния металла.

Основные задачи дисциплины «Механика сплошных сред»: определение полей напряжений и деформаций в обрабатываемом металле и инструменте, что имеет не только чисто теоретический, но и практический интерес; установление условий перехода металла из упругого состояния в пластическое; выяснение наиболее благоприятных режимов пластического деформирования, изучение связи между пластическими деформациями и изменением физических и механических свойств металла.

При решении поставленных задач обычно выбирается модель твёрдого деформируемого тела, построенная на гипотезах о сплошности строения, однородности материала, шаровой изотропии и естественном ненапряжённом состоянии.

*Гипотеза о сплошности строения тела.* По этой гипотезе тело до деформации, в процессе деформации и после остается сплошным ( без пустот, разрывов, трещин).

В любом существенном для нас объеме очень много атомов, а расстояния между ними малы. Например,  $1 \text{ см}^3$  железа плотностью  $7,87 \text{ г/см}^3$  содержит при температуре  $20^\circ\text{C}$   $8,46 \cdot 10^{22}$  атомов, а расстояние между соседними атомами равно  $2,86 \cdot 10^{-8}$  см. Поэтому твердое деформируемое металлическое тело можно моделировать сплошной средой, занимающей часть реального пространства. Расстояние между ближайшими точками сплошной среды как угодно мало. Эта гипотеза является основой для математического описания движения твердых деформируемых тел, позволяет использовать математический аппарат непрерывных функций, дифференциальное и интегральное исчисления.

Допущение об однородности материала. Сплошная среда называется однородной, если свойства выделенных из нее одинаковых объемов одинаковы; например, среда имеет одинаковую плотность во всех точках.

В реальных деформируемых телах однородности не существует, хотя бы из-за отсутствия однородности материала. Неоднородными телами являются плакированный лист из дюралюмина, неравномерно нагретое по объему тело. Существенно неоднородны композиционные материалы, содержание волокна из углерода и бора.

*Гипотеза об изотропности среды.* Сплошная среда считается изотропной по отношению к какому-либо свойству металла, если это свойство в любой точке будет одинаковым по всем направлениям. Если же

свойства зависят от направления в точке, то среда является анизотропной по отношению к этим свойствам.

Отдельно взятый кристалл металла анизотропен, поскольку атомы в кристаллической решетке располагаются совершенно определенным образом. Но если в объеме содержится большое количество хаотично расположенных кристаллов, то материал в целом можно рассматривать как изотропный. С другой стороны, в прокатном металле зерна деформируются в направлении прокатки, образуется так называемая текстура. Поэтому свойства в направлении прокатки и в поперечном направлении будут разными. Такая же анизотропия возникает при всех видах обработки металлов давлением.

Особенно резко выражена анизотропия в полуфабрикатах, изготовленных из сплавов авиационного назначения (титановых, бериллиевых, магниевых, алюминиевых), специальных сталей. Одними из самых перспективных материалов являются композиты. Они по своему строению (конструкции) вообще не могут быть изотропными.

*Гипотеза об естественном напряженном состоянии тела.* Согласно этой гипотезе существующие до приложения нагрузок напряжения в материале принимаются равными нулю. Эта гипотеза также не отвечает реальности, т.к. невозможно получить полуфабрикаты без остаточных напряжений.

Всё перечисленное представляет собой основные допущения механики сплошной среды. Причем, если гипотезы о сплошности строения тела и его естественном напряженном состоянии остаются как бы неизблевыми, то применение остальных не всегда является обязательным. Из перечисленного ясно, что принятые гипотезы не отвечают действительности, но они помогают строить физическую модель деформируемой среды.

Принятых допущений недостаточно для построения моделей теорий упругости и пластичности. Здесь приходится проводить дальнейшую идеализацию.

*Идеально-упругое тело* (рис. 1, а). Это понятие лежит в основе теории упругости. Для идеально-упругих тел выполняется первый закон термодинамики о сохранении энергии в изолированной среде. Это явление нашло математическое отражение в законе Гука. Поэтому тела, подчиняющиеся этому закону, иногда называют телами Гука.

*Нелинейно-упругое тело* (рис. 1,б). Тело либо не подчиняется закону Гука, либо деформация перешла за предельно упругое состояние, но разгрузка идет по той же кривой.

*Идеально-упругопластическое тело или идеально-пластическое тело* (рис. 1, в). При напряжении меньше предела упругости (текучести) тело ведет себя как тело Гука. При достижении предела текучести начинается пластическое течение и деформация здесь является неопределенной. Разгрузка протекает упруго с тем же модулем, что и при нагружении, сжатие подчиняется тем же законам, что и растяжение, т.е. пределы текучести на растяжение  $\sigma_T^p$  и сжатие  $\sigma_T^{сж}$  одни и те же по абсолютной величине. Такие тела называют телами Прандтля.

*Идеально-жесткопластическое тело* (рис. 1,г). Если пластическая деформация является развитой, то упругой составляющей можно пренебречь и считать, что материал до предела текучести ведет себя как абсолютно твердое тело. И здесь пластическая деформация является неопределенной и может неограниченно возрастать. Такие тела называют телами Сен-Венана. Определенный тип моделей может учитывать упрочнение, т.е. наблюдается повышение предела текучести с ростом деформации. В литературе рассматриваются и другие идеализации: идеально-вязкие, упруговязкие и т.д.

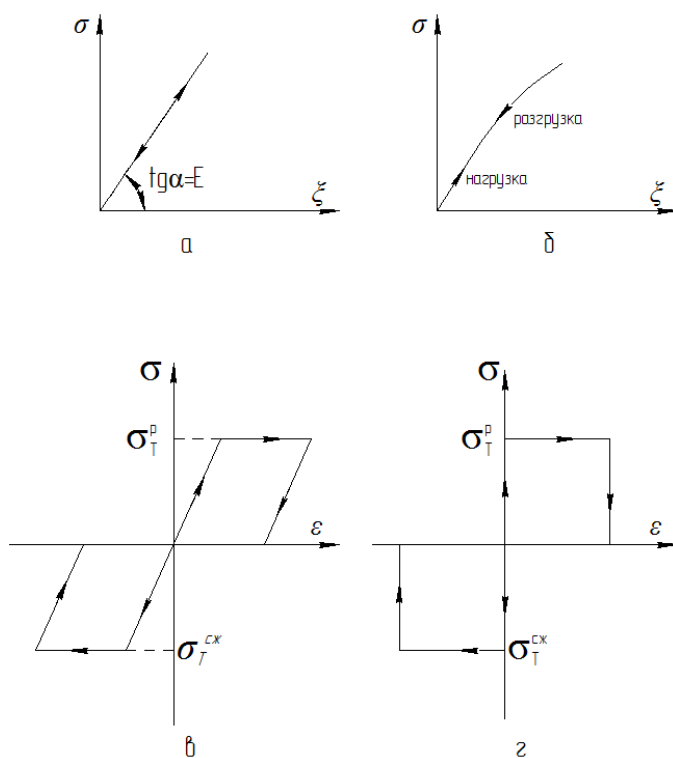


Рис. 1



Следует отметить ещё два допущения при построении теорий упругости и пластичности:

- обычно пренебрегают временными эффектами;
- считают, что упругие и пластические деформации разделены.

В заключение отметим, что подход, обоснованный на предложенных гипотезах, носит название феноменологического. При этом рассматривают чисто внешнее взаимодействие, не задаваясь вопросом, за счет чего это достигнуто, не рассматривают внутреннее строение материала и происходящие при нагружении изменения в теле. Другими словами, мы отвлекаемся от физической сущности процессов.

# ГЛАВА 1. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

## 1.1. Внешние силы

В процессе обработки металлов давлением участвуют деформируемый металл и инструмент. Наша задача – определить их взаимодействие.

Взаимодействие обрабатываемого тела и инструмента можно рассматривать с точки зрения его величины, направления, продолжительности. С точки зрения величины и направления взаимодействие удобно выражать силой. Известно, что силы – векторные величины, которые интуитивно можно представить как давление или тягу.

В механике твердого деформируемого тела под внешней силой понимают воздействие окружающей среды на тело, стремящееся изменить состояние его покоя или движения. Здесь под окружающей средой подразумевают другие тела и поля, например, поле тяготения земли, магнитное поле и т.д.

Внешние силы классифицируются по нескольким признакам. Так, в зависимости от места расположения точек приложения силы делятся на поверхностные и объемные (массовые). По продолжительности действия внешние силы подразделяются на постоянные и временные. Например, вес моста – сила постоянная, поезд, движущийся по нему, – сила временная. По характеру изменения величины внешние силы делятся на статические и динамические. Статическими будут такие силы, когда изменение их величины настолько мало, что ускорением точек тела и их инерцией можно пренебречь. Если ускорение велико и им нельзя пренебречь, силы – динамические. Динамические силы могут измениться большое число раз, их называют циклическими, повторно-переменными, вибрационными. Если же они прикладываются на очень короткий промежуток времени, то силы будут ударными. По способу воздействия силы бывают активными и реактивными. Активные силы возникают от действия машин (прокатных станов, гидравлических прессов, молотов) и передаются обрабатываемому металлу при помощи инструмента. В процессе деформирования

на металл воздействуют не только активные силы, но и сопротивление неподвижных частей инструмента, которые являются связями, ограничивающими движение деформируемого тела. Воздействие связей на твердое деформируемое тело можно представить как воздействие некоторых сил, которые называют реакциями связей (реактивными силами).

Если деформируемое тело соприкасается с поверхностью инструмента, ограничивающей перемещение точек тела, то реакции связей при отсутствии трения будут направлены по нормали к поверхности в сторону тела. На рис. 2 показана схема волочения проволоки, где сила  $N$  представляет воздействие стенок инструмента на деформируемый металл и является реактивной силой, а сила волочения  $P_{\text{вол}}$  – активной силой

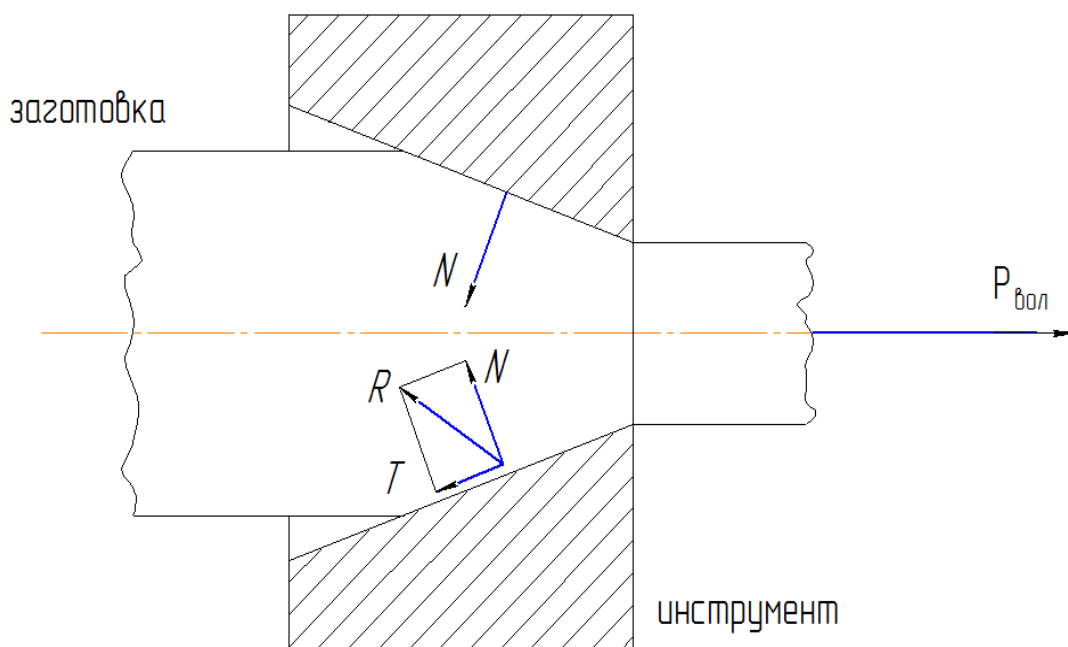


Рис. 2

К реакциям связей относятся также силы трения, возникающие в местах соприкосновения деформируемого металла со стенками инструмента. Сила трения  $T$  располагается в плоскости, касательной к точкам соприкосновения деформируемого металла со стенками инструмента, и направлена в сторону, противоположную движению (рис. 2). В результате сложения с силами трения реакции связей  $R$  отклоняются от направления нормали к поверхности инструмента в сторону, противоположную движению металла.

Силы, распределенные по всему объему твердого деформируемого тела  $V$ , называются массовыми (объемными) силами. Если  $F$  – главный вектор массовых сил, действующих на элемент массы  $\Delta m$ , то плотность массовой силы в данной точке

$$\vec{f} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}}{\Delta m} = \frac{d\vec{F}}{dm}.$$

На малую частицу объемом  $dV$  с массой  $\rho dV$  действует массовая сила  $dF = \rho \vec{f} dV$ , а для всего объема  $V$  главный вектор массовых сил равен

$$F = \iiint \rho \vec{f} dV,$$

где  $\rho$  – плотность сплошной среды. Примерами массовых сил являются силы тяжести и инерционные силы, силы магнитного притяжения.

В процессах обработки металлов давлением основную роль играют поверхностные силы. Если  $\Delta P_n$  – усилие, приходящееся на элементарную площадку  $\Delta S$  с вектором внешней нормали  $n$  к поверхности тела, то плотность поверхностных сил (давление) равна

$$\sigma_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P_n}{\Delta S} = \frac{dP_n}{dS}.$$

Главный вектор поверхностных сил, действующих на конечный объем  $V$  сплошной среды, который ограничен поверхностью  $S$ , равен

$$\vec{P}_n = \iint \sigma_n ds.$$

## 1.2. Внутренние силы. Напряжения

Под действием внешних сил в твердом деформируемом теле возникают внутренние силы, которые связаны с тем, что реальное тело сопротивляется изменению расстояния между частицами.

Оценить в расчетах, как изменяются связи в металле под действием внешних сил, практически не удастся. Исключительная сложность явлений вынуждает идти на идеализацию общей схемы процесса. Одной из таких идеализаций является понятие о напряжениях, которые статически

отражают внутренние связи между частицами металла. Как известно, напряжение представляет собой плотность внутренних сил или интенсивность внутренних сил, действующих между частицами сплошного тела по воображаемым плоскостям.

Напряжения, возникающие в деформируемом теле под действием внешних сил, определяются с помощью метода сечений. Положим, что в твердом теле, находящемся в равновесии под действием внешних сил, требуется определить напряжение в некоторой произвольной точке А (рис.3). Для этого мысленно сечем тело плоскостью через т.А и делим его на части I и II. Отбросив часть II, заменим ее действие на часть I внутренними силами. Положим, что равнодействующая сил, действующая на элементарную площадку  $\Delta S$ , выделенную в окрестности точки А, равна  $\Delta P$ . Тогда напряжение в точке А будет

$$\vec{P} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta S} = \frac{d\vec{P}}{dS}.$$

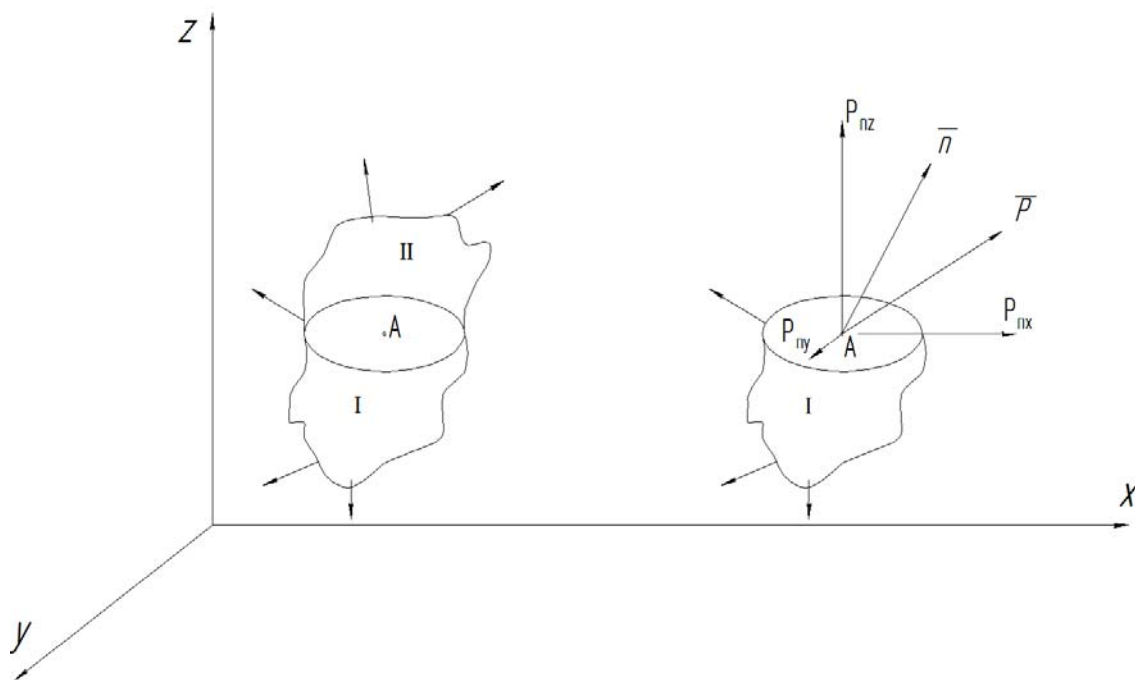


Рис. 3

Напряжение  $\vec{P}$  как векторную величину можно разложить на составляющие, параллельные координатным осям  $P_{nx}$ ,  $P_{ny}$ ,  $P_{nz}$ . Индекс n указывает на то, что напряжения определены на площадке с нормалью n, а

второй индекс указывает ось, параллельно которой находится проекция напряжения  $P$ .

Очевидно, что напряжение  $\vec{P}$  зависит от направления сечения, проведенного через точку  $A$ . Через точку  $A$  можно провести множество сечений, а поэтому и векторов напряжения  $\vec{P}$  в точке будет бесчисленное множество. Причем каждое из них будет соответствовать определенному сечению, направление которого принято задавать направлением внешней нормали  $n$  (рис. 3). Это бесчисленное множество векторов  $\vec{P}$  и будет характеризовать напряжение состояния точки тела. В такой постановке вектор  $\vec{P}$  оказывается непригодным для описания напряженного состояния сплошной среды в точке. К счастью, для того чтобы полностью описать напряженное состояние в точке тела, нет необходимости рассматривать все векторы. Это можно сделать, задавая векторы напряжений на трех взаимно перпендикулярных площадках около точки, параллельных координатным плоскостям.

Если рассмотреть сечение, параллельное координатной плоскости  $ZOY$ , то составляющие напряжения  $P_x$  (проекции) будут  $\sigma_{xx}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  (рис.4, а), где  $\sigma_{xx}$  (или  $\sigma_x$ ) – нормальное напряжение, направленное по нормали к площадке,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  – касательные напряжения, параллельные осям  $Y$  и  $Z$ . Для сечений, параллельных координатным плоскостям  $ZOY$ ,  $XOY$ , составляющие напряжений соответственно будут  $\sigma_y$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{zy}$ ,  $\tau_{zx}$  (рис. 4, б, в).

Таким образом, напряженное состояние в точке  $A$  может быть определено тремя векторами напряжений, действующих на трех взаимно перпендикулярных площадках, перпендикулярных координатным осям. Каждый из этих векторов можно разложить на нормальное и два касательных напряжений (рис. 5).

Для площадок по направлениям, параллельным координатным осям, имеем 9 скалярных величин компонент напряжения:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zy}$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{xz}$ , характеризующих напряженное состояние в точке. Нормальные напряжения принято считать положительными, если они растягивающие, и отрицательными, если они сжимающие. Касательные напряжения положительны, если они дают положительную проекцию на соответствующую координатную ось.

В системе СИ напряжения выражаются в мегапаскалях (МПа) или Н/мм<sup>2</sup> (1МПа=1Н/мм<sup>2</sup>). Наряду с ними по-прежнему широко используются размерность напряжений в металлических телах кгс/мм<sup>2</sup> (1кгс/мм<sup>2</sup>=9,8 МПа ≈ 10 МПа ≈ 10 Н/мм<sup>2</sup>).

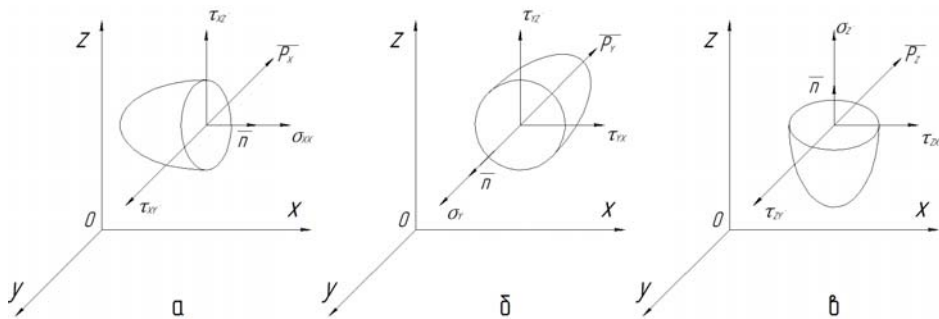


Рис. 4

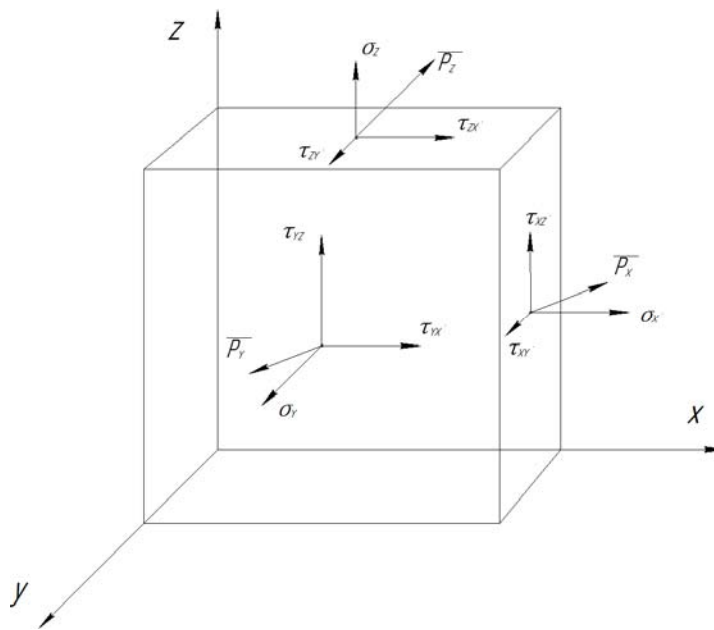


Рис. 5

### 1.3. Индексные обозначения

Индексные обозначения позволяют наглядно и кратко представить многие величины и выражения. Смысл этих обозначений в том, что к основным буквам (или букве) одночленного выражения добавляются нижние буквенные индексы, например,  $C_{ij}$ ,  $A_{ij}B_j$ .

По правилам индексных обозначений один и тот же буквенный индекс может встречаться в каждом члене только один раз или два раза.

Если индекс используется один раз (неповторяющийся индекс), то он пробегает значения  $1, 2, \dots, N$ , где  $N$  – заданное положительное целое число.

Неповторяющиеся индексы называются свободными.

Если индекс в обозначении используется дважды, то подразумевается, что по этому индексу производится суммирование от 1 до  $N$  (правило суммирования Эйнштейна). При этом знак суммы опускается. Повторяющиеся индексы называются немymi. Сумма не меняет своего значения, если заменить немой индекс другой буквой:

$$a_i b_i = a_k b_k = a_n b_n.$$

В тех случаях, когда немых индексов несколько, суммирование производится по каждому немому индексу. В качестве индексов используют латинские буквы  $i, j, k, l, m, n, \dots$

Обычное физическое пространство является трехмерным, поэтому при использовании в этом случае индексных обозначений размерность индекса равна трем ( $N=3$ ).

Декартовы координаты  $x, y, z$  будем обозначать соответственно через  $x_1, x_2, x_3$  соответственно и записывать их как  $x_i$ , где индекс  $i$  принимает значения 1, 2, 3. Вместо индекса  $i$  можно взять любую другую латинскую букву, например  $j$ , где  $j=1, 2, 3$ . В трехмерном пространстве имеем

$$a_{ii} = \sum a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$a_i b_i = \sum a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

В некоторых обозначениях широко используется символ Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

## 1.4. Тензор напряжений

*Тензоры* – это инвариантные объекты, не зависящие от выбора системы координат. Компоненты тензора при изменении координатной системы меняются по определенному линейному закону.



Все скалярные и векторные величины можно рассматривать как тензоры.

Тензор характеризуется определенным рангом. Наиболее простым является тензор нулевого ранга. Он представляет собой скалярную величину, и его единственная компонента не меняет своего значения при преобразовании координатной системы. Пример тензора нулевого ранга – это расстояние между двумя точками в пространстве. Эту компоненту называют инвариантом.

Вектор  $\vec{a}$  в трехмерном пространстве характеризуется компонентами (числами)  $a_1, a_2, a_3$  и описывается тензором первого ранга. Покажем это: возьмем две координатные системы – старую  $(x, y, z)$  и новую  $(x', y', z')$  и рассмотрим в них вектор  $\vec{a}$  (рис.6).

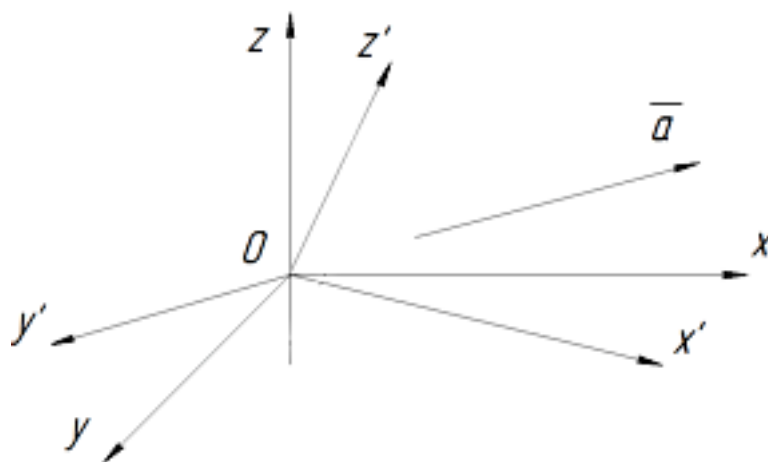


Рис. 6

В старой системе вектор имеет компоненты  $a_x, a_y, a_z$ , в новой –  $a_{x'}, a_{y'}, a_{z'}$ . Компоненты вектора связаны следующими соотношениями:

$$a_{x'} = a_x \cos(x'x) + a_y \cos(x'y) + a_z \cos(x'z),$$

$$a_{y'} = a_x \cos(y'x) + a_y \cos(y'y) + a_z \cos(y'z),$$

$$a_{z'} = a_x \cos(z'x) + a_y \cos(z'y) + a_z \cos(z'z).$$

В индексной форме

$$a_i' = \alpha_{i'j} a_j \text{ или } a_i' = \alpha_{i'j} a_j, \quad (1)$$

где  $\alpha_{i'j}$  – косинусы углов между старой и новой системами координат;

$a_i$  – компоненты вектора  $a$  в старой системе;

$a_i'$  – компоненты вектора  $a$  в новой системе.

Величина, характеризующаяся тремя числами, линейно преобразующимися по формулам (1), и есть тензор первого ранга.

Аналогично тензором второго ранга называется любая величина, определяющаяся девятью числами  $\alpha_{ij}$  в прямоугольной системе координат, преобразующимися по следующему закону:

$$\alpha_{i'j'} = \alpha_{ij} \alpha_{j'j} \alpha_{ij}.$$

Направляющие конусы связаны между собой соотношением

$$\alpha_{ik} \alpha_{jk} = \delta_{ij}.$$

В развернутом виде  $\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \alpha_{i3}\alpha_{j3} = \delta_{ij}$ .

При  $i=j=1$

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{33}^2 = 1.$$

Обычно компоненты тензора второго ранга записываются в виде матрицы

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Число компонентов тензора подчиняется следующему выражению:

$$N = 3^p,$$

где  $N$  – число компонент, а  $p$  – ранг тензора.

При  $p=0$   $N=1$ ;  $p=1$   $N=3$ ;  $p=2$   $N=9$ ;  $p=3$   $N=27$ .

В индексных обозначениях ранг тензора определяется только свободными индексами, например,  $F_{ijk}$  – тензор первого ранга,  $T_{ij}$  – тензор второго ранга,  $S_{ijklm}$  – тензор четвертого ранга.

Как показано выше, напряженное состояние в точке деформируемого твердого тела характеризуется девятью числами и поэтому может быть описано тензором второго ранга – тензором напряжений.

В столбцах тензора напряжений содержатся напряжения, направление которых параллельно соответственно координатным осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ , а в

строках – компоненты напряжения, действующие на площадках, нормаль которых параллельна осям  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно.

Приняв  $\sigma_{xx}=\sigma_x=\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{yy}=\sigma_y=\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{zz}=\sigma_z=\sigma_{33}$ ,  $\tau_{xy}=\sigma_{xy}=\sigma_{12}$  и т.д., получим следующую запись тензора напряжений:

$$T_\sigma = \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}.$$

Если принять, что  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ,  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ ,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , то тензор напряжений становится симметричным относительно главной диагонали, а напряженное состояние в точке характеризуется только шестью независимыми компонентами  $\sigma_{ij}$ .

Если компоненты тензора описывают свойства деформируемых материалов, то такие тензоры называют *материальными*. Например, с помощью тензоров второго ранга описывают свойства электропроводности, диэлектрической и магнитной проницаемости.

Если компоненты тензора не отражают свойства материалов, а зависят только от внешних сил и положения площадки в пространстве, то такие тензоры называют *полевыми*. Тензор напряжений – это полевой тензор, описывающий напряженное состояние в точке деформируемого тела как в упругом, так и в пластическом состоянии.

Над тензорами можно проводить ряд операций.

1. Два тензора одинакового ранга равны, если равны их соответствующие компоненты  $A_{ij} = B_{ij}$ .

2. Умножение тензора на скаляр дает новый тензор того же ранга, но с компонентами, увеличенными на сомножитель  $\lambda$ ,  $K_i = \lambda M_i$ .

3. Тензоры одинакового ранга можно складывать или вычитать покомпонентно  $A_{ij} \pm B_{ij} = C_{ij}$ .

4. Внешнее произведение двух тензоров произвольного ранга сводится к получению нового тензора, у которого компоненты образованы умножением каждой компоненты одного тензора на каждую компоненту другого тензора. Ранг полученного тензора равен сумме рангов сомножителей:  $a_i b_j = c_{ij}$ ,  $D_{ij} T_k = \Phi_{ijk}$ .

5. Свертыванием тензора по двум свободным индексам называется операция, когда два индекса обозначают одной и той же буквой, при этом они становятся индексами суммирования. В результате получается тензор, ранг которого на две единицы меньше. Например, имеем тензор третьего ранга  $T_{ijk}$ . Заменяем обозначение  $k$  на индекс  $j$  и получим тензор первого ранга  $T_{ijj}$ . Сверткой тензора  $T_{ij}$  будет  $T_{jj} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$ .

6. Свертыванием произведения (скалярное внутреннее умножение) называют результат операции свертывания, примененной к внешнему произведению данных тензоров с последующим свертыванием по индексам, относящимся к разным сомножителям:  $a_{ij} b_{il} = c_{jl}$ .

### 1.5. Напряжения на наклонной площадке

При решении задач обработки металлов давлением часто требуется знать связь между внешними силами на поверхности твердого деформируемого тела и напряжениями, действующими внутри, а также между напряжениями на плоской площадке внутри тела и напряжениями на трех взаимно перпендикулярных площадках. Для установления этой связи рассмотрим тело под действием внешних сил в состоянии равновесия. Разсечем его множеством взаимно перпендикулярных сечений, параллельных координатным плоскостям (рис. 7, а).

Выделенный бесконечно малый элемент на поверхности тела представляет собой тетраэдр (рис. 7, б). Криволинейную поверхность тетраэдра заменим наклонной площадкой (рис. 7, в), положение которой в пространстве определяется направляющими косинусами:

$$\cos(n, x) = n_x,$$

$$\cos(n, y) = n_y,$$

$$\cos(n, z) = n_z,$$

где  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к наклонной площадке.

Обозначим площадь наклонной площадки  $\Delta F$ . Тогда площади других граней тетраэдра представляют собой проекции площадки  $\Delta F$  на координатные плоскости:  $\Delta F_x = \Delta F n_x$ ,  $\Delta F_y = \Delta F n_y$ ,  $\Delta F_z = \Delta F n_z$ .

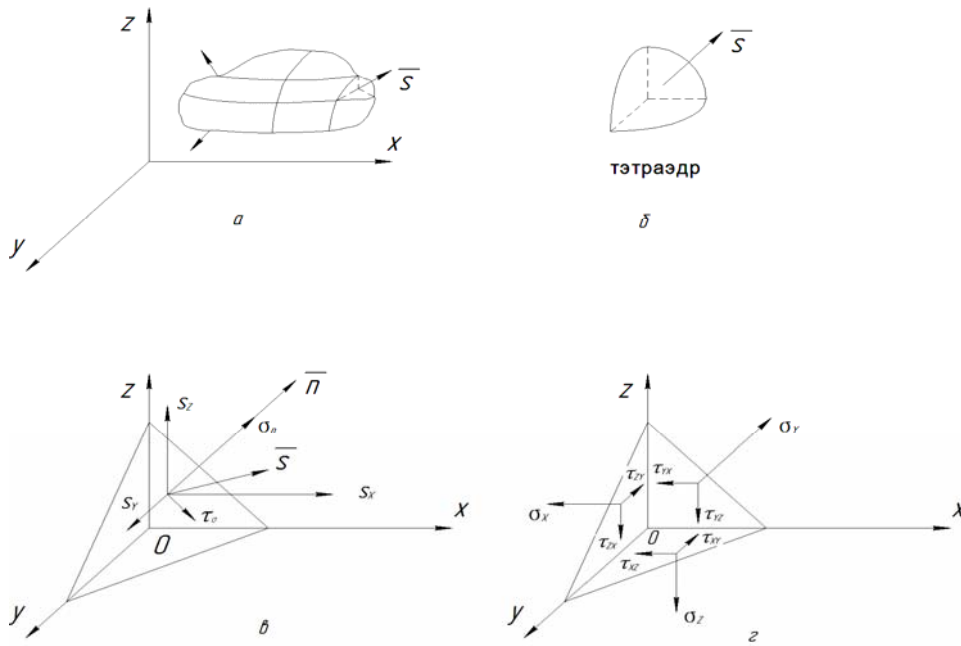


Рис. 7

Пусть на наклонную площадку действует вектор внешних сил  $\vec{S}$ . Его проекции на координатные оси:  $S_x, S_y, S_z$ . Известны также напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках, параллельных координатным плоскостям, внутри тела. Выделенный тетраэдр находится в равновесии. Из условия равновесия следует, что суммы всех действующих по его граням сил на оси координат равны 0. Перейдем от напряжений к силам, умножая каждое напряжение на площадь соответствующей грани. Получим:

$$\Sigma x=0 \quad S_x \Delta F - \sigma_x \Delta F_x - \tau_{xy} \Delta F_y - \tau_{xz} \Delta F_z = 0,$$

$$\Sigma y=0 \quad S_y \Delta F - \tau_{xy} \Delta F_x - \sigma_y \Delta F_y - \tau_{yz} \Delta F_z = 0,$$

$$\Sigma z=0 \quad S_z \Delta F - \tau_{zx} \Delta F_x - \tau_{zy} \Delta F_y - \sigma_z \Delta F_z = 0.$$

Откуда

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z, \\ S_y &= \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z, \\ S_z &= \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Эти уравнения впервые получены Коши. Они связывают проекции на оси координат полного напряжения  $\vec{S}$  с напряжениями, действующими

на трех взаимно перпендикулярных площадках. Суммируя компоненты  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$  по правилу параллелепипеда, получим полное напряжение  $S$ :

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2.$$

Нормальное напряжение на наклонной площадке  $\sigma_n$  определяется как сумма проекций  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$  на нормаль к площадке:

$$\sigma_n = S_x n_x + S_y n_y + S_z n_z.$$

Полное касательное напряжение  $\tau$  на наклонной площадке находится по правилу параллелограмма:

$$\tau_n^2 = S^2 - \sigma_n^2.$$

По полученным формулам можно найти напряжения на любой наклонной площадке, проходящей через заданную точку внутри деформируемого тела, если известны в этой точке напряжения по трем взаимно перпендикулярным площадкам, параллельным координатным плоскостям.

## 1.6. Главные нормальные напряжения

Среди трех взаимно перпендикулярных площадок, проходящих через любую точку нагруженного тела, найдутся такие, на которых касательные напряжения отсутствуют. Такие площадки называются главными, а соответствующие им нормальные напряжения – главными нормальными напряжениями. Существование главных площадок доказывается следующим образом. Рассмотрим выражение для расчета  $\sigma_n$  на наклонной площадке:

$$\sigma_n = S_x n_x + S_y n_y + S_z n_z.$$

После подстановки в него (2) получим

$$\sigma_n = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + \sigma_z n_z^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y + 2\tau_{yz} n_y n_z + 2\tau_{zx} n_z n_x. \quad (3)$$

Отложим от начала координат к наклонной площадке, проходящей через заданную точку  $A$ , радиус-вектор  $\vec{r}$  по направлению нормали (рис. 8.)

Величину радиуса-вектора возьмем обратно пропорциональной величине нормального напряжения:

$$r = \frac{c}{\sqrt{\sigma_n}} \text{ или } \sigma_n = \frac{r}{c^2},$$

где  $c$  – произвольная постоянная, определяющая масштаб.

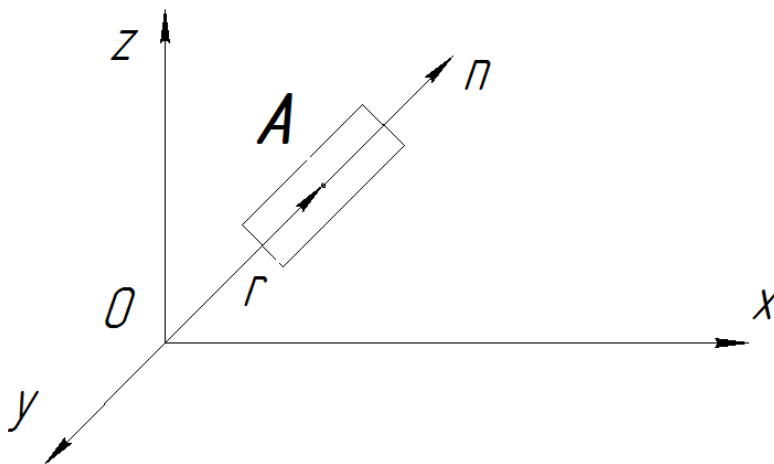


Рис. 8

Координаты вектора  $\vec{r}$ :

$$x=rn_x, y=rn_y, z=rn_z.$$

Отсюда значения направляющих косинусов:

$$n_x = \frac{x}{r}, n_y = \frac{y}{r}, n_z = \frac{z}{r}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (3), получим алгебраическое уравнение второй степени:

$$\sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_{xy} xy + 2\tau_{yz} yz + 2\tau_{zx} zx = c.$$

Полученное уравнение представляет собой поверхность второго порядка, отнесенную к центру координат – *эллипсоид*. В уравнении отсутствуют члены с  $x, y, z$ , определяющие смещение эллипсоида относительно начала координат. Концы радиуса-вектора  $\vec{r}$  будут лежать на поверхно-

сти. Найденная поверхность называется *поверхностью напряжений* (эллипсоидом напряжений).

Изменяя направление осей координат, можно преобразовать уравнение поверхности таким образом, что в нем обратятся в нули коэффициенты при членах, содержащих парные произведения координаты, т.е.  $\tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$ .

Оси координат, при которых члены, содержащие произведение координат, обращаются в нуль, называются *главными осями*, а нормальные напряжения, направленные по этим осям, – *главными нормальными напряжениями*. Следовательно, когда за координатную систему взята система главных осей, то на координатных плоскостях, являющихся главными площадками, не будет касательных напряжений.

По напряжениям в данной точке можно отыскать главные напряжения и их направления. Допустим, что для данной точки наклонная площадка является главной. Тогда  $\tau_n=0$  и полное напряжение  $S$  на этой площадке будет направлено по нормали  $\vec{n}$  (рис. 9).

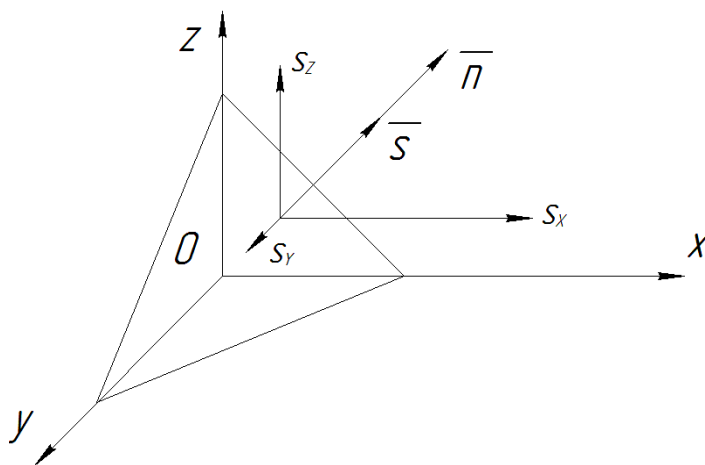


Рис. 9

Обозначив искомое главное нормальное напряжение, действующее на наклонной площадке, положение которой определяется  $n_x, n_y, n_z$ , через  $\sigma$  и проектируя его на координатные оси, находим составляющие главного напряжения, параллельные координатным осям:

$$S_x = \sigma n_x, S_y = \sigma n_y, S_z = \sigma n_z.$$



Приравнивая полученные соотношения условиям Коши, получим

$$\begin{aligned}
 S_x &= \sigma n_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z, \\
 S_y &= \sigma n_y = \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z, \\
 S_z &= \sigma n_z = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z, \\
 (\sigma_x - \sigma) n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z &= 0, \\
 \tau_{yx} n_x + (\sigma_y - \sigma) n_y + \tau_{yz} n_z &= 0, \\
 \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + (\sigma_z - \sigma) n_z &= 0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Полученная система может быть решена как система из трех линейных однородных уравнений с тремя неизвестными  $n_x, n_y, n_z$ . С учетом тензорных обозначений запись будет выглядеть  $(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0$ . Полученная система не допускает тривиального решения  $n_x = n_y = n_z = 0$ , так как сумма квадратов направляющих косинусов  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ . Следовательно, система (4) будет иметь решение отличное от нуля при условии, что определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен нулю:

$$\begin{vmatrix}
 \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\
 \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\
 \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma
 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем определитель:

$$(\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma)(\sigma_z - \sigma) + 2\tau_{yx}\tau_{zy}\tau_{xz} - (\sigma_x - \sigma)\tau_{zy}^2 - (\sigma_y - \sigma)\tau_{zx}^2 - (\sigma_z - \sigma)\tau_{xy}^2 = 0.$$

Первое слагаемое этого уравнения равно

$$(\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma)(\sigma_z - \sigma) = -\sigma^3 + (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x)\sigma + \sigma_x\sigma_y\sigma_z.$$

После его подстановки и преобразований получаем уравнение третьей степени относительно  $\sigma$ :

$$\begin{aligned}
 \sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\sigma - \\
 - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0,
 \end{aligned}$$

$$\text{или } \sigma^3 - I_1(T_\sigma)\sigma^2 + I_2(T_\sigma)\sigma - I_3(T_\sigma) = 0,$$

где  $I_1(T_\sigma)$ ,  $I_2(T_\sigma)$ ,  $I_3(T_\sigma)$  – коэффициенты кубического уравнения, не изменяющие своих значений при изменении положения координатных осей. Их называют инвариантами тензора напряжений.

Линейный инвариант

$$I_1(T_\sigma) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ii}.$$

Квадратичный инвариант

$$I_2(T_\sigma) = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_z & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{33} & \sigma_{31} \\ \sigma_{13} & \sigma_{11} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}).$$

Кубический инвариант

$$I_3(T_\sigma) = |\sigma_{ij}| = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Решая кубическое уравнение, получаем три главных напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , которые располагаются следующим образом:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Каждому главному напряжению будет соответствовать главная ось, для которой направляющие косинусы находятся из решения системы уравнений. Для 1-го главного напряжения уравнение имеет вид

$$(\sigma_x - \sigma_1)n'_x + \tau_{xy}n'_y + \tau_{xz}n'_z = 0,$$

$$\tau_{yx}n'_x + (\sigma_y - \sigma_1)n'_y + \tau_{yz}n'_z = 0,$$

$$\tau_{zx}n'_x + \tau_{zy}n'_y + (\sigma_z - \sigma_1)n'_z = 0.$$

Сюда же добавляется условие

$$(n'_x)^2 + (n'_y)^2 + (n'_z)^2 = 1.$$

Вообще достаточно найти положение одной главной площадки, так как две другие взаимно перпендикулярны.

Тензор напряжений в главных осях имеет вид

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Если в обычных осях напряженное состояние в точке задается шестью числами:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xy}$ , то в главных осях – тремя значениями главных напряжений и тремя направляющими косинусами, определяющими положение одной из главных площадок. Если напряженное состояние задано главными напряжениями, то выражения напряжений, действующих на наклонной площадке, значительно упрощаются.

Составляющие полного напряжения  $\vec{S}$  в каждой точке тела:

$$S_1 = \sigma_1 n_1, S_2 = \sigma_2 n_2, S_3 = \sigma_3 n_3, \quad (5)$$

где  $n_1, n_2, n_3$  – направляющие косинусы главных площадок 1, 2 и 3 соответственно.

Полное напряжение

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2.$$

Касательное напряжение

$$\tau^2 n = S^2 - \sigma^2 n = (\sigma_1 n_1)^2 + (\sigma_2 n_2)^2 + (\sigma_3 n_3)^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2.$$

Значение инвариантов тензора напряжений в системе главных осей:

$$I_1(T_{\sigma}) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

$$I_2(T_{\sigma}) = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1,$$

$$I_3(T_{\sigma}) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3.$$

Из уравнения (5) следует, что

$$n_1 = \frac{S_1}{\sigma_1}, n_2 = \frac{S_2}{\sigma_2}, n_3 = \frac{S_3}{\sigma_3}.$$

Учитывая, что

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1,$$

получаем уравнение эллипсоида напряжений, отнесенное к центру и главным осям (рис.10):

$$\frac{S_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{S_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{S_3^2}{\sigma_3^2} = 1. \quad (6)$$

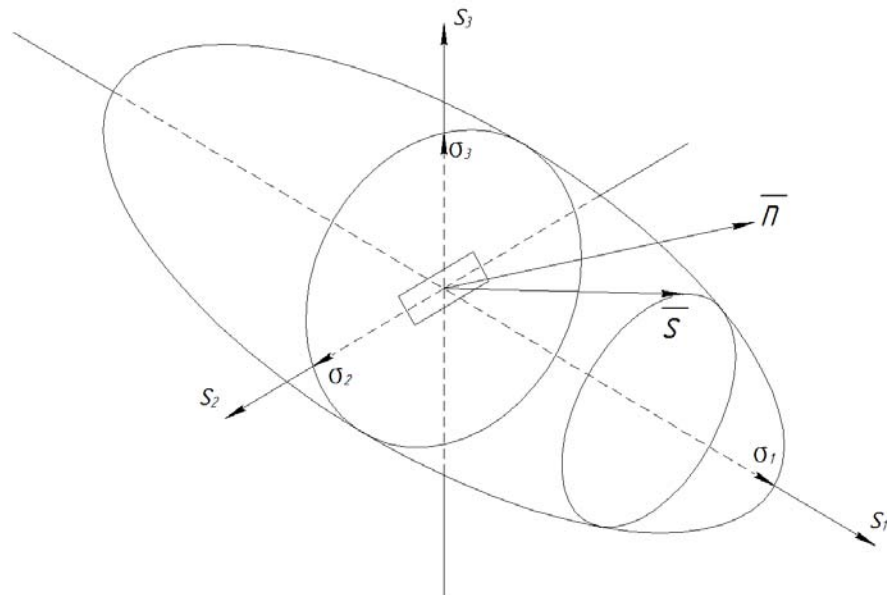


Рис.10

Полуоси эллипсоида напряжений равны главным нормальным напряжениям. Любой отрезок от центра до пересечения с поверхностью эллипсоида представляет собой величину полного напряжения  $S$  на наклонной площадке, перпендикулярной к отрезку, а проекции отрезка на оси координат равны составляющим полного напряжения по осям  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$ . Эллипсоид напряжения является пространственным геометрическим образом напряженного состояния в исследуемой точке деформируемого тела.

Исходя из количества действующих напряжений на трех взаимно перпендикулярных площадках, возможны девять схем главных нормальных напряжений: линейные, плоские и объемные (рис. 11). Схемы представлены графически в виде кубиков, грани которых ориентированы в направлении действия главных напряжений. Наличие напряжения и его направление обозначаются стрелкой.

Если одно из главных нормальных напряжений равно нулю, то эллипсоид (б) превращается в эллипс и объемное напряженное состояние преобразуется в плоское. Если два главных нормальных напряжения равны нулю, то эллипсоид (б) превращается в отрезок прямой линии, что соответствует линейному напряженному состоянию. Схемы, имеющие напряжения одного знака, называют *одноименными*, а разных знаков — *разноименными*. Схемы дают графическое представление о наличии и

знаке главных нормальных напряжений. Они являются по предложению С.И. Губкина классификатором всех видов напряженного состояния деформируемого тела.

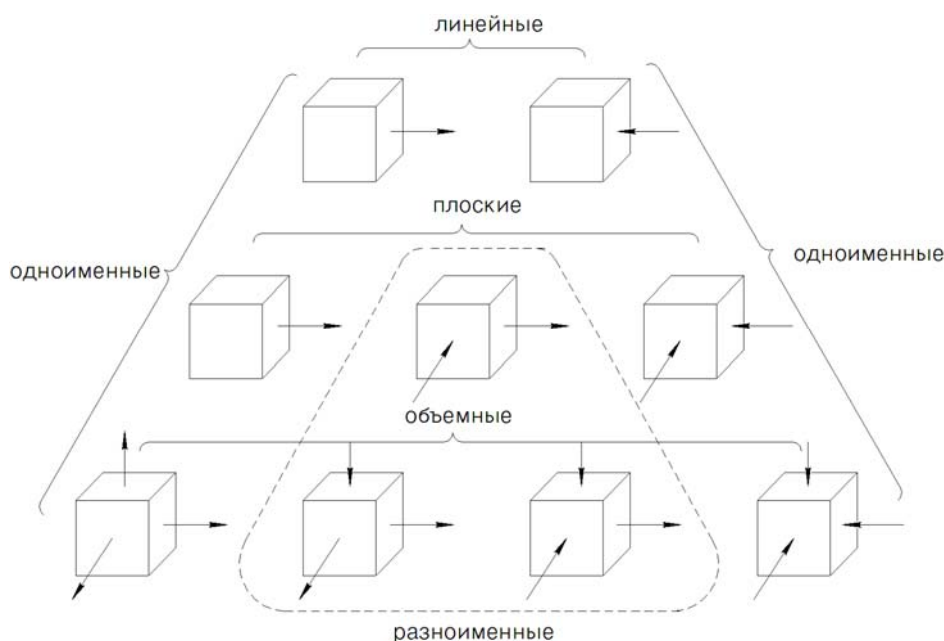


Рис.11

От схем главных нормальных напряжений зависят пластичность деформируемого тела и его сопротивление деформированию (усилие деформирования). Пластичность металла всегда больше в схемах со сжимающими напряжениями, чем в схемах с растягивающими напряжениями. Наибольшим сопротивлением деформированию отличаются металлы в условиях деформирования при одноименных схемах. В условиях разноименных схем, а также линейной, сопротивление деформации снижается (рис. 12).

Схемы линейного напряженного состояния встречаются на практике редко. Схема линейного растяжения реализуется, например, при растяжении тела, длина которого значительно больше размеров в остальных двух измерениях (растяжение струны, канатов и т.п.). Плоская схема напряженного состояния с известным приближением может быть создана при растяжении тонкой пластины по контуру. Объемное напряженное состояние возникает почти при всех процессах обработки металлов давлением (прокатка, прессование, горячая штамповка, волочение).

## 1.7. Октаэдрические напряжения

В теории пластичности большое значение имеют площадки, одинаково наклоненные к главным осям. В этом случае

$$n_1^2 = n_2^2 = n_3^2 = \frac{1}{3}..$$

Таких площадок четыре. С четырьмя им параллельными они образуют фигуру октаэдра (рис. 12), поэтому их называют октаэдрическими и также называют напряжения  $\sigma_{\text{окт}}$  и  $\tau_{\text{окт}}$ , которые действуют на этих площадках.

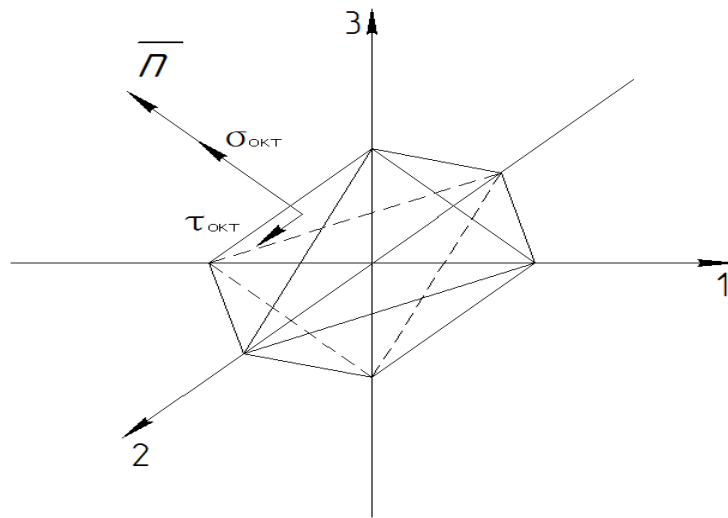


Рис. 12

Нормальное октаэдрическое напряжение  $\sigma_{\text{окт}}$  равно среднему нормальному напряжению:

$$\sigma_{\text{окт}} = S_1 n_1 + S_2 n_2 + S_3 n_3 = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{\text{ср}},$$

так как

$$S_1 = \sigma_1 n_1, S_2 = \sigma_2 n_2, S_3 = \sigma_3 n_3.$$

Полное напряжение на октаэдрической площадке

$$S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}$$

Касательное октаэдрическое напряжение в главных осях

$$\tau = \sqrt{S^2 - \tau_{окт}^2} = \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

В декартовой системе координат  $x, y, z$

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}.$$

### 1.8. Разложение тензора напряжений

Напряженное состояние в любой точке деформированного тела можно представить в виде суммы двух напряженных состояний: равномерного всестороннего растяжения (сжатия) и второго напряженного состояния, равного разности между полным и приведенным выше (рис. 13).

В тензорной записи оно заключается в разложении тензора напряжений  $T_\sigma$  (рис. 13, а) на шаровой тензор  $T_{\sigma^\circ}$  (рис. 13, б) и девиатор (рис.13, в):

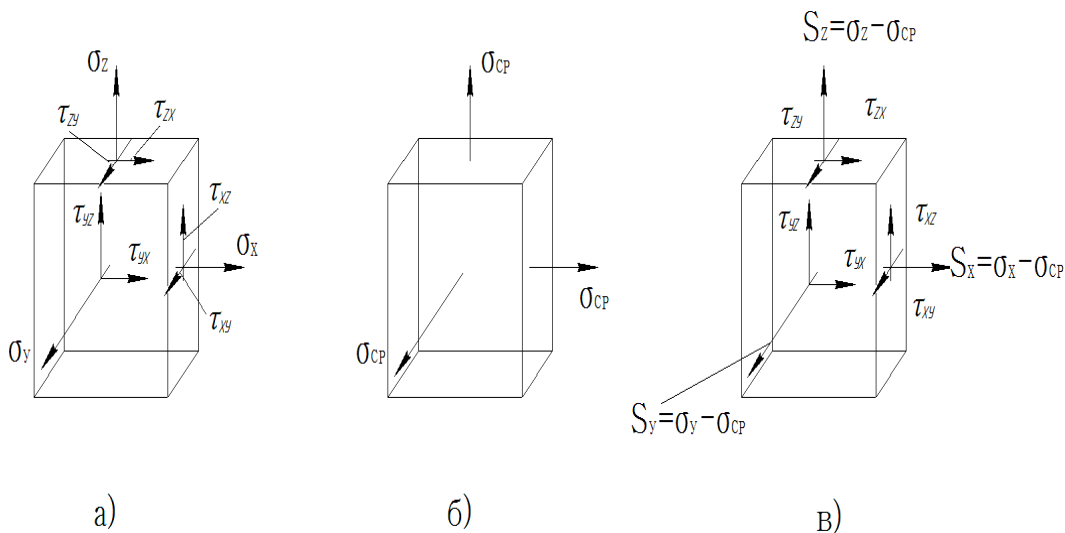


Рис.13

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{cp} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_{cp} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_{cp} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{cp} \end{pmatrix}.$$

## Шаровой тензор напряжений

$$T_{\sigma^{\circ}} = \begin{pmatrix} \sigma_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{cp} \end{pmatrix},$$

где  $\sigma_{cp}$  – среднее нормальное напряжение (гидростатическое давление);

$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_{kk}}{3}$$

не зависит от направления координатных осей  $x, y, z$ , т.е.  $\sigma_{cp}$  является инвариантом. Причем  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  5.

Если напряженное состояние характеризуется шаровым тензором напряжений, то тело в процессе деформации испытывает только упругое изменение объема, а изменение формы не происходит. Схем шарового тензора может быть только две: схема равностороннего сжатия и схема равностороннего растяжения (рис. 14).

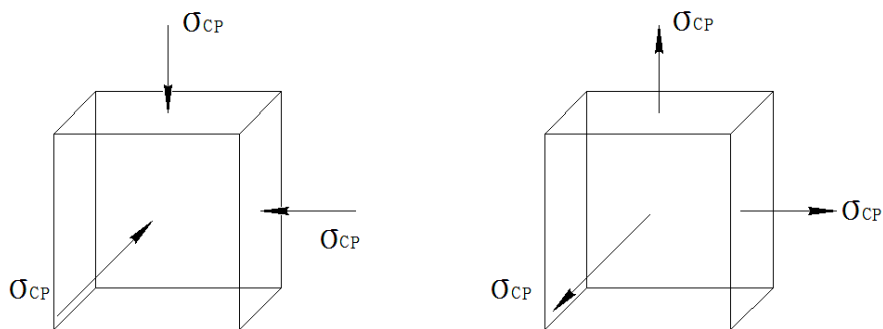


Рис. 14

Так как три главных напряжения равны по знаку и по величине, то эллипсоид напряжений обращается в шар. Отсюда и произошло название шарового тензора напряжений.

## Девииатор напряжений

$$D_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_{cp} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_{cp} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{cp} \end{pmatrix}$$



характеризует только напряжения, вызывающие изменение формы тела. Иногда компоненты девиатора обозначают следующим образом:

$$S_x = \sigma_x - \sigma_{cp}, S_{xy} = \tau_{xy},$$

$$S_y = \sigma_y - \sigma_{cp}, S_{yz} = \tau_{yz},$$

$$S_z = \sigma_z - \sigma_{cp}, S_{zx} = \tau_{zx},$$

или

$$D_\sigma = S_{ij} = \begin{pmatrix} S_x & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_y & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_z \end{pmatrix}.$$

Составляющие девиатора напряжений в направлении оси:

1 – всегда будет положительной,

2 – всегда будет отрицательной,

3 – может быть больше, меньше или равна нулю. Отсюда следуют

три возможных схемы девиатора напряжений (рис. 15).

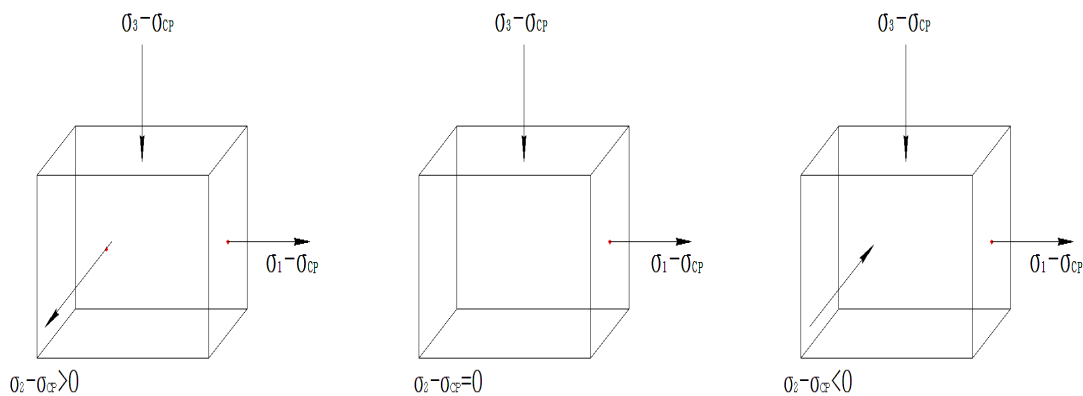


Рис. 15

Главные оси девиатора совпадают с главными осями тензора напряжений.

Кубическое уравнение для нахождения главных осей девиатора напряжений имеет вид

$$S^3 - I_1(D_\sigma)S^2 + I_1(D_\sigma)S - I_3(D_\sigma) = 0, \quad (7)$$

где  $I_1(D_\sigma)$ ,  $I_2(D_\sigma)$ ,  $I_3(D_\sigma)$  – инварианты девиатора напряжений соответственно.

Так как первый инвариант девиатора напряжений

$$I_1(D_\sigma) = \sigma_x - \sigma_{cp} + \sigma_y - \sigma_{cp} + \sigma_z - \sigma_{cp} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3\sigma_{cp} = 0,$$

то уравнение (7) имеет вид

$$S^3 + I_2(D_\sigma)S - I_3(D_\sigma) = 0.$$

Особую роль в теории пластичности играет второй инвариант девиатора напряжений

$$I_2(D_\sigma) = \frac{1}{6} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right].$$

Он используется для подсчета работы и мощности пластической деформации в виде интенсивности напряжений: величин, пропорциональных квадратному корню из второго инварианта девиатора напряжений. В зависимости от принятого коэффициента пропорциональности различают понятия интенсивности касательных напряжений

$$T = \sqrt{I_2(D_\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

и интенсивности (нормальных) напряжений

$$\sigma_i = \sqrt{3I_2(D_\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

В сокращенной тензорной записи --

$$T = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}}. \quad \sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}}.$$

В системе главных осей

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (8)$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (9)$$

Коэффициенты пропорциональности к формулам (8), (9) выбраны так, чтобы в случае одноосного растяжения ( $\sigma_1=\sigma_1, \sigma_2=\sigma_3=0$ ) интенсивность напряжений совпадала с величиной наибольшего главного напряжения,  $\sigma_i=\sigma_1$ , а в случае чистого сдвига ( $\sigma_1=\tau, \sigma_2=0, \sigma_3=-\tau$ ) интенсивность касательных напряжений совпадала с величиной наибольшего касательного напряжения  $\tau$ .

Третий инвариант девиатора напряжений

$$I_3(D_\sigma) = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_{cp} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_{cp} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{cp} \end{vmatrix}$$

В результате деления компонент девиатора напряжений на  $\tau_{окт}$  мы получаем безразмерные величины, поэтому новый тензор определяет только направление главных напряжений и их соотношение. Если главные оси известны, то направляющий тензор напряжений характеризуется только одним числом  $\nu_\sigma$  – показателем вида напряженного состояния:

$$I_3(\nu_\sigma) = \frac{\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}. \quad (10)$$

Согласно формуле (10) для одноосного растяжения ( $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ )  $\nu_\sigma = 1$ , для одноосного сжатия ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0$ )  $\nu_\sigma = -1$ , для чистого сдвига ( $\sigma_1 = -\sigma_3, \sigma_2 = 0$ )  $\nu_\sigma = 0$ .

## 1.9. Главные (максимальные) касательные напряжения

Главные касательные напряжения имеют большое значение в теории обработки металлов давлением (ТОМД). Ранее было определено, что в любой точке деформируемого тела можно найти три взаимно перпендикулярных площадки, на которых касательные напряжения отсутствуют. Во всех других направлениях касательные напряжения существуют и в зависимости от положения площадки будут различными по величине.

Найдем положение площадок, где касательные напряжения принимают экстремальные значения.

Примем для заданной точки главные направления тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  за направления координатных осей. Тогда на наклонной площадке в главных осях касательное напряжение равно

$$\tau_n^2 = S^2 - \sigma_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2.$$

После преобразования получим

$$\tau_n^2 = n_1^2 n_2^2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + n_2^2 n_3^2 (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + n_3^2 n_1^2 (\sigma_2 - \sigma_3)^2.$$

Рассмотрим частный случай, когда  $n_3 = 0$ . Тогда

$$\tau_n^2 = n_1^2 n_2^2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2.$$

Из условия связи направляющих косинусов

$$n_1^2 + n_2^2 = 1$$

имеем

$$n_2^2 = 1 - n_1^2. \quad (11)$$

Тогда

$$\tau_n^2 = n_1^2 (1 - n_1^2) (\sigma_1 - \sigma_2)^2.$$

Для отыскания площадки с наибольшими касательными напряжениями исследуем данное уравнение на экстремум. Для этого найдем первую частную производную по  $n_1$  и приравняем ее к нулю:

$$2 \tau \frac{\partial \tau}{\partial n_1} = 2 n_1 (1 - 2 n_1^2) (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 0.$$

Откуда следует, что

$$n_1 (1 - 2 n_1^2) = 0,$$

так как

$$\sigma_1 \neq \sigma_2.$$

Одно из решений этого уравнения  $n_1 = 0$ . Тогда из (11) имеем  $n_2 = \pm 1$ . Это координатная плоскость, на которой касательное напряжение равно нулю.

Для получения решений, отличных от нуля, необходимо принять

$$1-2n_1^2=0$$

или

$$n_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = n_2.$$

Таким образом, плоскости максимальных касательных напряжений расположены под углом  $45^\circ$  к главным осям 1 и 2 и параллельны оси 3 (рис. 16).

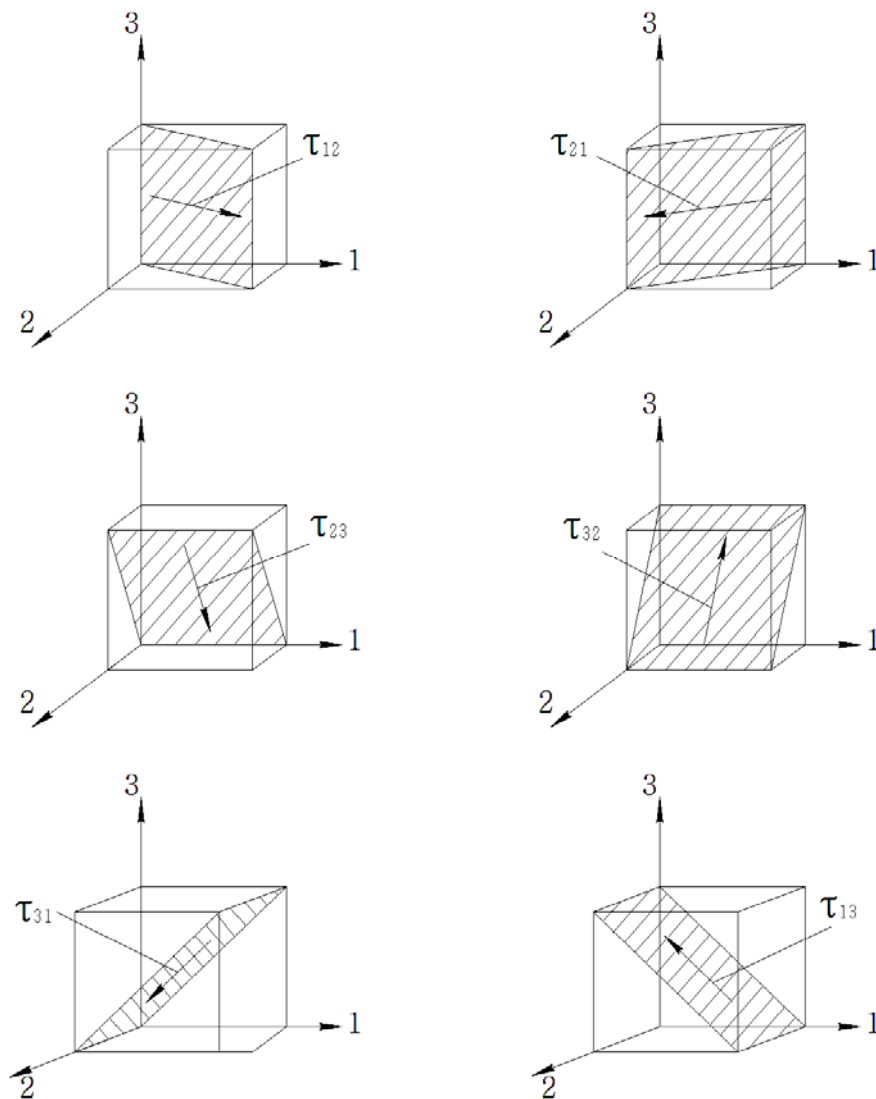


Рис. 16

Таких площадок две и они взаимно перпендикулярны. Касательные напряжения, действующие на этих площадках, называются главными касательными напряжениями:

$$\tau_{12}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)^2$$

или

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \tau_{21} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}, \tau_{12} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Аналогично можно рассмотреть и другие частные случаи, когда  $n_1=0$  и  $n_2=0$ . Повторяя полученные выше рассуждения, получим

$$\tau_{23} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \tau_{31} = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}.$$

При объемном напряженном состоянии на шести площадках, расположенных под углом  $45^\circ$  к главным осям, действуют шесть максимальных касательных напряжений:

$$\tau_{12} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \tau_{23} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \tau_{31} = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \quad (12)$$

связанных между собой тождеством

$$\tau_{12} + \tau_{23} + \tau_{31} = 0. \quad (13)$$

Так как принято, что  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , то наибольшее касательное напряжение  $\tau_{13}$  равно алгебраической полуразности максимального и минимального главных нормальных напряжений:

$$\tau_{max} = \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Интенсивность  $T$  и  $\tau_{max}$  связаны соотношением

$$1 \leq \frac{T}{\tau_{max}} \leq 1,15.$$

С погрешностью около 7% можно принять  $T \approx 1,08 \tau_{max}$ .

Следует отметить, что на площадках, где действуют максимальные касательные напряжения, нормальные напряжения отличны от нуля:

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2.$$

$$\text{Если } n_1=n_2=\frac{1}{\sqrt{2}}, n_3=0, \text{ то } \sigma_n=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}.$$

Таким образом, главные касательные напряжения равны полуразностям главных нормальных напряжений. Нормальные напряжения, действующие на площадках главных касательных, равны полусуммам главных нормальных напряжений.

### 1.10. Равновесие сил и моментов

Для определения условия равновесия деформированного тела произвольной формы, нагруженного внешними поверхностными силами, мысленно выделим в нем бесконечно малый элемент в форме параллелепипеда с длинами ребер  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , параллельными осям координат (рис. 17). Найдем условия, обеспечивающие его равновесие.

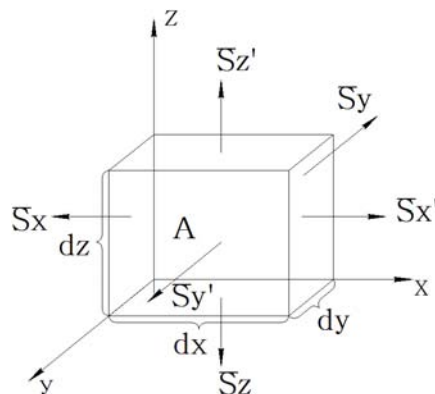


Рис. 17

Рассмотрим окрестность точки А с координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Через точку А проходят три взаимно перпендикулярных площадки, напряженное состояние на которых описывается тензором напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Точка А' отстоит от точки А на бесконечно малом расстоянии. Ее координаты  $(x+dx, y+dy, z+dz)$ . Через точку А' проходят три взаимно пер-

пендикулярные площадки. Согласно принятой гипотезе о сплошности среды, напряжения являются непрерывными функциями координат. В точке  $A$   $\sigma_x = f(x, y, z)$ , в точке  $A'$   $\sigma'_x = f(x+dx, y, z)$ .

Последнее выражение разложим в ряд Маклорена:

$$f(x+dx, y, z) = f(x, y, z) + \frac{df(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} dx^2 + \dots$$

Таким образом, одноименные напряжения на противоположных гранях отличаются друг от друга на величину приращения по соответствующей координате. Тензор напряжений для точки  $A'$  имеет вид

$$T\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx & \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx & \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \\ \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dy & \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy & \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \\ \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz & \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx & \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \end{pmatrix}.$$

На рис. 18 показаны элементарный параллелепипед и напряжения, приложенные к его граням. Так как по условию элементарный параллелепипед находится в равновесии, то суммы всех сил, действующих на этот объем в направлении координатных осей, должны быть равны нулю:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0.$$

Усилия, действующие на грани параллелепипеда, равны напряжениям, умноженным на площадь соответствующей грани.

Составим уравнения равновесия на ось  $x$  (рис. 19).

Из рис. 19 видно, что силы  $\sigma_x dydz$ ,  $\tau_{xy} dx dz$ ,  $\tau_{zx} dx dy$  на параллельных гранях взаимно уравновешены, следовательно,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz = 0.$$

Сокращая на объем, получим

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0.$$



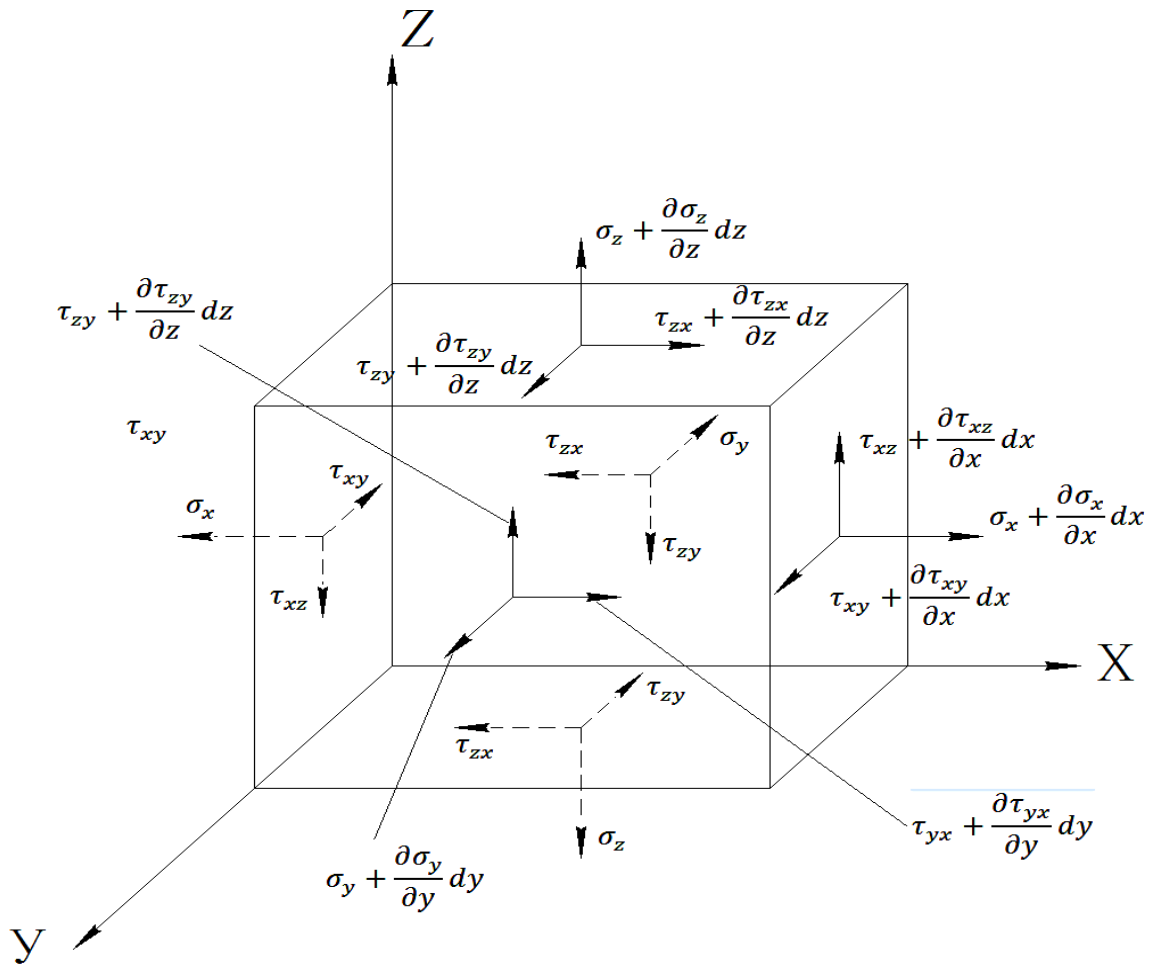


Рис. 18

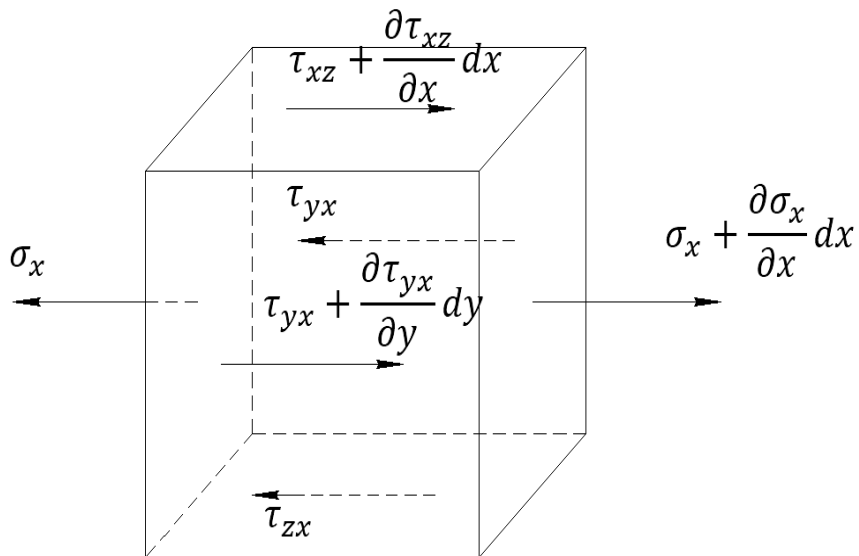


Рис. 19

Проецируя силы на ось  $Y$  и  $Z$ , получим еще два уравнения. Окончательно имеем три дифференциальных уравнения равновесия, описывающих объемное напряженное состояние в рассматриваемой точке:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

В тензорных обозначениях  $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$ .

Уравнение (14) содержит шесть неизвестных величин: три нормальных и три касательных напряжения. Число уравнений три, поэтому для нахождения компонент напряжений необходимы дополнительные условия.

Кроме поверхностных сил, действующих по граням параллелепипеда, к нему могут быть приложены объемные (массовые) силы. Обозначим проекции объемной силы, приходящейся на единицу массы, через  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$ . Тогда проекции объемной силы на весь объем выделенного параллелепипеда будут

$$F_x \rho dV, F_y \rho dV, F_z \rho dV.$$

Уравнения равновесия с учетом массовых сил имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho F_x &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho F_y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho F_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

или

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = 0.$$

Если объемной силой является лишь сила тяжести, а ось направлена вертикально вверх, то  $F_x=F_y=F_z$ ,  $F_z=-g$  (ускорение силы тяжести),  $gp$  (вес единицы объема тела).

Если деформируемое тело находится в состоянии движения, то к действующим силам нужно добавить силы инерции, взятые с обратным знаком произведениям из массы параллелепипеда проекции ускорения:

$$-\rho dV \frac{d^2 U_x}{dt^2}, \quad -\rho dV \frac{d^2 U_y}{dt^2}, \quad -\rho dV \frac{d^2 U_z}{dt^2},$$

где  $U_x, U_y, U_z$  – проекции вектора перемещения на оси  $x, y, z$ .

Получим уравнения движения сплошной среды:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho F_x = \rho dV \frac{d^2 U_x}{dt^2},$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho F_y = \rho dV \frac{d^2 U_y}{dt^2},$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho F_z = \rho dV \frac{d^2 U_z}{dt^2}$$

или

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = \rho dV \frac{d^2 U_i}{dt^2}.$$

Элементарный параллелепипед  $dV=dx dy dz$  находится в равновесии, если выполняются еще три уравнения:

$$\sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0.$$

Составим уравнение равновесия, например  $\sum M_y = 0$  (рис. 20).

Силы, параллельные оси  $Y$ , а также силы, пересекающие ось  $Y$ , не войдут в малые третьего порядка. Например, нормальная сила на левой грани равна  $\sigma_x d_y d_z$ , а на правой  $\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dx dz$ . Момент дает лишь их разность

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dx dy dz \frac{dz}{z}.$$

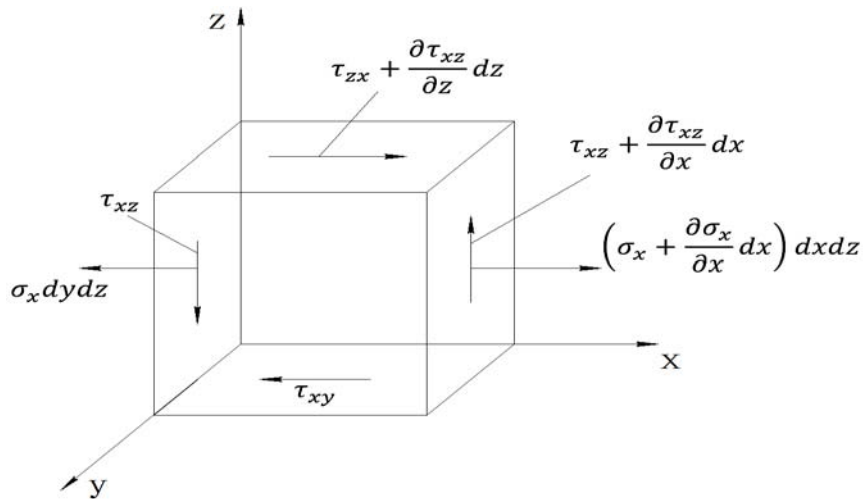


Рис. 20

Получаем момент четвертого порядка малости и его из уравнения будем исключать.

Момент третьего порядка дадут только две силы:

$$\left( \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx \right) dydz \text{ и } \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dxdy.$$

Уравнение моментов относительно оси имеет вид

$$\left( \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dz \right) dxdydz - \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dz \right) dxdy - \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dxdy = 0.$$

Теперь отбросим бесконечно малые четвертого порядка, получим

$$\tau_{zx} dxdydz = \tau_{xz} dxdydz.$$

Сокращая на объем элементарного параллелепипеда  $dV = dxdydz$ , имеем

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

Составим уравнения моментов относительно двух осей, окончательно получим

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

Эти уравнения определяют закон парности касательных напряжений:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}.$$

В соответствии с этим законом напряженное состояние в точке деформируемого тела описывается шестью неизвестными компонентами. Тензор напряжений является симметричным. В каждой двух взаимно перпендикулярных площадках компоненты касательных напряжений, направленные перпендикулярно к линии пересечения этих площадок, равны между собой и направлены оба к линии пересечения или оба от линии пересечения.

### 1.11. Диаграмма напряжений Мора

Диаграмма напряжений Мора дает наглядное графическое представление о совокупности векторов нормальных и касательных напряжений на наклонных площадках, построенных в системе главных осей. При построении диаграммы нормальные напряжения будем откладывать на ось абсцисс, а касательные по оси ординат. Нормальные напряжения в главных осях:

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \quad (16)$$

Полное напряжение

$$S^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \quad (17)$$

Направляющие косинусы связаны соотношением

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (18)$$

Получаем линейную относительно  $n_i^2$  систему трех уравнений (16)-(18). Умножим обе части уравнения (16) на  $\sigma_2 + \sigma_3$ :

$$(\sigma_2 + \sigma_3)\sigma_n = (\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2)(\sigma_2 + \sigma_3), \quad (19)$$

а уравнение (17) умножим на  $\sigma_2 \sigma_3$ :

$$\sigma_2 \sigma_3 (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) = \sigma_2 \sigma_3 \quad (20)$$

Из уравнения (17) почленно вычтем уравнение (19) и, прибавив почленно уравнение (20), получим

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 + \tau_n^2 - (\sigma_2 + \sigma_3)\sigma_n + \sigma_2 \sigma_3 = & \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - \\ - (\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2)(\sigma_2 + \sigma_3) + & \sigma_2 \sigma_3 (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2). \end{aligned}$$

Прибавляя к обеим частям полученного уравнения  $\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)$ , после преобразования получим

$$\left. \begin{aligned} \left[ \sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right]^2 + \tau_n^2 &= \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 + n_1^2 (\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_2), \\ \left[ \sigma_n - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^2 + \tau_n^2 &= \left( \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2 + n_2^2 (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3), \\ \left[ \sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right]^2 + \tau_n^2 &= \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 + n_3^2 (\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_1). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Записанное уравнение (21) определяет окружности вида  $(x-x_0)^2 + y^2 = R^2$ . Их центры расположены на оси абсцисс и отстоят от начала координат на расстоянии  $\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$ ,  $\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}$ ,  $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$  (рис. 21). В правой части уравнения (21)  $n_1, n_2, n_3$  – это изменяемые параметры, поэтому каждое из уравнений (21) – это уравнение концентрических окружностей с радиусами

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 + n_1^2 (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}, \\ R_2 &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2 + n_2^2 (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}, \\ R_3 &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + n_3^2 (\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}. \end{aligned}$$

Первое уравнение системы (21) определяет в виде окружностей геометрическое место точек  $\sigma_n$  и  $\tau_n$  для заданного значения  $n_1$ . То же самое справедливо и для двух других уравнений системы. Для заданных значений направляющих косинусов  $n_1, n_2, n_3$  и главных нормальных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  величины  $\sigma_n$  и  $\tau_n$  определяются точкой К на пересечении трех окружностей радиусами  $R_1, R_2, R_3$ , при  $n_1 = n_2 = n_3 = 0$  радиусы окружностей равны:

$$R_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; R_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}; R_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

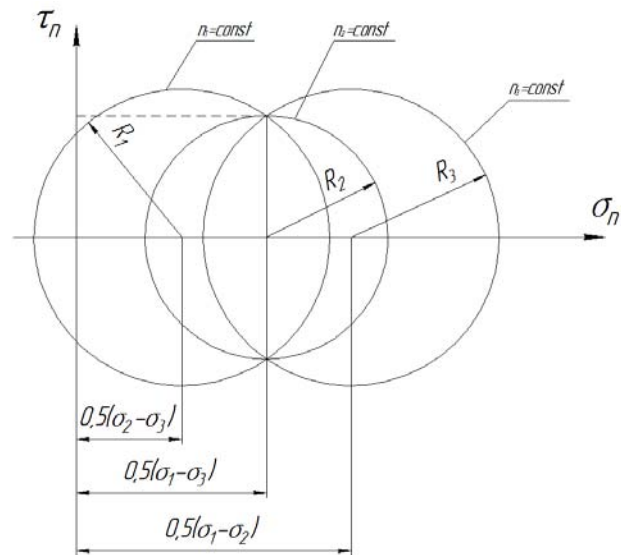


Рис. 21

Как видно из первого и третьего уравнений системы (21), при увеличении  $n_1$  и  $n_2$  радиусы соответствующих окружностей увеличиваются. Это означает, что возможные пары значений  $\sigma_n$  и  $\tau_n$  находятся или на окружностях радиуса  $R_1$  или  $R_3$ , или вне их, но не могут располагаться внутри. Если увеличивать  $n_2$  (второе уравнение системы (20)), то  $R_2$  уменьшается и пары  $\sigma_n$  и  $\tau_n$  находятся внутри окружности  $R_2$ . Таким образом, заштрихованная область – это область значений  $\sigma_n$  и  $\tau_n$  на произвольных наклонных площадках (рис. 22).

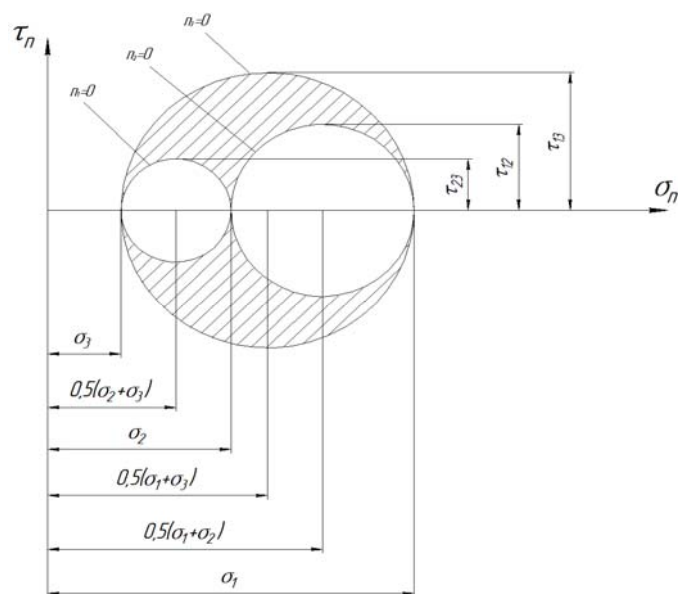


Рис. 22

Из формулы (21) видно, что максимальные касательные напряжения численно равны радиусам кругов. При наложении на тело всестороннего равномерного давления радиусы окружностей не меняются и все построения смещаются относительно горизонтальной оси  $\sigma_n$ .

Шаровой тензор напряжений отображается на диаграмме Мора окружностью нулевого радиуса (т.е. точкой), расположенной на расстоянии  $\sigma_{cp}$  от начала координат.



## ГЛАВА 2. ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

### 2.1. Понятие деформации. Тензор деформаций

Термин деформация произошел от латинского слова "deformation", что означает искажение размеров и формы тела за счет относительного изменения положения его материальных частиц.

Под действием внешних нагрузок все материальные точки деформируемого тела перемещаются в пространстве и меняется их взаимное положение. Например, некоторая точка  $M$  в исходном недеформированном состоянии имела координаты  $x, y, z$ . После пластической деформации точка заняла положение  $M'$  с координатами  $(x' = x + u_x; y' = y + u_y; z' = z + u_z)$ , где  $u_x, u_y, u_z$  – проекции вектора перемещения  $\bar{u}$  точки  $M$  на оси  $x, y, z$  (рис.23).

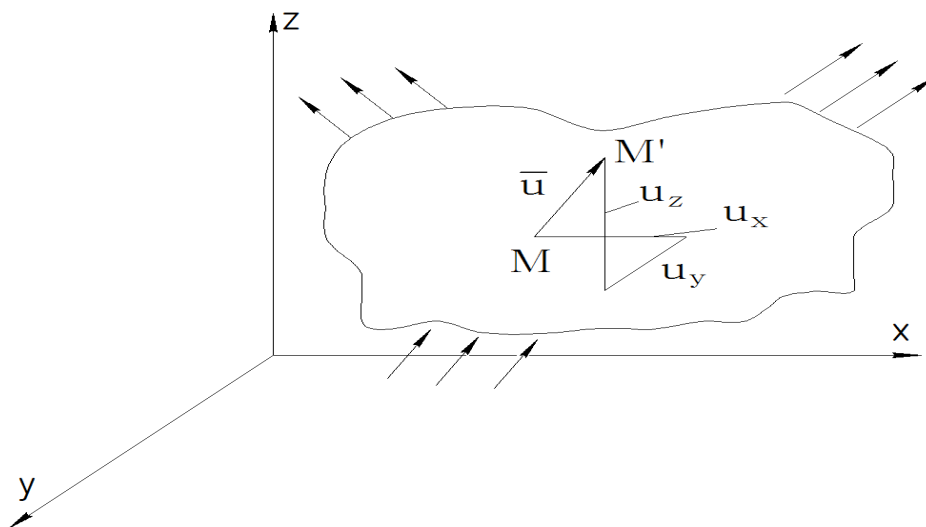


Рис.23

Перемещения  $u_x = x' - x$ ,  $u_y = y' - y$ ,  $u_z = z' - z$  являются функциями координат и определяют поле перемещений деформируемого тела:

$$u_x = f_x(x, y, z),$$

$$u_y = f_y(x, y, z),$$

$$u_z = f_z(x, y, z).$$

В силу сплошности тела будем предполагать, что эти функции и их частные производные требуемого порядка по  $x$ ,  $y$ ,  $z$  непрерывны, а компоненты перемещения малы по сравнению с основными размерами тела.

Рассмотрим поведение элементарного параллелепипеда с ребрами  $d_x$ ,  $d_y$ ,  $d_z$ , параллельными осям координат, вырезанного в недеформированном состоянии в окрестности точки  $M$ . В результате деформации в общем случае этот параллелепипед в окрестности точки  $M'$  изменит свою форму (рис.24).

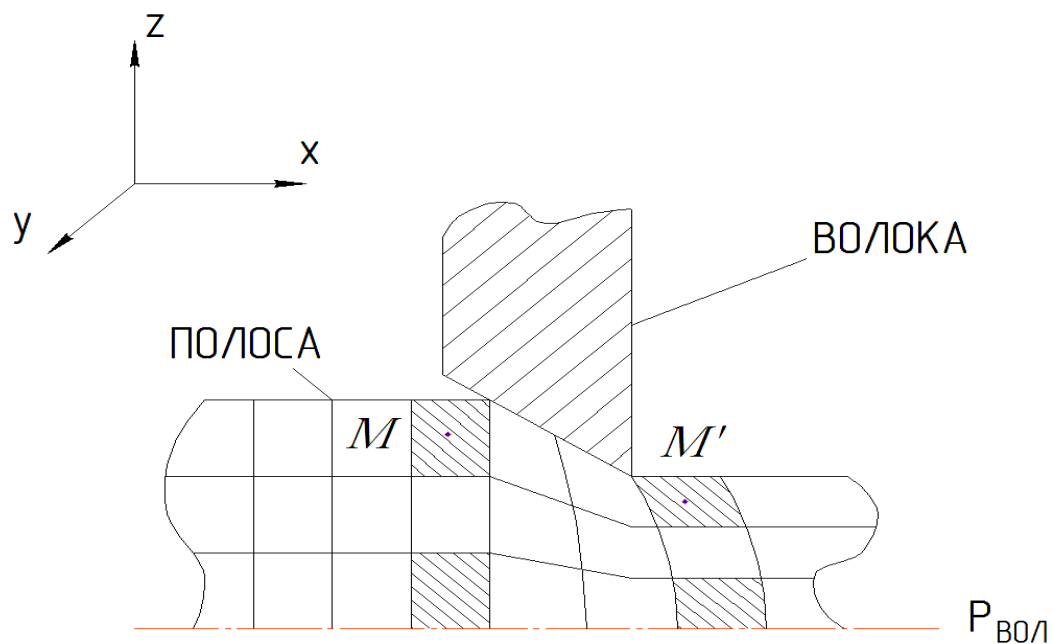


Рис. 24

В процессе деформации ребра поменяли свою длину, но остались прямыми. Изменились также углы между ребрами и положение самого элемента. Предполагая деформацию в точке  $M$  малой, ее можно представить в виде суммы шести простейших деформаций (рис. 25).

Первые три деформации называют *линейными*. Они определяются отношением приращения длины ребра к исходной длине и обозначаются через  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}; \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}; \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}.$$

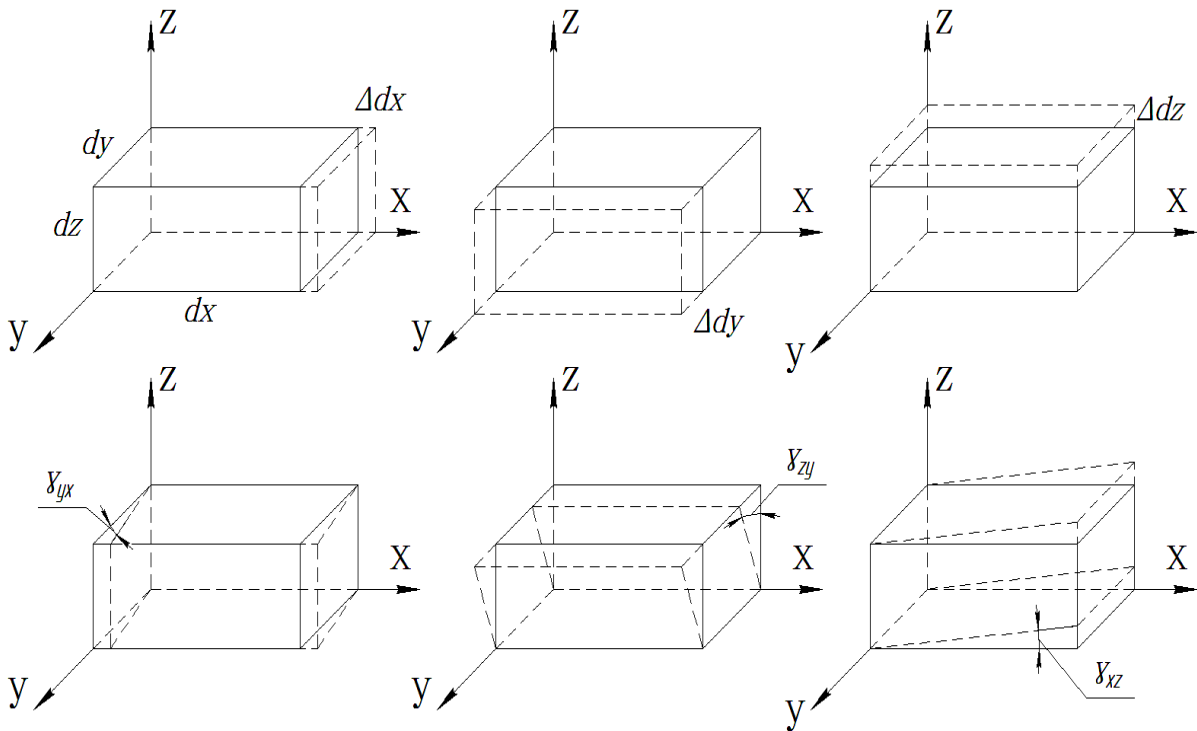


Рис. 25

Индекс в обозначении деформации указывает ось, в направлении которой происходит удлинение (укорочение) длины ребра. Деформации считаются положительными, если они соответствуют удлинению ребра, отрицательными – укорочению. Эти деформации вызывают нормальные напряжения растяжения (сжатия). Линейные деформации приводят к изменению объема и формы. Три других деформации являются угловыми деформациями (см. рис. 25). Они приводят к изменению формы тела.

Угловые деформации обозначаются через  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{zx}$ . Первый индекс указывает направление оси, параллельно которой ребро находилось в исходном состоянии, а второй – оси, по направлению к которой повернулось ребро. Величина деформаций определяется углом между направлением ребер в исходном положении и после деформации. Угловые деформации называют иногда деформациями сдвига. Индексы указывают, в какой плоскости появляется угол сдвига. Угловые деформации считаются положительными, если они отвечают уменьшению угла между соответствующими гранями параллелепипеда. В противном случае они

отрицательные. Рассмотренные выше деформации являются относительными, безразмерными и малыми по сравнению с единицей.

Угловые деформации можно представить по-разному (рис. 26).

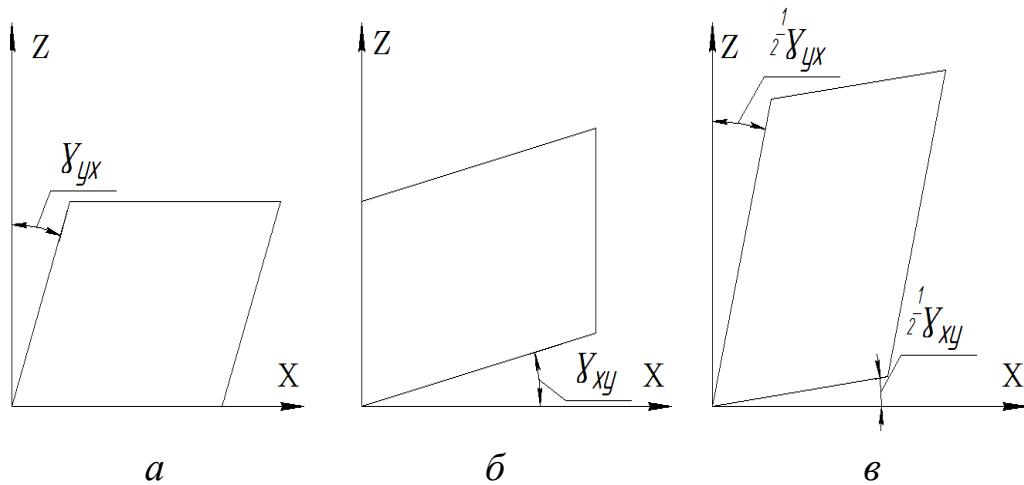


Рис. 26

На рис. 26, а – деформированное состояние характеризуется жестким поворотом параллелепипеда на угол  $\gamma_{yx}$  по часовой стрелке. На рис. 26, б – на угол  $\gamma_{xy}$  против часовой стрелки. Для всех трех случаев характерно одно и то же напряженное состояние, так как поворот элементарного объема как жесткого целого не приводит к появлению в нем дополнительных усилий. В искажении формы при деформации сдвига имеет значение сумма углов, а не величина каждого из них. Поэтому можно приравнять углы  $\gamma_{yx}$  и  $\gamma_{xy}$ , а сдвиговую деформацию обозначить относительно оси  $x$  через  $\frac{1}{2}\gamma_{yx}$ , относительно оси  $y$  –  $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ , рис. 26, в. Тогда

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{yx};$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{zy};$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{zx} = \frac{1}{2}\gamma_{xz}.$$

При этом индексация сдвиговых деформаций будет совпадать с индексацией касательных напряжений. Стягивая параллелепипед в точку, можно принять, что рассмотренные шесть компонентов деформации описывают деформированное состояние в исследуемой точке, которое можно описать полевым тензором бесконечно малых деформаций второго ранга:

$$T\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

За счет случая на рис. 27, в тензор деформаций сделан искусственно симметричным. При использовании тензорных обозначений общий компонент тензора деформаций имеет вид  $\varepsilon_{ij}$ , причем  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_{33} = \varepsilon_z$ ,  $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$ ,  $\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\gamma_{xz}$ ,  $\varepsilon_{31} = \frac{1}{2}\gamma_{zx}$ . Тензор деформаций полностью определяет деформированное состояние в исследуемой точке тела.

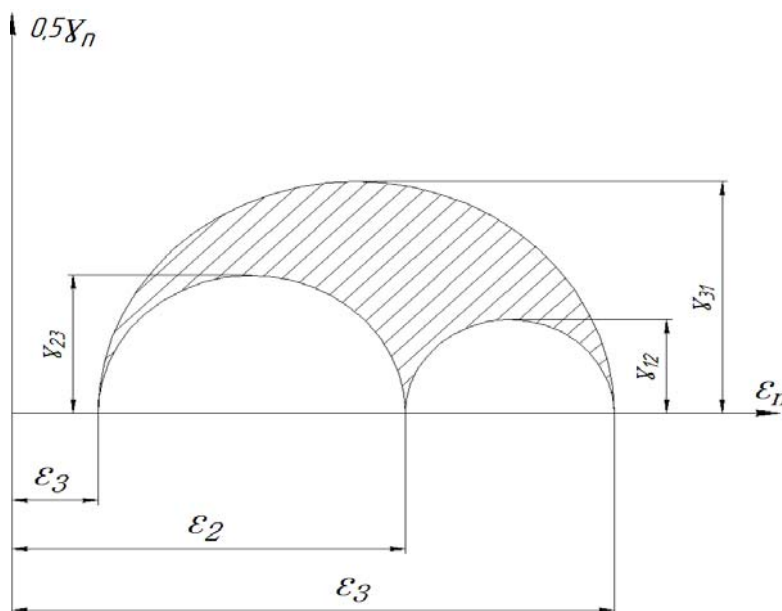


Рис. 27

По аналогии с теорией напряжений геометрической интерпретацией деформированного состояния в точке тела в пространстве является эллип-

соид деформации, а на плоскости – диаграмма деформаций в координатах: линейные деформации, угловые деформации. Любая точка, лежащая внутри области, ограниченной тремя окружностями диаграммы, своими координатами определяет линейную и половину угловой деформации (рис. 27).

## 2.2. Геометрические уравнения

Так как в основе деформации лежат перемещения, то найдем зависимости между компонентами перемещений  $u_x, u_y, u_z$  и компонентами деформации  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ . Для их вывода будем считать, что поле перемещений задано. Выделим для этого в деформируемом теле бесконечно малый параллелепипед с ребрами  $d_x, d_y, d_z$ , параллельными координатным осям  $x, y, z$ . Рассмотрим проекцию этого параллелепипеда на координатную плоскость  $xOy$  (рис. 28). Пусть  $abcd$  – проекция этого параллелепипеда до деформации имеет форму прямоугольника с длинами ребер  $ad=dx, ab=dy$ ;  $a_1b_1c_1d_1$  – после деформации имеет форму параллелограмма.

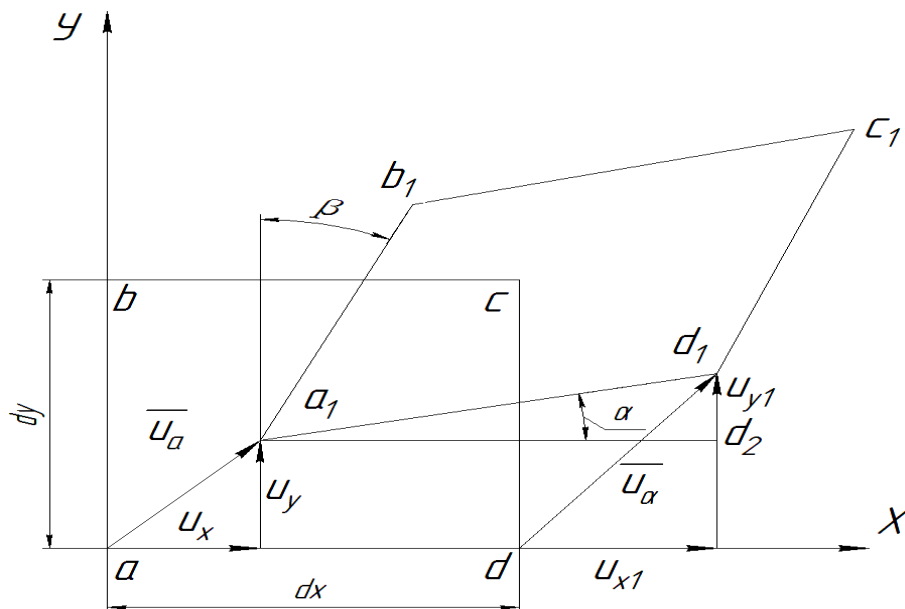


Рис. 28

Для определения линейной деформации  $\varepsilon_x$  рассмотрим ребро  $ad$ . перемещение точки  $a$  в направлении оси  $x$  обозначим через  $u_x = u_x(x, y, z)$ ; точки  $d$ , расположенной от точки  $a$  на бесконечно малом расстоянии  $dx$ ,

через  $u_{x1} = u_x(x + dx, y, z)$ . Можно считать, что перемещение точки  $d$  отличается от перемещения точки  $a$  на величину приращения функции  $u_x$  на длине  $dx$  по координате  $x$ . Тогда

$$u_{x1} = u_x + \frac{du_x}{dx} dx.$$

Отсюда относительное удлинение ребра  $ad$  относительно оси  $x$  равно

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{u_{x1} - u_x}{dx} = \frac{u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx - u_x}{dx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}.$$

Аналогично для относительного удлинения ребра вдоль оси  $y$  получим

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}.$$

После деформации длины ребер станут равными

$$a_1 d_1 = dx(1 + \varepsilon_x), \quad a_1 b_1 = dy(1 + \varepsilon_y).$$

Ребра параллелепипеда, параллельные осям координат в исходном состоянии, после деформации не будут им параллельны, так как произойдет поворот их в результате деформаций сдвига. Согласно определению деформация сдвига в плоскости  $xu$  равна сумме углов  $\alpha$  и  $\beta$  поворота ребер  $ad$  и  $ab$ , т.е.  $\gamma_{xy} = \alpha + \beta$ .

Так как изменения углов бесконечно малы, то  $\operatorname{tga} \approx \alpha$ , поэтому из прямоугольного треугольника  $a_1 d_1 d_2$

$$\alpha = \frac{d_1 d_2}{a_1 d_2} = \frac{u_{y1} - u_y}{u_{x1} + dx - u_x}$$

или

$$\alpha = \frac{u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx - u_y}{u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + dx - u_x} = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x}}{dx(1 + \varepsilon_x)}.$$

Так как  $\varepsilon_x \ll 1$ , то

$$\alpha = \frac{\partial u_y}{\partial x}.$$

Аналогично определяем угол  $\beta$ :

$$\beta = \frac{\partial u_x}{\partial y}.$$

Тогда

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}.$$

Проектируя рассматриваемый параллелепипед на координатные плоскости  $uoz$ ,  $zox$ , найдем выражения других компонентов деформации от компонентов перемещения.

Окончательно получим шесть геометрических уравнений :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x},$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y},$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}.$$

В тензорных обозначениях зависимости компонентов деформации от компонентов перемещения имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

### 2.3. Уравнения совместности деформаций

Так как принят принцип, что тело до и после деформации должно оставаться сплошным, то все компоненты деформаций произвольными быть не могут. Они должны быть определенным образом связаны между собой.

Если известны три компоненты непрерывного поля перемещений  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ , то по ним однозначно определяются простым дифференцированием



компоненты деформаций по формулам Каши. Сложнее обстоит дело с обратной постановкой задачи. Если заданы шесть компонент деформаций, то заранее нельзя утверждать, что им отвечает какое-либо непрерывное поле перемещений. Деформации, которым отвечает непрерывное поле перемещений, называются *совместными деформациями*. В противном случае деформации называются *несовместными*.

Для того чтобы деформации были совместными, они должны быть взаимосвязаны некоторыми соотношениями, которые называются *уравнениями совместности деформаций*. Покажем это.

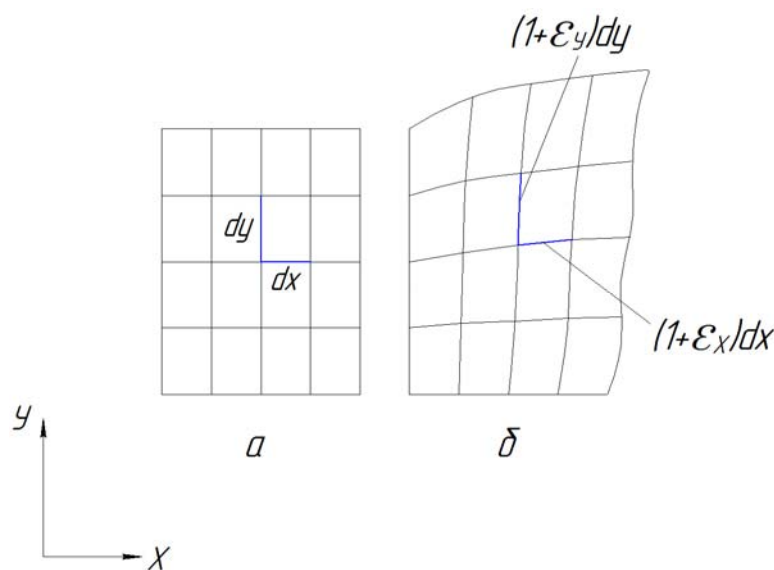


Рис. 29

На рис. 29, а показан разрез тела, разбитого на элементарные параллелепипеды системой взаимно перпендикулярных плоскостей, до деформации. Зададим в теле поле деформаций  $\epsilon_x, \epsilon_y$ . В результате ребра  $d_x, d_y$  получат некоторые удлинения  $(1 + \epsilon_x) d_x, (1 + \epsilon_y) d_y$  соответственно. Тело деформируется, как это показано на рис. 29, б. При этом возникают углы сдвига как изменения прямых углов, зависящие от компонент  $\epsilon_x, \epsilon_y$ . Очевидно, наоборот, задавая  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  в непрерывно деформируемом теле, будем иметь зависящие от них линейные деформации  $\epsilon_x, \epsilon_y$ . В случае произвольного и независимого задания удлинения ребер и углов сдвига деформируемые элементы не удастся сложить в сплошное тело.

Для вывода первой группы уравнений совместности деформаций исключим из геометрических уравнений компоненты перемещения  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ . Возьмем два первых уравнения:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}.$$

Продифференцируем первое уравнение два раза по  $y$ , а второе по  $x$ , получим

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_y}{\partial y \partial x^2}.$$

Складывая левые и правые части почленно, имеем

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

В скобках получили выражение, представляющее собой  $\gamma_{xy}$ .

Произведя такие же операции с первым и третьим, а затем со вторым и третьим геометрическими уравнениями, получим еще две аналогичные зависимости. Их можно легко записать, используя круговую подстановку индексов  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}.$$

Вторая группа зависимостей получается из трех последних геометрических уравнений:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x},$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y},$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}.$$

Из этих уравнений также исключим компоненты перемещения  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ . Для этого продифференцируем каждое из них по координате, отсутствующей в обозначении угловой деформации:

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial z},$$

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial x},$$

$$\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial y}.$$

В правых частях полученных уравнений имеется по два одинаковых члена, содержащих производные от  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Их необходимо исключить. Для этого изменим знаки, например у первого уравнения, и все их сложим. Тогда четыре члена сократятся, и получим

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = 2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}.$$

Полученное уравнение продифференцируем по  $z$ :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^3 u_z}{\partial x \partial y \partial z} = 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}.$$

Меняя знак у второго, а затем у третьего уравнения, получаем еще две аналогичные зависимости:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}.$$

Эти уравнения впервые получены французским ученым Сен-Венаном. Они показывают, что в каждой точке деформированного тела составляющие деформации взаимосвязаны между собой.

## 2.4. Главные деформации

По аналогии с теорией напряженного состояния можно показать, что в любой точке тела существуют три взаимно перпендикулярных направления, по которым тело испытывает только деформации удлинения или укорочения, а угловые деформации равны нулю. Эти линейные деформации называются главными деформациями и обозначаются через  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ . Определим их. Возьмем разность  $\varepsilon_n - \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – постоянная:

$$\varepsilon_n - \varepsilon = \varepsilon_{ij}n_i n_j - \varepsilon = \varepsilon_x n_x^2 + \varepsilon_y n_y^2 + \varepsilon_z n_z^2 + \gamma_{xy} n_x n_y + \gamma_{yz} n_y n_z + \gamma_{zx} n_z n_x - \varepsilon(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2).$$

Если нормаль  $\bar{n}$  является главным направлением, то разность должна принимать экстремальное значение, и тогда частные производные от нее по  $n_x, n_y, n_z$  должны равняться нулю:

$$\frac{\partial(\varepsilon_n - \varepsilon)}{\partial n_x} = 0,$$

$$\frac{\partial(\varepsilon_n - \varepsilon)}{\partial n_y} = 0,$$

$$\frac{\partial(\varepsilon_n - \varepsilon)}{\partial n_z} = 0.$$

Составив частные производные, получим систему трех уравнений:

$$\begin{aligned} 2(\varepsilon_x - \varepsilon)n_x + \gamma_{xy}n_y + \gamma_{xy}n_z &= 0, \\ \gamma_{yx}n_x + 2(\varepsilon_y - \varepsilon)n_y + \gamma_{yz}n_z &= 0, \\ \gamma_{zx}n_x + \gamma_{zy}n_y + 2(\varepsilon_z - \varepsilon)n_z &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Записанная система является однородной относительно неизвестных косинусов углов  $n_x, n_y, n_z$ , а следовательно, она имеет нулевое решение. Но  $n_x, n_y, n_z$  одновременно нулю равняться не могут, так как  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ . Следовательно, для поиска нулевого решения системы определитель из коэффициентов уравнений (21) должен равняться нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0.$$

В этом уравнении неизвестным является  $\varepsilon$ .

Раскрыв определитель, получим кубическое уравнение:

$$\varepsilon^3 - J_1(T_\varepsilon)\varepsilon^2 + J_2(T_\varepsilon)\varepsilon - J_3(T_\varepsilon) = 0, \quad (22)$$

где  $J_1(T_\varepsilon)$ ,  $J_2(T_\varepsilon)$ ,  $J_3(T_\varepsilon)$  – инварианты тензора деформаций. В произвольной системе координат они имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} J_1(T_\varepsilon) &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \\ J_2(T_\varepsilon) &= \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2), \\ J_3(T_\varepsilon) &= \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Из решения кубического уравнения (22) находятся вещественные значения главных деформаций. Имея главные деформации, можно из системы (21) и условия  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$  определить направления главных осей деформаций. Этим доказано, что в каждой точке существуют три взаимно перпендикулярных направления, для которых

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0.$$

В главных осях тензоры деформаций и инварианты имеют вид

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix},$$

$$J_1(T_\varepsilon) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

$$J_2(T_\varepsilon) = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1,$$

$$J_3(T_\varepsilon) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3.$$

Из анализа деформаций в главных осях следует, что всякая деформация может быть осуществлена простыми растяжениями в трех главных направлениях.

Подобно главным напряжениям сдвига главные деформации сдвига имеют место по взаимно перпендикулярным площадкам, наклоненным под углом  $45^\circ$  к двум плоскостям координат  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  и проходящим через одну из осей.

Главные деформации сдвига связаны с главными деформациями удлинения соотношениями:

$$\gamma_{12} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,$$

$$\gamma_{23} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3,$$

$$\gamma_{31} = \varepsilon_3 - \varepsilon_1.$$

Между собой главные деформации сдвига связаны соотношением

$$\gamma_{12} + \gamma_{23} + \gamma_{31} = 0.$$

## 2.5. Схемы главных деформаций

При обработке металлов давлением различают три схемы главных деформаций, предложенные С.И. Губкиным (рис. 30).

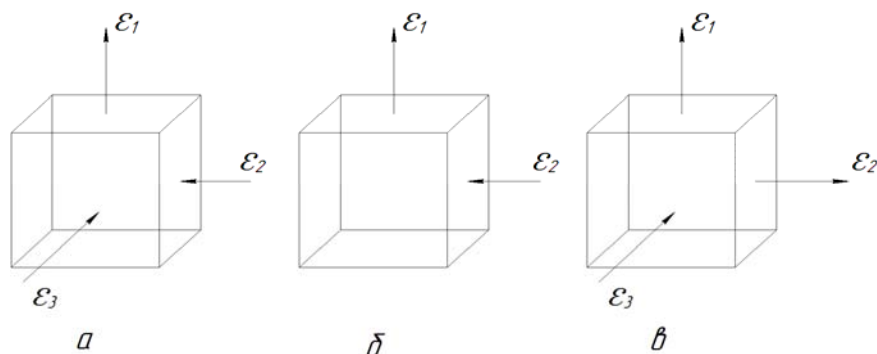


Рис. 30

Из условия постоянства объема (несжимаемости), широко используемого в процессах обработки металлов давлением,  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$  следует, что три главные деформации не могут быть одного знака, а схемы деформаций могут быть только разноименные. Поэтому не может быть линейных схем деформации. Реально осуществимы только одна плоская (рис. 30, б) и две объемных (рис. 30, а, в) схемы.

Схема на рис. 30, а встречается в таких процессах обработки металлов давлением, как прессование и выдавливание (рис. 31, в), волочение (рис. 31, г). В процессе деформирования происходит уменьшение поперечного сечения заготовки и течение металла в длину. Если течение металла происходит в одной плоскости, то такая деформация называется плоской. Примером плоской деформации является прокатка тонкого широкого листа, при которой деформация по ширине листа равна нулю.

Схема на рис. 30, в встречается в таких процессах, как осадка без контактного трения (рис. 31, а) и с трением (рис. 31, б), толстолистовая прокатка (рис. 31, д), поперечно-винтовая прокатка (рис. 31, е).

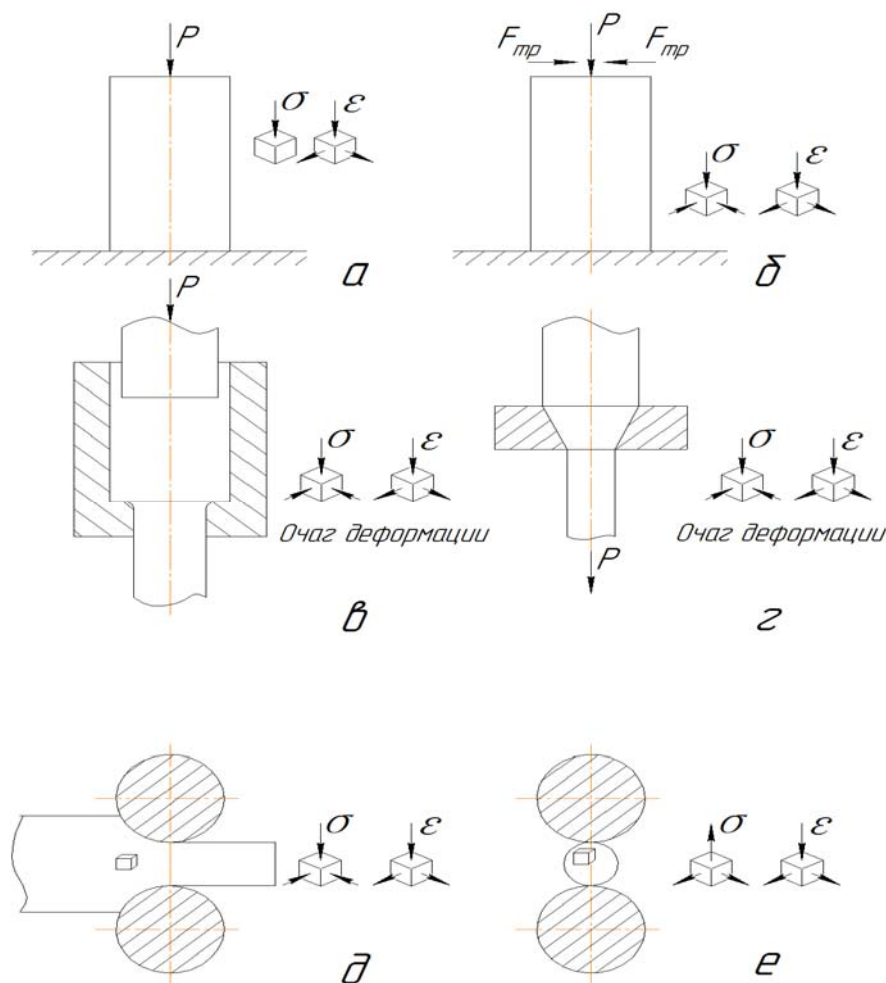


Рис. 31

Главные линейные деформации связаны между собой следующими соотношениями:

для плоского деформированного состояния

$$\varepsilon_3 = -\varepsilon_1 \text{ и } \varepsilon_2 = 0;$$

для линейного растяжения и сжатия

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -0,5 \varepsilon_1,$$

где  $\varepsilon_1$  – наибольшая по абсолютной величине главная деформация.

## 2.6. Разложение тензора деформаций

Тензор деформаций, характеризующий общий случай деформированного состояния в рассматриваемой точке тела, можно представить в виде суммы двух деформированных состояний.

Первое деформированное состояние характеризуется шаровым тензором деформаций:

$$T_{\varepsilon}^0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{cp} \end{pmatrix},$$

где  $\varepsilon_{cp} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3},$

а второе – девиатором деформаций:

$$D_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$T_{\varepsilon} = T_{\varepsilon}^0 + D_{\varepsilon}.$$

Шаровой тензор деформаций описывает деформацию изменения объема, а девиатор деформаций – деформацию изменения формы в точке тела. При развитой пластической деформации компоненты шарового тен-



зона деформаций  $\varepsilon_{cp} = 0$ . Тогда  $T_\varepsilon = D_\varepsilon$ , так как возникновение пластических деформаций в теле связано с образованием сдвигов и, следовательно, с изменением формы элементарного объема. При всесторонних равных растяжениях или сжатиях пластические деформации не возникают.

Инварианты девиатора деформации в главных осях равны:

$$\begin{aligned} J_1(D_\varepsilon) &= 0, \\ J_2(D_\varepsilon) &= \frac{1}{6} \left[ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 \right], \\ J_3(D_\varepsilon) &= (\varepsilon_1 - \varepsilon_{cp})(\varepsilon_2 - \varepsilon_{cp})(\varepsilon_3 - \varepsilon_{cp}). \end{aligned}$$

В теории пластичности важное значение играет второй инвариант  $J_2(D_\varepsilon)$ , который можно рассматривать как суммарную характеристику искажения формы элемента сплошной среды.

Неотрицательная величина

$$\Gamma = 2\sqrt{J_2(D_\varepsilon)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + \dots + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}$$

называется *интенсивностью деформаций сдвига*.

Коэффициент перед корнем выбран так, чтобы при чистом сдвиге

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0, \gamma_{xy} = \gamma$$

интенсивность  $\Gamma$  равнялась величине сдвига  $\gamma$ .

Неотрицательная величина

$$\varepsilon_i = \frac{\Gamma}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + \dots + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}$$

называется *интенсивностью деформаций*. Коэффициент пропорциональности выбран так, чтобы при линейном растяжении

$$\varepsilon_1 = \varepsilon, \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -0,5\varepsilon, \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

интенсивность  $\varepsilon_1$  равнялась главной линейной деформации.

Октаэдрическая деформация сдвига определяется формулой

$$\gamma_{окт} = 2\sqrt{\frac{2}{3}J_2(D_\varepsilon)} = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2}.$$

Девiator деформаций в виде

$$\frac{\gamma_{окт}}{2} \begin{pmatrix} \frac{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_{cp})}{\gamma_{окт}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2(\varepsilon_2 - \varepsilon_{cp})}{\gamma_{окт}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(\varepsilon_3 - \varepsilon_{cp})}{\gamma_{окт}} \end{pmatrix}$$

называется *направляющим тензором деформаций* и обозначается как  $\overline{D}_\varepsilon$ . Его главные оси совпадают с главными осями тензора деформаций. Если главные оси деформаций известны, то для описания деформированного состояния можно использовать показатель вида деформированного состояния Лоде – Надаи:

$$v_\varepsilon = \frac{\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2}}{\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2}}.$$

Для одноосного растяжения  $v_\varepsilon = -1$ , одноосного сжатия  $v_\varepsilon = 1$ , чистого сдвига  $v_\varepsilon = 0$ .

## 2.7. Однородная, равномерная и монотонная деформации

*Однородной* называется деформация тела, при которой главные оси имеют одинаковые направления во всех точках тела и остаются неизменными в течение всего процесса деформирования. Это означает, что при однородной деформации отсутствуют сдвиги, а различные участки тела получают одинаковые линейные деформации как по величине, так и по направлению.

Пример однородной деформации при осадке тела между параллельными плитами без трения показан на рис. 32.

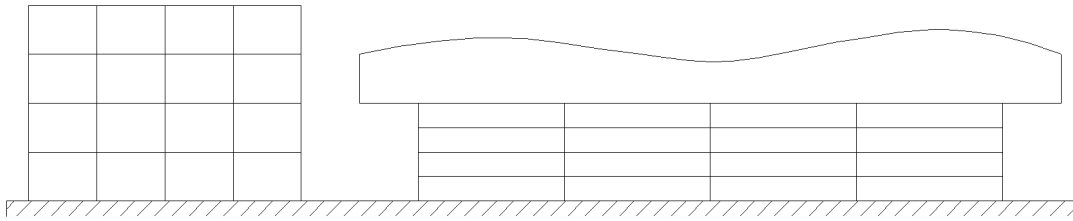


Рис. 32

При однородной деформации компоненты перемещений линейно зависят от координат:

$$u_x = \varepsilon_1 x, \quad u_y = \varepsilon_2 y, \quad u_z = \varepsilon_3 z.$$

Отсюда следует, что при однородной деформации любая плоскость деформируемого тела остается плоскостью и после деформации. На этом положении основана *гипотеза плоских сечений*, широко применяемая в теории обработки металлов давлением.

На практике однородная деформация встречается очень редко. Обычно имеет место *неоднородность* деформации, это является результатом действия сил трения и формы инструмента.

Пример неоднородной деформации при осадке между параллельными плитами с учетом действий сил трения  $T$  приведен на рис. 33.

*Равномерной* называется такая деформация, тензор которой в любой точке тела постоянен и не зависит от координат. Равномерная деформация представляет собой частный случай однородной. Она возможна в условиях линейного напряженного состояния.

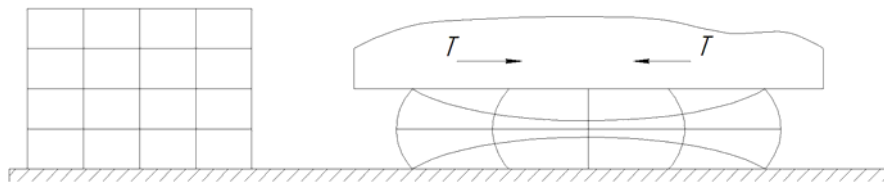


Рис. 33

Условие *монотонности* деформации заключается в том, что на всем протяжении деформации от начального до конечного состояния наибольшие и наименьшие удлинения или укорочения испытывают одни

и те же материальные волокна, проходящие через рассматриваемую точку тела.

## 2.8. Большие деформации

В процессах обработки металлов давлением полная деформация может достигать значительной величины. Для ее описания рассмотрим параллелепипед с ребрами, параллельными главным осям деформаций, и с исходными размерами до пластической деформации  $X_0$ ,  $Y_0$  и  $Z_0$  (рис. 34, а).

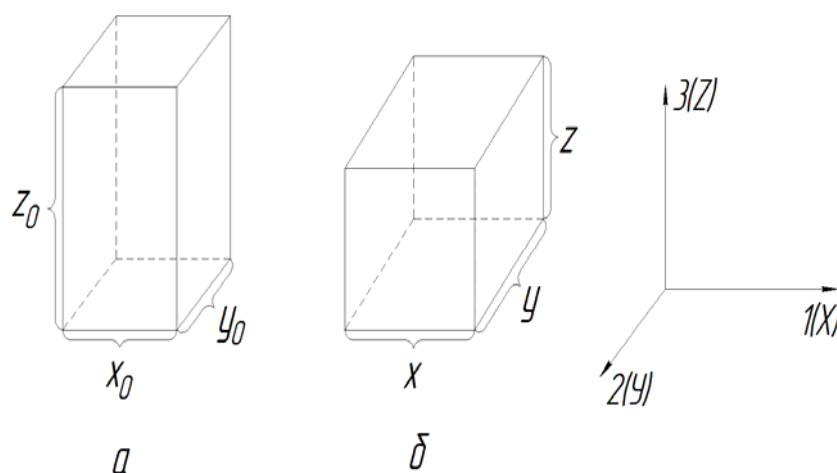


Рис. 34

Пусть этот параллелепипед после однородной деформации (рис. 34, б) останется также параллелепипедом и конечные размеры его будут :  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Тогда по условию постоянства объема

$$V = X_0 Y_0 Z_0 = XYZ,$$

откуда

$$\frac{X}{X_0} \frac{Y}{Y_0} \frac{Z}{Z_0} = 1.$$

После логарифмирования:

$$\ln \frac{X}{X_0} + \ln \frac{Y}{Y_0} + \ln \frac{Z}{Z_0} = 0$$

или сумма трех главных деформаций равна нулю:

$$e_x + e_y + e_z = 0,$$

где

$$e_x = \ln \frac{X}{X_0}; e_y = \ln \frac{Y}{Y_0}; e_z = \ln \frac{Z}{Z_0}. \quad (23)$$

Величины  $e_x$ ,  $e_y$  и  $e_z$  носят название *логарифмических деформаций*.

Логарифмическая деформация представляет собой интеграл бесконечно малого приращения данного размера тела или его элемента, отнесенного к его величине в каждый данный момент деформации. Например, в направлении ребра  $Z$  суммарная относительная деформация при осадке от  $Z_0$  до  $Z$  составит:

$$e_z = \int_{Z_0}^Z \frac{dZ}{Z} = \ln \frac{Z}{Z_0}.$$

Аналогичные деформации в направлении ширины и длины соответственно равны:

$$e_y = \int_{Y_0}^Y \frac{dY}{Y} = \ln \frac{Y}{Y_0}, e_x = \int_{X_0}^X \frac{dX}{X} = \ln \frac{X}{X_0}.$$

В случае однородной деформации логарифмические деформации представляют собой результат суммирования бесконечно малых деформаций, поэтому их часто называют *истинными деформациями*.

Логарифмические деформации обладают свойством аддитивности: их можно складывать при определении суммарной деформации, осуществленной за несколько операций.

Допустим, что растяжение образца длиной 100мм произведено в два этапа. Вначале образец был растянут на длину 120мм, а после до 150мм.

Суммарная деформация за два этапа нагружения:

$$e_{x\Sigma} = \ln \frac{150}{100} = \ln \frac{150}{120} \cdot \frac{120}{100} = \ln \frac{150}{120} + \ln \frac{120}{100} = e_{x1} + e_{x2}.$$

Таким образом,

$$e_{x\Sigma} = e_{x1} + e_{x2}.$$

Степень деформации тел можно выразить иначе, а именно как отношение приращения размера к начальному размеру тела:

$$\varepsilon_x = \frac{X - X_0}{X_0} = \frac{\Delta X}{X_0}, \varepsilon_y = \frac{Y - Y_0}{Y_0} = \frac{\Delta Y}{Y_0}, \varepsilon_z = \frac{Z - Z_0}{Z_0} = \frac{\Delta Z}{Z_0}. \quad (24)$$

Величины  $e$  и  $\varepsilon$  связаны между собой:

$$\left. \begin{aligned} e_x &= \ln \frac{X}{X_0} = \ln \frac{X_0 + \Delta X}{X_0} = \ln(1 + \varepsilon_x), \\ e_y &= \ln \frac{Y}{Y_0} = \ln \frac{Y_0 + \Delta Y}{Y_0} = \ln(1 + \varepsilon_y), \\ e_z &= \ln \frac{Z}{Z_0} = \ln \frac{Z_0 + \Delta Z}{Z_0} = \ln(1 + \varepsilon_z). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Формулы (24) часто используют в процессах обработки металлов давлением для расчета относительного обжатия, уширения, вытяжки. Например, величина относительного обжатия при осадке

$$\varepsilon = \frac{h_0 - h_1}{h_0}.$$

Граница между деформациями, рассчитываемыми по формулам (23) и (24), зависит от той точности, с которой рассчитывается процесс. Истинные и относительные деформации вначале близки между собой, а затем расходятся (рис. 35).

Если необходима большая точность, то нужно использовать логарифмические деформации. В пределах 0–10 % можно пользоваться любыми формулами.

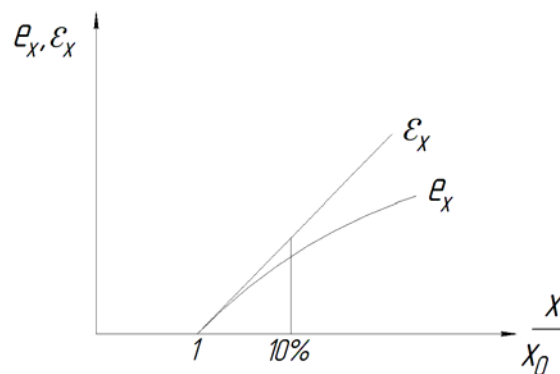


Рис. 35

При степенях деформации до 10 % проще использовать формулы (24), не обладающие свойством аддитивности.

## 2.9. Объемная деформация

При деформации тела под действием внешних сил изменяется не только форма, но и объем. Изменение объема, отнесенное к начальному объему, называется *относительной объемной деформацией*. Изменение объема происходит в основном вследствие изменения длин ребер элементарного параллелепипеда.

Выделим в рассматриваемом теле элементарный параллелепипед с ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , параллельными главным направлениям 1, 2, 3 в данной точке. В этом случае при деформировании углы параллелепипеда остаются прямыми, изменятся лишь длины ребер и станут равными:

$$(1 + \varepsilon_1)dx, (1 + \varepsilon_2)dy, (1 + \varepsilon_3)dz.$$

Объем параллелепипеда до деформации:

$$dV = dx dy dz,$$

после деформации:

$$dV_1 = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) dx dy dz.$$

Относительная объемная деформация:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{dV_1 - dV}{dV} = \frac{(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) dx dy dz - dx dy dz}{dx dy dz} = \\ &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3. \end{aligned}$$

Отбрасывая произведения деформаций как малые второго и третьего порядков, получим

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Таким образом, объемная деформация выражается суммой линейных деформаций.

## 2.10. Скорость деформации

Рассмотрим процесс деформирования тела во времени. В процессе деформирования отдельные материальные частицы движутся со скоростью  $\bar{v} = \bar{v}(x, y, z, t)$ . Составляющие скорости по координатным осям  $x, y, z$ :

$$v_x = v_x(x, y, z, t),$$

$$v_y = v_y(x, y, z, t),$$

$$v_z = v_z(x, y, z, t).$$

Так как скорость частицы определяется величиной перемещения в единицу времени, то

$$v_x = \frac{du_x}{dt}, \quad v_y = \frac{du_y}{dt}, \quad v_z = \frac{du_z}{dt}$$

или

$$du_x = v_x dt, \quad du_y = v_y dt, \quad du_z = v_z dt.$$

В течение бесконечно малого промежутка времени  $dt$  деформируемый элемент тела испытывает бесконечно малые деформации, определяемые перемещением  $du$ . В направлении координатной оси  $x$  имеем

$$d\varepsilon_x = \frac{\partial du_x}{\partial x} = \frac{\partial(v_x dt)}{\partial x}$$

или

$$\frac{d\varepsilon_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = \xi_x,$$

где  $\xi_x$  – линейная скорость деформации.

Аналогично могут быть получены и другие скорости линейных и угловых деформаций:

$$\xi_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \eta_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x},$$

$$\xi_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \eta_{yz} = \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y},$$

$$\xi_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad \eta_{zx} = \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}.$$



В сокращенном виде:

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

*Скоростью деформации* называется изменение степени деформации в единицу времени. Это понятие широко используется в теории пластического течения металла. Скорость деформации, по аналогии с тензором деформаций, можно также представить в виде тензора скоростей деформации:

$$\xi_{ij} = \begin{pmatrix} \xi_x & \frac{1}{2}\eta_{xy} & \frac{1}{2}\eta_{xz} \\ \frac{1}{2}\eta_{yx} & \xi_y & \frac{1}{2}\eta_{yz} \\ \frac{1}{2}\eta_{zx} & \frac{1}{2}\eta_{zy} & \xi_z \end{pmatrix}.$$

Его по аналогии можно представить в виде шарового тензора  $T_\xi^0$  и девиатора скоростей деформаций  $D_\xi$  т.е.  $T_\xi = T_\xi^0 + D_\xi$ .

Шаровой тензор имеет вид

$$T_\xi^0 = \begin{pmatrix} \xi_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{cp} \end{pmatrix}.$$

При развитых пластических деформациях средняя скорость деформации

$$\xi_{cp} = \frac{\xi_x + \xi_y + \xi_z}{3} = 0$$

или

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Девиатор скоростей деформаций записывается аналогично девиатору деформаций:

$$D_{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_x - \xi_{cp} & \frac{1}{2}\xi_{xy} & \frac{1}{2}\xi_{xz} \\ \frac{1}{2}\xi_{yx} & \xi_y - \xi_{cp} & \frac{1}{2}\xi_{yz} \\ \frac{1}{2}\xi_{zx} & \frac{1}{2}\xi_{zy} & \xi_z - \xi_{cp} \end{pmatrix}.$$

Шаровой тензор  $T_{\xi}^0$  характеризует скорость изменения объема, а девиатор характеризует скорость изменения формы.

Аналогично вводится понятие интенсивности скоростей деформации сдвига:

$$H = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\xi_x - \xi_y)^2 + (\xi_y - \xi_z)^2 + (\xi_z - \xi_x)^2 + \frac{2}{3}(\xi_{xy}^2 + \xi_{yz}^2 + \xi_{zx}^2)}.$$

Главные оси скоростей деформаций, главные скорости линейных деформаций определяются так же, как для тензора деформаций. Размерность скорости деформаций –  $c^{-1}$ . Скорость деформации следует отличать от скорости деформирования (хода инструмента). Скорости деформаций для больших деформаций тела определяют, как и для малых. Например, скорость деформации при осадке тела между двумя параллельными плитами:

$$\xi_h = \frac{\varepsilon_h}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta h}{h}}{\Delta t} = \frac{v_h}{h}.$$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сторожев, М.В. Теория обработки металлов давлением [Текст] / М.В. Сторожев, Е.А. Попов. – М.: Машиностроение, 1971. – 424 с.
2. Джонсон, У. Теория пластичности для инженеров [Текст] / У. Джонсон, П.Б. Меллор. – М.: Машиностроение, 1975. – 567 с.
3. Малинин, Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести [Текст] / Н.Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
4. Безухов, Е.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести [Текст] / Е.И.Безухов. – М.: Высш. шк., 1968. – 512 с.
5. Элементы теории упругости и пластичности в авиастроении [Текст]: метод. указания / Куйбышев. авиац. ин-т; сост. Ю.М. Арышенский, В.Р. Каргин. – Куйбышев, 1990. – 32 с.
6. Арышенский, Ю.М. Теория и расчеты пластического формоизменения анизотропных материалов [Текст] / Ю.М. Арышенский, Ф.В. Гречников. – М.: Metallurgy, 1992. – 304 с.
7. Томсен, Э. Механика пластических деформаций при обработке металлов [Текст] / Э. Томсен, Ч. Янг, Ш. Кобаяши. – М.: Машиностроение, 1969. – 504 с.
8. Гун, Г.Я. Теоретические основы обработки металлов давлением [Текст] / Г.Я. Гун. – М.: Metallurgy, 1980. – 456 с.
9. Арышенский, Ю.М. Избранные разделы по теории пластичности [Текст]: учеб. пособие / Ю.М. Арышенский, Ф.В. Гречников, В.Р. Каргин. – Самара: Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 1995. – 64 с.
10. Илюкович, Б.М. Введение в теорию пластичности [Текст] / Б.М. Илюкович. – Киев: Выща шк., 1983. – 160 с.
11. Аркулис, Г.Э. Теория пластичности [Текст] / Г.Э. Аркулис, В.Г. Дорогобид. – М.: Metallurgy, 1987. – 352 с.
12. Шевченко, К.Н. Основы математических методов в теории обработки металлов давлением [Текст] / К.Н. Шевченко. – М.: Высш. шк., 1970. – 351 с.

Учебное издание

*Каргин Владимир Родионович*  
*Каргин Борис Владимирович*

## **МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД**

### **Часть 1**

Учебное пособие

Редактор Т.К. Кретьнина  
Доверстка Л.Р. Дмитриенко

Подписано в печать 23.09.2015. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Печ. л. 4,75.

Тираж 100 экз. Заказ . Арт. Д2(1)/2015.

федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Самарский государственный аэрокосмический  
университет имени академика С.П.Королева  
(национальный исследовательский университет)» (СГАУ)  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

---

Изд-во СГАУ. 443086 Самара, Московское шоссе, 34.