

КУЙБЫШЕВ
Ордена Трудового
Красного Знамени
Авиационный институт
имени С. П. Королева

*В. А. БАРВИНОК
П. А. БОРДАКОВ*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
ПЛАНИРОВАНИЕ
ЭКСПЕРИМЕНТА
В ПРОИЗВОДСТВЕ
ЛЕТАТЕЛЬНЫХ
АППАРАТОВ

КУЙБЫШЕВ

1990

КуАИ:С
Б246

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ордена ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА

На дом
не выдается

В. А. БАРВИНОК, П. А. БОРДАКОВ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА
В ПРОИЗВОДСТВЕ
ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Учебное пособие

КУЙБЫШЕВСКИЙ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
ИМЕНИ
АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА

КУЙБЫШЕВ 1990

УДК 629.7:621.73.01

Математическое планирование эксперимента в производстве летательных аппаратов: Учеб. пособие / В. А. Барвинок, П. А. Бордаков; Куйбышев. авиац. ин-т, Куйбышев, 1990. 64 с.

Рассмотрены методические вопросы проведения экспериментальных исследований технологических процессов производства летательных аппаратов с применением математического планирования эксперимента. Даны указания по выбору двух- и трехфакторных планов второго порядка на основании их характеристик и целей проводимых исследований. Подробно изложена методика проведения исследований и даны примеры получения и анализа математических моделей технологических процессов.

Пособие предназначено для студентов авиационного вуза специальности 13.01.

Табл. 21. Ил. 11. Библиогр.: 16 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Куйбышевского ордена Трудового Красного Знамени авиационного института им. академика С. П. Королёва

Рецензенты: П. В. Рассказов, В. А. Рясный,
Н. К. Крючков

ПРЕДИСЛОВИЕ

Интенсивное развитие авиационной и космической техники существенно повышает требования к технологии как науке о различных сторонах производственных процессов изготовления деталей летательных аппаратов, их сборки, сварки и испытаний.

В результате технического прогресса технологические рекомендации, основанные только на качественной оценке или описывающие зависимость свойств от единичного технологического фактора, в настоящее время не дают оптимальных практических результатов. Решение проблемы анализа и оптимизации технологии в таких условиях целесообразно вести, опираясь на строгие математические методы.

В первой части пособия [1] подробно излагается методика выбора основных факторов и параметров оптимизации технологических процессов, а также изложены методы планирования по полному и дробному факторному экспериментам.

Во второй части пособия подробно излагаются методы планирования эксперимента второго порядка. В настоящее время в технической литературе имеются сведения по применению двух—трех математических планов второго порядка (центральные композиционные и ротатабельные планы).

В учебном пособии приводятся обобщенные методы проведения экспериментов и их анализа с помощью 12—14 планов второго порядка применительно к задачам производства летательных аппаратов.

Цель данного пособия — в достаточно

доступной форме познакомить студентов с основными идеями и методами математического планирования второго порядка, изложить методику проведения экспериментальных исследований применительно к технологическим процессам изготовления деталей летательных аппаратов, их сборки и сварки, например, диффузионной сварки и пайки, плазменного и ионно-плазменного напыления, магнитно-импульсной сварки и штамповки, пробивки отверстий и дорнования, штамповки полиуретаном и другим технологическим процессам, получившим развитие в Куйбышевском авиационном институте.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Требования, предъявляемые к откликам y_u и варьируемым факторам x_i технологических процессов, порядок их выбора и определения области изменения контролируемых параметров $a_i \leq x_i \leq b_i$ подробно изложены в работе [1].

В безразмерных (кодируемых) единицах область изменения контролируемых параметров записывается в виде гиперкуба

$$-1 \leq x_i \leq 1,$$

где $i = 1, \dots, k$ — индекс варьируемого фактора.

Для двухфакторного эксперимента ($k=2$) область изменения представляет собой квадрат со стороной 2 единицы, для трехфакторного эксперимента ($k=3$) — куб с длиной ребра 2 единицы.

Как правило, целью экспериментальных исследований является отыскание зависимости между откликом y_u и контролируемыми параметрами x_1, x_2, \dots, x_k технологического процесса. Такую зависимость можно представить в виде функции $\eta(x, \beta)$, являющейся полиномом второй степени

$$y_u = \eta(x, \beta) = \beta^* f^*(x) = \beta_0 + \sum_{1 \leq i \leq k} \beta_i x_i + \sum_{1 \leq i < j \leq k} \beta_{ij} x_i x_j, \quad (1.1)$$

где $\eta(x, \beta)$ — математическое ожидание величины y_u , измеренной с дисперсией σ_y^2 ;

$$\beta^* = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1n}, \beta_{22}, \beta_{23}, \dots, \beta_{nn})$$

— вектор неизвестных коэффициентов уравнения (1.1);

$$f^*(x) = (1, x_1, x_2, \dots, x_n, x_1^2, x_1 x_2, \dots, x_1 x_n, x_2^2, x_2 x_3, \dots, x_k^2)$$

— вектор линейно независимых функций.

При этом считается, что выполнены следующие условия:

а) результаты измерений y_1, y_2, \dots, y_l представляют собой независимые, нормально распределенные величины;

б) выборочные оценки $S_{y_1^2}, S_{y_2^2}, \dots, S_{y_l^2}$ однородны, т. е. соответствующие дисперсии $\sigma_{y_1^2}, \sigma_{y_2^2}, \sigma_{y_3^2}, \dots, \sigma_{y_l^2}$ не зависят от математических ожиданий $\eta(x_1, \beta), \eta(x_2, \beta), \dots, \eta(x_k, \beta)$;

в) ошибки в измерении контролируемых переменных x_1, x_2, \dots, x_k малы по сравнению с ошибкой в определении y .

Задачу планирования эксперимента можно сформулировать следующим образом: выбрать точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ в факторном пространстве $-1 \leq x_i \leq 1$ и в них числа повторных измерений таким образом, чтобы лучше всего оценить параметры β и функцию $\eta(x, \beta)$ в той области, где производились измерения.

Оценки параметров β принято обозначать через b , а аппроксимирующий полином записывать в виде

$$y(x, b) = b_0 + \sum_{1 \leq i \leq k} b_i x_i + \sum_{1 \leq i \leq k} b_{ii} x_i^2 + \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k \\ i \neq j}} b_{ij} x_i x_j.$$

Таким образом, выбирая план эксперимента, т. е. определяя число точек плана, их взаимное расположение в факторном пространстве и число измерений в каждом из них, можно регулировать показатели точности оценок параметров регрессионной зависимости, а также показатели точности оценки регрессионной функции во всей области планирования и в отдельных ее зонах.

Для более четкой логики в постановке задачи и последующих исследованиях методом планирования эксперимента необходимо определить некоторые общие понятия.

Обычно под экспериментом подразумевается многократное воспроизведение исследуемого процесса для изучения закономерности его протекания, степень влияния на него различных факторов и взаимосвязь между ними. Остановимся на следующей терминологии. Однократное фиксирование определенного набора входных параметров (факторов) x и параметров откликов y будем называть измерением. Фиксированная комбинация значений входных параметров x называется уровнем факторного пространства. Многократное повторение измерений для одного уровня назовем опытом. Сам эксперимент считаем состоящим из серии опытов на разных уровнях и параллельных измерений на одинаковых уровнях факторного пространства.

2. ЦЕНТРАЛЬНОЕ КОМПОЗИЦИОННОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Для получения математической модели в виде полинома второго порядка число уровней независимых переменных должно быть на единицу больше степени интерполяционного многочлена.

Если использовать все возможные сочетания уровней по каждому фактору, т. е. строить полный факторный эксперимент (ПФЭ), то необходимо провести 3^k измерения, где k — число факторов. Такое планирование нерационально, так как при $k \geq 3$ требуется неоправданно большее число измерений.

Сократить число измерений можно, используя центральное композиционное планирование (ЦКП), ядром которого являются ортогональные планы первого порядка и некоторое число дополнительных точек («звездные» точки), которые лежат на сфере диаметром 2α [2, 14]. ЦКП полностью соответствует идее шагового планирования. На первом этапе эксперимент строится в соответствии с методикой ПФЭ. В случае неадекватности линейной математической модели делается следующий шаг: дорабатывается ПФЭ до плана второго порядка. Построение сводится к определению расстояния α от центра плана до «звездных» точек (рис. 2.1). Плечо α выбирается таким образом, чтобы его величина удовлетворяла условию ортогональности или ротатабельности плана. План остается ортогональным, если скалярные произведения всех векторов-столбцов в матрице независимых переменных равны нулю. При этом все коэффициенты уравнения регрессии находятся независимо друг от друга.

В ротатабельных планах дисперсии предсказанного значения равны на одинаковых расстояниях от центра плана.

В факторном пространстве «звездные» точки располагаются на осях координат, проходящих через центр плана.

2.1. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В ортогональном ЦКП план считается оптимальным, если матрица планирования обладает ортогональными свойствами. Чтобы придать матрице такие свойства, необходимо провести преобразование квадратичных переменных и определенным образом выбрать величину плеча α «звездных» точек.

Условие ортогональности матрицы планирования можно записать в виде

$$\sum_{u=1}^n x_{0u} x_{iu}^2 = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{u=1}^n x_{iu}^2 x_{iu}^2 = 0. \quad (2.1)$$

Первое из условий (2.1) выполняется путем преобразования квадратичных переменных

$$(x_i')^2 = x_i^2 - \frac{\sum_{u=1}^n x_{iu}^2}{n} = x_i^2 - \bar{x}_i^2, \quad (2.2)$$

где $n = 2^k + 2k + 1$ — число точек плана (2^k — число точек ядра, $2k$ — число «звездных» точек, 1 — одна нулевая точка).

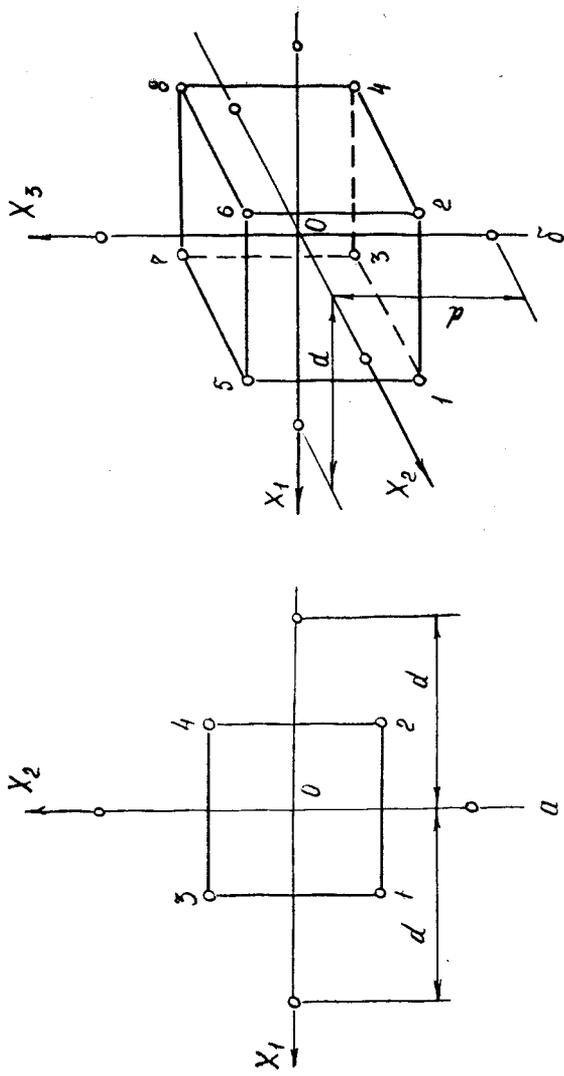


Рис. 2.1. Композиционные планы второго порядка: a — двухфакторные, b — трехфакторные

Величина \bar{x}_i^2 зависит от числа факторов k и плеча α

$$\bar{x}_i^2 = \frac{2^k + 2\alpha^2}{2^k + 2k + 1} = \frac{2^k + 2\alpha^2}{2^k + 2k + 1}.$$

Величину \bar{x}_i^2 обычно обозначают через φ . Следовательно,

$$\varphi = \bar{x}_i^2 = \frac{2^k + 2\alpha}{n}.$$

Из второго условия (2.1) можно вывести уравнение

$$2^k(1-\varphi)^2 - 4\varphi(\alpha^2 - \varphi) + 2(k-\varphi)\varphi^2 + \varphi^2 = 0.$$

На основании решения системы уравнений получим выражения для определения φ и α :

$$\varphi = \sqrt{\frac{2^k}{n}}, \quad (2.3)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{n\varphi - 2^k}{2}}. \quad (2.4)$$

При $k \geq 5$ в качестве ядра может использоваться полуреплика от ПФЭ, число опытов в которой равно 2^{k-1} . При определении φ и α в этом случае в формулы (2.3) и (2.4) нужно подставлять вместо k величину $k-1$.

В табл. 2.1 приведены величины α и φ , рассчитанные для $k \leq 7$.

В табл. 2.2 и 2.3 приведены матрицы планирования для двух- и трехфакторного эксперимента.

При ортогональном планировании коэффициенты уравнения регрессии определяются независимо друг от друга по следующим формулам:

$$b_0 = \frac{\sum_{u=1}^n y_u}{n}; \quad b_i = \frac{\sum_{u=1}^n x_{iu} \bar{y}_u}{\sum_{u=1}^n x_{iu}^2};$$

$$b_{ij} = \frac{\sum_{u=1}^n x_{iu} \bar{y}_u x_{ju}}{\sum_{u=1}^n (x_{iu} x_{ju})^2}; \quad b_{ii} = \frac{\sum_{u=1}^n (x'_{iu})^2 \bar{y}_u}{\sum_{u=1}^n [(x'_{iu})^2]};$$

где i, j — номера столбцов матрицы планирования; x_{iu} — элементы i -го столбца.

Оценки дисперсий коэффициентов уравнения регрессии рассчитываются соответственно по формулам:

$$S^2_{b_0} = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{n}; \quad S^2_{b_i} = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{\sum_{u=1}^n x_{iu}^2};$$

Таблица 2.1

Параметры ортогональных планов второго порядка

| Ядро плана | Общее число опытов | φ | α |
|------------|--------------------|----------------------------------------|----------|
| 2^2 | 9 | $2/3 \approx 0,6667$ | 1,0000 |
| 2^3 | 15 | $\sqrt{\frac{8}{15}} \approx 0,7303$ | 1,2154 |
| 2^4 | 25 | $4/5 = 0,8$ | 1,4142 |
| 2^{5-1} | 27 | $\frac{4\sqrt{3}}{9} \approx 0,7698$ | 1,5467 |
| 2^5 | 43 | $\frac{4\sqrt{86}}{43} \approx 0,8627$ | 1,5960 |
| 2^{6-1} | 45 | $\frac{4\sqrt{10}}{15} \approx 0,8433$ | 1,7244 |
| 2^6 | 77 | $8\sqrt{\frac{1}{77}} \approx 0,9117$ | 1,7606 |
| 2^{7-1} | 79 | $8\sqrt{\frac{1}{79}} \approx 0,9001$ | 1,8848 |
| 2^7 | 143 | $8\sqrt{\frac{2}{143}} \approx 0,9461$ | 1,9095 |

Таблица 2.2

Матрица центрального композиционного планирования второго порядка для $k = 2$

| Опыты | x_0 | x_1 | x_2 | $x_1^2 - 2/3$ | $x_2^2 - 2/3$ | $x_1 x_2$ | \bar{y} |
|-------------------------|-------|-------|-------|---------------|---------------|-----------|-------------|
| Планирование типа 2^2 | +1 | -1 | -1 | 1/3 | 1/3 | +1 | \bar{y}_1 |
| | +1 | +1 | -1 | 1/3 | 1/3 | -1 | \bar{y}_2 |
| | +1 | -1 | +1 | 1/3 | 1/3 | -1 | \bar{y}_3 |
| | +1 | +1 | +1 | 1/3 | 1/3 | +1 | \bar{y}_4 |
| «Звездные» точки | +1 | -1 | 0 | 1/3 | -2/3 | 0 | \bar{y}_5 |
| | +1 | +1 | 0 | 1/3 | -2/3 | 0 | \bar{y}_6 |
| | +1 | 0 | -1 | -2/3 | 1/3 | 0 | \bar{y}_7 |
| | +1 | 0 | +1 | -2/3 | 1/3 | 0 | \bar{y}_8 |
| Нулевая точка | +1 | 0 | 0 | -2/3 | -2/3 | 0 | \bar{y}_9 |

Матрица центрального композиционного планирования второго порядка

$$\text{для } k = 3 \text{ (величина } \eta = \sqrt{\frac{8}{15}} = \sqrt{\frac{120}{15}} = \frac{11}{15})$$

| Опыты | X_0 | X_1 | X_2 | X_3 | $X_1^2 - 11/15$ | $X_2^2 - 11/15$ | $X_3^2 - 11/15$ | $X_1 X_2$ | $X_1 X_3$ | $X_2 X_3$ | \bar{y} |
|-------------------------------|-------|--------|--------|--------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------|-----------|-----------|----------------|
| Планирование типа 2^3 | +1 | -1 | 1 | -1 | 4/15 | 4/15 | 4/15 | +1 | +1 | +1 | \bar{y}_1 |
| | +1 | +1 | -1 | -1 | 4/15 | 4/15 | 4/15 | -1 | -1 | -1 | \bar{y}_2 |
| | +1 | -1 | 1 | 1 | 4/15 | 4/15 | 4/15 | -1 | +1 | -1 | \bar{y}_3 |
| | +1 | 1 | -1 | 1 | 4/15 | 4/15 | 4/15 | +1 | -1 | -1 | \bar{y}_4 |
| | +1 | -1 | 1 | -1 | 4/15 | 4/15 | 4/15 | +1 | +1 | -1 | \bar{y}_5 |
| | +1 | 1 | -1 | 1 | 4/15 | 4/15 | 4/15 | -1 | +1 | -1 | \bar{y}_6 |
| | +1 | -1 | 1 | 1 | 4/15 | 4/15 | 4/15 | -1 | -1 | +1 | \bar{y}_7 |
| | +1 | 1 | -1 | -1 | 4/15 | 4/15 | 4/15 | +1 | +1 | +1 | \bar{y}_8 |
| «Звездные» точки | +1 | -1,215 | 0 | 0 | 23/30 | -11/15 | -11/15 | 0 | 0 | 0 | \bar{y}_9 |
| | +1 | +1,215 | 0 | 0 | 23/30 | -11/15 | -11/15 | 0 | 0 | 0 | \bar{y}_{10} |
| | +1 | 0 | 1,215 | 0 | -11/15 | 23/30 | -11/15 | 0 | 0 | 0 | \bar{y}_{11} |
| | +1 | 0 | -1,215 | 0 | -11/15 | 23/30 | -11/15 | 0 | 0 | 0 | \bar{y}_{12} |
| | +1 | 0 | 0 | 1,215 | -11/15 | -11/15 | 23/30 | 0 | 0 | 0 | \bar{y}_{13} |
| | +1 | 0 | 0 | -1,215 | -11/15 | -11/15 | 23/30 | 0 | 0 | 0 | \bar{y}_{14} |
| | +1 | 0 | 0 | 0 | -11/15 | -11/15 | -11/15 | 0 | 0 | 0 | \bar{y}_{15} |
| | +1 | 0 | 0 | 0 | -11/15 | -11/15 | -11/15 | 0 | 0 | 0 | \bar{y}_{16} |

$$S^2_{bij} = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{\sum_{u=1}^n (x_{iu} x_{ju})^2}; \quad S^2_{bii} = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{\sum_{u=1}^n [(x'_i)^2]^2};$$

где $S^2_{\text{воспр}}$ — оценка дисперсии воспроизводимости результатов измерений (методика ее расчета дана в разд. 4.1). В табл. 2.4 даны расчетные значения величин $\sum_{u=1}^n x^2_{iu}$.

Таблица 2.4

Значения $\sum_{u=1}^n x^2_{iu}$ для ортогональных планов второго порядка

| Столбцы в матрице планиро- вания | Ядро плана | | | | | | | | |
|-------------------------------------------|----------------|----------------|----------------|------------------|----------------|------------------|----------------|------------------|----------------|
| | 2 ² | 2 ³ | 2 ⁴ | 2 ⁵⁻¹ | 2 ⁵ | 2 ⁶⁻¹ | 2 ⁶ | 2 ⁷⁻¹ | 2 ⁷ |
| x_0 | 9 | 15 | 25 | 27 | 43 | 45 | 77 | 78 | 143 |
| x_i | 6 | 10,9544 | 20 | 20,7846 | 37,0944 | 37,9471 | 70,1994 | 71,1049 | 135,2924 |
| x_{ij} | 4 | 8 | 16 | 16 | 32 | 32 | 64 | 64 | 128 |
| $x_i^2 - \varphi$ | 2 | 4,364 | 8 | 8,241 | 16,767 | 17,684 | 19,217 | 25,241 | 26,589 |

Уравнение регрессии при ортогональном планировании второго порядка имеет вид

$$y = b_0 + \sum_{1 \leq i \leq k} b_i x_i + \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k \\ i \neq j}} b_{ij} x_i x_j + \sum_{1 \leq i \leq k} b_{ii} (x'_i)^2.$$

Учитывая зависимость (2.2), уравнение регрессии можно переписать следующим образом:

$$y = b'_0 - \sum_{1 \leq i \leq k} \varphi b_{ii} + \sum_{1 \leq i \leq k} b_i x_i + \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k \\ i \neq j}} b_{ij} x_i x_j + \sum_{1 \leq i \leq k} b_{ii} x_i^2.$$

Величину $(b'_0 - \sum_{1 \leq i \leq k} \varphi b_{ii})$ обозначают b_0 . Коэффициент b_0 оценивается с дисперсией

$$S^2_{b_0} = S^2_{b'_0} + \sum_{1 \leq i \leq k} \varphi^2 S^2_{b_{ii}}.$$

Таким образом, в настоящем разделе изложены методы построения ортогональных композиционных планов второго порядка и расчета коэффициентов уравнения регрессии.

Требование ортогональности плана во многих случаях не является обязательным. Так, для сокращения числа измерений

или с целью повышения точности оценки регрессионной функции целесообразно использовать другие планы.

2.2. РОТАТАБЕЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Основная особенность ротатабельных планов заключается в их возможности предсказывать значения функции отклика с дисперсией, одинаковой на равных расстояниях от центра плана, т. е. обеспечить его инвариантность при вращении системы координат относительно центра [2, 12].

Построение ротатабельных планов производится аналогично ортогональным планам второго порядка. В качестве ядра плана используется ПФЭ, а при числе факторов более четырех можно использовать соответствующие полуреплики. Затем необходимо выполнить измерения в «звездных» точках и провести несколько экспериментов в нулевой точке (центр плана). «Звездное» плечо α выбирается из условия инвариантности плана к вращению и приближенно вычисляется по формуле $\alpha \approx 2^{k/4}$ для ядра, содержащего ПФЭ или по формуле $\alpha = 2^{(k-1)/4}$ для ядра, содержащего полуреплику.

При ротатабельном планировании очень важно выбрать количество измерений на нулевом уровне. Данные, необходимые для построения центральных композиционных ротатабельных планов, приведены в табл. 2.5 [4].

Таблица 2.5

Параметры центральных композиционных ротатабельных планов второго порядка

| Число факторов k | Ядро плана | Число точек | | | Величина плеча звездных точек α |
|--------------------|------------|-------------|-------------------|-------|----------------------------------------|
| | | «звездных» | на нулевом уровне | общее | |
| 2 | 2^2 | 4 | 5 | 13 | 1,414 |
| 3 | 2^3 | 6 | 6 | 20 | 1,682 |
| 4 | 2^4 | 8 | 7 | 31 | 2,000 |
| 5 | 2^5 | 10 | 10 | 52 | 2,378 |
| 5 | 2^{5-1} | 10 | 6 | 32 | 2,000 |
| 6 | 2^6 | 12 | 15 | 91 | 2,828 |
| 6 | 2^{6-1} | 12 | 9 | 53 | 2,378 |
| 7 | 2^7 | 14 | 21 | 163 | 3,333 |
| 7 | 2^{7-1} | 14 | 14 | 92 | 2,828 |

В табл. 2.6 и 2.7 приведены матрицы планирования для двух- и трехфакторных ротатабельных планов.

Таблица 2.6

Матрица ротатабельного планирования второго порядка для $k = 2$

| Опыты | x_0 | x_1 | x_2 | x_1^2 | x_2^2 | $x_1 x_2$ | \bar{y} |
|-------------------------------|-------|--------|--------|---------|---------|-----------|----------------|
| Планирование типа 2^2 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | \bar{y}_1 |
| | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 | +1 | \bar{y}_2 |
| | +1 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | \bar{y}_3 |
| | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | -1 | \bar{y}_4 |
| «Звездные» точки | +1 | -1,414 | 0 | +2 | 0 | 0 | \bar{y}_5 |
| | +1 | +1,414 | 0 | +2 | 0 | 0 | \bar{y}_6 |
| | +1 | 0 | -1,414 | 0 | +2 | 0 | \bar{y}_7 |
| | +1 | 0 | +1,414 | 0 | +2 | 0 | \bar{y}_8 |
| Нулевые точки | +1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | \bar{y}_9 |
| | +1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | \bar{y}_{10} |
| | +1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | \bar{y}_{11} |
| | +1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | \bar{y}_{12} |
| | +1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | \bar{y}_{13} |

В зависимости от числа факторов и других параметров выбранного плана коэффициенты уравнения регрессии находятся по следующим формулам:

$$b_0 = \frac{A}{n} [2\lambda^2(k+2) \sum_{u=1}^n y_u - 2\lambda \cdot c \sum_{i=1}^k \sum_{u=1}^n x_{iu}^2 y_u];$$

$$b_i = \frac{c}{n} \sum_{u=1}^n x_{iu} y_u;$$

$$b_{ij} = \frac{c^2}{n\lambda} \sum_{u=1}^n x_{iu} x_{ju} y_u;$$

$$b_{ii} = \frac{A}{n} \{c^2 [(k+2)\lambda - k] \sum_{u=1}^n x_{iu}^2 y_u +$$

$$+ c^2 (1-\lambda) \sum_{i=1}^k \sum_{u=1}^n x_{iu}^2 y_u - 2\lambda c \sum_{u=1}^n y_u\};$$

Для плана, ядром которого является ПФЭ, величины c , λ и A определяются следующим образом:

Матрица ротатабельного планирования второго порядка для $k = 3$

| Опыт | x_0 | x_1 | x_2 | x_3 | x_1^2 | x_2^2 | x_3^2 | x_1x_2 | x_1x_3 | x_2x_3 | \bar{y} | |
|---------------------|------------------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|----------|----------|----------|----------------|----------------|
| Ядро плана | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | \bar{y}_1 | |
| | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 | \bar{y}_2 | |
| | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | \bar{y}_3 | |
| | +1 | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | +1 | -1 | -1 | \bar{y}_4 | |
| | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | \bar{y}_5 | |
| | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | \bar{y}_6 | |
| | +1 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | \bar{y}_7 | |
| | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 | +1 | \bar{y}_8 | |
| «Звездные» точки | +1 | -1,682 | 0 | 0 | +2,828 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | \bar{y}_9 | |
| | +1 | +1,682 | 0 | 0 | +2,828 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | \bar{y}_{10} | |
| | +1 | 0 | -1,682 | 0 | 0 | +2,828 | 0 | 0 | 0 | 0 | \bar{y}_{11} | |
| | +1 | 0 | +1,682 | 0 | 0 | +2,828 | 0 | 0 | 0 | 0 | \bar{y}_{12} | |
| | +1 | 0 | 0 | -1,682 | 0 | 0 | +2,828 | 0 | 0 | 0 | \bar{y}_{13} | |
| | +1 | 0 | 0 | +1,682 | 0 | 0 | +2,828 | 0 | 0 | 0 | \bar{y}_{14} | |
| | Нулевые точки | +1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | \bar{y}_{15} |
| | | +1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | \bar{y}_{16} |
| | | +1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | \bar{y}_{17} |
| | | +1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | \bar{y}_{18} |
| +1 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | \bar{y}_{19} | |
| +1 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | \bar{y}_{20} | |

$$c = \frac{n}{\sum_{u=1}^n x_{iu}^2} ; \quad \lambda = \frac{n 2^k}{\left(\sum_{u=1}^n x_{iu}\right)^2}$$

Если ядро плана составляет полуреплика, тогда

$$\lambda = \frac{n 2^{k-1}}{\left(\sum_{u=1}^n x_{iu}\right)^2} ; \quad A = \frac{1}{2 \lambda [(k+2) \lambda - k]}$$

Для упрощения расчетов [4] можно определить все величины, зависящие от конструкции плана, и составить табл. 2.8.

Таблица 2.8

Данные для расчета коэффициентов уравнения регрессии при ротатбельном планировании второго порядка

| Ядро плана | b_0 | | b_i | b_{ij} | b_{ii} | | |
|------------------|-------------|--------------|------------|---------------|----------------|-----------------|------------------|
| | δ_0' | δ_0'' | δ_i | δ_{ij} | δ_{ii}' | δ_{ii}'' | δ_{ii}''' |
| 2 ² | 0,200000 | 0,100000 | 0,125000 | 0,250000 | 0,125000 | 0,018750 | 0,100000 |
| 2 ³ | 0,166338 | 0,056791 | 0,073224 | 0,125000 | 0,062500 | 0,006889 | 0,056791 |
| 2 ⁴ | 0,142857 | 0,035714 | 0,041667 | 0,062500 | 0,031250 | 0,003720 | 0,035714 |
| 2 ⁵⁻¹ | 0,159091 | 0,034091 | 0,041667 | 0,062500 | 0,031250 | 0,002841 | 0,034091 |
| 2 ⁵ | 0,099982 | 0,019392 | 0,023088 | 0,031346 | 0,015666 | 0,001523 | 0,019392 |
| 2 ⁶⁻¹ | 0,110749 | 0,018738 | 0,023087 | 0,031250 | 0,015625 | 0,001217 | 0,018738 |
| 2 ⁶ | 0,066653 | 0,010553 | 0,012499 | 0,015833 | 0,007914 | 0,000681 | 0,010553 |
| 2 ⁷⁻¹ | 0,070312 | 0,009766 | 0,012500 | 0,015625 | 0,007812 | 0,000488 | 0,009766 |
| 2 ⁷ | 0,047611 | 0,006428 | 0,006656 | 0,008089 | 0,004044 | 0,000418 | 0,006428 |

Тогда для вычисления коэффициентов уравнения регрессии можно использовать следующие упрощенные зависимости:

$$b_0 = \delta_0' \sum_{u=1}^n y_u - \delta_0'' \sum_{i=1}^k \sum_{u=1}^n x_{iu}^2 y_u ; \quad (2.5)$$

$$b_i = \delta_i \sum_{u=1}^n x_{iu} y_u ; \quad (2.6)$$

$$b_{ij} = \delta_{ij} \sum_{u=1}^n x_{iu} x_{ju} y_u ; \quad (2.7)$$

$$b_{ii} = \delta_{ii}' \sum_{u=1}^n x_{iu}^2 y_u + \delta_{ii}'' \sum_{i=1}^k \sum_{u=1}^n x_{iu}^2 y_u - \delta_{ii}''' \sum_{u=1}^n y_u . \quad (2.8)$$

Оценки дисперсий коэффициентов уравнения регрессии

$$S_{b_0}^2 = \frac{2 A \lambda^2 (k+2)}{n} S_{\text{воспр}}^2,$$

$$S_{bi}^2 = \frac{c}{n} S_{\text{воспр}}^2;$$

$$S_{bij}^2 = \frac{c^2}{n \lambda} S_{\text{воспр}}^2;$$

$$S_{bii}^2 = \frac{A[(k+2)\lambda - (k-1)]c^2}{n} S_{\text{воспр}}^2.$$

Упрощенные зависимости имеют следующий вид:

$$S_{b0}^2 = \gamma_0 S_{\text{воспр}}^2 \quad S_{bi}^2 = \gamma_i S_{\text{воспр}}^2; \quad (2.9)$$

$$S_{bij}^2 = \gamma_{ij} S_{\text{воспр}}^2 \quad S_{bii}^2 = \gamma_{ii} S_{\text{воспр}}^2.$$

Соответствующие значения γ сведены в табл. 2.9.

Таблица 2.9

Данные для определения оценок дисперсий коэффициентов уравнения регрессии при ротatableм планировании второго порядка

| Ядро плана | γ_0 | γ_i | γ_{ij} | γ_{ii} |
|------------|------------|------------|---------------|---------------|
| 2^2 | 0,2000 | 0,1250 | 0,2500 | 0,1250 |
| 2^3 | 0,1663 | 0,0732 | 0,1250 | 0,0625 |
| 2^4 | 0,1429 | 0,0417 | 0,0725 | 0,0312 |
| 2^{5-1} | 0,1591 | 0,0417 | 0,0625 | 0,0312 |
| 2^5 | 0,1000 | 0,0231 | 0,0312 | 0,0157 |
| 2^{6-1} | 0,1107 | 0,0231 | 0,0312 | 0,0156 |
| 2^6 | 0,0667 | 0,0125 | 0,0158 | 0,0079 |
| 2^{7-1} | 0,0703 | 0,0125 | 0,0156 | 0,0078 |
| 2^7 | 0,0476 | 0,0067 | 0,0081 | 0,0040 |

Определение оценки дисперсии воспроизводимости $S_{\text{воспр}}^2$ и последующий статистический анализ уравнения регрессии подробно описаны в разд. 4. Необходимо отметить, что для определения ошибки измерений можно использовать результаты, полученные в центре плана эксперимента

$$S_{\text{воспр}}^2 = S_0^2 = \frac{\sum_{u=1}^{I_0} (y_{0u} - \bar{y}_0)^2}{\gamma_0 - 1},$$

где y_{0u} — u -е измерение в центре плана; $\bar{y}_0 = \frac{\sum_{u=1}^{I_0} y_{0u}}{\gamma_0}$ — среднеарифметическое значение отклика в центре плана; γ_0 — число измерений в центре плана.

Ротатабельные планы были предложены Боксом достаточно давно (1960 г.), до недавнего времени были почти единственными планами второго порядка и получили широкое распространение [2, 12]. Однако по своим характеристикам они уступают другим известным в настоящее время планам. В связи с этим ротатабельные планы наиболее целесообразно применять, когда возникает необходимость использовать свойство ротатабельности и изучить внутреннюю часть области факторного пространства в виде шара радиусом $r \leq 1$.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛАНОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА И РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИХ ПРИМЕНЕНИЮ

При исследовании и сравнении планов второго порядка можно использовать методику, предложенную в работах [11, 6].

Каждый план необходимо характеризовать следующими показателями:

количество факторов, входящих в план, и число их уровней;
количество измерений в эксперименте;

точность оценки параметров уравнения регрессии;

точность оценки регрессионной функции в целом.

В качестве показателя точности оценки параметров уравнения регрессии $\{\beta\}$ можно взять величину определителя информационной матрицы, которая определяется по следующей формуле:

$$\det A = \det (N^{-1} X^* X),$$

где X — матрица независимых переменных размера $N \times m$; N — число всех измерений в эксперименте; m — число параметров в уравнении регрессии.

Для сравнения планов с различным числом измерений показатели точности рассматриваются относительными к одному измерению.

Величина $\det A$ обратно пропорциональна объему эллипсоида рассеяния. Эллипсоид рассеяния полностью определяется элементами ковариационной матрицы A^{-1} и оценками коэффициентов регрессии β . Планы, максимизирующие величину $\det A$, т. е. минимизирующие объем эллипсоида рассеяния, называются D -оптимальными. Следовательно, чем больше $\det A$, тем ближе план к D -оптимальному.

Другими важными характеристиками планов являются показатели точности оценки регрессионной функции в целом. Оценка дисперсии значений, предсказанных уравнением регрессии, имеет вид

$$S^2\{y_{расч}\} = S^2_{воспр} N^{-1} f^*(x) A^{-1} f(x),$$

Оценка дисперсии воспроизводимости $S_{\text{воспр}}^2$ зависит от точности проведения измерений и стационарности процесса и не зависит от координат точек плана. Поэтому в качестве характеристики плана целесообразно рассматривать величину

$$d(x) = N^{-1} f^*(x) A^{-1} f(x).$$

Максимальная, минимальная и средняя дисперсии оценки модели по области $-1 \ll x_i \ll 1$ представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} d_{\max} &= \max_{-1 \leq x_i \leq 1} N^{-1} f^*(x) A^{-1} f(x); \\ d_{\min} &= \min_{-1 \leq x_i \leq 1} N^{-1} f^*(x) A^{-1} f(x); \\ d_{\text{ср}} &= \frac{\int \dots \int_{-1 \leq x_i \leq 1} N^{-1} f^*(x) A^{-1} f(x)}{V_x}, \end{aligned}$$

где V_x — объем экспериментальной области.

Таким образом, чем меньше величины d_{\max} , d_{\min} и $d_{\text{ср}}$, тем точнее интерполяционный полином описывает исследуемый процесс.

3.1. ДВУХФАКТОРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Двухфакторное планирование второго порядка может осуществляться на множествах точек Коно [8] и Кифера [7] (планы Ko_{12} и Ki_{12}), а также с помощью планов Хартли [15] (Ha_2), Бокса-Дрейпера [3] ($B-D_{12}$, $B-D_{22}$, $B-D_{32}$ и $B-D_{42}$), B_2 планов [11], правильных пяти- и шестигульников [10], D -оптимальных и ротатабельных планов Бокса.

Характеристики $\det A$, d_{\max} , d_{\min} и $d_{\text{ср}}$ для указанных планов приведены в табл. 3.1 [6]. Широкий выбор планов позволяет выбрать тот или иной, исходя из конкретной ситуации: описание процесса во всей исследуемой области, нахождение оптимальной точки или подобласти, достижение определенной цели при минимальных затратах времени и сырья на эксперимент и т. д.

Планы этой размерности содержат от 6 до 9 различных точек. Координаты точек некоторых планов и количества повторных измерений в них γ_u приведены в табл. 3.2. Для двухфакторных планов второго порядка построены линии равного уровня дисперсии предсказанных регрессионной функцией значений отклика (рис. 3.1—3.6). Точки планов на рис. 3.1—3.6 отмечены концентрическими окружностями, число которых соответствует числу повторных измерений.

Планы Ko_{12} и Ki_{12} — это дискретные планы. Распреде-

Таблица 3.1

Сравнительные характеристики двухфакторных планов второго порядка

| Название плана | Число факторов, k | Число параметров регрессии | Общее количество измерений | $\det A$ | d_{cp} | d_{max} | d_{min} |
|--------------------------|---------------------|----------------------------|----------------------------|-----------------------|----------|-----------|-----------|
| <i>D</i> -оптимальный | 2 | 6 | | $0,114 \cdot 10^{-1}$ | 4,56 | 6,00 | 3,31 |
| $K\alpha_{32}$ | | | 20 | $0,108 \cdot 10^{-1}$ | 4,78 | 7,68 | 3,28 |
| Ki_{12} | | | 21 | $0,111 \cdot 10^{-1}$ | 4,59 | 7,18 | 3,18 |
| $B-D_{12}$ | | | 9 | $0,975 \cdot 10^{-2}$ | 4,05 | 7,25 | 3,20 |
| $B-D_{22}$ | | | 14 | $0,110 \cdot 10^{-1}$ | 4,18 | 6,25 | 3,14 |
| $B-D_{32}$ | | | 6 | $0,574 \cdot 10^{-2}$ | 4,91 | 11,18 | 2,64 |
| $B-D_{42}$ | | | 6 | $0,549 \cdot 10^{-2}$ | 6,00 | 16,50 | 2,65 |
| B_2 | | | 8 | $0,870 \cdot 10^{-2}$ | 5,96 | 6,67 | 3,68 |
| Ha_2 | | | 7 | $0,816 \cdot 10^{-3}$ | 6,92 | 66,50 | 3,76 |
| Шестиугольник ($N=7$) | | | 7 | $0,268 \cdot 10^{-3}$ | 5,73 | 25,39 | 3,76 |
| Шестиугольник ($N=10$) | | | 10 | $0,126 \cdot 10^{-3}$ | 6,02 | 29,10 | 2,41 |
| Пятиугольник | | | 6 | $0,262 \cdot 10^{-3}$ | 5,57 | 25,20 | 3,60 |
| Ротатабельный | | | 13 | $0,133 \cdot 10^{-3}$ | 5,95 | 28,59 | 2,47 |

Таблица 3.2

Двухфакторные планы второго порядка

| План | № п/п | γ_u | | | γ_v | | | γ_w | | | γ_x | | |
|----------------|-------|------------|-------|-------|------------|-------|-------|------------|-------|-------|------------|-------|-------|
| | | x_1 | x_2 | x_3 |
| $K\alpha_{12}$ | 1 | 3 | -1 | -1 | 4 | 3 | +1 | +1 | 7 | 1 | 0 | -1 | |
| | 2 | 3 | +1 | -1 | 5 | 2 | -1 | 0 | 8 | 1 | 0 | +1 | |
| | 3 | 3 | -1 | +1 | 6 | 2 | +1 | 0 | 9 | 2 | 0 | 0 | |
| Ki_{12} | 1 | 3 | -1 | -1 | 4 | 3 | +1 | +1 | 7 | 2 | 0 | -1 | |
| | 2 | 3 | +1 | -1 | 5 | 2 | -1 | 0 | 8 | 1 | 0 | +1 | |
| | 3 | 3 | -1 | +1 | 6 | 2 | +1 | 0 | 9 | 2 | 0 | 0 | |
| $B-D_{12}$ | 1 | 1 | -1 | -1 | 4 | 1 | +1 | +1 | 7 | 1 | 0 | -1 | |
| | 2 | 1 | +1 | -1 | 5 | 1 | -1 | 0 | 8 | 1 | 0 | +1 | |
| | 3 | 1 | -1 | +1 | 6 | 1 | +1 | 0 | 9 | 1 | 0 | 0 | |
| $B-D_{22}$ | 1 | 2 | -1 | -1 | 4 | 2 | +1 | +1 | 7 | 1 | 0 | -1 | |
| | 2 | 2 | +1 | -1 | 5 | 1 | -1 | 0 | 8 | 1 | 0 | +1 | |
| | 3 | 2 | -1 | +1 | 6 | 1 | +1 | 0 | 9 | 2 | 0 | 0 | |
| $B-D_{32}$ | 1 | 1 | -1 | +1 | 3 | 1 | -1 | -1 | 5 | 1 | +1 | -0,39 | |
| | 2 | 1 | +1 | +1 | 4 | 1 | -0,13 | +0,13 | 6 | 1 | +0,39 | -1 | |
| $B-D_{42}$ | 1 | 1 | -1 | -1 | 3 | 1 | -1 | +1 | 5 | 1 | +1 | -1 | |
| | 2 | 1 | -1 | 0 | 4 | 1 | 0 | 0 | 6 | 1 | +1 | +1 | |

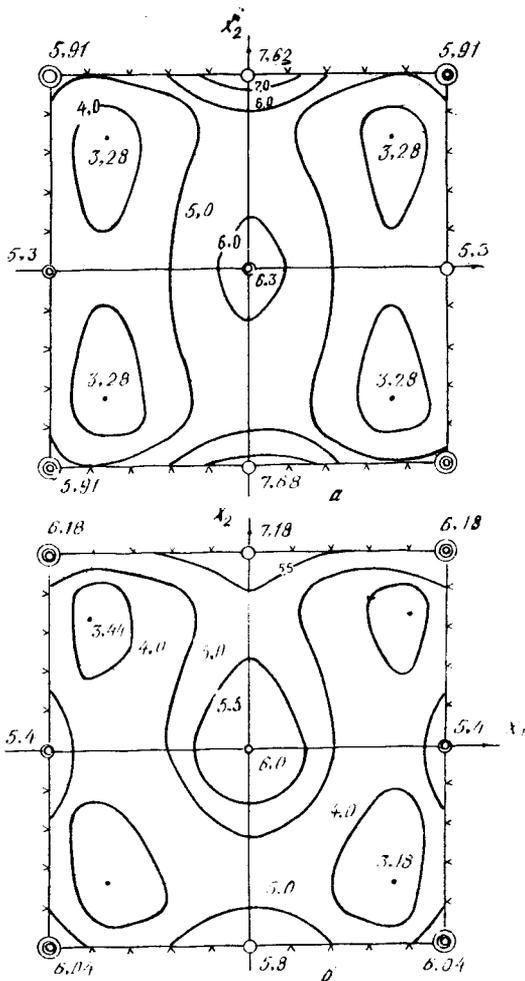


Рис. 3.1. Линии равного уровня дисперсии предсказанных регрессионной функцией значений отклика для планов K_{012} (а) и K_{112} (б)

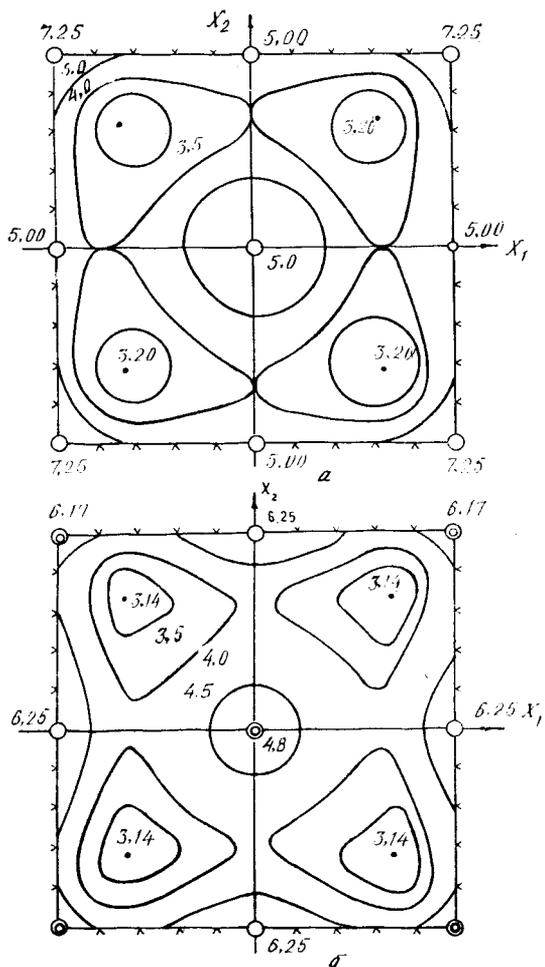


Рис. 3.2. Линии равного уровня дисперсии предсказанных регрессионной функцией значений отклика для планов $B-D_{12}(a)$ и $B-D_{22}(b)$

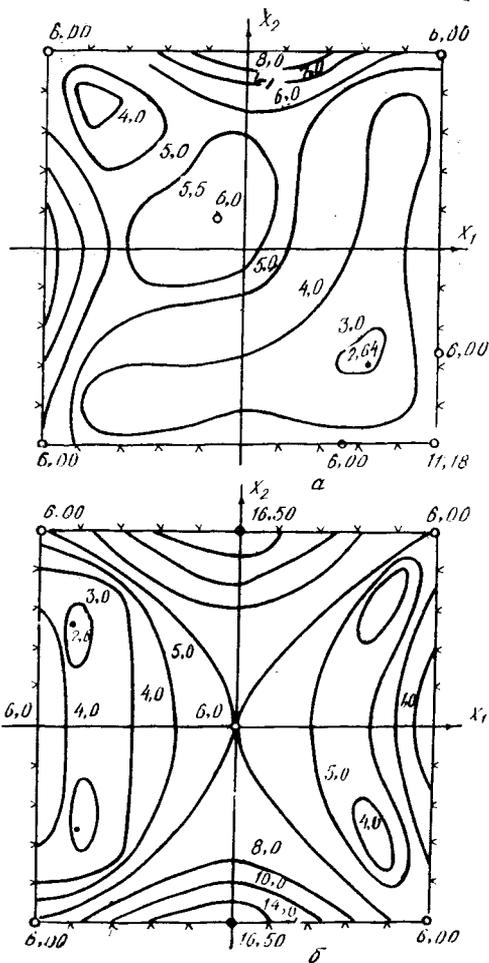


Рис. 3.3. Линии равного уровня дисперсии предсказанных регрессионной функцией значений отклика для планов $B-D_{22}$ (а) и $B-D_{42}$ (б).

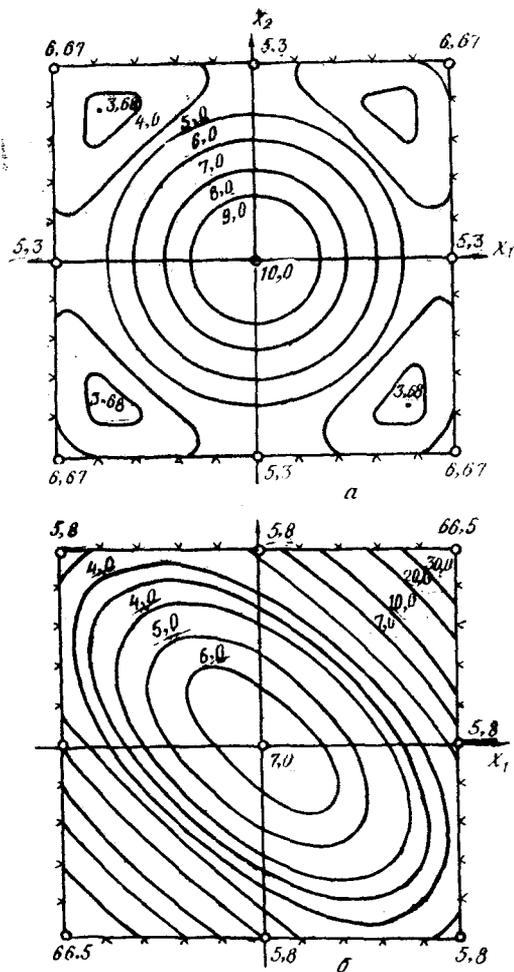


Рис. 3.4. Линии равного уровня дисперсии предсказанных регрессионной функцией значений отклика для планов B_2 (а) и Ha_2 (б)

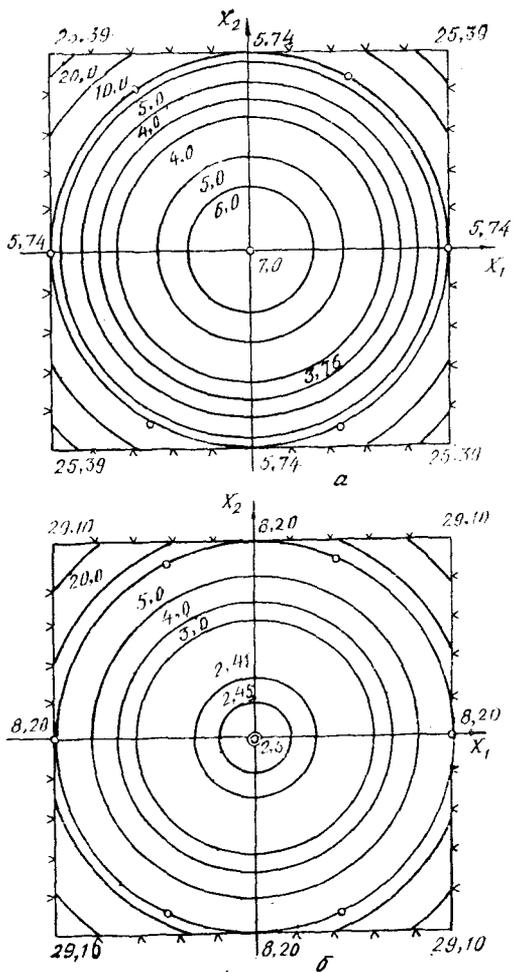


Рис. 3.5. Линии равного уровня дисперсии предсказанных регрессионной функцией значений отклика для планов шестиугольника $N = 7$ (а) и шестиугольника $N = 10$ (б)

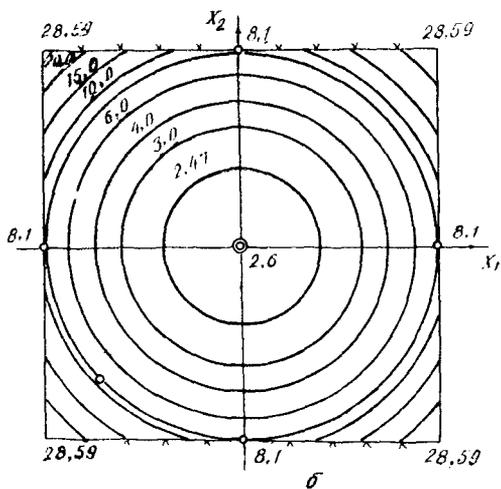
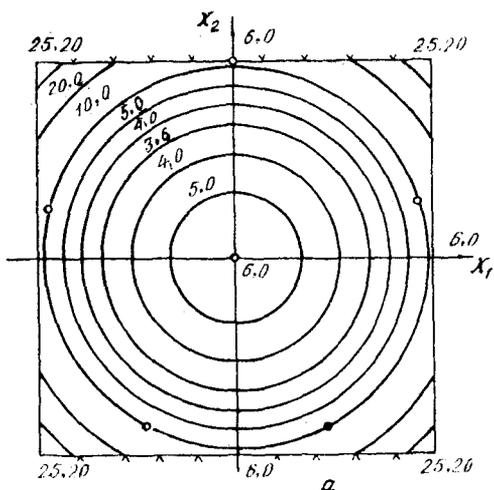


Рис. 3.6. Линии равного уровня дисперсии предсказанных регрессионной функцией значений отклика для планов: пятиугольник $N = 6$ (а) и ротатбельный Бокса (б)

ние повторных измерений внутри множеств точек планов осуществляется на основании критерия максимизации определителя информационной матрицы. По величине определителя информационной матрицы эти планы практически совпадают с так называемыми D -оптимальными непрерывными планами (величины соответствующих им определителей $\det A$ являются верхними границами для всех прочих планов). Очевидно, что указанные планы следует применять при уточнении параметров модели.

По величине $d_{\text{ср}}$ одни из лучших — это планы $B-D_{12}$ и $B-D_{22}$. По величинам D_{max} , d_{min} и $d_{\text{ср}}$ планы Ko_{12} , Ki_{12} , $B-D_{12}$ и $B-D_{22}$ отличаются незначительно. Диапазон изменения дисперсии предсказанных регрессионной функцией значений по области $-1 \leq x_i \leq 1$ для них невелик (см. рис. 3.1, 3.2). Следовательно, их можно с успехом использовать для описания процесса во всей исследуемой области.

Достаточно хорошие показатели имеет восьмиточечный план B_2 (см. рис. 3.4,а). Если наряду с другими задачами стоит задача минимизации числа опытов, можно использовать шеститочечные планы $B-D_{32}$ или $B-D_{42}$ (см. рис. 3.3). Планы Ha_2 , правильные пяти- и шестиугольники, ротатабальный план Бокса (рис. 3.4,б; 3.5; 3.6) имеют характеристики $\det A$ и $d_{\text{ср}}$ значительно более худшие по сравнению с вышерассмотренными планами.

3.2. ТРЕХФАКТОРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Трехфакторные планы второго порядка содержат от 10 до 26 различных точек. В табл. 3.3 приведены характеристики 11 планов второго порядка.

По величинам $\det A$ к D -оптимальному непрерывному очень близки планы Ko_{13} (31 измерение) и Ki_{13} (30 измерений). Однако число измерений для них намного превышает число коэффициентов уравнения регрессии. Их рекомендуется применять, если затраты на эксперимент невелики, или требуется высокая точность оценки параметров. Незначительно уступают планам Ko_{13} и Ki_{13} планы Ko_{23} и Ki_{23} по величинам $\det A$. По величинам $d_{\text{ср}}$, d_{max} и d_{min} эти планы отличаются друг от друга несущественно.

В случае, когда экспериментатор ограничен в количестве измерений, можно использовать насыщенные (число измерений равно числу параметров уравнения регрессии) десятиточечные планы $B-D_{13}$ и $B-D_{23}$. Первый из них имеет дробные координаты точек, второй — целочисленные.

Таблица 3.3

Сравнительные характеристики трехфакторных планов второго порядка

| Название плана | Число факторов | Число пара- метров регрес- сии | Общее коли- чество изме- рений | $\det A$ | $d_{\text{ср}}$ | d_{max} | d_{min} |
|-----------------------|-------------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|-----------------------|-----------------|------------------|------------------|
| <i>D</i> -оптимальный | 3 | 10 | | | | | |
| Ko_{13} | | | 31 | $0,556 \cdot 10^{-3}$ | 7,60 | 10,59 | 4,94 |
| Ko_{23} | | | 21 | $0,489 \cdot 10^{-3}$ | 7,75 | 11,53 | 5,55 |
| Ki_{13} | | | 30 | $0,470 \cdot 10^{-3}$ | 7,77 | 14,15 | 5,66 |
| Ki_{23} | | | 26 | $0,308 \cdot 10^{-3}$ | 6,61 | 13,43 | 5,22 |
| $B-D_{13}$ | | | 10 | $0,204 \cdot 10^{-3}$ | 7,07 | 18,39 | 4,54 |
| $B--D_{23}$ | | | 10 | $0,857 \cdot 10^{-4}$ | 7,33 | 31,74 | 3,08 |
| B_3 | | | 14 | $0,453 \cdot 10^{-3}$ | 5,83 | 11,20 | 4,31 |
| $B-B_3$ | | | 15 | $0,436 \cdot 10^{-4}$ | 5,77 | 20,94 | 4,13 |
| Ортогональный | | | 15 | $0,421 \cdot 10^{-5}$ | 6,97 | 25,06 | 4,62 |
| Ha_3 ($I=123$) | | | 11 | $0,363 \cdot 10^{-5}$ | 10,82 | 76,89 | 3,24 |
| Ротатабельный | | | 20 | $0,132 \cdot 10^{-8}$ | 15,11 | 96,44 | 3,21 |

Неплохие характеристики имеет план B_3 . Величина $\det A$ для него близка к определителю *D*-оптимального плана. По величине $d_{\text{ср}}$ этот план один из лучших. Его можно рекомендовать при описании технологического процесса во всей исследуемой области.

Учитывая, что планы Ko_{i3} и Ki_{i3} и некоторые другие являются ненасыщенными, они могут быть использованы для построения моделей более высокого порядка (например, возможно добавление каких-либо тройных взаимодействий).

Необходимо отметить, что ротатабельный план Бокса, который получил широкое распространение, по своим характеристикам значительно уступает всем прочим. И только в случае, если исследователю необходимо использовать свойство ротатабельности, его применение может быть оправдано.

В табл. 3.4 приведены матрицы планирования для ряда трехфакторных планов второго порядка.

4. ПЛАНИРОВАНИЕ, ОБРАБОТКА И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Определение и выбор параметров оптимизации (откликов),

числа варьируемых факторов технологических процессов и интервалов их варьирования проводится в соответствии с рекомендациями, которые подробно изложены в работе [1].

Учитывая, во-первых, имеющуюся информацию о характере функции отклика, например, по однофакторным зависимостям, во-вторых, требования к математической модели с точки зрения нахождения оптимальных условий протекания процесса или его описания во всей исследуемой области факторного пространства, в третьих, число варьируемых факторов (двух- или трехфакторный эксперимент), исследователь должен выбрать план эксперимента с приемлемыми характеристиками, которые представлены в разд. 3.

Последующими обязательными этапами планирования и проведения эксперимента, обработки и анализа его результатов являются:

кодирование факторов и составление плана-матрицы эксперимента в натуральных единицах изучаемых факторов;

проведение рандомизации измерений и реализация плана эксперимента;

проверка воспроизводимости (равноточности) измерений;

расчет и оценка значимости коэффициентов уравнения регрессии;

проверка адекватности математической модели;

анализ и интерпретация результатов эксперимента.

4.1. КОДИРОВАНИЕ ФАКТОРОВ

Поскольку факторы изучаемого технологического процесса неоднородны и имеют различные единицы измерения, их следует привести к единой системе исчисления путем перехода от действительных значений факторов к кодированным. В результате такого перехода в каждой точке плана эксперимента уровни факторов технологического процесса должны быть выражены в кодовых единицах измерения и соответствующих им натуральных значениях.

Если интервал варьирования для i -го фактора в натуральных единицах имеет вид

$$\bar{x}_{i \text{ min}} \leq \bar{x}_i \leq \bar{x}_{i \text{ max}},$$

то натуральное значение фактора на нулевом уровне в кодовых единицах (обозначается «0») определяется по формуле

$$\bar{x}_{i0} = \frac{\bar{x}_{i \text{ max}} + \bar{x}_{i \text{ min}}}{2}.$$

Интервал варьирования в натуральных единицах измерения

$d\bar{x}_i$ соответствует расстоянию между точками плана, равному единице в кодовых значениях, и определяется по формуле

$$d\bar{x}_i = \frac{\bar{x}_{i \max} - \bar{x}_{i \min}}{2 dx_{i \max}}, \quad (4.1)$$

где $dx_{i \max}$ — расстояние в кодовых единицах от центра (нулевого уровня) до наиболее удаленной точки плана вдоль соответствующей координаты каждого фактора.

Например, в случае использования центральных композиционных планов $dx_{i \max}$ равно величине плеча «звездных» точек α , а при использовании большинства других планов $dx_{i \max}$ равно единице.

Таким образом, зная координаты в кодовых единицах всех точек плана (см. табл. 2.2, 2.3, 2.6, 2.7; 3.2, 3.4), можно рассчитать натуральные значения соответствующих координат по каждому фактору по следующей формуле:

$$\bar{x}_i = x_i d\bar{x}_i,$$

где \bar{x}_i — натуральное значение координаты, x_i — кодовое значение координаты.

На основании проведенных расчетов производится построение плана-матрицы эксперимента в натуральных значениях факторов. Каждая строка построенной план-матрицы представляет собой совокупность уровней варьируемых факторов, т. е. определяет режимы, при которых необходимо реализовать эксперимент или в соответствии с принятой нами терминологией осуществить одно измерение. Число повторных измерений в каждой точке плана-матрицы, т. е. при одном сочетании уровней изучаемых факторов, устанавливается в соответствии с выбранным планом эксперимента или самим исследователем в целях последующей проверки измерений на равнозначность и определения оценки дисперсии воспроизводимости (ошибки) измерений.

4.2. РАНДОМИЗАЦИЯ ИЗМЕРЕНИЙ И РЕАЛИЗАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Рандомизацией называется процедура установления случайного порядка проведения измерений (опытов) во времени, так как кроме варьируемых факторов при исследовании технологических процессов имеется целый ряд дополнительных факторов, оказывающих влияние на функцию откликов. Рандомизация вносит элемент случайности влияния дополнительных факторов на результат и позволяет обоснованно применять аппарат математической статистики. Для осуществления рандомизации пользуются таблицами случайных чисел, извлечением номеров опытов из «урны» и т. п. В результате рандомизации

последовательность проведения измерений во времени с учетом всех точек плана и повторных измерений не соответствует порядковым номерам опытов, представленных в соответствующих планах-матрицах.

Реализация эксперимента проводится в соответствии с порядком проведения измерений после рандомизации. В результате реализации эксперимента определяются значения откликов или параметров оптимизации в каждом опыте и повторном измерении, что фиксируется в таблице результатов. Число значений откликов в каждой строке плана-матрицы в таблице результатов соответствует числу повторных измерений в опыте, а число строк — числу опытов в эксперименте, например, для эксперимента K_{013} — табл. 4.1.

Необходимо отметить, что если в плане-матрице эксперимента и таблице результатов уровни факторов должны записываться в кодовых единицах, то значения отклика при каждом измерении — в натуральных единицах.

Таблица 4.1

План-матрица K_{013} ($N=31$, $N_1=10$) и результаты эксперимента y_{ui} ($1 \leq u \leq N_1$, $1 \leq i \leq \gamma_u$)

| № п/п | x_1 | x_2 | x_3 | γ_u | y_{ui} | |
|-------|-------|-------|-------|------------|-----------|-----------|
| 1 | -1 | -1 | -1 | 2 | y_{11} | y_{12} |
| 2 | +1 | -1 | -1 | 2 | y_{21} | y_{22} |
| 3 | -1 | +1 | -1 | 2 | y_{31} | y_{32} |
| 4 | +1 | +1 | -1 | 2 | y_{41} | y_{42} |
| 5 | -1 | -1 | +1 | 2 | y_{51} | y_{52} |
| 6 | +1 | -1 | -1 | 2 | y_{61} | y_{62} |
| 7 | -1 | +1 | +1 | 2 | y_{71} | y_{72} |
| 8 | +1 | +1 | +1 | 2 | y_{81} | y_{82} |
| 9 | -1 | -1 | 0 | 1 | y_{91} | — |
| 10 | -1 | +1 | 0 | 1 | y_{101} | — |
| 11 | +1 | -1 | 0 | 1 | y_{111} | — |
| 12 | +1 | +1 | 0 | 1 | y_{121} | — |
| 13 | 0 | -1 | -1 | 1 | y_{131} | — |
| 14 | 0 | -1 | +1 | 1 | y_{141} | — |
| 15 | 0 | +1 | -1 | 1 | y_{151} | — |
| 16 | 0 | +1 | +1 | 1 | y_{161} | — |
| 17 | -1 | 0 | -1 | 1 | y_{171} | — |
| 18 | +1 | 0 | -1 | 1 | y_{181} | — |
| 19 | -1 | 0 | +1 | 1 | y_{191} | — |
| 20 | +1 | 0 | +1 | 2 | y_{201} | y_{202} |
| 21 | 0 | 0 | 0 | 2 | y_{211} | y_{212} |

4.3. ПРОВЕРКА РАВНОТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

На настоящем этапе проводится анализ результатов эксперимента на предмет наличия отдельных грубых ошибок измерений (выбросов) и оценивается дисперсия воспроизводимости экспериментальных данных. Для проверки равноточности измерений необходимо провести их дублирование в некоторых точках плана или всего плана в целом. Например, планы Коно, Кифера и другие предусматривают дублирование опытов в некоторых точках, которые и могут быть использованы для определения оценки дисперсии воспроизводимости (табл. 4.1). Если планом эксперимента дублирование измерений не предусматривается, исследователь должен выбрать, в каких точках плана и сколько раз необходимо повторить измерения для оценки дисперсии воспроизводимости.

Рассмотрим случай неравномерного дублирования измерений. Пусть для вычисления оценки дисперсии воспроизводимости и проверки равноточности измерений используется N_1 точек (N_1 может быть меньше, равно или больше числа точек плана), в которых проводятся повторные измерения по γ_u раз в каждой, $u = 1 \div N_1$. Выборочная оценка дисперсии в u -м опыте вычисляется по формуле

$$S^2_{y_u} = \frac{1}{\gamma_u - 1} \sum_{1 \leq i \leq \gamma_u} (y_{ui} - \bar{y}_u)^2 \quad (4.2)$$

со степенями свободы $f_u = (\gamma_u - 1)$.

Среднее арифметическое значение отклонка в u -й точке плана определяется по формуле

$$\bar{y}_u = \frac{1}{\gamma_u} \sum_{1 \leq i \leq \gamma_u} y_{ui} \quad (4.3)$$

Оценка дисперсии воспроизводимости измерений при реализации плана эксперимента вычисляется как среднее взвешенное

$$S^2_{\text{воспр}} = \frac{\sum_{1 \leq u \leq N_1} f_u S^2_{y_u}}{\sum_{1 \leq u \leq N_1} f_u} \quad (4.4)$$

со степенями свободы $f_{\text{воспр}} = \sum_{1 \leq u \leq N_1} f_u = \sum_{1 \leq u \leq N_1} \gamma_u - N_1$.

Проверка равноточности измерений (однородности ряда оценок дисперсий $S^2_{y_1}, S^2_{y_2}, \dots, S^2_{y_{N_1}}$) осуществляется с помощью статистики

$$B_{\text{ЭК}} = 1/C \left(f_{\text{воспр}} \ln S^2_{\text{воспр}} - \sum_{1 \leq u \leq N_1} f_u \ln S^2_{y_u} \right), \quad (4.5)$$

где $C = 1 + \frac{1}{3(N_1 - 1)} \left(\sum_{1 \leq u \leq N_1} \frac{1}{f_u} - \frac{1}{f_{\text{воспр}}} \right)$.

Бартлет показал, что величина B распределена приближенно как критерий Пирсона χ^2 со степенями свободы $f = N_1 - 1$, если $f_u > 2$.

В частном случае, когда число повторных измерений в точках плана одинаково ($\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_{N_1} = \gamma$), то проверку однородности выборочных оценок дисперсий необходимо проводить с помощью критерия Кохрена (G -статистика)

$$G^{\text{эк}} = \frac{\max_{1 \leq u \leq N_1} \{S^2 y_u\}}{\sum_{1 \leq u \leq N_1} S^2 y_u}$$

с числами степеней свободы $f_1 = f_u = \gamma - 1$ и $f_2 = N_1$.

Экспериментальные значения $B^{\text{эк}}$ и $G^{\text{эк}}$ критерия сравниваются соответственно с табличными значениями χ^2 и $G^{\text{т}}$ — статистики. Если $B^{\text{эк}} \leq \chi^2_{\alpha, f_1, f_2}$ или $G^{\text{эк}} \leq G^{\text{т}}_{\alpha, f_1, f_2}$, то при выбранном уровне значимости α гипотеза о равнозначности измерений (однородности оценок дисперсий) не отвергается.

В противном случае необходимо устранить причину неоднородности оценок дисперсий, например, путем увеличения объема выборок повышения точности измерений, преобразования критериев оптимальности.

После достижения однородности оценок дисперсий эксперимента исследователь может перейти к вычислению параметров математической модели.

4.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЯ РЕГРЕССИИ И ОЦЕНКА ИХ ЗНАЧИМОСТИ

Вычисление коэффициентов уравнения регрессии производится, как и во всех видах планирования эксперимента, с помощью метода наименьших квадратов. В матричной форме вектор-столбец коэффициентов имеет вид

$$B = (X^*WX)^{-1} X^*WY,$$

где X — матрица независимых переменных размера $n \times m$;

$W = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & 0 \\ & \gamma_2 & \\ 0 & & \gamma_l \end{pmatrix} n \times n$ — диагональная матрица весов размера $n \times n$;

Y — вектор-столбец откликов размера $n \times 1$; n — число точек плана; m — число оцениваемых коэффициентов модели.

Операции перемножения и обращения матриц трудоемки. В разд. 2 даны методика и упрощенные зависимости для вычисления коэффициентов уравнения регрессии в случае использования композиционных ортогональных и ротатабельных планов второго порядка.

Таблица 4.2

Матрица L для вычисления коэффициентов регрессии по двухфакторным планам K_{012} , K_{i12} , $B-D_{32}$, $B-D_{12}$, $B-D_{22}$, $B-D_{42}$

| План | № п/п | Матрица L | | | | | | Вектор выхода Y |
|------------|-------|-------------|--------|--------|----------|----------|----------|-------------------|
| | | b_0 | b_1 | b_2 | b_{11} | b_{12} | b_{22} | |
| K_{012} | 1 | -0,094 | -0,188 | -0,214 | 0,141 | 0,250 | 0,188 | \bar{y}_1 |
| | 2 | -0,094 | 0,188 | -0,214 | 0,141 | -0,250 | 0,188 | \bar{y}_2 |
| | 3 | -0,094 | -0,188 | 0,214 | 0,141 | -0,250 | 0,188 | \bar{y}_3 |
| | 4 | -0,094 | -0,188 | 0,214 | 0,141 | 0,250 | 0,188 | \bar{y}_4 |
| | 5 | 0,188 | -0,125 | 0 | 0,219 | 0 | -0,375 | \bar{y}_5 |
| | 6 | 0,188 | 0,125 | 0 | 0,219 | 0 | -0,375 | \bar{y}_6 |
| | 7 | 0,188 | 0 | -0,071 | -0,281 | 0 | 0,125 | \bar{y}_7 |
| | 8 | 0,188 | 0 | 0,071 | -0,281 | 0 | 0,125 | \bar{y}_8 |
| | 9 | 0,625 | 0 | 0 | -0,438 | 0 | -0,250 | \bar{y}_9 |
| K_{i12} | 1 | -0,136 | -0,188 | -0,198 | 0,203 | 0,250 | 0,160 | \bar{y}_1 |
| | 2 | -0,136 | 0,188 | -0,198 | 0,203 | -0,250 | 0,160 | \bar{y}_2 |
| | 3 | -0,077 | -0,188 | 0,208 | 0,116 | -0,250 | 0,198 | \bar{y}_3 |
| | 4 | -0,077 | 0,188 | 0,208 | 0,116 | 0,250 | 0,198 | \bar{y}_4 |
| | 5 | 0,213 | -0,125 | -0,010 | 0,181 | 0 | -0,358 | \bar{y}_5 |
| | 6 | 0,213 | 0,125 | -0,010 | 0,181 | 0 | -0,358 | \bar{y}_6 |
| | 7 | 0,271 | 0 | -0,103 | -0,406 | 0 | 0,181 | \bar{y}_7 |
| | 8 | 0,155 | 0 | 0,084 | -0,232 | 0 | 0,103 | \bar{y}_8 |
| | 9 | 0,574 | 0 | 0,019 | -0,361 | 0 | -0,284 | \bar{y}_9 |
| $B-D_{32}$ | 1 | -0,063 | -0,194 | 0,194 | -0,306 | 0,184 | 0,184 | \bar{y}_1 |
| | 2 | -0,004 | 0,231 | 0,269 | 0,269 | -0,061 | 0,297 | \bar{y}_2 |
| | 3 | -0,004 | -0,269 | -0,231 | 0,269 | 0,297 | -0,061 | \bar{y}_3 |
| | 4 | 0,977 | -0,174 | 0,174 | 0,174 | -0,576 | -0,576 | \bar{y}_4 |
| | 5 | 0,047 | 0,203 | -0,203 | -0,203 | 0,670 | -0,514 | \bar{y}_5 |
| | 6 | 0,047 | 0,203 | -0,203 | -0,203 | -0,514 | 0,670 | \bar{y}_6 |
| $B-D_{12}$ | 1 | -0,111 | -0,167 | -0,167 | 0,167 | 0,250 | 0,167 | \bar{y}_1 |
| | 2 | -0,111 | 0,167 | -0,167 | 0,167 | -0,250 | 0,167 | \bar{y}_2 |
| | 3 | -0,111 | -0,167 | 0,167 | 0,167 | -0,250 | 0,167 | \bar{y}_3 |
| | 4 | -0,111 | 0,167 | 0,167 | 0,167 | 0,250 | 0,167 | \bar{y}_4 |
| | 5 | 0,222 | -0,167 | 0 | 0,167 | 0 | -0,333 | \bar{y}_5 |
| | 6 | 0,222 | 0,167 | 0 | 0,167 | 0 | -0,333 | \bar{y}_6 |
| | 7 | 0,222 | 0 | -0,167 | -0,333 | 0 | 0,167 | \bar{y}_7 |
| | 8 | 0,222 | 0 | 0,167 | -0,333 | 0 | 0,167 | \bar{y}_8 |
| | 9 | 0,556 | 0 | 0 | -0,333 | 0 | -0,333 | \bar{y}_9 |
| $B-D_{22}$ | 1 | -0,077 | -0,200 | -0,200 | 0,154 | -0,250 | 0,154 | \bar{y}_1 |
| | 2 | -0,077 | 0,200 | -0,200 | 0,154 | -0,250 | 0,154 | \bar{y}_2 |
| | 3 | -0,077 | -0,200 | 0,200 | 0,154 | 0,250 | 0,154 | \bar{y}_3 |
| | 4 | -0,077 | 0,200 | 0,200 | 0,154 | 0,250 | 0,154 | \bar{y}_4 |
| | 5 | 0,154 | -0,100 | 0 | 0,192 | 0 | -0,308 | \bar{y}_5 |
| | 6 | 0,154 | 0,100 | 0 | 0,192 | 0 | -0,308 | \bar{y}_6 |
| | 7 | 0,154 | 0 | -0,100 | -0,308 | 0 | 0,192 | \bar{y}_7 |
| | 8 | 0,154 | 0 | 0,100 | -0,308 | 0 | 0,192 | \bar{y}_8 |
| | 9 | 0,692 | 0 | 0 | -0,385 | 0 | -0,385 | \bar{y}_9 |

| План | № п/п | Матрица L | | | | | | Вектор выхода Y |
|------------|-------|-------------|-------|-------|----------|----------|----------|-------------------------|
| | | b_0 | b_1 | b_2 | b_{11} | b_{12} | b_{22} | |
| $B-D_{42}$ | 1 | 0 | -0,25 | -0,25 | 0,25 | -0,25 | 0,50 | \bar{y}_1 |
| | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1,00 | -1,00 | \bar{y}_2 |
| | 3 | 0 | -0,25 | 0,25 | -0,25 | -0,25 | 0,50 | \bar{y}_3 |
| | 4 | 1,00 | 0 | 0 | 0 | -1,00 | 0 | \bar{y}_4 |
| | 5 | 0 | 0,25 | -0,25 | -0,25 | 0,25 | 0 | \bar{y}_5 |
| | 6 | 0 | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 0 | \bar{y}_6 |

Для некоторых планов, рекомендуемых в разд. 3, и в табл. 4.2—4.3 приведены матрицы $L = [(X^*WX)^{-1}X^*W]^*$ соответственно для двух- и трехфакторных планов второго порядка [6]. Используя их, с помощью ЭВМ или микрокалькулятора находят коэффициенты уравнения регрессии.

Пусть l_{ui} — элемент матрицы L , соответствующий u -му опыту и i -му фактору, его квадрату или взаимодействию факторов. Тогда коэффициент b_i вычисляется следующим образом:

$$b_i = l_i Y = \sum_{1 \leq u \leq n} l_{ui} \bar{y}_u.$$

Таким образом, нахождение любого коэффициента сводится к вычислению скалярного произведения двух векторов-столбцов, один из которых — соответствующий столбец матрицы L , другой — вектор откликов Y .

Проверка на значимость коэффициентов уравнения регрессии проводится с помощью t -критерия Стьюдента

$$t_{i^*k} = \frac{b_i}{S_{b_i}} \quad (4.6)$$

со степенями свободы $j = j_{\text{воспр}}$.

Оценки среднеквадратичных ошибок вычисления коэффициентов уравнения регрессии определяются следующим образом:

$$S_{b_i} = \sqrt{c_i S_{\text{воспр}}^2} \quad (4.7)$$

Величины c_i для различных двух- и трехфакторных планов приведены в табл. 4.4. Если продублировать весь план, например, k раз, что позволяет более точно оценить параметры модели, то в формулы необходимо ввести поправки. Во всех формулах, где участвует величина y , ее нужно заменить на $y' = ky$. Вместо формулы (4.7) следует применять следующее выражение:

$$S_{b_i} = \sqrt{\frac{c_i}{k} S_{\text{воспр}}^2}$$

Матрица I для вычисления коэффициентов регрессии по трехфакторным планам

| № n/n | Матрица I | | | | | | | | | | Вектор выхода Y | |
|----------|----------------|--------|--------|--------|--------|----------|----------|----------|----------|----------|-------------------------|----------------|
| | b_0 | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_{11} | b_{12} | b_{13} | b_{22} | b_{23} | | b_{33} |
| | План K_{013} | | | | | | | | | | | |
| 1 | -0,082 | -0,083 | 0,083 | 0,083 | 0,083 | 0,064 | 0,100 | 0,101 | 0,059 | 0,100 | 0,064 | \bar{y}_1 |
| 2 | -0,080 | -0,085 | 0,083 | -0,082 | 0,065 | 0,065 | -0,100 | -0,098 | 0,054 | 0,100 | 0,065 | \bar{y}_2 |
| 3 | -0,082 | -0,083 | 0,083 | -0,083 | 0,064 | 0,064 | -0,100 | 0,101 | 0,059 | -0,100 | 0,064 | \bar{y}_3 |
| 4 | -0,080 | -0,085 | 0,083 | -0,082 | 0,065 | 0,065 | 0,100 | -0,098 | 0,054 | -0,100 | 0,065 | \bar{y}_4 |
| 5 | -0,080 | -0,082 | -0,083 | 0,085 | 0,065 | 0,065 | 0,100 | -0,098 | 0,054 | -0,100 | 0,065 | \bar{y}_5 |
| 6 | -0,103 | 0,074 | -0,083 | 0,074 | 0,048 | 0,048 | -0,100 | 0,089 | 0,106 | -0,100 | 0,048 | \bar{y}_6 |
| 7 | -0,080 | -0,082 | 0,083 | 0,085 | 0,065 | 0,065 | -0,100 | -0,098 | 0,054 | 0,100 | 0,065 | \bar{y}_7 |
| 8 | -0,103 | 0,074 | 0,083 | 0,074 | 0,048 | 0,048 | 0,100 | 0,089 | 0,106 | 0,100 | 0,048 | \bar{y}_8 |
| 9 | -0,088 | -0,039 | 0,042 | 0,003 | 0,066 | 0,066 | 0,050 | 0,003 | 0,051 | 0 | -0,184 | \bar{y}_9 |
| 10 | 0,088 | -0,039 | 0,042 | 0,003 | 0,066 | 0,066 | -0,050 | 0,003 | 0,051 | 0 | -0,184 | \bar{y}_{10} |
| 11 | 0,083 | 0,042 | 0,042 | 0 | 0,063 | 0,063 | -0,050 | 0 | 0,063 | 0 | -0,187 | \bar{y}_{11} |
| 12 | 0,083 | 0,042 | 0,042 | 0 | 0,063 | 0,063 | 0,050 | 0 | 0,063 | 0 | -0,187 | \bar{y}_{12} |
| 13 | 0,089 | 0,003 | 0,042 | 0,039 | -0,181 | -0,181 | 0 | 0,003 | 0,051 | 0,050 | 0,066 | \bar{y}_{13} |
| 14 | 0,083 | 0 | -0,042 | 0,012 | -0,188 | -0,188 | 0 | 0 | 0,063 | -0,050 | 0,063 | \bar{y}_{14} |
| 15 | 0,089 | 0,003 | 0,042 | -0,039 | -0,181 | -0,181 | 0 | 0,003 | 0,051 | -0,050 | 0,066 | \bar{y}_{15} |
| 16 | 0,083 | 0 | 0,042 | 0,042 | -0,188 | -0,188 | 0 | 0 | 0,063 | 0,050 | 0,063 | \bar{y}_{16} |
| 17 | 0,072 | -0,047 | 0 | -0,047 | 0,054 | 0,054 | 0 | 0,043 | -0,163 | 0 | 0,054 | \bar{y}_{17} |
| 18 | 0,074 | 0,037 | 0 | -0,047 | 0,055 | 0,055 | 0 | -0,056 | -0,165 | 0 | 0,055 | \bar{y}_{18} |
| 19 | 0,074 | -0,047 | 0 | 0,037 | 0,055 | 0,055 | 0 | -0,056 | -0,165 | 0 | 0,055 | \bar{y}_{19} |
| 20 | 0,124 | 0,062 | 0 | 0,062 | 0,093 | 0,093 | 0 | 0,075 | -0,280 | 0 | 0,093 | \bar{y}_{20} |
| 21 | 0,656 | 0,005 | 0 | 0,005 | -0,258 | -0,258 | 0 | -0,006 | -0,227 | 0 | -0,258 | \bar{y}_{21} |
| | План K_{021} | | | | | | | | | | | |
| 1 | -0,111 | -0,063 | 0,063 | -0,063 | 0,069 | 0,069 | 0,083 | 0,083 | 0,069 | 0,083 | 0,069 | \bar{y}_1 |
| 2 | -0,111 | -0,063 | -0,063 | 0,063 | 0,069 | 0,069 | -0,083 | -0,083 | 0,069 | 0,083 | 0,069 | \bar{y}_2 |
| 3 | -0,111 | 0,063 | 0,063 | -0,063 | 0,069 | 0,069 | -0,083 | 0,083 | 0,069 | -0,083 | 0,069 | \bar{y}_3 |
| 4 | 0,111 | 0,063 | 0,063 | 0,063 | 0,069 | 0,069 | 0,083 | 0,083 | 0,069 | -0,083 | 0,069 | \bar{y}_4 |

| № п/п | Матрица L | | | | | | | | | | | Вектор выхода Y | |
|---------------|-------------|--------|--------|--------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|--------|-------------------------|----------------|
| | b_0 | b_1 | b_2 | b_3 | b_{11} | b_{12} | b_{13} | b_{22} | b_{23} | b_{33} | | | |
| 5 | -0,111 | -0,063 | -0,063 | -0,063 | 0,060 | 0,083 | -0,083 | 0,069 | -0,083 | 0,069 | -0,083 | 0,069 | \bar{y}_5 |
| 6 | -0,111 | 0,063 | -0,063 | -0,063 | 0,069 | -0,083 | 0,083 | 0,069 | -0,083 | 0,069 | -0,083 | 0,069 | \bar{y}_6 |
| 7 | -0,111 | -0,063 | 0,063 | -0,063 | 0,069 | 0,083 | -0,083 | 0,069 | 0,083 | 0,069 | 0,083 | 0,069 | \bar{y}_7 |
| 8 | -0,111 | 0,063 | -0,063 | 0 | 0,056 | 0,083 | 0 | 0,056 | 0 | 0 | 0 | -0,194 | \bar{y}_8 |
| 9 | 0,111 | -0,063 | 0,063 | 0 | 0,056 | -0,083 | 0 | 0,056 | 0 | 0 | 0 | -0,194 | \bar{y}_9 |
| 10 | 0,111 | 0,063 | -0,063 | 0 | 0,056 | -0,083 | 0 | 0,056 | 0 | 0 | 0 | -0,194 | \bar{y}_{10} |
| 11 | 0,111 | -0,063 | 0,063 | 0 | 0,056 | 0,083 | 0 | 0,056 | 0 | 0 | 0 | -0,194 | \bar{y}_{11} |
| 12 | 0,111 | 0 | -0,063 | -0,063 | -0,194 | 0 | 0 | 0,056 | 0,083 | 0,056 | 0,083 | 0,056 | \bar{y}_{12} |
| 13 | 0,111 | 0 | -0,063 | 0,063 | -0,194 | 0 | 0 | 0,056 | -0,083 | 0,056 | -0,083 | 0,056 | \bar{y}_{13} |
| 14 | 0,111 | 0 | -0,063 | 0,063 | -0,194 | 0 | 0 | 0,056 | 0,083 | 0,056 | 0,083 | 0,056 | \bar{y}_{14} |
| 15 | 0,111 | 0 | -0,063 | 0,063 | -0,194 | 0 | 0 | 0,056 | -0,083 | 0,056 | -0,083 | 0,056 | \bar{y}_{15} |
| 16 | 0,111 | 0 | -0,063 | -0,063 | -0,194 | 0 | 0 | 0,056 | 0,083 | 0,056 | 0,083 | 0,056 | \bar{y}_{16} |
| 17 | 0,111 | -0,063 | 0 | 0 | 0,056 | 0 | 0,083 | -0,194 | 0 | 0,056 | 0 | 0,056 | \bar{y}_{17} |
| 18 | 0,111 | -0,063 | 0 | -0,063 | 0,056 | 0 | -0,083 | -0,194 | 0 | 0,056 | 0 | 0,056 | \bar{y}_{18} |
| 19 | 0,111 | 0,063 | 0 | 0,063 | 0,056 | 0 | -0,083 | -0,194 | 0 | 0,056 | 0 | 0,056 | \bar{y}_{19} |
| 20 | 0,111 | 0,063 | 0 | 0,063 | 0,056 | 0 | 0,083 | -0,194 | 0 | 0,056 | 0 | 0,056 | \bar{y}_{20} |
| 21 | 0,555 | 0 | 0 | 0 | -0,222 | 0 | 0 | -0,222 | 0 | -0,222 | 0 | -0,222 | \bar{y}_{21} |
| План K_{13} | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | -0,077 | -0,103 | -0,114 | -0,106 | 0,030 | 0,127 | 0,115 | 0,138 | 0,139 | 0,035 | 0,139 | 0,035 | \bar{y}_1 |
| 2 | -0,078 | 0,101 | -0,089 | -0,105 | 0,036 | -0,102 | -0,132 | 0,030 | 0,113 | 0,131 | 0,113 | 0,131 | \bar{y}_2 |
| 3 | -0,110 | -0,101 | 0,101 | -0,067 | 0,108 | -0,121 | 0,098 | 0,108 | -0,110 | 0,007 | -0,110 | 0,007 | \bar{y}_3 |
| 4 | -0,104 | 0,102 | 0,083 | -0,102 | 0,099 | 0,099 | -0,112 | 0,006 | 0,089 | 0,109 | 0,089 | 0,109 | \bar{y}_4 |
| 5 | -0,077 | -0,103 | -0,114 | 0,106 | 0,030 | 0,127 | -0,115 | 0,138 | -0,139 | 0,035 | -0,139 | 0,035 | \bar{y}_5 |
| 6 | -0,078 | 0,101 | -0,089 | -0,105 | 0,036 | -0,102 | 0,132 | 0,030 | -0,113 | 0,131 | -0,113 | 0,131 | \bar{y}_6 |
| 7 | -0,110 | -0,101 | 0,101 | -0,067 | 0,108 | -0,121 | -0,098 | 0,108 | -0,110 | 0,007 | -0,110 | 0,007 | \bar{y}_7 |
| 8 | -0,104 | 0,102 | 0,083 | -0,102 | 0,099 | 0,099 | 0,112 | 0,006 | 0,089 | 0,109 | 0,089 | 0,109 | \bar{y}_8 |
| 9 | 0,209 | -0,048 | 0,012 | 0 | 0,096 | -0,003 | 0 | -0,136 | 0 | -0,184 | 0 | -0,184 | \bar{y}_9 |
| 10 | 0,204 | -0,045 | 0,004 | 0 | 0,098 | 0,005 | 0 | -0,176 | 0 | -0,132 | 0 | -0,132 | \bar{y}_{10} |
| 11 | 0,224 | -0,019 | -0,055 | 0 | -0,182 | 0 | 0 | 0,106 | 0 | -0,164 | 0 | -0,164 | \bar{y}_{11} |

Продолжение табл. 4.3.

| № п/п | Матрица L | | | | | | | | | | Вектор выхода Y |
|------------------------|-----------|--------|--------|--------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------------------|
| | b_0 | b_1 | b_2 | b_3 | b_{11} | b_{12} | b_{13} | b_{22} | b_{23} | b_{33} | |
| 20 | 0,050 | 0,056 | 0 | 0,056 | 0,050 | 0 | 0,083 | -0,117 | 0 | 0,050 | \bar{y}_{20} |
| 21 | 0,200 | -0,056 | 0 | 0 | 0,033 | 0 | 0 | -0,133 | 0 | -0,133 | \bar{y}_{21} |
| 22 | 0,200 | 0,056 | 0 | 0 | 0,033 | 0 | 0 | -0,133 | 0 | -0,133 | \bar{y}_{22} |
| 23 | 0,200 | 0 | -0,056 | 0 | -0,133 | 0 | 0 | 0,033 | 0 | -0,133 | \bar{y}_{23} |
| 24 | 0,200 | 0 | 0,056 | 0 | -0,133 | 0 | 0 | 0,033 | 0 | -0,133 | \bar{y}_{24} |
| 25 | 0,200 | 0 | 0 | -0,056 | -0,133 | 0 | 0 | -0,133 | 0 | 0,033 | \bar{y}_{25} |
| 26 | 0,200 | 0 | 0 | 0,056 | -0,133 | 0 | 0 | -0,133 | 0 | 0,033 | \bar{y}_{26} |
| План B ₃ | | | | | | | | | | | |
| 1 | -0,063 | -0,100 | -0,100 | -0,100 | 0,063 | 0,125 | 0,125 | 0,063 | 0,125 | 0,063 | \bar{y}_1 |
| 2 | -0,063 | 0,100 | -0,100 | -0,100 | 0,063 | -0,125 | -0,125 | 0,063 | 0,125 | 0,063 | \bar{y}_2 |
| 3 | -0,063 | -0,100 | 0,100 | -0,100 | 0,063 | -0,125 | 0,125 | 0,063 | -0,125 | 0,063 | \bar{y}_3 |
| 4 | -0,063 | 0,100 | 0,100 | 0,100 | 0,063 | 0,125 | -0,125 | 0,063 | -0,125 | 0,063 | \bar{y}_4 |
| 5 | -0,063 | -0,100 | -0,100 | 0,100 | 0,063 | 0,125 | -0,125 | 0,063 | -0,125 | 0,063 | \bar{y}_5 |
| 6 | -0,063 | 0,100 | 0,100 | -0,100 | 0,063 | -0,125 | 0,125 | 0,063 | -0,125 | 0,063 | \bar{y}_6 |
| 7 | -0,063 | -0,100 | -0,100 | 0,100 | 0,063 | -0,125 | -0,125 | 0,063 | 0,125 | 0,063 | \bar{y}_7 |
| 8 | -0,063 | 0,100 | 0,100 | -0,100 | 0,063 | 0,125 | 0,125 | 0,063 | -0,125 | 0,063 | \bar{y}_8 |
| 9 | 0,250 | -0,100 | 0 | 0 | 0,250 | 0 | 0 | -0,250 | 0 | -0,250 | \bar{y}_9 |
| 10 | 0,250 | 0,100 | 0 | 0 | 0,250 | 0 | 0 | -0,250 | 0 | -0,250 | \bar{y}_{10} |
| 11 | 0,250 | 0 | -0,100 | 0 | -0,250 | 0 | 0 | 0,250 | 0 | -0,250 | \bar{y}_{11} |
| 12 | 0,250 | 0 | 0,100 | 0 | 0,250 | 0 | 0 | 0,250 | 0 | -0,250 | \bar{y}_{12} |
| 13 | 0,250 | 0 | 0 | -0,100 | -0,250 | 0 | 0 | -0,250 | 0 | 0,250 | \bar{y}_{13} |
| 14 | 0,250 | 0 | 0 | 0,100 | -0,250 | 0 | 0 | -0,250 | 0 | 0,250 | \bar{y}_{14} |
| План B-D ₁₃ | | | | | | | | | | | |
| 1 | -0,039 | -0,090 | -0,090 | -0,090 | 0,051 | 0,205 | 0,205 | 0,051 | 0,205 | 0,051 | \bar{y}_1 |
| 2 | -0,195 | 0,101 | -0,091 | -0,091 | 0,244 | -0,199 | -0,199 | 0,080 | 0,108 | 0,080 | \bar{y}_2 |
| 3 | -0,195 | -0,091 | 0,101 | -0,091 | 0,080 | -0,199 | 0,108 | 0,244 | -0,199 | 0,080 | \bar{y}_3 |
| 4 | -0,195 | -0,091 | -0,091 | 0,101 | 0,080 | 0,108 | -0,199 | 0,080 | -0,199 | 0,244 | \bar{y}_4 |
| 5 | 0,499 | -0,212 | 0,029 | 0,029 | 0,262 | -0,106 | -0,106 | -0,419 | -0,135 | -0,419 | \bar{y}_5 |

| № n/n | Матрица L | | | | | | | | | | Вектор выхода Y |
|------------------------|-----------|--------|--------|--------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------------------|
| | b_0 | b_1 | b_2 | b_3 | b_{11} | b_{12} | b_{13} | b_{22} | b_{23} | b_{33} | |
| 6 | 0,499 | 0,029 | -0,212 | 0,029 | 0,419 | -0,106 | -0,135 | 0,262 | -0,106 | -0,419 | \bar{y}_6 |
| 7 | 0,499 | 0,029 | 0,029 | -0,212 | -0,419 | 0,135 | -0,106 | -0,419 | -0,106 | 0,262 | \bar{y}_7 |
| 8 | 0,042 | -0,061 | 0,192 | 0,192 | -0,210 | -0,031 | -0,031 | 0,165 | 0,223 | 0,165 | \bar{y}_8 |
| 9 | 0,042 | 0,192 | -0,061 | 0,192 | 0,165 | -0,031 | 0,223 | -0,210 | -0,031 | -0,165 | \bar{y}_9 |
| 10 | 0,042 | 0,192 | 0,192 | -0,061 | 0,165 | 0,223 | -0,031 | 0,165 | -0,031 | -0,210 | \bar{y}_{10} |
| План B—D ₂₃ | | | | | | | | | | | |
| 1 | -0,200 | -0,100 | -0,100 | -0,100 | 0,100 | 0,200 | 0,200 | 0,100 | 0,200 | 0,100 | \bar{y}_1 |
| 2 | -0,133 | 0,100 | -0,067 | -0,067 | 0,233 | -0,200 | -0,200 | 0,067 | 0,133 | 0,067 | \bar{y}_2 |
| 3 | -0,133 | -0,067 | 0,100 | -0,067 | 0,067 | -0,200 | 0,133 | 0,233 | -0,200 | 0,067 | \bar{y}_3 |
| 4 | -0,133 | -0,067 | -0,067 | 0,100 | 0,067 | 0,133 | -0,200 | 0,067 | -0,200 | 0,233 | \bar{y}_4 |
| 5 | 0,467 | -0,267 | 0,067 | 0,067 | 0,267 | -0,133 | -0,133 | -0,400 | +0,200 | -0,400 | \bar{y}_5 |
| 6 | 0,467 | 0,067 | -0,267 | 0,067 | -0,400 | -0,133 | 0,200 | 0,267 | 0,133 | -0,400 | \bar{y}_6 |
| 7 | 0,467 | 0,067 | 0,067 | -0,267 | -0,400 | 0,200 | -0,133 | -0,400 | -0,133 | 0,267 | \bar{y}_7 |
| 8 | 0,067 | -0,133 | 0,200 | 0,200 | -0,200 | -0,067 | -0,067 | 0,133 | 0,267 | 0,133 | \bar{y}_8 |
| 9 | 0,067 | 0,200 | -0,133 | 0,200 | 0,133 | -0,067 | 0,267 | -0,200 | -0,067 | 0,133 | \bar{y}_9 |
| 10 | 0,067 | 0,200 | 0,200 | -0,133 | 0,133 | 0,267 | -0,067 | 0,133 | -0,067 | -0,200 | \bar{y}_{10} |

Таблица 4.4

Величины c_i для определения оценок дисперсий коэффициентов

| Название плана | k | N | b_0 | b_1 | b_2 | b_3 | b_{11} | b_{12} | b_{13} | b_{22} | b_{23} | b_{33} |
|-------------------|-----|-----|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| KO_{12} | 2 | 20 | 0,313 | 0,063 | 0,071 | — | 0,328 | 0,083 | — | 0,250 | — | — |
| KI_{12} | — | 21 | 0,287 | 0,063 | 0,068 | — | 0,271 | 0,083 | — | 0,239 | — | — |
| $B-D_{12}$ | — | 9 | 0,556 | 0,167 | 0,167 | — | 0,500 | 0,250 | — | 0,500 | — | — |
| $B-D_{22}$ | — | 14 | 0,346 | 0,100 | 0,100 | — | 0,385 | 0,125 | — | 0,385 | — | — |
| $B-D_{32}$ | — | 6 | 0,963 | 0,276 | 0,276 | — | 1,171 | 0,350 | — | 1,171 | — | — |
| $B-D_{42}$ | — | 6 | 1,000 | 0,250 | 0,250 | — | 2,250 | 0,250 | — | 1,500 | — | — |
| KO_{13} | 3 | 31 | 0,328 | 0,040 | 0,042 | 0,040 | 0,216 | 0,050 | 0,048 | 0,193 | 0,050 | 0,216 |
| KO_{23} | — | 21 | 0,555 | 0,063 | 0,063 | 0,063 | 0,264 | 0,083 | 0,083 | 0,264 | 0,083 | 0,264 |
| KI_{13} | — | 30 | 0,337 | 0,047 | 0,044 | 0,043 | 0,227 | 0,051 | 0,052 | 0,228 | 0,051 | 0,234 |
| KI_{23} | — | 26 | 0,350 | 0,056 | 0,056 | 0,056 | 0,183 | 0,083 | 0,083 | 0,183 | 0,083 | 0,183 |
| B_3 | — | 14 | 0,406 | 0,100 | 0,100 | 0,100 | 0,406 | 0,125 | 0,125 | 0,406 | 0,125 | 0,406 |
| $B-D_{13}$ | — | 10 | 0,868 | 0,159 | 0,159 | 0,159 | 0,594 | 0,226 | 0,226 | 0,594 | 0,226 | 0,594 |
| $B-D_{23}$ | — | 10 | 0,835 | 0,281 | 0,204 | 0,225 | 0,537 | 0,322 | 0,280 | 0,735 | 0,299 | 0,559 |

Для проверки значимости коэффициента проводится сравнение экспериментального значения $t^{\text{ЭК}}$ -критерия с теоретическим t^{T} , взятым из работ [1, 13], при заданном уровне значимости α и степени свободы, равной $f=f_{\text{воспр}}$. Если экспериментальное значение $t_i^{\text{ЭК}}$ -критерия больше теоретического $t_{\alpha, f}^{\text{T}}$ ($t_i^{\text{ЭК}} > t_{\alpha, f}^{\text{T}}$), то с вероятностью $p=1-\alpha$ гипотеза о значимости соответствующего коэффициента уравнения регрессии не отвергается. Если $t_i^{\text{ЭК}} \leq t_{\alpha, f}^{\text{T}}$, то коэффициент уравнения регрессии с вероятностью $p=1-\alpha$ можно считать незначимым.

Необходимо отметить, что незначительный коэффициент можно использовать из уравнения регрессии только в том случае, если он не связан корреляционной зависимостью с другими коэффициентами. В противном случае возникает необходимость пересчета значений всех коэффициентов, связанных корреляционной зависимостью.

Для большинства планов второго порядка условие ортогональности, а значит независимости определения коэффициентов уравнения регрессии, не выполняется. В табл. 4.5 приведены данные о наличии корреляционных связей коэффициентов уравнений регрессии второго порядка [6].

Таким образом, исследователь, оценив значимость коэффициентов, может записать математическую модель изучаемого процесса в виде уравнений регрессии вида

$$y = b_0 + \sum_{1 < i < k} b_i x_i + \sum_{1 < i < k} b_{ii} x_i^2 + \sum_{\substack{i \neq j \\ 1 < i < k \\ 1 < j < k}} b_{ij} x_i x_j$$

с учетом всех значимых и связанных корреляционно коэффициентов.

4.5. ПРОВЕРКА УРАВНЕНИЯ РЕГРЕССИИ НА АДЕКВАТНОСТЬ

После составления уравнения регрессии исследователю необходимо знать, можно ли его использовать как математическую модель технологического процесса с точки зрения точности описания экспериментальных данных. Для этого проводится проверка уравнения регрессии на адекватность.

Проверка осуществляется с помощью дисперсионного отношения Фишера

$$F^{\text{ЭК}} = S^2_{\text{ад}} / S^2_{\text{воспр}}. \quad (4.8)$$

Оценка дисперсии, определяющая неадекватность представления результатов эксперимента $S^2_{\text{ад}}$ со степенями свободы $i_1 = N - m - f_{\text{воспр}}$, вычисляется по следующей формуле:

$$S^2_{\text{ад}} = \frac{1}{i_1} \sum_{1 < u < n} \gamma_u (\bar{y}_u^{\text{ЭК}} - y_u^{\text{расч}})^2, \quad (4.9)$$

Т а б л и ц а 4.5

Корреляция параметров уравнений регрессии для планов второго порядка

| Название плана | Размерность плана i | Корреляции между коэффициентами |
|----------------|-----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| KO_{12} | 2 | b_0 с b_{ii} , b_{ii} (между собой) |
| Ki_{12} | 2 | b_0 с b_2 и b_{ii} , b_2 с b_{ii} , b_{ii} (между собой) |
| $B-D_{12}$ | 2 | b_3 с b_{ii} |
| $B-D_{22}$ | 2 | b_0 с b_{ii} , b_{ii} (между собой) |
| $B-D_{32}$ | 2 | Все коэффициенты закоррелированы между собой |
| $B-D_{42}$ | 2 | b_0 с b_{11} , b_{ii} (между собой) |
| KO_{13} | 3 | Корреляция отсутствует для коэффициентов b_2 , b_{12} , b_{23} |
| KO_{23} | 3 | b_0 с b_{ii} , b_{ii} (между собой) |
| Ki_{13} | 3 | b_0 с b_{11} , b_{12} и b_{ii} , b_1 с b_{12} , b_{11} и b_{32} , b_2 с b_{11} , b_3 с b_{13} , b_{12} с b_{ii} b_{13} с b_{23} , b_{ii} (между собой) |
| Ki_{23} | 3 | b_0 с b_{ii} , b_{ii} (между собой) |
| B_3 | 3 | b_0 с b_{ii} , b_{ii} (между собой) |
| $B-D_{13}$ | 3 | все коэффициенты закоррелированы между собой |
| $B-D_{23}$ | 3 | все коэффициенты закоррелированы между собой |

где N — число всех измерений в плане, m — число коэффициентов в уравнении регрессии, γ_u — число повторных измерений в u -й точке плана, $y_u^{\text{ЭК}}$ — среднее значение отклика в u -й точке плана, $y_u^{\text{расч}}$ — значение отклика в u -й точке плана, рассчитанное по уравнению регрессии.

Оценка дисперсии воспроизводимости экспериментальных данных $S^2_{\text{воспр}}$ со степенями свободы $f_2 = f_{\text{воспр}} = \sum_{1 \leq u \leq N_1} f_u = \sum_{1 \leq u \leq N_1} \gamma_u - N_1$ определяется по следующей формуле:

$$S^2_{\text{воспр}} = \frac{1}{f_{\text{воспр}}} \sum_{1 \leq u \leq N_1} \sum_{1 \leq i \leq \gamma_u} (y_{ui}^{\text{ЭК}} - \bar{y}_u^{\text{ЭК}})^2,$$

где N_1 — число точек плана, в которых проводятся повторные измерения, $y_{ui}^{\text{ЭК}}$ — единичное (i -е) измерение отклика в u -й точке плана.

Экспериментальное значение $F^{\text{ЭК}}$ -статистики сравнивается с критическим $F^{\text{T}}_{\alpha, f_1, f_2}$, взятым из работ [1, 13], с учетом значимости α . При этом, если $F^{\text{ЭК}} \leq F^{\text{T}}_{\alpha, f_1, f_2}$, то с вероятностью

$p = 1 - \alpha$ гипотеза об адекватности полученного уравнения регрессии не отвергается. В противном случае уравнение регрессии неадекватно и его нельзя использовать для изучения технологического процесса. Причинами получения неадекватного уравнения регрессии могут быть отсутствие рандомизации при проведении измерений или низкая степень аппроксимирующего полинома. Одним из эффективных путей для адекватного описания поверхности отклика уравнением регрессии второго порядка является уменьшение пределов варьирования $\bar{x}_{i\min}$ и $\bar{x}_{i\max}$ изучаемых факторов. Следовательно, всю интересующую область факторного пространства необходимо раздробить на подобласти и проводить планирование для каждой подобласти.

После получения адекватного уравнения регрессии исследователь может перейти к анализу математической модели. При анализе необходимо помнить, что используя уравнение регрессии как интерполяционную формулу, мы получаем не точные значения функции отклика (не математические ожидания $\eta(x, \beta)$), а лишь их оценки $y^{\text{расч}}$. Доверительный интервал для математического ожидания функции отклика в точке x_0 может быть получен с вероятностью $p = 1 - \alpha$ с помощью оценки $y^{\text{расч}}(x_0)$ [7]

$$y^{\text{расч}}(x_0) - t_{\alpha, f \text{ воспр}} \sqrt{1 + S^2\{y^{\text{расч}}(x_0)\}} \leq \eta(x_0) \leq y^{\text{расч}}(x_0) + t_{\alpha, f \text{ воспр}} \sqrt{1 + S^2\{y^{\text{расч}}(x_0)\}}.$$

Оценку дисперсии предсказываемых значений отклика в точке x_0 $S^2\{y^{\text{расч}}(x_0)\}$ можно определить следующим образом:

$$S^2\{y^{\text{расч}}(x_0)\} = \frac{\gamma(x_0) [\bar{y}(x_0) - y^{\text{расч}}(x_0)]^2}{f_1},$$

где $\gamma(x_0)$ — число повторных измерений в точке x_0 .

В случаях, когда уравнение второго порядка неадекватно, можно повышать степень полинома с помощью ортогональных полиномов Чебышева.

4.6. МЕТОДЫ ПРОВЕДЕНИЯ АНАЛИЗА УРАВНЕНИЙ РЕГРЕССИИ

Методы проведения анализа полученного уравнения регрессии могут быть различными. Можно построить линии равных значений функции отклика [1, 4, 6] или ее номограмму [6, 16], привести уравнение регрессии к каноническому виду, использовать аналитические методы поиска экспериментальных значений функции и т. д.

Рассмотрим методику канонических преобразований, предложенную в работе [4]. Уравнение регрессии, полученное с по-

мошью планов второго порядка, в общем случае имеет следующий вид:

$$y = b_0 + \sum_{1 \leq i \leq k} b_i x_i + \sum_{\substack{i \neq j \\ 1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k}} b_{ij} x_i x_j + \sum b_{ii} x_i^2. \quad (4.10)$$

Уравнение (4.10) можно привести к каноническому виду

$$y - y_c = \sum_{1 \leq i \leq r} \Theta_i z_i^2 + \sum_{z+1 \leq j \leq k} c_j z_j^2.$$

Каноническое преобразование состоит из двух этапов. На первом производится перенос начала координат в экстремальную точку. На втором производится замена старых координатных осей x_i новыми z_i , повернутыми на некоторый угол относительно старых осей.

При двухфакторном планировании второго порядка уравнение регрессии записывается следующим образом:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2. \quad (4.11)$$

Экстремум функции находится в точке, в которой выполняется условие

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_2} = 0.$$

Дифференцируя уравнение (4.11) по x_1 и x_2 , получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x_1} = b_1 + b_{12} x_2 + 2 b_{11} x_1 = 0, \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} = b_2 + b_{12} x_1 + 2 b_{22} x_2 = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Решая систему (4.12), можно определить координаты экстремальной точки $c(x_{1c}; x_{2c})$ и уравнение (4.11) записать в виде

$$y - y_c = b_{12}(x_1 - x_{1c})(x_2 - x_{2c}) + b_{11}(x_1 - x_{1c})^2 + b_{22}(x_2 - x_{2c})^2,$$

где y_c — значение отклика y в экстремальной точке c .

Каноническое уравнение при двухфакторном планировании второго порядка можно записать в виде

$$y - y_c = \Theta_1 z_1^2 + \Theta_2 z_2^2. \quad (4.13)$$

Величины Θ_1 и Θ_2 — корни характеристического уравнения

$$\Theta^2 + \alpha\Theta + \beta = 0.$$

Параметры α и β равны:

$$\alpha = -(b_{11} + b_{22});$$

$$\beta = b_{11} \cdot b_{22} - 0,25 b_{12}^2.$$

Координаты z_1 и z_2 можно записать в следующем виде:

$$z_1 = l_1(x_1 - x_{1c}) + m_1(x_2 - x_{2c});$$

$$z_2 = l_2(x_1 - x_{1c}) + m_2(x_2 - x_{2c});$$

где l_i и m_i — косинусы угла поворота новых координатных осей относительно старых.

Направляющие косинусы определяются из выражений:

$$\frac{m_i}{l_i} = \frac{2(\Theta_i - b_{11})}{b_{12}};$$

$$l_i = \frac{1}{\sqrt{1 + (m_i/l_i)^2}}.$$

Таким образом, старые координаты x_1 и x_2 связаны с новыми z_1 и z_2 посредством следующих зависимостей:

$$x_1 = l_1 z_1 + l_2 z_2 + x_{1c};$$

$$x_2 = m_1 z_1 + m_2 z_2 + x_{2c}.$$

При помощи вышеописанного способа возможен переход к каноническому виду уравнения независимо от того, сколько факторов участвует в изучении технологического процесса. Так, при $k = 3$ каноническое уравнение имеет вид

$$y - y_c = \Theta_1 z_1^2 + \Theta_2 z_2^2. \quad (4.14)$$

Величины Θ_1 и Θ_2 — корни характеристического уравнения

$$\Theta^3 + \alpha\Theta^2 + \beta\Theta + \gamma = 0. \quad (4.15)$$

Значение входящих в уравнения (4.14) и (4.15) параметров равны:

$$\alpha = -(b_{11} + b_{22} + b_{33});$$

$$\beta = b_{11}b_{22} + b_{11}b_{33} + b_{22}b_{33} - 0,25(b_{12}^2 + b_{13}^2 + b_{23}^2);$$

$$\gamma = 0,25(b_{11}b_{23}^2 + b_{22}b_{13}^2 + b_{33}b_{12}^2 - b_{12}b_{13}b_{23}) - b_{12}b_{13}b_{23};$$

$$z_1 = l_1(x_1 - x_{1c}) + m_1(x_2 - x_{2c}) + n_1(x_3 - x_{3c});$$

$$z_2 = l_2(x_1 - x_{1c}) + m_2(x_2 - x_{2c}) + n_2(x_3 - x_{3c});$$

$$z_3 = l_3(x_1 - x_{1c}) + m_3(x_2 - x_{2c}) + n_3(x_3 - x_{3c}).$$

Направляющие косинусы l_i , m_i и n_i определяются при решении системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{m_i}{l_i} = \frac{b_{23}(b_{11} - \Theta_i) - 0,5 b_{12} b_{13}}{b_{13}(b_{22} - \Theta_i) - 0,5 b_{12} b_{13}}; \\ \frac{n_i}{l_i} = \frac{0,5 b_{12}^2 - 2(b_{11} - \Theta_i)(b_{22} - \Theta_i)}{b_{13}(b_{22} - \Theta_i) - 0,5 b_{12} b_{23}}; \\ l_i = \frac{1}{\sqrt{1 + (m_i/l_i)^2 + (n_i/l_i)^2}}. \end{cases}$$

Старые координаты x_1 , x_2 и x_3 выражаются через новые следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 = l_1 z_1 + l_2 z_2 + l_3 z_3 + x_{1c}; \\ x_2 = m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + x_{2c}; \\ x_3 = n_1 z_1 + n_2 z_2 + n_3 z_3 + x_{3c}. \end{cases}$$

При увеличении количества исследуемых факторов (более трех) переход к каноническому виду становится очень трудоемким и осуществляется с помощью ЭВМ.

Получив каноническое уравнение, исследователь может установить экстремум функции отклика и характер ее изменения в факторном пространстве. Приравнявая величину отклика y в уравнениях (4.13) или (4.14) к определенным фиксированным значениям, можно получить кривые равного выхода. В настоящее время этот способ анализа получил широкое распространение, особенно при двухфакторном планировании.

На рис. 4.1, 4.2 приведены четыре возможных вида контурных кривых в двухфакторном пространстве: гиперболы, эллипсы, параллельные прямые, параболы.

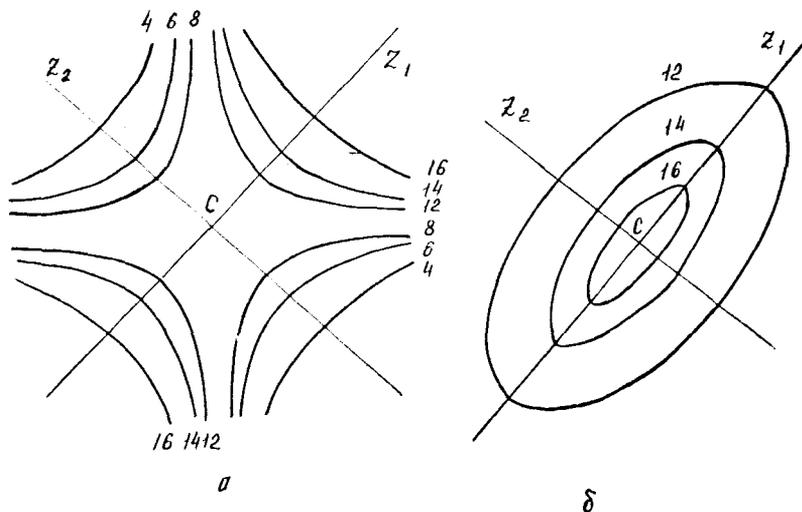


Рис. 4.1. Возможные виды контурных кривых в двухфакторном пространстве: а — гиперболический параболоид (Θ_1 и Θ_2 имеют разные знаки); б — эллиптический параболоид (Θ_1 и Θ_2 имеют одинаковые знаки)

Если коэффициенты Θ_1 и Θ_2 имеют разные знаки, поверхность отклика представляет собой гиперболический параболоид (рис. 4.1,а). Центр фигуры называется минимаксом или «сед-

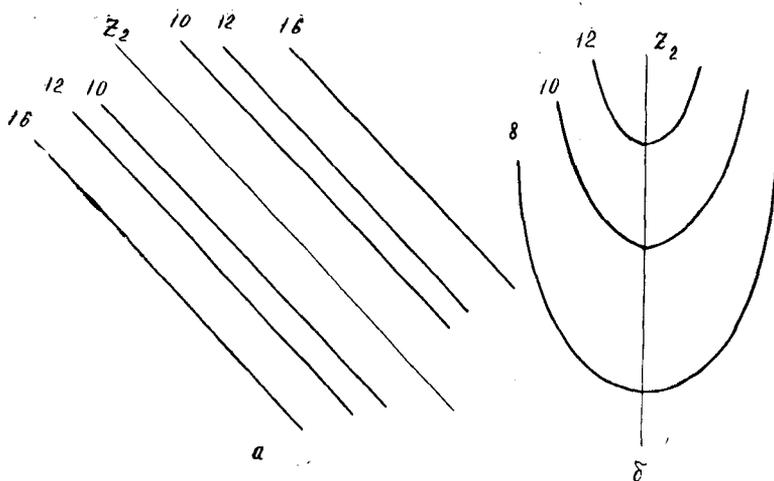


Рис. 4.2. Возможные виды контурных кривых в двухфакторном пространстве: *a* — гребень ($\Theta_2 = 0$, b_2 — крутизна наклона); *b* — стационарное возвышение ($\Theta_2 = 0$)

лом». Если коэффициент Θ_1 положителен, то отклик $y - y_c$ увеличивается при движении по оси z_1 в обе стороны от центра фигуры, а по оси z_2 — уменьшается. Исследователь, стремящийся к максимальному значению отклика, должен проводить изучение поверхности отклика вдоль оси z_1 .

Необходимо отметить, что поверхность отклика, представляемая неполным квадратным уравнением, всегда является гиперболическим параболоидом.

Если коэффициенты Θ_1 и Θ_2 имеют одинаковые знаки, поверхность отклика представляет собой эллиптический параболоид (рис.4.1.б). Центр фигуры (экстремальная точка c) является максимумом, если коэффициенты Θ_1 и Θ_2 отрицательны, и минимумом, если они положительны.

Если центр фигуры находится вблизи или в области факторного пространства, где проводился эксперимент, то для определения оптимальных величин факторов необходимо убедиться, что экстремальное значение отклика, предсказанное моделью, достаточно хорошо совпадает с опытными данными.

Если один из коэффициентов, например Θ_2 , равен нулю, то поверхность отклика представляет собой стационарное возвышение (рис. 4.2.б). Величина y_c является откликом в любой точке на оси z_1 . Центром фигуры может быть любая точка на оси z_1 .

Когда коэффициенты уравнения, например, b_{12} и b_{22} равны нулю, тогда каноническое уравнение принимает вид

$$y = y_c = \Theta_1 z_1^2 + b_2 z_2.$$

Локально поверхность отклика представляет собой возрастающее возвышение — гребень, крутизна наклона которого равна b_2 (рис. 4.2,а). Центр фигуры лежит на оси z_1 , но отнесен в бесконечность по оси z_2 . Исследование этой поверхности аналогично случаю изучения поверхности отклика, представляющей собой гиперболический параболоид.

При числе факторов $k > 2$ изучение поверхности отклика производится исходя из таких же соображений. Однако в отличие от поверхностей при $k = 2$, которые можно изучать графически, поверхности $k > 2$ в общем случае изучаются аналитически [9].

При изучении технологического процесса с помощью нескольких функций отклика исследователю часто приходится находить условный экстремум одной из функций $y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$ при ограничениях, накладываемых другой функцией

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k).$$

В случае двух факторов эта задача может быть решена графически с помощью построений линий равного выхода по каноническим уравнениям.

При $k \geq 3$ задачу приходится решать с помощью ЭВМ, пользуясь методом неопределенных множителей Лагранжа [9]. Метод неопределенных множителей Лагранжа сводится к решению системы уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0; \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0; \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \lambda \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0; \\ \dots \dots \dots \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_k) \end{array} \right.$$

относительно переменных $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ при некотором фиксированном значении y_2 . Для решения системы нелинейных уравнений используются методы, подробно изложенные в специальной литературе [9].

В отдельных случаях для изучения поверхности отклика целесообразно использовать методы построения номограмм [16]. Так, например, для двух- и трехфакторного планирования вто-

рого порядка можно использовать соответственно номограммы из выравненных точек с двумя параллельными и одной криволинейной шкалами, с двумя параллельными шкалами и полем. Если один из коэффициентов b_{11} , b_{22} или b_{33} равен нулю или более чем на порядок меньше двух других, то построение таких номограмм сводится к следующему. Уравнение регрессии следует привести к виду

$$f_1 f_{34} + f_2 g_{34} + h_{34} = 0. \quad (4.16)$$

В нашем случае, например, при b_{33} , равном нулю или $b_{33} \ll b_{11}$ и b_{22} , уравнение регрессии (4.10) для трехфакторного эксперимента запишем в виде

$$x_3(b_{13}x_1 + b_{23}x_2 + b_3) + (b_0 - y) + (b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2) = 0.$$

Простейшие уравнения элементов номограммы запишутся следующим образом:

шкала α_1 :

$$x = 0, \quad y = f_1 = x_3;$$

шкала α_2 :

$$x = H, \quad y = f_2 = b_0 - y;$$

поле (α_3 ; α_4):

$$x = \frac{Hg_{34}}{f_{34} + g_{34}} = \frac{H}{b_{13}x_1 + b_{23}x_2 + b_3 + 1},$$

$$y = \frac{-h_{34}}{f_{34} + g_{34}} = \frac{-(b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2)}{b_{13}x_1 + b_{23}x_2 + b_3 + 1}.$$

Схема номограммы приведена на рис. 4.3, а. Номограмма состоит из параллельных шкал α_1 и α_2 и бинарного поля (α_3 , α_4), связанных одним выравниванием.

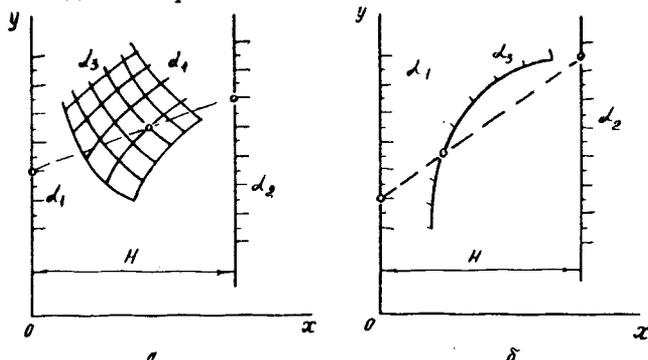


Рис. 4.3. Схемы номограмм: а — из параллельных шкал α_1 и α_2 и бинарного поля α_3 , α_4 ; б — из выравненных точек с параллельными шкалами α_1 и α_2 и криволинейной шкалой α_3

Введем в уравнение элементов номограммы параметры m , n , a и l , причем будем считать $m > 0$ и $n > 0$. Для этого уравнение (4.16) запишем в виде

$$[m(f_1 - a)] \frac{f_3^2}{m} + [n(f_2 - l)] \frac{g_3^2}{n} + (af_3 + lg_3 + h_3) = 0.$$

Новые уравнения элементов номограммы, содержащие параметры преобразования, запишутся следующим образом:

шкала α_1 :

$$x = 0, \quad y = m(f_1 - a) = m(x_3 - a); \quad (4.17)$$

шкала α_2 :

$$x = H, \quad y = n(f_2 - l) = n(b_0 - y - l); \quad (4.18)$$

поле (α_3 , α_4):

$$x = \frac{mH g_3}{nf_3 + mg_3} = \frac{mH}{n(b_{13}x_1 + b_{23}x_2 + b_3) + m},$$

$$y = \frac{-mn(af_3 + lg_3 + h_3)}{nf_3 + mg_3} =$$

$$= \frac{-mn[b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{12}x_1x_2 + (b_1 + ab_{13})x_1 + (b_2 + ab_{23})x_2 + b_3 + l]}{n(b_{13}x_1 + b_{23}x_2 + b_3) + m}.$$

Из уравнений (4.17) и (4.19) следует, что параметр H определяет расстояние между параллельными шкалами, параметры m и n определяют размеры шкал α_1 и α_2 , а параметры a и l — положение шкал по вертикали. Конструирование номограммы состоит в подборе значений параметров H , m , n , a , l . При подборе параметров стремятся к тому, чтобы все элементы номограммы находились в пределах чертежа и более полно занимали его площадь. Обычно параметры m и n назначают так, чтобы шкалы α_1 и α_2 были приблизительно одинаковой длины. Параметры a и l дают возможность поместить любую точку шкалы α_1 и любую точку шкалы α_2 на оси Ox . Обычно в качестве этих точек выбирают нижние концы шкал или их середины [16].

При двухфакторном планировании номограмма строится из быравненных точек с параллельными шкалами α_1 и α_2 и кривой шкалой α_3 . Так например, если $b_{22} = 0$ или $b_{22} \ll b_{11}$, то уравнение регрессии запишется следующим образом:

$$y = b_0 + b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_2x_2 + b_1x_1. \quad (4.20)$$

Уравнение (4.20) необходимо привести к виду

$$f_1 f_3 + f_2 g_3 + h_3 = 0.$$

Полагая

$$f_1 = x_2, \quad f_3 = b_{12}x_1 + b_2, \quad f_2 = b_0 - y,$$

$$g_3 = 1, \quad h_3 = b_{11}x_1^2 + b_1x_1,$$

получим уравнение

$$x_2(b_{12}x_1 + b_2) + (b_0 - y) + (b_{11}x_1^2 + b_1x_1) = 0.$$

Схема номограммы приведена на рис. 4.3.б. Уравнения элементов номограммы запишутся следующим образом:

$$\text{шкала } \alpha_1: \quad x = 0, \quad y = m(f_1 - a) = m(x_2 - a);$$

$$\text{шкала } \alpha_2: \quad x = H, \quad y = n(f_2 - l) = n(b_0 - y - l);$$

шкала α_3 :

$$x = \frac{mH g_3}{nf_3 + mg_3} = \frac{mH}{n(b_{12}x_1 + b_2) + m},$$

$$y = \frac{-mn(af_3 + lg_3 + h_3)}{nf_3 + mg_3} = \frac{-mn[b_{11}x_1^2 + (b_1 + ab_{12})x_1 + ab_2 + l]}{n(b_{12}x_1 + b_2) + m}.$$

Конструирование номограммы состоит в подборе значений параметров H , m , n , a и l .

Таким образом, в настоящем разделе изложены некоторые методы проведения анализа математической модели технологического процесса. На основании проведенного анализа исследователь дает конкретные технологические рекомендации по применению процесса в производстве. Рекомендации могут быть представлены в виде таблиц оптимальных значений параметров технологии и возможных отклонений, графиков или номограмм, показывающих связь откликов с варьируемыми параметрами, с помощью которых можно назначить режимы технологического процесса.

5. ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ ПЛАНИРОВАНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

В работе [1] в качестве примера рассматривается исследование технологии диффузионной сварки в вакууме жаропрочного сплава ВЖЛ-12У со сталью ЭИ961. Исследования проводились в целях разработки технологического процесса изготовления роторов турбин малоразмерных газотурбинных двигателей [5].

На основании анализа факторов технологического процесса показана целесообразность трехфакторного планирования эксперимента. Варьируемыми переменными являются температура сварки $T_{св}$, давление сжатия детали при сварке $P_{св}$, время изотермической выдержки при сварке $t_{св}$. Для количественной оценки качества сварных соединений используются показатели: предел прочности при растяжении y и величина остаточной макроскопической деформации соединения z .

С помощью планирования эксперимента по методике ПФЭ получены два уравнения регрессии. Одно из них

$$z = 3,825 + 2,175 x_1 + 1,425 x_2 + 0,55 x_3 + 0,675 x_1 x_3$$

адекватно описывает зависимость остаточной макропластической деформации сварного соединения z от температуры сварки x_1 в диапазоне 1293...1403 К, давления сжатия x_2 8...17 МПа и времени сварки x_3 8...17 мин. Для зависимости прочности сварного соединения y от x_1 , x_2 и x_3 адекватного уравнения регрессии с помощью ПФЭ получить не удается и возникает необходимость в повышении степени аппроксимирующего полинома путем применения планов второго порядка. Как показали предварительные эксперименты, наибольший интерес для исследования представляет область факторного пространства, близкая к центру плана. Поэтому трехфакторное ротатабельное планирование второго порядка вполне удовлетворяет требованиям эксперимента. План-матрица такого планирования представлена в табл. 2.7.

Эксперименты, выполненные по методике ПФЭ [1], показывают, что наибольшее влияние на прочность сварного соединения оказывает температура сварки x_1 , так как коэффициент b_1 при x_1 в несколько раз больше других коэффициентов. В связи с этим целесообразно уменьшить интервал варьирования для температуры сварки, тем самым повысив вероятность адекватного описания функции отклика полиномом второго порядка, т. е. упрощается задача аппроксимации поверхности отклика поверхностью второго порядка. Учитывая вышесказанное, диапазон изменения для температуры сварки целесообразно выбрать равным

$$1323 \text{ К} \leq T_{\text{св}} \leq 1423 \text{ К}.$$

Тогда интервал варьирования в натуральных единицах для температуры сварки с учетом, что плечо «звездных» точек в ротатабельном плане $\alpha = 1,682$, вычислим по формуле (4.1):

$$\alpha T_{\text{св}} = \frac{1423 - 1323}{2,1,682} \approx 30 \text{ К}.$$

Интервалы варьирования для давления сжатия $\alpha P_{\text{св}} = 4,5$ МПа и времени сварки $\alpha \tau_{\text{св}} = 4,5$ мин оставим без изменений. Центр плана находится в точке, координаты которых в натуральных единицах равны $x_1 = T_{\text{св}} = 1373 \text{ К}$; $x_2 = P_{\text{св}} = 12,5$ МПа и $x_3 = \tau_{\text{св}} = 12,5$ мин.

Координатные и натуральные значения варьируемых факторов процесса диффузионной сварки для трехфакторного ротатабельного плана представлены в табл. 5.1.

Ядром трехфакторного ротатабельного плана является ПФЭ типа 2^3 с числом точек, равным восьми. Для оценки дисперсии

Таблица 5.1

**Кодированные и натуральные значения факторов процесса
диффузионной сварки сплава ВЖЛ-12У со сталью ЭИ961**

| Параметры режима | Код | Нулевой уровень 0 | Интервал варьирования $\delta \bar{x}_i$ | Нижний уровень -1 | Верхний уровень +1 | «Звездные» точки | |
|-------------------|-------|----------------------|---------------------------------------------|----------------------|-----------------------|------------------|--------|
| | | | | | | -1,682 | +1,682 |
| $T_{св}$, К | x_1 | 1373 | 30 | 1343 | 1403 | 1323 | 7423 |
| $P_{св}$, МПа | x_2 | 12,5 | 4,5 | 8,0 | 17,0 | 5,0 | 20,0 |
| $\tau_{св}$, мин | x_3 | 12,5 | 4,5 | 8,0 | 17,0 | 5,0 | 20,0 |

воспроизводимости измерений проведем в этих точках по два опыта, т. е. повторим ПФЭ дважды. Ротатабельный план содержит также шесть «звездных» точек, в которых проведем по одному опыту. В нулевой точке плана проводится 6 опытов, которые используются для оценки дисперсии воспроизводимости измерений.

Таким образом, рандомизации были подвергнуты все 28 опытов: 16 опытов — ПФЭ типа 2^3 , 6 — «звездные» точки, 6 — нулевая точка. После рандомизации были реализованы опыты и проведены измерения прочности сварного соединения, результаты которых представлены в табл. 5.2.

Так как при реализации выбранного плана осуществляется неравномерное дублирование измерений, для проверки равнозначности измерений необходимо использовать статистику Барглета. Величины, полученные по формуле (4.2) и (4.3), представлены в табл. 5.2. Оценка дисперсии воспроизводимости результатов эксперимента определяется следующим образом (4.4):

$$S^2_{\text{воспр}} = \frac{450+50+200+238+78+512+32+128+5 \cdot 446}{1+1+1+1+1+1+1+5} =$$

$$= \frac{3916}{13} = 301,2$$

со степенями свободы $f_{\text{воспр}} = 13$.

Экспериментальное значение статистики Барглета (4.5)

$$B^{\text{эк}} = \frac{1}{1,338} = [13 \ln 301,2 - (\ln 450 + \ln 50 + \ln 200 + \ln 238 +$$

$$+ \ln 72 + \ln 512 + \ln 32 + \ln 128 + 5 \ln 446)] = \frac{74,22 - 70,206}{1,338} = 3,000.$$

Табличное значение χ^2 -статистики при степени свободы $f = f_{\text{воспр}} = 13$ и уровне значимости $\alpha = 0,05$ равно 5,9. Таким образом, $B^{\text{эк}} < \chi^2_{\alpha, f}$, т. е. гипотеза о равнозначности измерений с вероятностью 95% не отвергается. Следовательно, мы имеем

Таблица 5.2

Результаты измерений и оценка из воспроизводимости

| Номер опыта | x_1 | x_2 | x_3 | $x_1 x_2$ | $x_1 x_3$ | $x_2 x_3$ | x_1^2 | x_2^2 | x_3^2 | $y_{пл}$, МПа | $y_{из}$, МПа | $S^2_{пл}$ МПа ² |
|----------------|--------|--------|--------|-----------|-----------|-----------|---------|---------|---------|-------------------|-------------------|--------------------------------|
| 1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | 795 | 825 | 450 |
| 2 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | 1005 | 1015 | 50 |
| 3 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | +1 | 896 | 906 | 200 |
| 4 | +1 | +1 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | 933 | 957 | 238 |
| 5 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | 774 | 786 | 72 |
| 6 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | +1 | 1029 | 1061 | 512 |
| 7 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | 936 | 944 | 32 |
| 8 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | 1027 | 1043 | 128 |
| 9 | -1,682 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2,828 | 0 | 0 | 810 | — | — |
| 10 | +1,682 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2,828 | 0 | 0 | 1038 | — | — |
| 11 | 0 | -1,682 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2,828 | 0 | 921 | — | — |
| 12 | 0 | +1,682 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2,828 | 0 | 989 | — | — |
| 13 | 0 | 0 | -1,682 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2,828 | 890 | — | — |
| 14 | 0 | 0 | +1,682 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2,828 | 934 | — | — |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 850 | — | 446 |
| 16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 890 | — | 446 |
| 17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 895 | — | 446 |
| 18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 885 | — | 446 |
| 19 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 875 | — | 446 |
| 20 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 845 | — | 446 |

дело с результатами эксперимента, у которого наблюдается однородность оценок дисперсий отдельных измерений.

На следующем этапе проведем расчет коэффициентов уравнения регрессии, используя соотношения (2.5)—(2.8) и данные табл. 2.8. Необходимо отметить, что ротатабельный план содержит 20 точек, т. е. при расчете коэффициентов надо учитывать все 6 нулевых точек. Например, коэффициент b_0 равен:

$$b_0 = 0,166338(810 + 1010 + 906 + 945 + 780 + 1045 + 940 + 1035 + 810 + 1038 + 921 + 989 + 890 + 934 + 850 + 890 + 895 + 885 + 875 + 845) - 0,056791(810 + 1010 + 906 + 945 + 780 + 1045 + 940 + 1035 + 2,828 \cdot 810 + 2,828 \cdot 1038) + (810 + 1010 + 906 + 945 + 780 + 1045 + 940 + 1035 + 2,828 \cdot 921 + 2,828 \cdot 989) + (810 + 1010 + 906 + 945 + 780 + 1045 + 940 + 1035 + 2,828 \cdot 890 + 2,828 \cdot 934) = 0,166338 \cdot 18293 - 0,056791(12697,144 + 12872,48 + 126296272) = 3042,821 - 2169,3535 = 873,4675 \approx 873,47.$$

Остальные коэффициенты определяются следующим образом:

$$b_1 = 10,073224(-810 + 1010 - 906 + 945 - 780 + 1045 - 940 + 1035 - 1,682 \cdot 810 + 1,682 \cdot 1038) = 0,073224 \cdot 982,496 \approx 71,94;$$

$$b_2 = 0,073224 \cdot 295,376 \approx 21,63;$$

$$b_3 = 0,073224 \cdot 203,008 \approx 14,87;$$

$$b_{12} = 0,125(810 - 1010 - 906 + 945 + 780 - 1045 - 940 + 1035) = 0,125(-331) \approx -41,37;$$

$$b_{13} = 0,125 \cdot 121 \approx 15,12;$$

$$b_{23} = 0,125 \cdot 119 \approx 14,87;$$

$$b_{11} = 0,0625(810 + 1010 + 906 + 945 + 780 + 1045 + 940 + 1035 + 2,828 \cdot 921 + 2,828 \cdot 989) + 0,006889 \cdot 38198,896 - 0,56791 \cdot 18293 = 0,0625 \cdot 12697,144 + 263,15219 - 1038,8778 = 793,5715 - 775,7256 \approx 17,85;$$

$$b_{22} = 0,0625 \cdot 12872,48 - 775,7256 \approx 28,80;$$

$$b_{33} = 0,0625 \cdot 12629,272 - 775,7256 \approx 13,60.$$

Уравнение регрессии имеет вид

$$y = 873,47 + 71,94 x_1 + 21,63 x_2 + 14,87 x_3 - 41,37 x_1 x_2 + 15,12 x_1 x_3 + 14,87 x_2 x_3 + 17,85 x_1^2 + 28,80 x_2^2 + 13,60 x_3^2. \quad (5.1)$$

Значимость коэффициентов уравнения регрессии определим с помощью критерия Стьюдента (4.6). Для его определения вычислим оценки среднеквадратичных ошибок коэффициентов по формуле (4.7) с учетом зависимости (2.9)

$$S_{b_0} = \sqrt{0,1663 \cdot 301,2} = 7,077;$$

$$S_{b_1} = S_{b_2} = S_{b_3} = \sqrt{0,0732 \cdot 301,2} = 4,696;$$

$$S_{b_{12}} = S_{b_{13}} = S_{b_{23}} = \sqrt{0,125 \cdot 301,2} = 6,136;$$

$$S_{b11} = S_{b22} = S_{b33} = \sqrt{0,0625 \cdot 301,2} = 4,338.$$

Экспериментальные значения критерия Стьюдента со степенями свободы $f = f_{\text{воспр}} = 13$ представлены следующим образом:

$$t_{b0^{\text{ЭК}}} = \frac{873,47}{7,077} = 123,4; \quad t_{b1} = \frac{71,94}{4,696} \approx 15,3; \quad t_{b2} = \frac{21,63}{4,696} = 4,6;$$

$$t_{b3} = \frac{14,87}{4,696} = 3,2; \quad t_{b12} = \frac{1-41,371}{6,136} = 6,7; \quad t_{b13} = \frac{15,12}{6,136} = 2,5;$$

$$t_{b23} = \frac{14,87}{6,136} = 2,4; \quad t_{b11} = \frac{17,85}{4,338} = 4,1; \quad t_{b22} = \frac{28,80}{4,338} = 6,6;$$

$$t_{b33} = \frac{13,60}{4,338} = 3,1.$$

Для проверки значимости коэффициентов определим теоретическое значение критерия Стьюдента [1] с уровнем значимости $\alpha = 0,05$ $t^r = 2,16$. Сравнение экспериментальных значений критерия с табличными показывает, что для всех коэффициентов выполняется неравенство $t^{\text{ЭК}} > t^r$, т. е. с вероятностью 95% можно утверждать о значимости всех коэффициентов.

Адекватность полученного уравнения регрессии (5.1) проверим по критерию Фишера (4.8), для расчета которого составим табл. 5.3.

Оценка дисперсии, определяющая неадекватность представления результатов эксперимента, согласно формуле (4.19) имеет вид

$$S^2_{\text{ад}} = \frac{(16+0+16+16+16+25+1+16+49+49+4+4+9+9+5 \cdot 0,22)}{28-10-13} = 46,22$$

со степенями свободы $f = 28 - 10 - 13 = 5$.

Экспериментальное значение критерия Фишера определим следующим образом (4.15):

$$F^{\text{ЭК}} = \frac{46,22}{301,2} = 0,15.$$

со степенями свободы $f_1 = 5$ и $f_2 = 13$.

Табличное значение критерия Фишера со степенями свободы $f_1 = 5$ и $f_2 = 13$ и уровнем значимости $\alpha = 0,05$ определим из таблиц работы [1]

$$F_{0,05.5.13} = 3,025.$$

Экспериментальное значение критерия Фишера меньше табличного. Следовательно, с вероятностью 95% гипотеза об адекватности полученного уравнения не отвергается.

Таким образом, уравнение регрессии

$$y = 873,47 + 71,94 x_1 + 21,63 x_2 + 14,87 x_3 - 41,37 x_1 x_2 + 15,12 x_1 x_3 + 14,87 x_2 x_3 + 17,85 x_1^2 + 28,8 x_2^2 + 13,6 x_3^2.$$

Результаты измерений и оценка адекватности уравнения регрессии

| Номер опыта | x_1 | x_2 | x_3 | $x_1 x_2$ | $x_1 x_3$ | $x_2 x_3$ | x_1^2 | x_2^2 | x_3^2 | \bar{y}_n эк | y_n расч | $(\bar{y}_n \text{ эк} - y_n \text{ расч})^2$ |
|-------------|--------|--------|--------|-----------|-----------|-----------|---------|---------|---------|----------------|------------|-----------------------------------------------|
| 1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | 810 | 814 | 16 |
| 2 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | 1010 | 1010 | 0 |
| 3 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | +1 | 906 | 910 | 16 |
| 4 | +1 | +1 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | 945 | 941 | 16 |
| 5 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | 780 | 784 | 16 |
| 6 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | +1 | 1045 | 1040 | 25 |
| 7 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | 940 | 939 | 1 |
| 8 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | 1035 | 1031 | 16 |
| 9 | -1,682 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2,828 | 0 | 0 | 810 | 803 | 49 |
| 10 | +1,682 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2,828 | 0 | 0 | 1038 | 1045 | 49 |
| 11 | 0 | -1,682 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2,828 | 0 | 921 | 919 | 4 |
| 12 | 0 | +1,682 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2,828 | 0 | 989 | 991 | 4 |
| 13 | 0 | 0 | -1,682 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2,828 | 890 | 887 | 9 |
| 14 | 0 | 0 | +1,682 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2,828 | 934 | 937 | 9 |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 873 | 873,47 | 0,22 |
| 16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 873 | 873,47 | 0,22 |
| 17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 873 | 873,47 | 0,22 |
| 18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 873 | 873,47 | 0,22 |
| 19 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 873 | 873,47 | 0,22 |
| 20 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 873 | 873,47 | 0,22 |

адекватно описывает зависимость прочности сварного соединения y сплава ВЖЛ-12У со сталью ЭИ961 от основных параметров режима диффузионной сварки: температуры сварки x_1 , давления сжатия x_2 и времени сварки x_3 .

Математическая модель диффузионной сварки в вакууме сплава ВЖЛ-12У со сталью ЭИ961 запишется в виде системы двух уравнений регрессии:

$$\begin{cases} y = 873,47 + 71,94 x_1 + 21,63 x_2 + 14,87 x_3 - 41,37 x_1 x_2 + \\ + 15,12 x_1 x_3 + 14,87 x_2 x_3 + 17,85 x_1^2 + 28,8 x_2^2 + 13,6 x_3^2; \\ z = 3,825 + 2,175 x_1 + 1,425 x_2 + 0,55 x_3 + 0,675 x_1 x_3. \end{cases}$$

Для определения оптимальных значений параметров режима сварки $T_{св}$, $P_{св}$ и $\tau_{св}$ изучим поверхности откликов y и z с помощью построения линий равного выхода. На рис. 5.1 представлены линии равного выхода y (кривые 1—4) и z (кривые 5—8) при $\tau_{св} = 12,5$ мин и $\tau_{св} = 20$ мин.

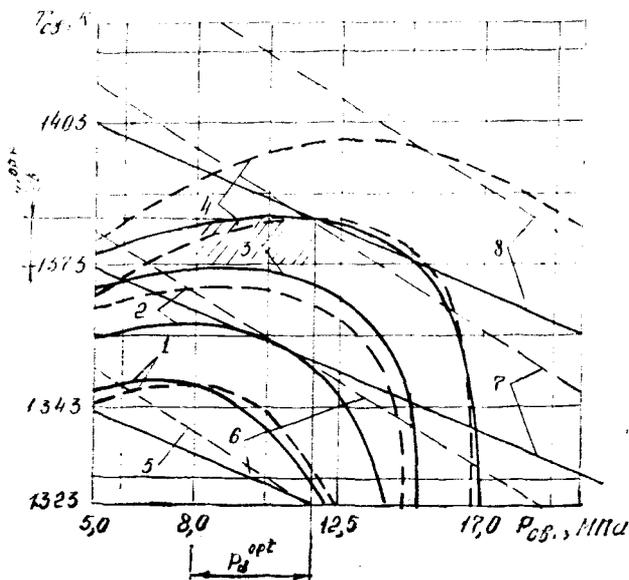


Рис. 5.1. Линии равной прочности и остаточной макропластической деформации диффузионного соединения ВЖЛ12У—ЭИ961

Анализ линий равного выхода показывает, что получение сварных соединений с прочностными свойствами 900—950 МПа

(кривые 3, 4) ($\sigma_{\text{в св}} \geq 0,9 \sigma_{\text{в осн}}$) возможно в широком диапазоне изменения основных параметров. При диффузионной сварке целесообразно стремиться к уменьшению теплового воздействия на материалы, т. е. к снижению температуры сварки. Диффузионная сварка при высоких давлениях сжатия деталей имеет целый ряд недостатков, связанных с потерей устойчивости вала, большими макропластическими деформациями сплавов, которые могут приводить к появлению трещин и т. п. Учитывая вышесказанное, можно отметить, что оптимальное значение времени сварки $\tau_{\text{св}}$ равно 20 мин.

Сварные соединения с прочностью, не меньшей 900 МПа (кривая 3, рис. 5.1), можно получить в широком диапазоне изменения давления сжатия при температуре 1373 К. Увеличение температуры сварки до 1383 К приводит к росту прочности соединения до 950 МПа в диапазоне изменения давления сжатия от 8,0 до 11,5 МПа.

Таким образом, оптимальные значения основных параметров диффузионной сварки сплава ВЖЛ-12У со сталью ЭИ961 равны: $T_{\text{св}} = 1373\text{—}1383$ К; $P_{\text{св}} = 8,0\text{—}11,5$ МПа, $\tau_{\text{св}} = 20$ мин. При этом величина остаточной макропластической деформации составляет меньше 5% при прочности сварного соединения не менее 900 МПа.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бордаков П. А. Планирование эксперимента в технологических исследованиях производства летательных аппаратов: Учеб. пособие/Куйбышев. авиац. ин-т. Куйбышев, 1986. 32 с.
2. Vox G. E. P., Wilson K. B., Stat. Sos., S. B. 13. № 1, 1951.
3. Vox M. I., Draper N. R. Factorial designs, the X*X Criterion, and some related matters. Technical report № 207, Department of Statistics, 2, 1960.
4. Бинарский М. С., Лурье М. В. Планирование эксперимента в технологических исследованиях. Киев: Техника, 1975. 167 с.
5. Выбор режимов сварки вала из стали ЭИ961 с ротором газотурбинного двигателя из сплава ВЖЛ-12У / Бордаков П. А. и др. // Автоматическая сварка. 1979. № 7. С. 54—56.
6. Карамышева Ф. Н., Жучкова А. Н. Методические рекомендации по планированию эксперимента в технологии стройматериалов / УралНИИСтромпроект. Челябинск, 1973. 40 с.
7. Kifer I. Ann. Math. Stat., 32, 1961.
8. Копо К. Memoirs of the Faculty of Science Kyushu University, A. 16, 1962.
9. Корн Н. В., Корн А. В. Справочник по высшей математике. М.: Наука, 1987. 574 с.
10. Лисенков А. Н. О некоторых планах второго порядка и их использовании при исследовании многофакторных объектов. Проблемы планирования эксперимента. М.: Наука, 1969. 71 с.
11. Налимов В. В., Голикova Т. И. Логические основания планирования эксперимента / МГУ. М., 1971. 69 с.

12. Налимов В. В., Чернова Н. А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. М.: Наука, 1965. 275 с.
13. Пустыльник Е. И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. М.: Наука, 1968. 288 с.
14. Ушаков Н. Н. Оптимизация технологических процессов в приборостроении. М.: Машиностроение, 1981. 56 с.
15. Hartly Н. О. Biometrics, 15, 1959.
16. Хованский Г. С. Номография и ее возможности. М.: Наука, 1977. 128 с.

О Г Л А В Л Е Н И Е

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Предисловие | 3 |
| 1. Постановка задачи | 5 |
| 2. Центральное композиционное планирование | 6 |
| 2.1. Ортогональные планы второго порядка | 7 |
| 2.2. Ротатабельные планы второго порядка | 13 |
| 3. Исследование планов второго порядка и рекомендации по их применению | 18 |
| 3.1. Двухфакторное планирование второго порядка | 19 |
| 3.2. Трехфакторное планирование второго порядка | 27 |
| 4. Планирование, обработка и анализ результатов эксперимента | 28 |
| 4.1. Кодирование факторов | 31 |
| 4.2. Рандомизация измерений и реализация эксперимента | 32 |
| 4.3. Проверка равноточности измерений | 33 |
| 4.4. Вычисление коэффициентов уравнения регрессии и оценка их значимости | 35 |
| 4.5. Проверка уравнения регрессии на адекватность | 44 |
| 4.6. Методы проведения анализа уравнений регрессии | 46 |
| 5. Пример применения планирования второго порядка в технологических исследованиях | 54 |
| Библиографический список | 62 |

Барвинок Виталий Алексеевич
Бордаков Павел Александрович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ
ЭКСПЕРИМЕНТА В ПРОИЗВОДСТВЕ
ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ**

Учебное пособие

Редактор Т. И. Кузнецова
Техн. редактор П. М. Каленюк
Корректор Н. С. Куприянова

Свод. тем. план № 121
Сдано в набор 30.03.90 г. Подписано в печать 1.06.90 г.
ЕО 00391. Формат 60×84 1/16. Бумага оберточная.
Печать высокая. Гарнитура литературная.
Усл. п. л. 3,72. Усл. кр.-отг. 3,85. Уч.-изд. л. 3,6.
Тираж 500 экз. Заказ 342. Цена 10 коп.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С. П. Королева,
443086, Куйбышев, Московское шоссе, 34.

Тип. ЭОЗ Куйбышевского авиационного института,
443001, Куйбышев, ул. Ульяновская, 18.