

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

А.В. ДОРОШИН

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ**

САМАРА 2008

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

А.В. ДОРОШИН

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

Рекомендовано УМС по математике и механике УМО по классическому университетскому образованию РФ в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям: «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Механика»

САМАРА
Издательство СГАУ
2008

УДК 517.2
ББК 22.1
Д 696

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. СГАУ И. П. Завершинский
д-р физ.-мат. наук, проф. СГУ В. И. Астафьев

Дорошин А.В.

Д 696 **Математическое моделирование в нелинейной динамике**: учеб. пособие /
А.В. Дорошин. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2008. – 100 с.:
ил.

ISBN 978-5-7883-0584-4

Рассматриваются вопросы математического моделирования и качественного анализа динамических систем, возникающих в задачах теоретической механики и нелинейной динамики.

Приводятся основные понятия теории динамических систем и описываются возможные качественные эволюции: бифуркации, рождение предельных циклов, возникновение странных аттракторов и т.д. Дается ряд примеров, иллюстрирующих указанные аспекты нелинейной динамики, а также подробно описывается их программная реализация в математических пакетах.

Пособие предназначено для студентов естественнонаучных направлений «Механика», «Механика. Прикладная математика», а так же «Прикладная математика и информатика». Материал пособия может представлять базовое содержание учебных курсов по теории динамических систем и нелинейной динамике, а также циклов специализированных лабораторных работ, в том числе практикума «Математическое моделирование в механике». Также пособие может быть использовано при написании курсовых и квалификационных работ.

Выполнено на кафедре теоретической механики СГАУ при поддержке РФФИ (№№ 06-08-00325; 06-01-00355) и Программы Президента РФ по поддержке молодых ученых (МК-516.2008.8).

УДК 517.2
ББК 22.1

ISBN 978-5-7883-0584-4

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2008

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
1. Понятие динамической системы.....	6
2. Примеры динамических систем.....	9
2.1. Модель Ланкастера.....	9
2.2. Модель Мальтуса – модель роста (популяции).....	12
2.3. Многоуровневое управление.....	16
2.4. Маятник Фроуда.....	18
2.5. Колебания точки на вращающейся окружности.....	20
3. Особенности фазового пространства нелинейных динамических систем.....	24
3.1. Предельные множества динамических систем.....	24
3.2. Устойчивость и ее линейный анализ.....	26
3.3. Бифуркации динамических систем, катастрофы.....	29
4. Регулярные и странные аттракторы динамических систем.....	42
4.1. Динамическая система и аттрактор Ван дер Пола.....	42
4.2. Аттрактор в системе Хенона (Эно).....	46
4.3. Аттрактор Лози.....	48
4.4. Странный аттрактор Лоренца.....	49
4.5. Странный аттрактор Ресслера.....	61
5. Детерминированный хаос и сценарии перехода к хаосу.....	63
5.1. Фракталы и фрактальная размерность.....	63
5.2. Критерии регулярности, странности и хаотичности аттракторов.....	69
5.3. Сценарии развития хаоса.....	79
5.3.1. Последовательность бифуркаций удвоения периода. Сценарий Фейгенбаума	79
5.3.2. Жесткий переход к хаосу. Перемежаемость.....	81
5.3.3. Переход к хаосу через разрушение двухчастотных колебаний. Тор-хаос	84
6. Исследование регулярных и хаотических движений динамических систем с помощью сечения Пуанкаре	85
Библиографический список.....	97

ВВЕДЕНИЕ

Одной из важных научных проблем естествознания является решение задачи предсказания поведения изучаемого объекта во времени и пространстве на основе определенных знаний о его начальном состоянии. Эта задача сводится к нахождению некоторого закона, который позволяет по имеющейся информации об объекте в начальный момент времени t_0 в точке пространства x_0 определить его будущее в любой момент времени $t > t_0$. Этот закон может быть детерминированным или вероятностным и отражать непрерывную или дискретную природу изучаемого процесса.

Несомненно, главную роль в развитии указанной научной проблемы сыграли работы Галилея и Ньютона, в которых был сформулирован центральный принцип научной революции нового времени: природа подчиняется неизменным законам, которые могут быть выражены математически. Ключевая позиция этого принципа – детерминизм, развитый в работах Лапласа, который тождественно связал его с предсказуемостью поведения объекта по его начальному состоянию. Этот принцип был реализован в рамках классической и, в особенности, небесной механики. Однако современная теория динамических систем в своем современном понимании берет начало с работ Анри Пуанкаре, который впервые поставил задачу описания процессов в их долгосрочном асимптотическом поведении, изменении их качественных характеристик, изучение которых требует использования “прямых” методов исследования, которые не основываются на решении в явном виде и также требуют вероятностных подходов. Тем самым Пуанкаре выявил одно из основных фундаментальных свойств естественных процессов, выражаемое в том, что долгосрочное поведение системы (и даже детерминированной) может оказаться непредсказуемым и, более того, хаотическим. Указанные аспекты долгосрочного поведения объектов представляют собой предмет исследований науки, носящей название нелинейной динамики или теории динамических систем. Нелинейная динамика изучает поведение объектов в их разноплановом проявлении, начиная с анализа простых периодических процессов, возможных качественных скачкообразных изменений (бифуркаций) и заканчивая изучением сложных непериодических колебаний, механизмов рождения странных аттракторов и хаоса.

Современное развитие теории динамических систем связано с работами таких отечественных и зарубежных ученых, как Андронов А.А., Витт А.А., Понтрягин Л.С., Арнольд В.И., Мельников В.К., Анищенко

ко В.С., Кузнецов С.П., Неймарк Ю.И., Ланда П.С., Лоренц Э., Фейгенбаум М., Хасселблат Б., Каток А., Каплан Д., Йорк Дж., Лихтенберг А., Либерман М., Масден Д., Мандельброт Б., Шустер Г., Рюэль Д., Такенс Ф., Хенон М. и многих других.

В настоящем пособии на разнообразных примерах рассматриваются основные модели и методы теории динамических систем, а также приводятся листинги иллюстрирующих их программ, составленных автором для математических пакетов MAPLE и MATLAB. Материал пособия основывается на известных результатах нелинейной динамики и, в основном, заимствован из работ [1-9, 13-18]. Результаты, полученные при исследовании динамики возмущенной системы Лотка-Вольтерра (пример 5 параграфа 3.3) и системы соосных тел (глава 6) целиком принадлежат автору.

Пособие предназначено для ознакомления студентов естественнонаучных направлений с основами бурно развивающейся теории динамических систем (нелинейной динамики, синергетики и теории катастроф) и направлено на их подготовку к практическому решению задач с использованием современных программных средств. На протяжении пяти последних лет материал пособия представляет собой содержательную базу для выполнения цикла лабораторных работ в рамках курса «Математическое моделирование в механике», читаемого автором студентам четвертого курса направлений 010900 «Механика», 011000 «Механика. Прикладная математика». Пособие не претендует на полноту изложения материала и ни в коей мере не замещает специализированной учебной и методической литературы по теории динамических систем и нелинейной динамике. Целью пособия являются теоретическая и техническая подготовка студентов к освоению подобных специализированных курсов, использующих мощный вычислительный инструментарий интегрированных математических пакетов. Пособие также может быть полезно при написании разноплановых курсовых и квалификационных работ.

1. ПОНЯТИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Под динамической системой понимают любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния как совокупности некоторых величин в данный момент времени и задан закон, который описывает изменение (эволюцию) начального состояния с течением времени [1, 3]. Этот закон позволяет по начальному состоянию прогнозировать будущее состояние динамической системы, его называют законом эволюции. Динамические системы – это механические, физические, химические и биологические объекты, вычислительные процессы и процессы преобразования информации, совершаемые в соответствии с конкретными алгоритмами. Описания динамических систем для задания закона эволюции также разнообразны: с помощью дифференциальных уравнений, дискретных отображений, теории графов и т.д. Выбор одного из способов описания задает конкретный вид математической модели соответствующей динамической системы.

Математическая модель динамической системы считается заданной, если введены параметры (координаты) системы, определяющие однозначно ее состояние, и указан закон эволюции. В зависимости от степени приближения одной и той же системе могут быть поставлены в соответствие различные математические модели.

Исследование реальных систем сводится к изучению математических моделей, совершенствование и развитие которых определяются анализом экспериментальных и теоретических результатов при их сопоставлении. В связи с этим под динамической системой мы будем понимать именно ее математическую модель. Если рассматривать динамические системы, моделируемые конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений, то получается наглядное геометрическое представление состояния динамической системы в виде фазовой (изображающей) точки в фазовом пространстве динамической системы. Изменению состояния системы во времени отвечает движение фазовой точки вдоль фазовой траектории. В векторном виде система обыкновенных дифференциальных уравнений может быть записана в следующем общем виде:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad (1.1)$$

где $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, $\mathbf{F} = [F_1(\mathbf{x}, t), \dots, F_n(\mathbf{x}, t)]^T$ – вектор состояния (координат) динамической системы и вектор-функция, определяющая эволюцию динамической системы; t – время, представляющее в данном случае неза-

висимую переменную, производная по которой канонически обозначается точкой.

Если динамическая система задана уравнением (1.1), то постулируется, что каждому $x(t_0)$ в фазовом пространстве ставится в соответствие состояние $x(t)$, $t > t_0$, куда за время $t - t_0$ переместится фазовая точка, движущаяся в соответствии с уравнением (1.1). В операторной форме (1.1) можно записать в виде:

$$\mathbf{T}_t : \mathbf{x}(t_0) \rightarrow \mathbf{x}(t), \quad (1.2)$$

где \mathbf{T}_t – оператор эволюции. Если этот оператор применить к начальному состоянию $\mathbf{x}(t_0)$, то мы получим $\mathbf{x}(t)$, то есть состояние в момент времени $t > t_0$. Так как $\mathbf{x}(t_0)$ и $\mathbf{x}(t)$ принадлежат одному и тому же фазовому пространству динамической системы, то говорят, что оператор \mathbf{T}_t отображает фазовое пространство системы на себя, и называют оператором отображения или просто отображением.

Динамические системы можно классифицировать в зависимости от вида оператора отображения и структуры фазового пространства. Если оператор предусматривает исключительно линейные преобразования начального состояния, то он называется линейным. Линейный оператор обладает свойством суперпозиции: $\mathbf{T}[\mathbf{x}(t) + \mathbf{y}(t)] = \mathbf{T}\mathbf{x}(t) + \mathbf{T}\mathbf{y}(t)$. Если оператор нелинейный, то и соответствующая динамическая система называется нелинейной. В нелинейных системах принцип суперпозиции не применим! Различают непрерывные и дискретные операторы и соответственно системы с непрерывным и дискретным временем. Системы, для которых отображение $\mathbf{x}(t)$ с помощью оператора \mathbf{T} может быть определено для любых $t > t_0$ (непрерывно во времени), называют также потоками по аналогии со стационарным течением жидкости. Если оператор отображения определен на дискретном множестве значений времени, то соответствующие динамические системы называют каскадами или системами с дискретным временем. Способы задания оператора отображения \mathbf{T} также могут различаться. Оператор \mathbf{T} можно задать в виде дифференциального или интегрального преобразования, в виде матрицы или таблицы, в виде графика или функции и т.д.

Динамические системы, моделируемые конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений, называют *сосредоточенными* или точечными системами. Они описываются с помощью конечномерного фазового пространства и характеризуются конечным числом степеней свободы. Если же система имеет бесконечное число степеней свободы, она называется *распределенной*. Типичным примером распределенной системы

может служить упругая балка. Одна и та же система в различных условиях может рассматриваться либо как сосредоточенная, либо как распределенная. Математические модели распределенных систем – это дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения или обыкновенные уравнения с запаздывающим аргументом. Так как число степеней свободы распределенной системы бесконечно, то требуется бесконечное число данных для определения ее состояния.

По энергетическому признаку динамические системы делятся на *консервативные* и *неконсервативные*. Консервативные системы характеризуются неизменным во времени запасом энергии. В механике их называют гамильтоновыми. Для консервативных систем с n степенями свободы определяется гамильтониан системы $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, где \mathbf{q} – обобщенные координаты, \mathbf{p} – обобщенные импульсы системы. Гамильтониан полностью характеризует динамическую природу системы и с физической точки зрения в большинстве случаев представляет собой ее полную энергию. Сама динамическая система в этом случае описывается $2n$ известными дифференциальными уравнениями Гамильтона:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = \overline{1, n}). \quad (1.3)$$

Динамические системы с изменяющимся во времени запасом энергии называются *неконсервативными*. Системы, в которых энергия уменьшается во времени из-за трения или рассеяния, называются *диссипативными*. В соответствии с этим системы, энергия которых во времени нарастает, называются системами с отрицательным трением или с *отрицательной диссипацией*. Такие системы можно рассматривать как диссипативные при смене направления отсчета времени на противоположное. Динамические системы называются *автономными*, если они не зависят явным образом от времени. Большинство реальных колебательных систем в физике, радиофизике, биологии, химии и других областях знаний неконсервативны. Среди них выделяется особый класс автоколебательных систем, которые принципиально неконсервативны и нелинейны. *Автоколебательной* называют динамическую систему, преобразующую энергию источника в энергию незатухающих колебаний, причем основные характеристики колебаний (амплитуда, частота, форма колебаний и т.д.) определяются параметрами системы и в определенных пределах не зависят от выбора исходного начального состояния.

2. ПРИМЕРЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрим несколько примеров динамических систем различной природы, встречающихся в механике, биологии, экономике, социологии и других областях знаний. Описываемые ниже динамические системы допускают несложный качественный анализ, из которого следуют весьма любопытные результаты. Первые три динамические системы были доложены академиком В.И. Арнольдом на семинаре при Президентском совете РФ [2], и, несмотря на свою простоту, имеют важное социально-экономическое значение.

2.1. Модель Ланкастера

Рассмотрим динамическую систему, описываемую следующими двумя обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x} = -by, \quad \dot{y} = -ax. \quad (2.1)$$

Динамическая система (2.1), состояние которой определяется точкой (x, y) положительного квадранта координатной плоскости, носит название модели Ланкастера [2] и описывает простейшее противостояние двух армий. Координаты этой точки x и y – это численности противостоящих армий. Здесь a – мощность оружия армии x , а b – армии y . Предполагается, что каждый солдат армии x уничтожает за единицу времени a солдат армии y (и, соответственно, каждый солдат армии y уничтожает b солдат армии x). Эта модель допускает точное решение:

$$ax^2 - by^2 = \text{const}. \quad (2.2)$$

Таким образом, эволюция численностей армий x и y происходит вдоль гиперболы (2.2) и описывается простым фазовым портретом (рис. 1). По какой именно гиперболе пойдет война, зависит от начальной точки.

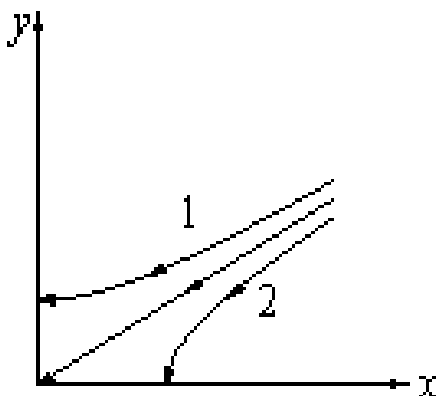


Рис.1. Модель Ланкастера

Фазовое пространство разделяется прямой $\sqrt{a}x = \sqrt{b}y$. Если начальная точка лежит выше этой прямой (случай 1 на рис. 1), то гипербола выходит на ось y . Это значит, что в ходе войны численность армии x уменьшается до нуля (за конечное время). Армия y выигрывает, противник уничтожен.

Если начальная точка лежит ниже (случай 2), то выигрывает армия x . В разделяющем эти случаи состоянии (на прямой) война заканчивается взаимным истреблением обеих армий и никто не достигает победы. Взаимное истребление, однако, произойдет на бесконечно большом интервале времени $t \rightarrow \infty$: конфликт продолжает тлеть, когда оба противника уже обессилены.

Вывод модели, следующий, по крайней мере, из «паритетной» прямой, таков: для борьбы с вдвое более многочисленным противником ($x_0 = y_0 / 2$) нужно в четыре раза более мощное оружие:

$$y_0 / x_0 = \sqrt{a} / \sqrt{b} = 2 \Rightarrow a = 4b,$$

а с втрое более многочисленным – в девять раз и т. д.

Ясно, однако, что модель (2.1) сильно идеализирована и было бы неверно прямо применять ее к реальной ситуации. Например, коэффициенты a и b могут быть не строго постоянными, а, например, зависеть от x и y . И, более того, точный вид этой зависимости может быть неизвестен. В этом случае речь идет о системе:

$$\dot{x} = -b(x, y)y, \quad \dot{y} = -a(x, y)x, \quad (2.3)$$

которая уже не решается явно в общем случае.

Однако в математике разработаны методы, позволяющие сделать выводы общего характера, не зная точно явного вида функций a и b . В этой ситуации изменение функций a и b изменит описывающие ход военных действий кривые на плоскости (x, y) (которые уже не будут гиперболами и разделяющей их прямой), но это изменение не затрагивает основного качественного вывода, состоящего в том, что положения "x выигрывает" и "y выигрывает" разделены нейтральной линией "обе армии уничтожают друг друга за бесконечное время". Здесь имеется в виду, что топологический тип системы на плоскости (x, y) не меняется при изменении функций a и b : оно приводит лишь к искривлению нейтральной линии (рис. 2).

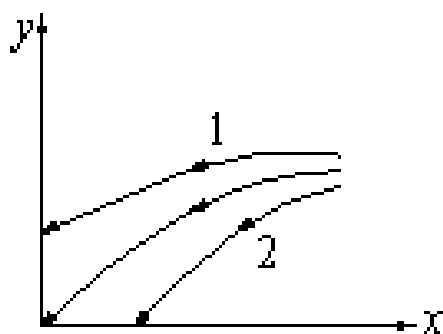


Рис.2. Нелинейная модель Ланкастера

Этот математический вывод не самоочевиден. Можно представить себе и другую ситуацию, например, изображенную на рис. 3. Математическая теория структурной устойчивости утверждает, что эта ситуация не реализуется, во всяком случае для не слишком патологических функций a и b (скажем, она не реализуется, если это положительные в нуле многочлены).

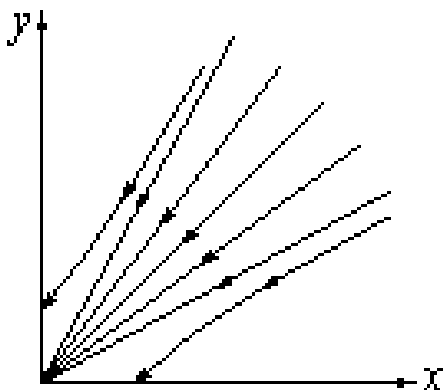


Рис. 3. Нереализуемая модель войны

Можно сделать вывод о качественной применимости простейшей модели войны для приближенного описания событий в целом классе моделей, причем для этого даже не нужно знать точного вида уточненной нелинейной модели. Простейшая модель в этом случае дает даже полезное количественное предсказание: наклон разделяющей нейтральной прямой в нуле определяется формулой $\sqrt{ax} = \sqrt{by}$, где a и b – значения коэффициентов в нуле. То есть принцип "если противников вдвое больше, то надо иметь в четыре раза более мощное оружие" справедлив на конечном этапе взаимного истребления, в то время как на начальном этапе войны число 4 нужно, быть может, откорректировать (учитывая вид коэффициентов a и b).

Задание 1. Провести исследование фазового портрета модели Ланкастера, принимая $a(x, y) = a_0 + \varepsilon x$; $b(x, y) = b_0 + \varepsilon y$.

2.2. Модель Мальтуса – модель роста (популяции)

Рассмотрим процесс роста численности популяции [2, 3]. Простейшая модель роста популяции была предложена Мальтусом:

$$\dot{x} = kx, \quad (2.4)$$

где x – текущая численность популяции. При этом под популяцией здесь можно понимать и численность определенного вида животных особей, обитающих в замкнутой экосфере без внешнего вторжения хищников, т.е. особи предоставлены сами себе и не испытывают ограничений в пище и т.д. По такому же сценарию в простейшем приближении увеличивается и численность человеческого населения, и рост научного прогресса (измеряемому, скажем, числом научных статей) (рис. 4); также увеличивается число инфицированных пациентов и протекают прочие подобные естественные процессы. Из решения (2.4) следует экспоненциальная зависимость от времени:

$$x(t) = x_0 \exp(kt). \quad (2.5)$$

Естественно, при слишком больших x конкуренция за ресурсы (пищу, энергию и т. д.) приводит к уменьшению k , т.е. к снижению скорости прироста, и модель Мальтуса должна быть скорректирована с учетом зависимости коэффициента прироста от текущей численности популяции:

$$\dot{x} = k(x)x. \quad (2.6)$$

Простейшим примером является выбор линейной зависимости коэффициента прироста $k(x)=a-bx$. Последующий анализ динамики системы приводит к так называемой *логистической модели*. Термин «логистический» происходит от французского слова *logistique*, которое, в свою очередь, – от *logement* – расквартирование солдат. В случае же изучения возможного поведения системы логистический анализ позволяет выделить особые значения некоторого параметра и соответствующие им зоны фазового пространства с разным качественным поведением системы. В данном случае логистический анализ удобно выполнить геометрически (рис. 4).

С учетом линейной зависимости коэффициента прироста от численности получим следующее уравнение роста популяции:

$$\dot{x} = k(x)x = ax - bx^2 = x - x^2. \quad (2.7)$$

Здесь для простоты вычислений принято, что $a=b=1$. Тогда изменение правой части (2.7) и соответствующее поведение численности популяции можно наглядно представить графически (рис.4).

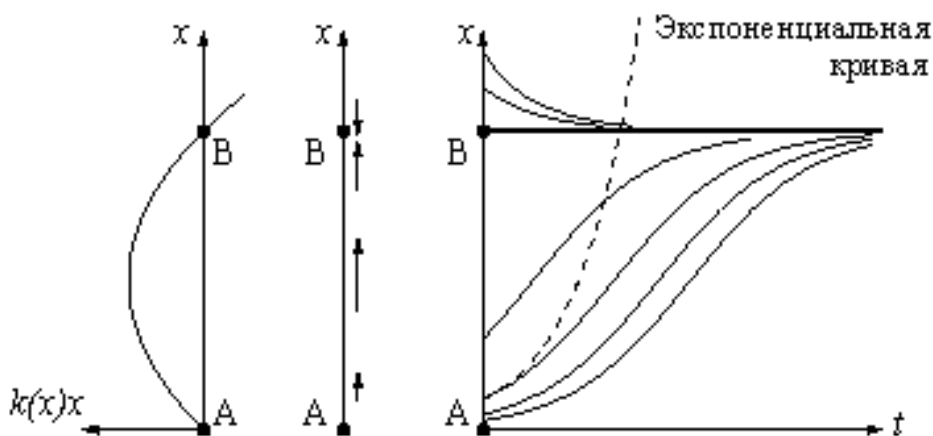


Рис. 4. Логистическая модель

На рис. 4 слева изображен график функции $k(x)x$, положительной между точками A и B . В центре изображено векторное поле в пространстве x изображающей всевозможные состояния системы (оси x). Оно указывает скорость эволюции состояния. В точках A и B скорость равна нулю: это равновесные стационарные состояния. Между A и B скорость положительна (популяция растет), а за точкой B – отрицательна (популяция убывает). Справа изображена результирующая зависимость популяции от времени при разных начальных условиях. Модель предсказывает, что с течением времени устанавливается устойчивый стационарный режим B : большая численность популяции уменьшается, меньшая – увеличивается.

Логистическая модель удовлетворительно описывает многочисленные явления насыщения. Вблизи A , когда численность мала, система близка к модели Мальтуса. Но при достаточно больших x (порядка $1/2$ при нашем выборе коэффициентов) наблюдается резкое отличие от мальтузианского роста (обозначенного на рис. 4 пунктиром): вместо ухода x на бесконечность популяция приближается к стационарному значению B .

Если говорить о численности населения Земли, которое сейчас приближается к 6 миллиардам, то его стационарное значение (по разным оценкам) соответствует 16-20 миллиардам человек.

Логистическая модель является обычной в экологии. Пусть, например, x – это количество рыб в озере. Посмотрим теперь, как скажется на судьбе этих рыб рыболовство с интенсивностью c :

$$\dot{x} = x - x^2 - c. \quad (2.8)$$

Ситуация свободного естественного развития резко меняется при некотором критическом значении квоты вылова – разрешенной интенсивности c . Для рассматриваемой модели это критическое значение есть $c = 1/4$.

Ход эволюции числа рыб x с течением времени t (логистическая модель) изображен на рис. 5. Если квота c мала, то изменения (по сравнению со свободной популяцией, для которой $c = 0$) состоят в следующем. Система имеет два равновесных состояния A и B . Состояние B устойчиво: популяция в этом случае несколько меньше, чем необлавливаемая, но она восстанавливается при малых отклонениях x от равновесного значения B . Состояние A неустойчиво: если вследствие каких-либо причин (скажем, браконьерства или мора) размер популяции упадет хоть немного ниже уровня A , то в дальнейшем популяция (хотя и медленно, если отличие от A невелико) будет уничтожена полностью за конечное время. При большей критической квоте вылова c популяция x уничтожается за конечное время, как бы велика она ни была в начальный момент.

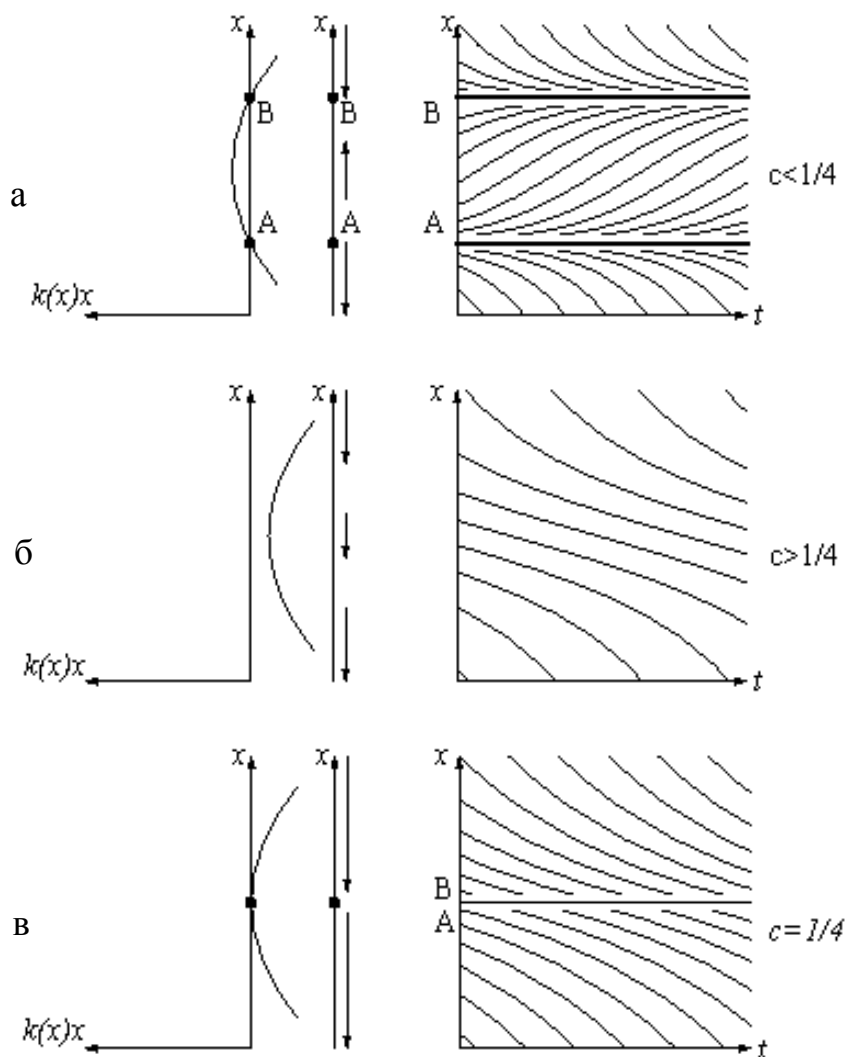


Рис. 5. Недолговечность (а), перелом (б) и оптимизация (в) рыболовства

Модели этого рода описывают также банкротство фирм, концернов и государств. Опасность уничтожения в рассмотренной модели появляется тогда, когда неустойчивое состояние A приближается к устойчивому состоянию B , т. е. когда величина x опускается примерно до половины исходной стационарной величины необлавливаемой популяции. Из сказанного видно, что выбор значения параметра c является чрезвычайно важным моментом управления эксплуатацией популяции x . Стремясь к увеличению квоты эксплуатации c , разумная планирующая организация не должна превосходить критический уровень (в рассмотренном случае $c=1/4$). Оптимизация по критерию повышения вылова приводит к выбору именно критического значения $c=1/4$, при котором эксплуатируемая популяция еще не уничтожается, но доход от эксплуатации за единицу времени достигает максимально возможного значения $c=1/4$. Из рис. 5, в видно, что произойдет при таком "оптимальном" выборе $c=1/4$. Какова бы ни была начальная популяция $x > 1/2$, с течением времени она выйдет на стационарный режим $A=B=1/2$. Эта стационарная популяция, однако, неустойчива. Небольшое случайное уменьшение x приводит к полному уничтожению популяции за конечное время. Следовательно, оптимизация параметров плана может приводить к полному уничтожению планируемой системы вследствие возникающей из-за неустойчивости.

Устойчивость системы восстанавливается, если заменить жесткое планирование квоты c на систему с обратной связью: решение о величине эксплуатации (квоты вылова, налогового пресса и т. д.) следует принимать в зависимости от достигнутого состояния системы: $c=kx$, где параметр k ("дифференциальная квота") подлежит выбору.

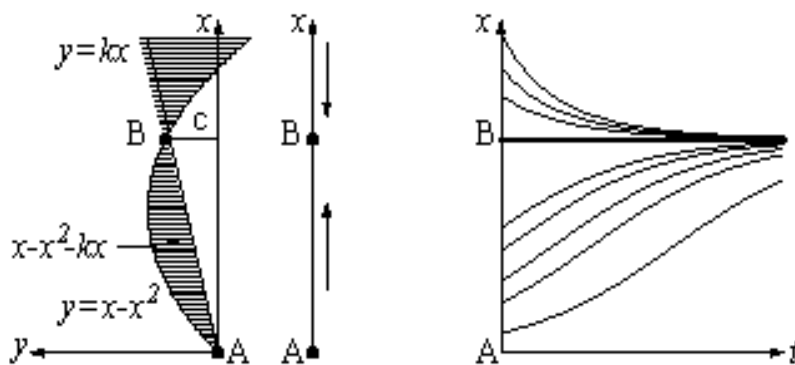


Рис. 6. Устойчивая система с обратной связью

В этом случае модель (2.8) принимает вид:

$$\dot{x} = x - x^2 - kx.$$

При $k < 1$ с течением времени устанавливается стационарное состояние B , которое устойчиво (рис. 6). Средний многолетний "доход" $c = kx$ в этом состоянии оптимален, когда прямая $y = kx$ проходит через вершину параболы $y = x - x^2$, т. е. при $k = 1/2$. При этом выборе дифференциальной квоты k средний "доход" $c = 1/4$ достигает максимального возможного в нашей системе значения. Но, в отличие от жестко планируемой системы, система с обратной связью устойчива и при оптимальном значении коэффициента k (небольшое случайное уменьшение по отношению к стационарному уровню $x=B$ приводит к автоматическому восстановлению стационарного уровня силами самой системы). Более того, небольшое отклонение коэффициента от оптимального значения $k = 1/2$ приводит не к самоуничтожению системы (как это было при небольшом отклонении от оптимального жесткого плана c), а лишь к небольшому уменьшению "дохода".

Итак, введение обратной связи (т. е. зависимости принимаемых решений от реального состояния дел, а не только от планов) стабилизирует систему, которая без обратной связи разрушилась бы при оптимизации параметров.

Задание 2. Провести анализ фазового портрета модели Мальтуса, принимая $k(x) = a + bx + cx^2$.

2.3. Многоуровневое управление [2]

Рассмотрим процесс производства какого-либо товара x (имеется в виду количество единиц товара). Пусть это производство управляется руководителем первого уровня, принимающим решение о скорости производства и выбирающим для этой скорости величину u . Тогда имеет место следующее уравнение: $\dot{x} = u$.

В свою очередь, поведение руководителя первого уровня контролируется руководителем второго уровня z , который принимает решение о том как нужно менять скорость производства: $\dot{u} = z$. Руководитель второго уровня также контролируется вышестоящим руководителем и т.д. Пусть в рассматриваемой модели имеется три ($n = 3$) уровня руководства. Послед-

ний уровень руководства желает достичь количества товара X и влияет на предшествующее звено в положительную сторону, когда количество не достигнуто, и в отрицательную – когда произошло перепроизводство. Таким образом, система уравнений замыкается и приводится к следующему виду:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -k(x - X). \end{cases} \quad (k > 0) \quad (2.9)$$

Рассмотренная ситуация легко обобщается на произвольное количество уровней управления n , при этом соответствующая система, подобная (2.9), приводится к одному дифференциальному уравнению порядка n :

$$x^{(n)} = -k(x - X). \quad (2.10)$$

Последнее линейное дифференциальное уравнение решается в общем виде, для чего требуется определить его характеристические числа из характеристического уравнения:

$$\lambda^n = -k. \quad (2.11)$$

В общем случае корни уравнения (2.11) являются комплексными. Очевидно, что система допускает стационарный режим: $x = X, y = z = \dots = 0$ (записано в прежних обозначениях). Этот стационарный режим, желаемый высшим уровнем руководства, будет устойчив тогда, когда вещественные части корней (2.11) лежат в левой полуплоскости соответствующего комплексного пространства, что является известным фактом теории управления. Так как явные выражения корней (2.11) имеют вид: $\lambda = \sqrt[n]{-k}$, а в комплексной плоскости эти корни обязаны лежать на окружности соответствующего радиуса $\sqrt[n]{|k|}$ и образовывать правильные многоугольники, то, начиная со случая $n \geq 3$, хотя бы один из корней будет находиться в неустойчивой правой части комплексной плоскости. Заметим, что при $n = 1$: $\lambda_1 = -k < 0$; $n = 2$: $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{k}$, т.е. случаи, когда число уровней руководства не превышает $n = 2$, имеет место устойчивое производство товара. Так при $n = 1$ происходит «быстрое» экспоненциальное стремление к стационарному режиму, а при $n = 2$ – происходят незатухающие колебания около указанного режима.

Вывод: Многоступенчатое управление, описанное в рассмотренной модели при $n > 2$, является неустойчивым. Устойчивое управление реализуется только при одноступенчатом управлении.

Задание 3. Провести моделирование ситуации управления и последующий ее анализ с учетом «сопротивления» промежуточных уровней своему руководителю.

2.4. Маятник Фроуда

Рассмотрим теперь яркий пример неконсервативной механической системы, представляющей собой маятник следующей конструкции. На равномерно вращающемся с угловой скоростью Ω валу подвешен посредством подшипника обычный маятник, причем в подшипнике действуют силы вязкого трения (рис. 7). Угол отклонения от вертикали обозначим φ . На сам маятник также действуют линейные демпфирующие силы. Такой

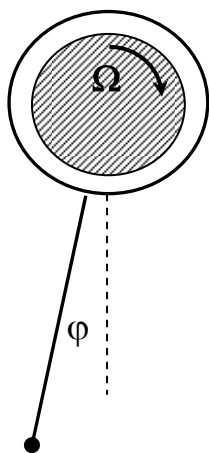


Рис.7 Маятник Фроуда

маятник называют маятником Фроуда [4]. Уравнения маятника Фроуда будут отличаться от уравнений физического маятника только тем, что в правой части необходимо учесть момент вязкого сопротивления в подшипнике, зависящего от относительной скорости трущихся поверхностей $F(\dot{\varphi} - \Omega)$:

$$I\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + mgl \sin \varphi = F(\dot{\varphi} - \Omega). \quad (2.12)$$

Можно по-разному выбирать конкретный вид зависимости момента сопротивления. Зададим его в виде линейной зависимости от относительной скорости:

$$F(\Omega - \dot{\varphi}) = f + \nu(\dot{\varphi} - \Omega),$$

где f , ν – отрицательные константы.

Рассмотрим фазовый портрет системы Фроуда (рис.8). Фазовый портрет демонстрирует наличие неравномерных вращательных областей (с положительными и отрицательными угловыми скоростями), в том числе переходы из вращательного движения в колебания с затухающей амплитудой. Для положительной (верхней) вращательной области характерно на-

личие траекторий с увеличивающимися угловыми скоростями, что можно интерпретировать как эффекты отрицательного трения [4], т.к. здесь происходит рост угловой скорости.

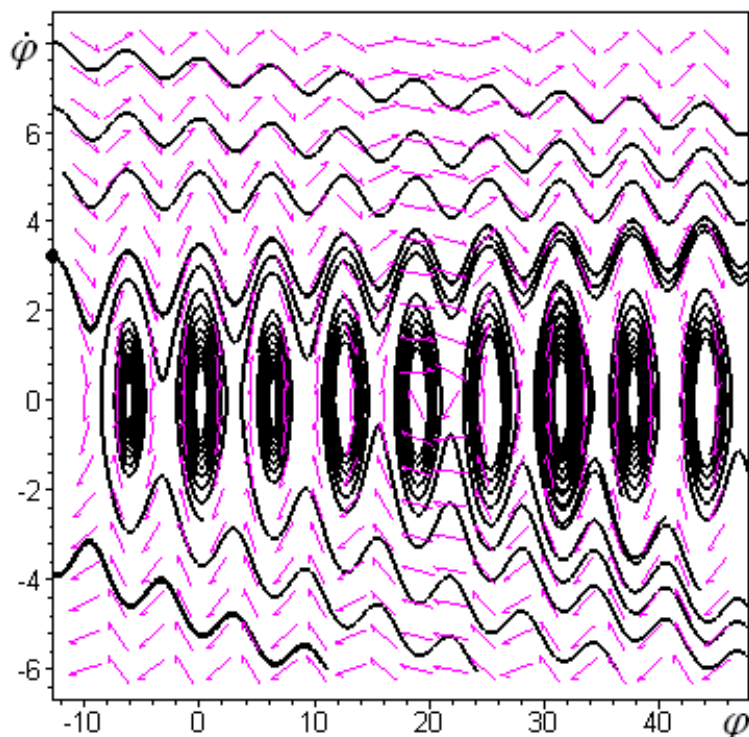


Рис. 8. Фазовый портрет маятника Фроуда

Листинг расчетного модуля MAPLE построения портрета (рис.8):

```
>In:=10:b:=0.1:mgl:=20:nu:=-0.5:msopr:=-0.1:omega:=5.1:
>ur:=diff(y(t),t)*In+b*y(t)+mgl*sin(x(t))=msopr+nu*(y(t)-
omega):
> with(DEtools):
>ini:=[[x(0)=1,y(0)=1],[x(0)=0,y(0)=3],[x(0)=6,y(0)=1],
[x(0)=4,
y(0)=1],[x(0)=-6,y(0)=1],[x(0)=-10, y(0)=1.7], [x(0)=11,
y(0)=1],
[x(0)=0,y(0)=3.5],[x(0)=0,y(0)=omega],[x(0)=0,y(0)=1.5*omega],
[x(0)=21,y(0)=0],[x(0)=23,y(0)=0],[x(0)=30,y(0)=0],
[x(0)=33,y(0)=0],[x(0)=42,y(0)=0],[x(0)=39,y(0)=0],
[x(0)=0,y(0)=6.3]]:
>phaseportrait([ur,diff(x(t),t)=y(t)],[x(t),y(t)],
t=-20..25,ini,x=-10..45,y=-6..8, colour=magenta, arrows=SMALL,
stepsize=.005,linecolor=black,thickness=2);
```

Линеаризованная система Фроуда ($\varphi \ll 1$), соответствующая уравнению

$$I\ddot{\varphi} + (b - \nu)\dot{\varphi} + mgl\varphi = f - \nu\Omega,$$

демонстрирует затухающие колебания, а фазовые траектории являются устойчивыми фокусами (рис.9).

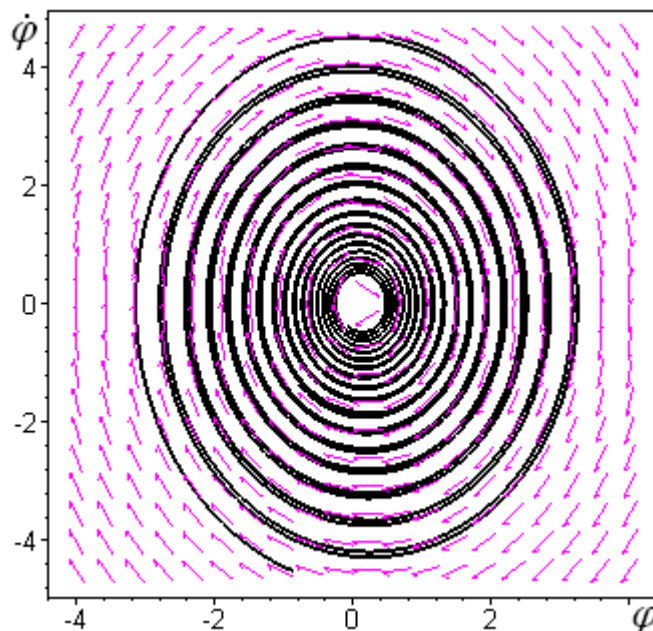


Рис.9. Фазовый портрет линеаризованного маятника Фроуда

В [4] отмечены случаи, когда величина $(b - \nu)$ становится отрицательной и, следовательно, реализуются расходящиеся колебания (неустойчивый фокус), что соответствует отрицательной диссипации. Хотя эти случаи скорее представляют собой математическую абстракцию для рассмотренной механической системы.

Задание 4. Провести моделирование и исследование фазового портрета маятника Фроуда при квадратическом законе момента сопротивления в подшипнике.

2.5. Колебания точки на вращающейся окружности

Рассмотрим теперь ситуацию, когда возможно изменение качества движения в зависимости от изменения некоторого параметра системы. Изучим колебания точки массы m на равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси АВ окружности радиуса a (рис.10); θ - угол отклонения точки от вертикали. Движение точки происходит под действием сил тяжести и центробежной силы инерции. Уравнения движения по координате θ в этом случае запишутся [4]:

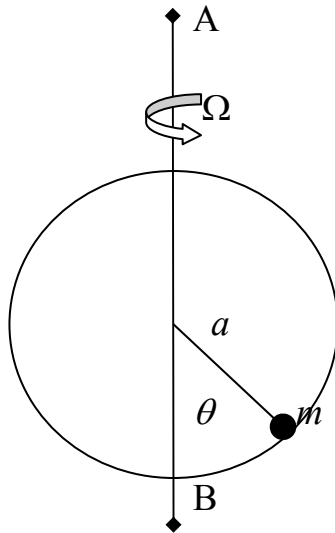


Рис.10. Схема системы

$$\dot{\omega} = \Omega^2 (\cos \theta - \lambda) \sin \theta, \quad \dot{\theta} = \omega, \quad (2.13)$$

где $\lambda = \frac{g}{\Omega^2 a}$.

Проведем построение фазового портрета системы для следующих трех случаев:

- 1) $1 > \lambda > 0$ (рис.11);
- 2) $\lambda = 0$ (рис.12);
- 3) $-1 < \lambda < 0$ (рис.13).

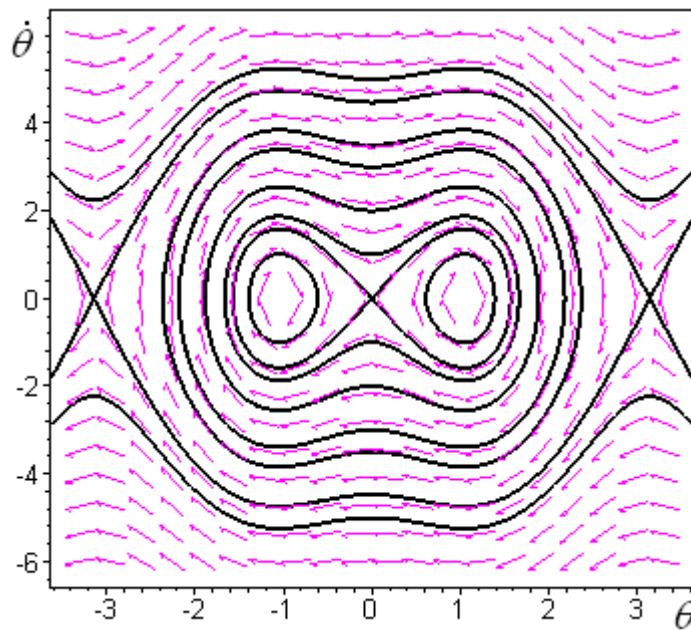


Рис.11. Фазовый портрет – случай 1)

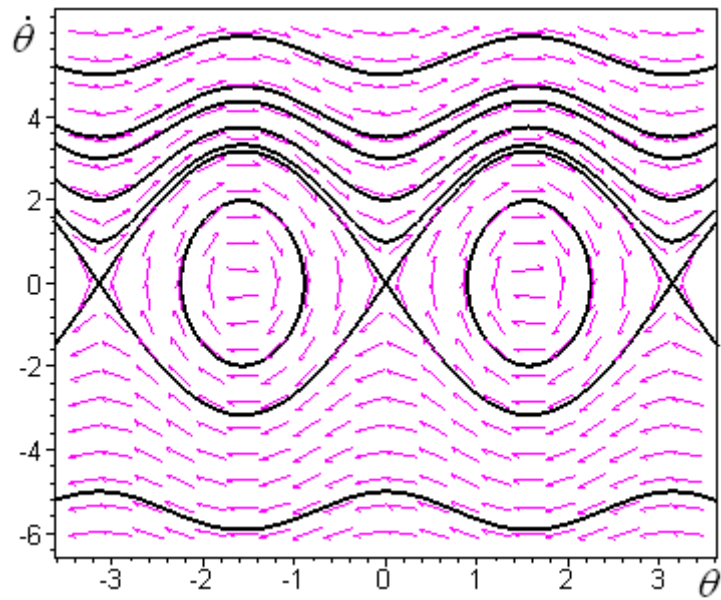


Рис.12. Фазовый портрет – случай 2

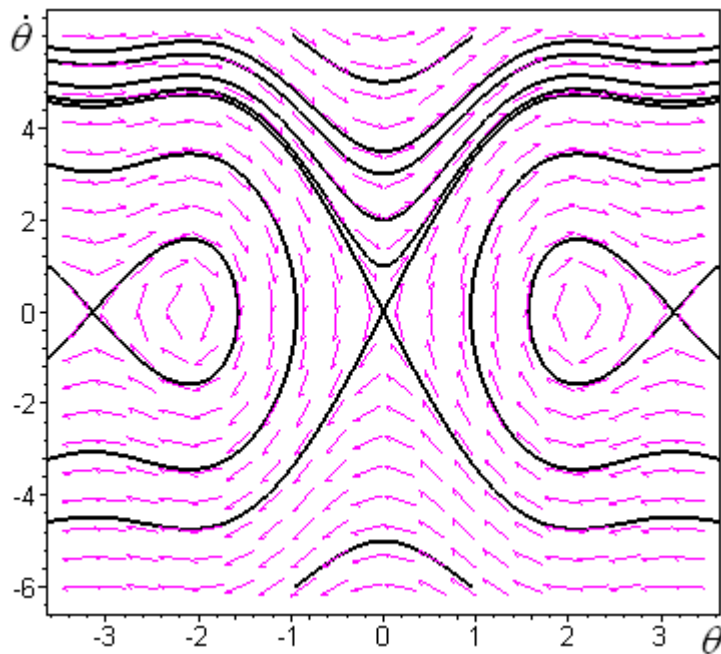


Рис.13. Фазовый портрет – случай 3

Интеграл энергии системы имеет вид:

$$\omega^2 / 2 - \Omega^2 \left(\frac{\sin^2 \theta}{2} + \lambda \cos \theta \right) = C. \quad (2.14)$$

По уравнениям (2.13) легко вычислить особые точки, соответствующие положениям равновесия:

- 1) $\omega_1 = 0; \theta_1 = 0;$
- 2) $\omega_2 = 0; \theta_2 = \pi;$
- 3). $\omega_3 = 0; \theta_3 = \lambda.$

Уравнения сепаратрисы можно получить из выражения для интеграла (2.14), в котором константа C определяется из того условия, что сепаратриса проходит через особую точку и при этом кинетическая энергия равна нулю, так как реализуется положение равновесия. Имеют место две сепаратрисы, задаваемые следующими уравнениями:

$$\omega^2 = \Omega^2 \left[\sin^2 \theta + 2\lambda (\cos \theta + 1) \right], \quad (2.15)$$

$$\omega^2 = \Omega^2 \left[\sin^2 \theta + 2\lambda (\cos \theta - 1) \right]. \quad (2.16)$$

На рис.11, когда $1 > \lambda > 0$, представлены обе сепаратрисы: внешняя сепаратриса, проходящая через точки $(\pi, 0)$ и $(-\pi, 0)$, окружает внутреннюю сепаратрису, которая проходит через точку $(0,0)$ и имеет форму восьмерки. На рис.12, когда $\lambda = 0$, сепаратрисы сливаются. На рис.13, когда $-1 < \lambda < 0$, реализуется та же картина, что и на рис.11, но сдвинутая вдоль оси θ на π .

Таким образом, имеет место качественное изменение фазового портрета системы при переходе параметра λ через ноль¹. Можно также показать, что при переходе параметра λ через значения $\lambda = \pm 1$ имеет место еще одно изменение фазового портрета.

*Листинг расчетного модуля MAPLE
построения фазовых портретов (рис.11-13):*

```
> restart;
> A:=10:lambda:=0.5:
> ur:=diff(y(t),t)=A*(cos(x(t))-lambda)*sin(x(t)):
> with(DEtools):
> ini:=[[x(0)=0.01,y(0)=0],[x(0)=-0.01,y(0)=0],
[x(0)=1,y(0)=1],
[x(0)=0,y(0)=3],[x(0)=0,y(0)=3.5],[x(0)=0,y(0)=2],
[x(0)=0,y(0)=1],[x(0)=-1,y(0)=1], [x(0)=3.14,y(0)=0.01],
[x(0)=3.14,y(0)=-0.01],[x(0)=-3.14,y(0)=0.01],
[x(0)=-3.14,y(0)=-0.01],[x(0)=0,y(0)=5],[x(0)=0,y(0)=-
5]]:
> phaseportrait([ur,diff(x(t),t)=y(t)],[x(t),y(t)],t=-
5..5,ini,x=-3.3..3.3,y=-6..6,colour=magenta,arrows=SMALL,
stepsize=.01,linecolor=black,thickness=2);
```

¹ Позднее такое изменение будет названо бифуркацией.

Задание 5. Провести вывод уравнений (2.13).

Задание 6. Провести построение и исследование фазового портрета системы с учетом сил сопротивления движению точки по окружности, соответствующих случаям сухого и вязкого трения.

Задание 7. Провести построение и исследование фазового портрета системы при значениях параметра $\lambda = \pm 1$ и для $|\lambda| > 1$.

3. ОСОБЕННОСТИ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

3.1. Предельные множества динамических систем

Пусть состояние системы в момент времени t_0 задается вектором x_0 . Тогда согласно (1.2) можно определить состояние $x(t)$ в любой момент времени t с помощью оператора эволюции. Предположим, что в фазовом пространстве системы существуют два множества: V и $L \in V$, где V – совокупность всех точек x_0 фазового пространства, для которых $x(t) \in L$ при $t \rightarrow +\infty$ или при $t \rightarrow -\infty$. В этом случае будем называть L *предельным множеством* динамической системы.

Рассмотрим возможные типы предельных множеств диссипативных систем, которые могут существовать в ограниченной области фазового пространства [1, 5, 7].

Если все начальные точки x_0 из области V стремятся к L в пределе при $t \rightarrow +\infty$, то предельное множество L является притягивающим и называется *аттрактором*, а область V – бассейном притяжения аттрактора. Если же стремление к предельному множеству происходит в пределе при $t \rightarrow -\infty$, то предельное множество является отталкивающим и называется *репеллером*.

Множество V может состоять из двух подмножеств W^s и W^u , причем точки из W^s стремятся к предельному множеству L в прямом времени, из W^u – в обратном. В этом случае предельное множество L называется *седловым*, или *седлом*. Множества W^s и W^u являются соответственно устойчивым и неустойчивым многообразиями седла. Инверсия времени переводит аттрактор в репеллер, и наоборот.

Самым простым предельным множеством является состояние равновесия, которое может быть аттрактором (устойчивый узел – рис.14,а, фокус – рис.14,е), репеллером (неустойчивый узел – рис.14,б, фокус – рис.14,д), либо седлом (обычное седло – рис.14,в или седло-узел – рис.14,г). Заметим, что точка типа центр не является ни аттрактором, ни репеллером, ни седловым множеством, так как отсутствует какое-либо притяжение к центру. Центр – это особый случай предельного множества, для которого $V = L$.

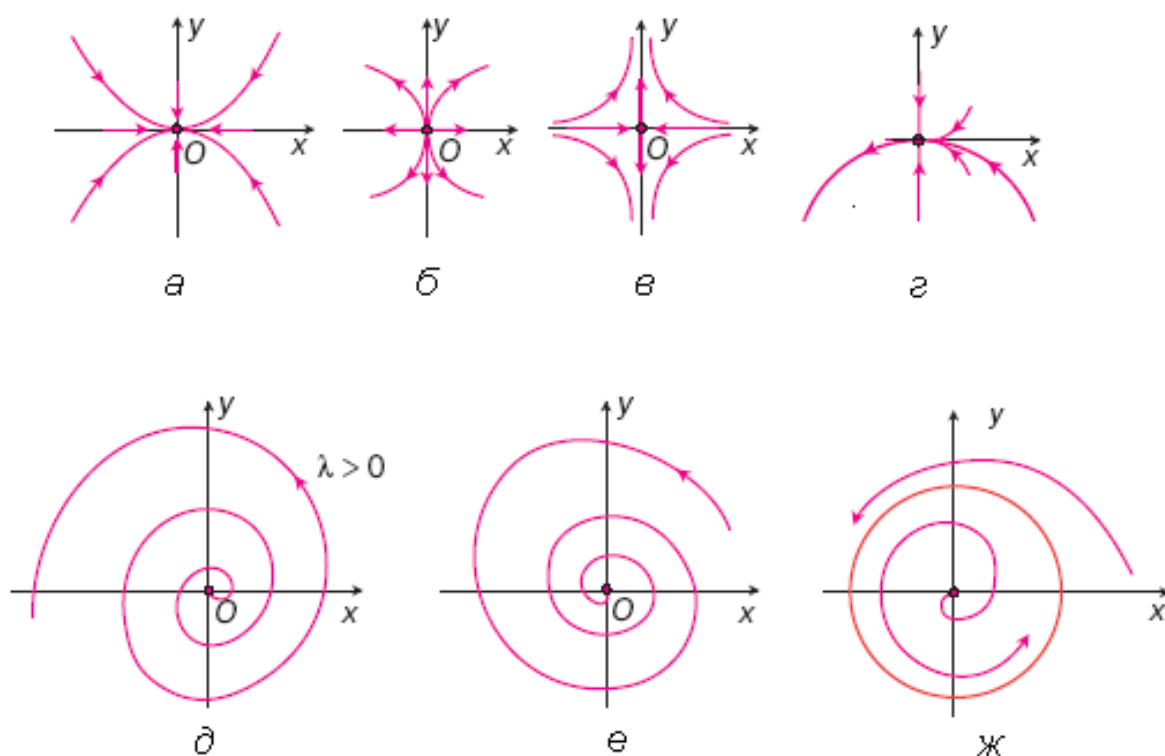


Рис.14. Типы предельных множеств

Существуют также предельные множества в форме замкнутых кривых, вблизи которых (в любой малой трубчатой окрестности) других замкнутых кривых нет (рис.14,ж). Такие предельные множества называются *предельными циклами* и соответствуют режимам автоколебаний динамической системы. Предельные циклы могут являться аттракторами, репеллерами или седловыми множествами – устойчивый (притягивает к себе траектории снаружи и изнутри), неустойчивый (отталкивает от себя траектории снаружи и изнутри) и полуустойчивый (притягивает траектории снаружи и отталкивает изнутри, либо наоборот) предельный цикл соответственно.

3.2. Устойчивость и ее линейный анализ

Существует несколько понятий устойчивости: устойчивость по Ляпунову, орбитальная устойчивость и устойчивость по Пуассону [5].

Устойчивость по Ляпунову рассматривает расстояние между исследуемой и возмущенной траекториями в один и тот же момент времени:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \|\mathbf{x}_0 - \tilde{\mathbf{x}}_0\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)\| < \varepsilon.$$

Орбитальная устойчивость характеризует минимальное расстояние между фазовой точкой возмущенной траектории в текущий момент времени и орбитой (обычно это замкнутая кривая, соответствующая фазовой траектории) исследуемого движения. Траектория, устойчивая по Ляпунову, всегда орбитально устойчива; обратное утверждение в общем случае не верно, следовательно, орбитальная устойчивость представляет собой более слабое требование, чем устойчивость по Ляпунову.

Устойчивость по Пуассону является самым слабым требованием. Она означает, что фазовая траектория не покинет ограниченной области фазового пространства при $t \rightarrow +\infty$: проведя бесконечно длительное время внутри этой области, фазовая траектория неизбежно возвращается в сколь угодно малую окрестность начальной точки. Например, времена возврата соответствуют периоду или квазипериоду колебаний.

Свойства устойчивости фазовых траекторий, принадлежащих предельным множествам, имеют особую значимость при исследовании динамики систем.

Рассмотрим динамические системы с непрерывным и дискретным временем в окрестности какой-либо изучаемой траектории. Уравнения непрерывной динамической системы и системы с дискретным временем можно представить в виде:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{a}), \quad (3.1.1)$$

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{P}(\mathbf{x}(n), \mathbf{a}), \quad (3.1.2)$$

где \mathbf{a} – вектор параметров. При рассмотрении системы с дискретным временем понимается, что ее состояние на шаге n порождает состояние на шаге $n+1$. Как известно, для малых возмущений непрерывной системы $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)$ ($\bar{\mathbf{x}}(t)$ – изучаемое невозмущенное непрерывное решение) и дискретной системы $\mathbf{y}(n) = \mathbf{x}(n) - \bar{\mathbf{x}}(n)$ ($\bar{\mathbf{x}}(n)$ – изучаемое невозмущенное дискретное решение) можно получить следующие соответствующие линеаризованные системы возмущенного движения:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{y}) - \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}) \rightarrow \text{series}\Big|_y \rightarrow \dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y}, \quad (3.2.1)$$

$$\mathbf{y}(n+1) = M(n)\mathbf{y}(n), \quad (3.2.2)$$

где матрицы линеаризации A и M имеют соответственно элементы

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}(t)}, \quad m_{ij} = \left. \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}(n)}. \text{ Матрицы } A \text{ и } M \text{ характеризуются своими}$$

собственными числами ρ_i , μ_i и векторами \mathbf{e}_i , \mathbf{s}_i соответственно:

$$\begin{aligned} A(t)\mathbf{e} = \rho(t)\mathbf{e} &\Rightarrow [A(t) - \rho(t)E]\mathbf{e}(t) = 0 \Rightarrow \\ \det[A(t) - \rho(t)E] = 0 &\Rightarrow \rho_i(t); [A(t) - \rho_i(t)E]\mathbf{e}(t) = 0 \Rightarrow \mathbf{e}_i(t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(n)\mathbf{s}(n) = \mu(n)\mathbf{s}(n) &\Rightarrow [M(n) - \mu(n)E]\mathbf{s}(n) = 0 \Rightarrow \\ \det[M(n) - \mu(n)E] = 0 &\Rightarrow \mu_i(n); [M(n) - \mu_i(n)E]\mathbf{s}(n) = 0 \Rightarrow \mathbf{s}_i(n). \end{aligned}$$

Начальное возмущение непрерывной системы меняется вдоль i -го собственного вектора \mathbf{e}_i следующим образом:

$$z_i(t) = z_i(t_0) \exp\left[(t - t_0)\rho_i\right], \quad (3.3)$$

где $z_i = \mathbf{y}(t) \cdot \mathbf{e}_i(t)$ – возмущение системы вдоль i -го собственного вектора.

Выражение (3.3) дает возможность оценить устойчивость траектории вдоль i -го собственного вектора, которая определяется *характеристическим показателем Ляпунова* λ_i [5]:

$$\lambda_i = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \ln \left\| \frac{z_i(t)}{z_i(t_0)} \right\|, \quad (3.4.1)$$

где черта означает верхний предел. Естественно, имеется столько же показателей Ляпунова, какова размерность системы.

По аналогии с непрерывной системой вводятся в рассмотрение показатели Ляпунова для системы с дискретным временем:

$$\lambda_i = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left\| \frac{z_i(n)}{z_i(1)} \right\|, \quad (3.4.2)$$

где, как и для непрерывной системы, $z_i(n)$ – возмущение вдоль собственного вектора $\mathbf{s}_i(n)$.

Набор из показателей Ляпунова, расположенных в убывающем порядке $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$, образуют так называемый *спектр характеристических показателей* Ляпунова изучаемого невозмущенного решения (фазовой траектории) непрерывной системы $\bar{\mathbf{x}}(t)$ либо дискретной системы $\bar{\mathbf{x}}(n)$.

Для дискретной системы из формулы (3.4.2) можно получить более простое выражение для показателя Ляпунова. Так как возмущение дискретной системы эволюционирует согласно (3.2.2), то можно записать его как эволюцию начального ($n=1$) возмущения $y(1)$:

$$y(n+1) = M(n) \cdot M(n-1) \cdot \dots \cdot M(1)y(1).$$

С учетом последнего выражения формула (3.4.2) принимает вид:

$$\lambda_i = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left\| \frac{M(n)M(n-1)\dots M(1)y_i(1)}{y_i(1)} \right\| = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |M(k)| = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |\mu_i(k)|. \quad (3.5.1)$$

Аналогично анализируя ситуацию для непрерывной системы, показывается [5], что показатель Ляпунова равен усредненной вещественной части соответствующего собственного значения матрицы линеаризации $A(t)$:

$$\lambda_i = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \operatorname{Re} \rho_i(\tau) d\tau. \quad (3.5.2)$$

Отметим одно важное свойство показателей Ляпунова. Можно доказать, что имеет место формула [5]:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \operatorname{div} \mathbf{F}(\tau) d\tau, \quad (3.6)$$

т.е. сумма показателей Ляпунова показывает эволюцию фазового объема. Так, если рассматривать фазовые траектории как линии тока жидкости, то дивергенция векторного поля характеризует наличие источников и стоков. Очевидно, что для диссипативных систем фазовый объем сжимается (сток энергии), поэтому, в силу (3.6), для диссипативных систем имеет место свойство: $\sum_{i=1}^N \lambda_i < 0$.

В заключение необходимо отметить, что тип особых точек (положения равновесия) для двумерных непрерывных систем (рис.14) определяется по собственным числам матрицы линеаризации A в окрестности этих точек:

- 1) ρ_1, ρ_2 – оба вещественны и отрицательны: устойчивый узел;
- 2) ρ_1, ρ_2 – оба вещественны и положительны: неустойчивый узел;
- 3) ρ_1, ρ_2 – оба вещественны и разных знаков: седло;

- 4) ρ_1, ρ_2 – комплексно сопряженные с отрицательной вещественной частью: устойчивый фокус;
- 5) ρ_1, ρ_2 – комплексно сопряженные с положительной вещественной частью: неустойчивый фокус;
- 6) ρ_1, ρ_2 – чисто мнимые: центр.

Задание 8. Построить матрицы линеаризации для всех имеющихся положений равновесия непрерывных динамических систем и определить тип положений равновесия:

$$\begin{array}{lll}
 a) \begin{cases} \dot{x} = -2 + y^2, \\ \dot{y} = xy; \end{cases} & b) \begin{cases} \dot{x} = \sin y, \\ \dot{y} = x - y; \end{cases} & c) \begin{cases} \dot{x} = x^3, \\ \dot{y} = -x; \end{cases} \\
 d) \ddot{x} + 10x = 0; & e) \ddot{x} - 4\dot{x} + 100x = 0; & \\
 f) \ddot{x} - 10x = 0; & g) \ddot{x} + 4\dot{x} - 100x = 0; & \\
 h) \ddot{x} = -25 \sin x; & i) \ddot{x} - \dot{x}^2 = -100x^2. &
 \end{array}$$

3.3. Бифуркации динамических систем, катастрофы [1, 5, 7]

Уравнения динамической системы, например (3.1), могут зависеть от ряда параметров, которые могут принимать различные значения и изменяться. Изменение параметров может привести к качественному преобразованию фазового портрета системы, называемому *бифуркацией*. Таким образом, пример, рассмотренный выше в парагр. 2.5, демонстрировал бифуркацию при переходе параметра λ через значение ноль. Значение параметра, при котором происходит качественное изменение фазового портрета, называют *бифуркационным*, а также *точкой бифуркации*. Если система зависит от целого набора параметров, то бифуркационным значениям могут соответствовать определенные параметрические множества (бифуркационные точки, кривые, поверхности и т.д.).

Бифуркации могут происходить с любыми предельными множествами динамической системы, но наибольший интерес представляют бифуркации аттракторов. Бифуркации аттракторов подразделяют на *мягкие* (рис.15) и *жесткие*, также называемые кризисы или *катастрофы* (рис.16). Мягкие бифуркации связаны с топологической (структурной) перестройкой самих аттракторов, но не затрагивают их бассейнов притяжения. Жесткие бифуркации аттракторов сопровождаются качественной перестройкой границ бассейнов притяжения.

Любое самое сложное качественное изменение фазового портрета происходит посредством серии последовательных простых, так называемых

мых элементарных бифуркаций. К основным типам элементарных бифуркаций относятся следующие [7]:

- I. Бифуркация рождения (и гибели) пар состояний равновесия.
- II. Бифуркация рождения предельных циклов Андронова-Хопфа.
- III. Бифуркация полуустойчивого цикла.
- IV. Бифуркация гомоклинической траектории седла-узла.

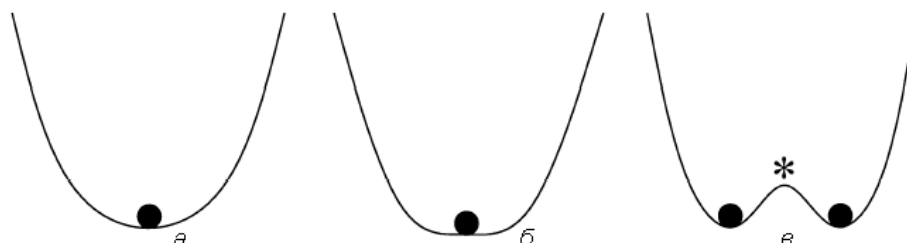


Рис.15. Мягкая бифуркация: положение равновесия (а) теряет устойчивость (б) и в его окрестности рождаются два новых устойчивых состояния равновесия (в)

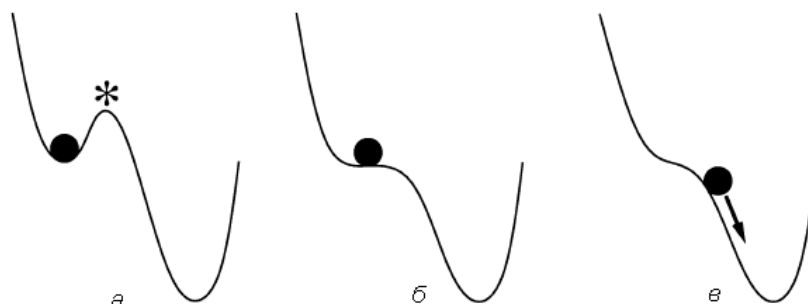


Рис.16. Жесткая бифуркация: потеря устойчивости в двойном положении равновесия

Проиллюстрируем типы указанных элементарных бифуркаций на примерах.

Пример 1.

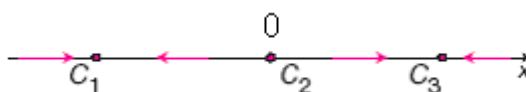


Рис.17. Фазовый портрет одномерной системы (координата x)

Рассмотрим одномерную динамическую систему [7]:

$$\dot{x} = a - x^2.$$

При $a > 0$ имеется два устойчивых положения равновесия C_1 и C_3 (рис.17). При уменьшении параметра a эти положения приближаются к нулю. При достижении нуля они сливаются в одно неустойчивое положение равновесия C_2 , а при переходе параметра к отрицательным значениям положение C_2 исчезает. Таким образом, значение параметра $a = 0$ является точкой би-

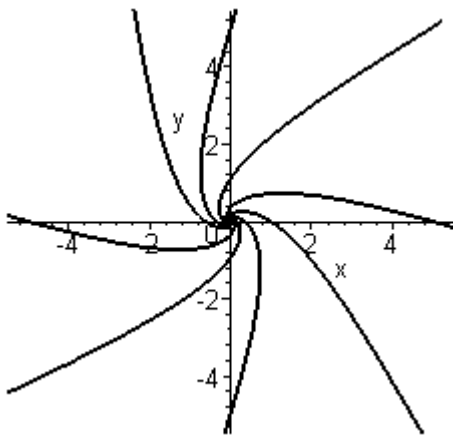
фуркации, при прохождении которой рождается или погибает пара положений равновесия (тип I).

Пример 2.

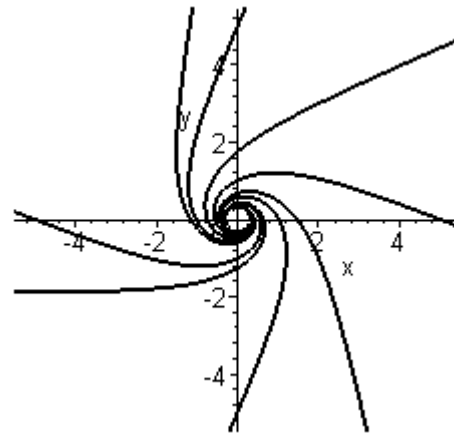
Рассмотрим динамическую систему, уравнения которой записаны в полярной системе координат [7]:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(a - \rho), \\ \dot{\phi} = \omega. \end{cases} \quad (3.7)$$

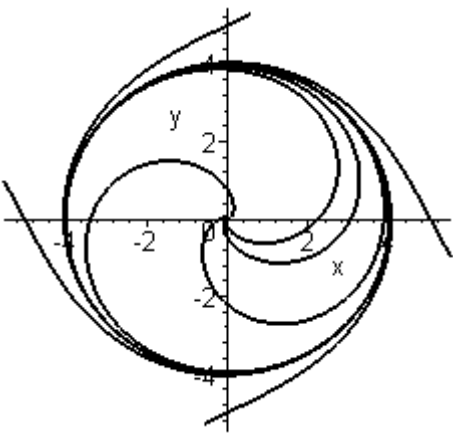
Очевидно, что при $a > 0$ в системе возможно существование двух стационарных значений полярного радиуса: $\rho_1 = 0, \rho_2 = a$. Для ρ_2 реализуется устойчивый предельный цикл – это видно из первого уравнения (3.7): при $\rho > \rho_2$ производная полярного радиуса отрицательна и он уменьшается (стремится к ρ_2 снаружи), а при $\rho < \rho_2$ – производная положительна и радиус растет (стремится к ρ_2 изнутри). При $a < 0$ имеется только один стационарный режим $\rho = 0$.



a



б



в

В зависимости от значения a возможны следующие случаи:

- а) $a < 0$: устойчивый фокус;
- б) $a = 0$: устойчивый фокус;
- в) $a > 0$: устойчивый предельный цикл.

Рис.18. Бифуркация Андронова-Хопфа рождения предельного цикла

Значение $a = 0$ – бифуркационное значение параметра, при переходе которого происходит рождение предельного цикла. Такой тип бифуркации носит имя Андронова-Хопфа (тип II).

*Листинг расчетного модуля MAPLE
построения фазовых портретов (рис. 18):*

```
> with(plottools,line):
> a:=-2; omega:=2;
> ur1:=x(t)*D(x)(t)+y(t)*D(y)(t)=(x(t)^2+y(t)^2)*
(a-sqrt(x(t)^2+y(t)^2));
> ur2:=D(y)(t)*x(t)-D(x)(t)*y(t)=(x(t)^2+y(t)^2)*omega;
> Ics:=[[x(0)=0,y(0)=5],[x(0)=2,y(0)=-1],[x(0)=2,y(0)=3],
[x(0)=-1.5,y(0)=1.5],[x(0)=-0.5,y(0)=-1.5],[x(0)=-
5,y(0)=0],[x(0)=0,y(0)=-5],[x(0)=5,y(0)=0]];
> phaseportrait([ur1,ur2],[x(t),y(t)],t=-1.5..3,Ics,
linecolor=black,colour=red,stepsize=.05,x=-5..5,
y=-5..5,arrows=MEDIUM,thickness=2);
```

Отметим здесь, что в программе использован переход к декартовой системе координат: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Пример 3.

Рассмотрим в полярной системе координат динамическую систему вида [7]:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\lambda - (1 - \rho)^2) \\ \dot{\phi} = \omega \end{cases} \quad (3.8)$$

Определим, как ведет себя система при изменении параметра λ . При $|\lambda| < 1$ возможны следующие случаи:

1) $\lambda < 0$. В этом случае, как показывает правая часть первого уравнения (3.8), $\dot{\rho} < 0 \Rightarrow \rho$ всегда затухает и система имеет устойчивый фокус (рис 19).

2) $\lambda = 0$. Тогда $-\rho(\rho - 1)^2 = 0 \Rightarrow \rho_1 = 0$ и $\rho_{2,3} = 1$. На фазовой плоскости система вырождается в предельный цикл. Траектории приближаются к нему снаружи и удаляются от него изнутри. Поэтому такой цикл называется полуустойчивым (рис. 20).

3) $0 < \lambda < 1$. Приравнивая нулю правую часть первого уравнения (3.8), получим $\rho(\lambda - (\rho - 1)^2) = 0$, следовательно $\rho_1 = 0$. Тогда оставшиеся два корня найдутся из уравнения $f(\rho, \lambda) = \lambda - \rho^2 + 2\rho - 1 = 0$: $\rho_{2,3} = \pm\sqrt{\lambda} + 1$.

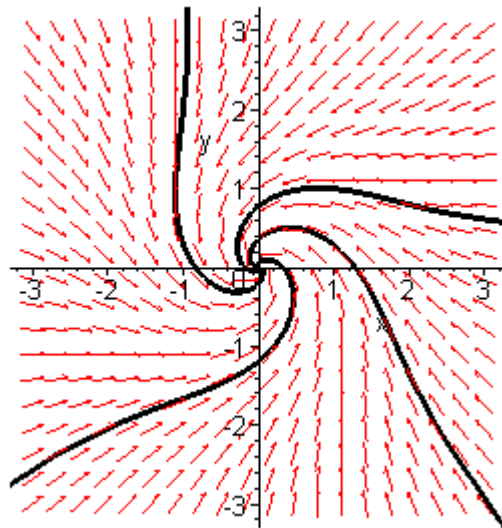


Рис. 19. Устойчивый фокус в системе (3.8) при $\lambda < 0$

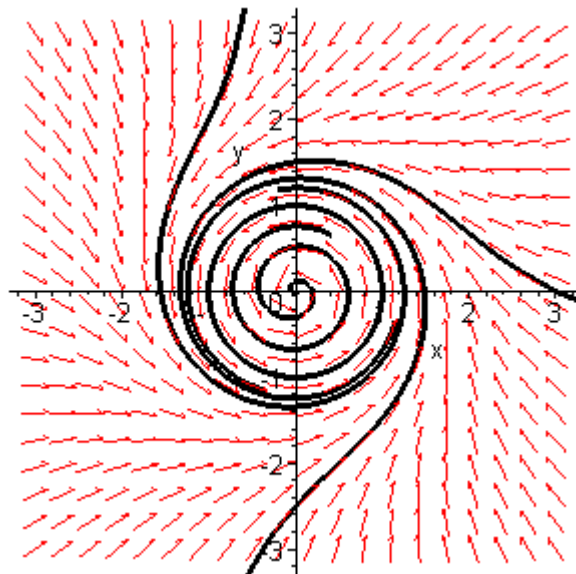


Рис. 20. Полуустойчивый предельный цикл

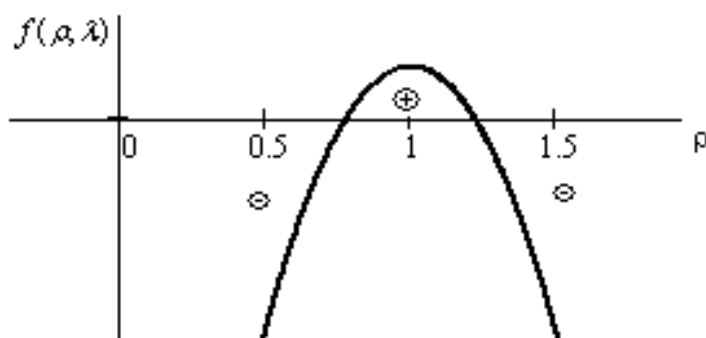


Рис. 21

Анализ нулей функции $f(\rho, \lambda)$ и ее знака (по рис. 21) показывает следующее. Изучаемая система при $0 < \lambda < 1$ имеет устойчивый фокус и два предельных цикла: устойчивый с радиусом $\rho_2 = \sqrt{\lambda} + 1$ (внешний цикл) и

неустойчивый с радиусом $\rho_3 = -\sqrt{\lambda} + 1$ (внутренний цикл). Траектории внутри неустойчивого предельного цикла сматываются с него и устремляются к фокусу, а снаружи – к внешнему предельному циклу.

Таким образом, при прохождении параметра λ системы через бифуркационное значение $\lambda = 0$ (в сторону положительных значений) в системе происходит бифуркация рождения двух циклов (устойчивого и неустойчивого) из одного полуустойчивого цикла (рис. 22).

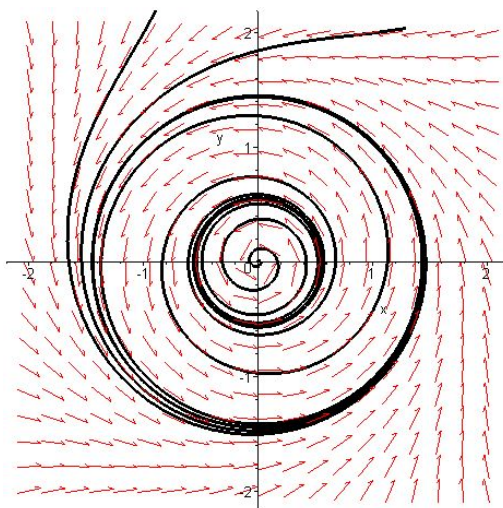


Рис. 22. Раздваивание цикла

4) $\lambda > 1$. В данном случае будут иметь место следующие стационарные радиусы, которое можно определить аналогично предыдущей процедуре: $\rho_1 = 0$, $\rho_{2,3} = \pm\sqrt{\lambda} + 1$ (отрицательные значения полярного радиуса не имеют смысла, поэтому отрицательный корень отбрасывается из рассмотрения), а при $\lambda = 1$: $\rho_2 = 2$, $\rho_3 = 0$ (рис. 23).

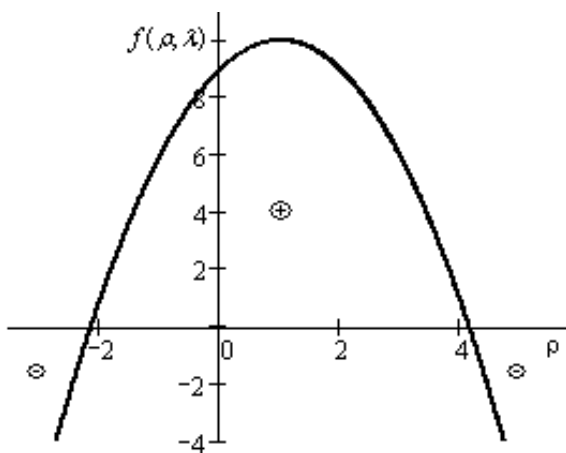


Рис. 23

Итак, по мере приближения значения управляющего параметра λ от величин, меньших единицы к $\lambda = 1$, радиус внешнего предельного цикла растёт, а внутреннего - уменьшается, и при $\lambda = 1$ в системе происходит ещё одна бифуркация: неподвижные точки ρ_1 и $\rho_3 = -\sqrt{\lambda} + 1$ сливаются в одну точку, которая становится неустойчивой. Это соответствует слиянию неустойчивого предельного цикла и устойчивого фокуса с образованием неустойчивого фокуса. Далее при $\lambda > 1$ устойчивый предельный цикл остаётся в системе единственным притягивающим множеством (рис. 24).

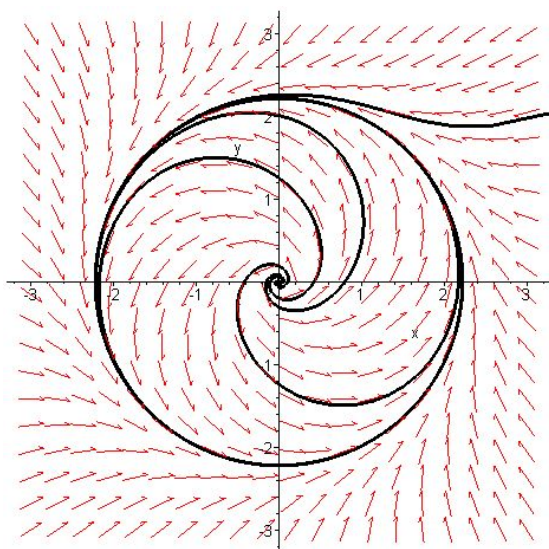


Рис. 24. Устойчивый предельный цикл

Итак, в зависимости от значения λ в системе, как показано, были возможны следующие случаи:

- 1) $\lambda < 0$: устойчивый фокус (рис. 19);
- 2) $\lambda = 0$: полуустойчивый предельный цикл (рис. 20);
- 3) $\lambda > 0$, $|\lambda| < 1$: два предельных цикла: внешний предельный цикл – устойчивый, внутренний предельный цикл – неустойчивый (рис. 22);
- 4) $\lambda = 1$ и $\lambda > 1$: устойчивый предельный цикл (рис.24).

Таким образом, при прохождении параметра λ через бифуркационное значение $\lambda_* = 0$ (от «-» к «+») в системе происходит рождение двух циклов, осуществляемое через бифуркацию полуустойчивого цикла (тип III). При приближении параметра λ к единице происходит слияние неустойчивого предельного цикла с устойчивым фокусом, образуется неустойчивый фокус, после чего в системе остается только один устойчивый предельный цикл.

*Листинг расчетного модуля MAPLE
построения фазовых портретов (рис. 19-24):*

```
> with(plots):with(DEtools):
> with(plottools,line):
> lambda:=0; omega:=2:
> ro(t):=sqrt(x(t)^2+y(t)^2): fi_(t):=arctan(y(t)/x(t)):
> a1:=diff(ro(t),t)=ro(t)*(lambda-(ro(t)-1)^2):
> a2:=diff(fi_(t),t)=omega:
> ur1:=diff(x(t),t)=x(t)*(lambda-(sqrt(x(t)^2+y(t)^2)-
1)^2)
-omega*y(t):
> ur2:=diff(y(t),t)=y(t)*(lambda-(sqrt(x(t)^2+y(t)^2)
-1)^2)+omega*x(t):
> Ics:=[[x(0)=-0.06,y(0)=0.05] ,[x(0)=0,y(0)=1],
[x(0)=-1,y(0)=2],[x(0)=0,y(0)=-2.5],[x(0)=3,y(0)=0] ]:
> phaseportrait([ur1,ur2],[x(t),y(t)], t=-7..3, Ics,
linecolor=black, color=red, stepsize=.05,x=-3..3,y=-
3..3);
```

Пример 4.

Пусть динамическая система в полярной системе координат имеет вид [7]:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(1 - \rho), \\ \dot{\varphi} = \lambda - \sin \varphi. \end{cases} \quad (3.9)$$

Переведем систему (3.9) в декартову систему координат:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2} \right) - y \left(\lambda - y / \sqrt{x^2 + y^2} \right), \\ \dot{y} = y \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2} \right) + x \left(\lambda - y / \sqrt{x^2 + y^2} \right). \end{cases} \quad (3.10)$$

В зависимости от значения λ возможны следующие случаи:

- 1) $\lambda > 0, |\lambda| < 1$ (рис. 25);
- 2) $\lambda = 1$ (рис. 26);
- 3) $\lambda > 1$ (рис. 27).

При $\lambda > 0, |\lambda| < 1$ система имеет три положения равновесия: неустойчивый узел ($\rho = 0, \varphi = 0$), устойчивый узел ($\rho = 1, \varphi_1 = \arcsin \lambda$) и седло ($\rho = 1, \varphi_2 = \pi - \arcsin \lambda$). При $\lambda = 1$ устойчивый узел и седло сливаются, образуя седло-узел. При $\lambda > 1$ седло-узел исчезает, система будет иметь только устойчивый предельный цикл.

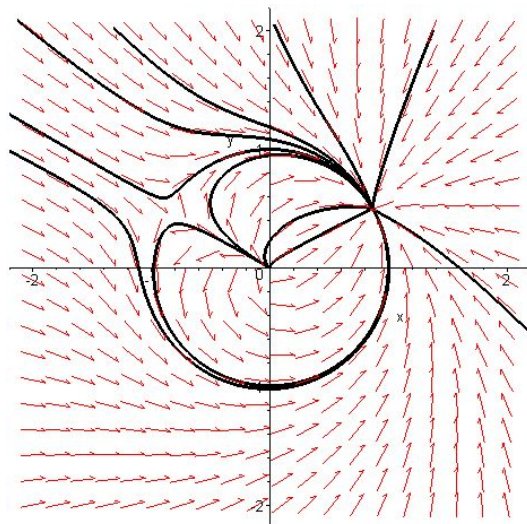


Рис. 25. Фазовый портрет системы при $\lambda > 0, |\lambda| < 1$

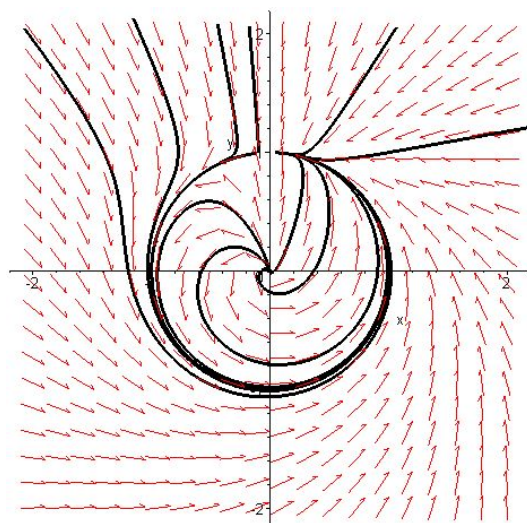


Рис. 26. Фазовый портрет системы при $\lambda = 1$

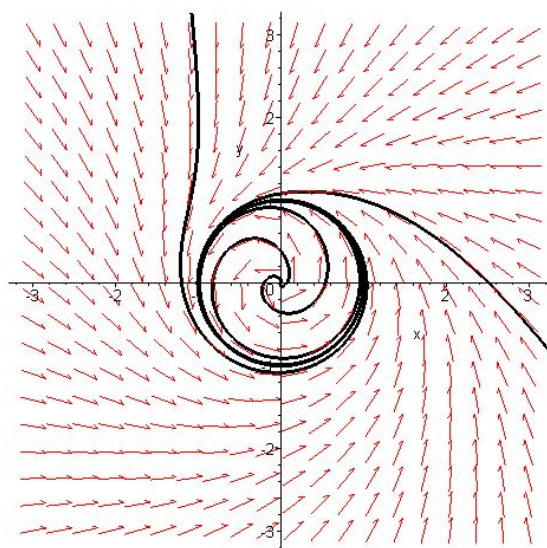


Рис. 27. Фазовый портрет системы при $\lambda > 1$

На рис. 26 хорошо видно, что траектория выходящая из седла-узла, снова возвращается в него – такие траектории А. Пуанкаре назвал гомоклиническими. Таким образом, рассмотренная в примере бифуркация рождения предельного цикла происходит за счет исчезновения гомоклинической траектории в седло-узле (тип IV).

*Листинг расчетного модуля MAPLE
построения фазовых портретов (рис. 25-27):*

```
> restart;
> with(plots):
> with(DEtools):
> with(plottools, line):
> F:=proc(lambda)
> ur1:=diff(x(t),t)=x(t)*(1-sqrt(x(t)^2+y(t)^2))-
y(t)*(lambda-y(t)/sqrt(x(t)^2+y(t)^2)):
> ur2:=diff(y(t),t)=y(t)*(1-
sqrt(x(t)^2+y(t)^2))+x(t)*(lambda-
y(t)/sqrt(x(t)^2+y(t)^2)):
> Ics:=[[x(0)=0.1,y(0)=0.1]
,[x(0)=0.5,y(0)=0.5],[x(0)=1,y(0)=1],[x(0)=0.5,y(0)=1.2],
[x(0)=-0.3,y(0)=1.3] , [x(0)=-0.1,y(0)=1.1],[x(0)=-
0.9,y(0)=0.3] , [x(0)=1.2,y(0)=0.3], [x(0)=0.5,y(0)=-
0.5], [x(0)=-0.8,y(0)=-0.4], [x(0)=0.8,y(0)=-0.5]];
> phaseportrait([ur1,ur2], [x(t),y(t)], t=-10..30, Ics,
linecolor=black, color=red, stepsize=.05,x=-2.5..2.5,
y=-2.5..2.5):
> end:
> animate(F,[0.05*1],1=0..40);
```

Пример 5. Система Лотка-Вольтерра

Динамическая система Лотка-Вольтерра, также называемая «хищник-жертва», применяется для анализа качественных особенностей динамики взаимодействующих популяций. Классическая модель системы описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy, \\ \dot{y} = -cy + dxy, \end{cases} \quad (3.11)$$

где a, b, c, d – положительные постоянные коэффициенты.

Система имеет следующие два положения равновесия: $(0,0)$ – точка типа седло, $(c/d, a/b)$ – точка типа центр.

Если в классическую систему Лотка-Вольтерра вводятся дополнительные нелинейные возмущения $\varepsilon f(x, y, t)$ и $\varepsilon g(x, y, t)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy + \varepsilon f(x, y, t), \\ \dot{y} = -cy + dxy + \varepsilon g(x, y, t), \end{cases} \quad (3.12)$$

то система может демонстрировать разнообразные каскады бифуркаций, в том числе разрывы гомоклинических траекторий и рождение предельных циклов. Естественно, что изменение фазового портрета зависит от конкретного вида нелинейных возмущений. Выберем следующий вид возмущающих функций и построим серию фазовых портретов при изменении параметра вдоль интервала $\varepsilon \in [0, 1]$:

$$f(x, y) = x \left(k - \sqrt{x^2 + y^2} \right)^n - ky, \quad g(x, y) = y \left(k - \sqrt{x^2 + y^2} \right)^n + kx. \quad (3.13)$$

Серия фазовых портретов для $n = 2$ приведена на рис. 28. Значение параметра ε указывается вверху кадра под обозначением e .

Не вдаваясь в подробности, можно указать следующие качественные изменения в системе. При переходе от кадра a (невозмущенная система) к кадру b видно рождение устойчивого фокуса из центра. Между кадрами b и c из фокуса рождается предельный цикл, который погибает на кадре d и рождается неустойчивый фокус. Фокус постепенно перемещается к центру координат, что видно на кадре e , затем вытесняет из начала координат седловую точку $ж$, и далее на кадре $з$ появляется устойчивый предельный цикл, рожденный из слияния седла и узла.

Задание 9. Провести анализ точек равновесия и их перемещения в фазовом пространстве для возмущенной системы Лотка-Вольтерра (3.12). Принять возмущения в форме (3.13) при $n=1$, $a=b=c=d=1$, $k=4$, для значений $\varepsilon \in [0, 2]$ (рис. 28). (В случае затруднения аналитических вычислений прибегнуть к численному поиску и определению типа положений равновесия).

Задание 10. Провести возможно наиболее полный анализ каскада бифуркаций в возмущенной системе Лотка-Вольтерра при $n = 1, 2, 3$ изменении ε на интервале $[0, 1]$.

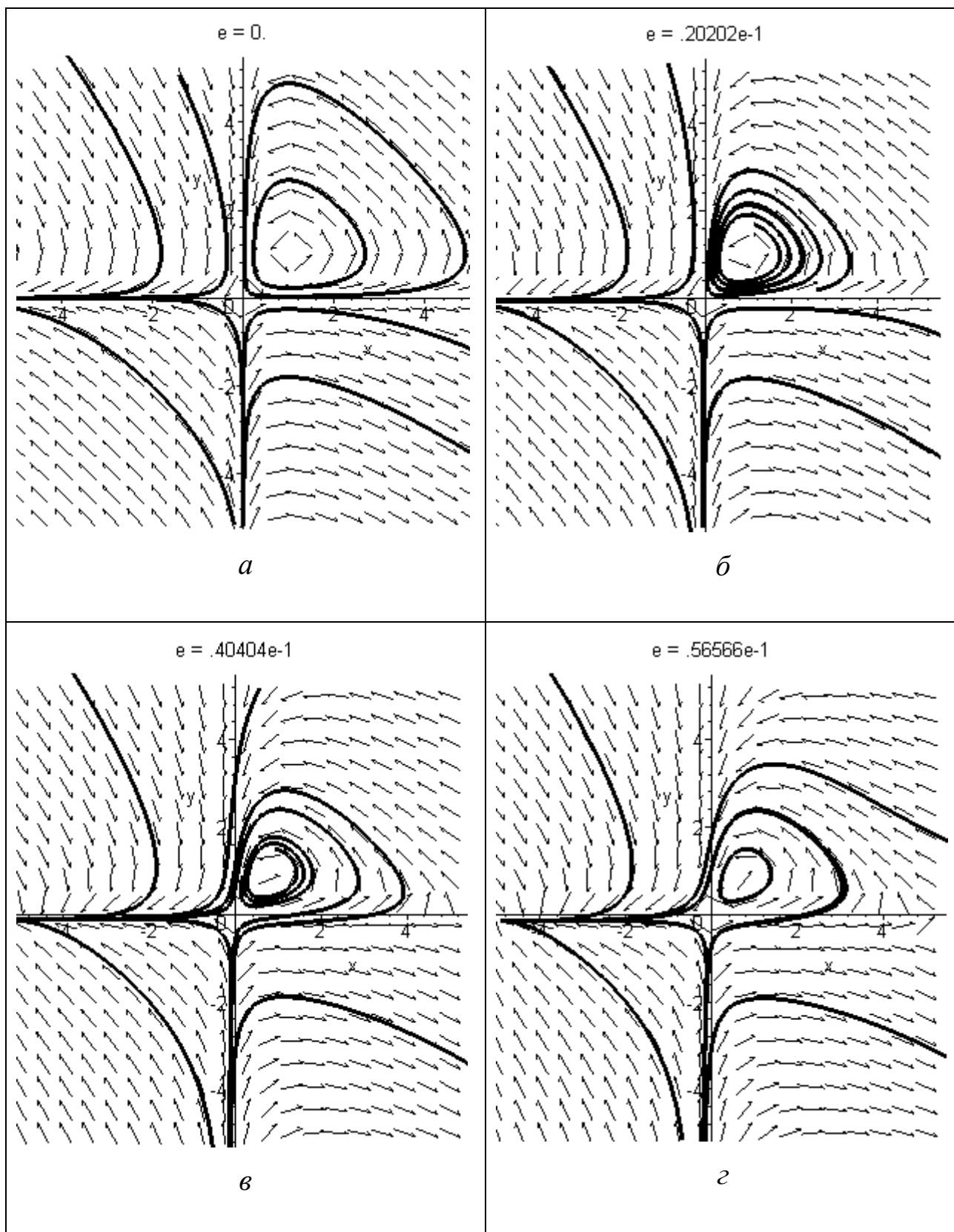


Рис. 28. Изменение фазового портрета при изменении параметра ϵ на интервале $[0,1]$ (см. также с. 41)

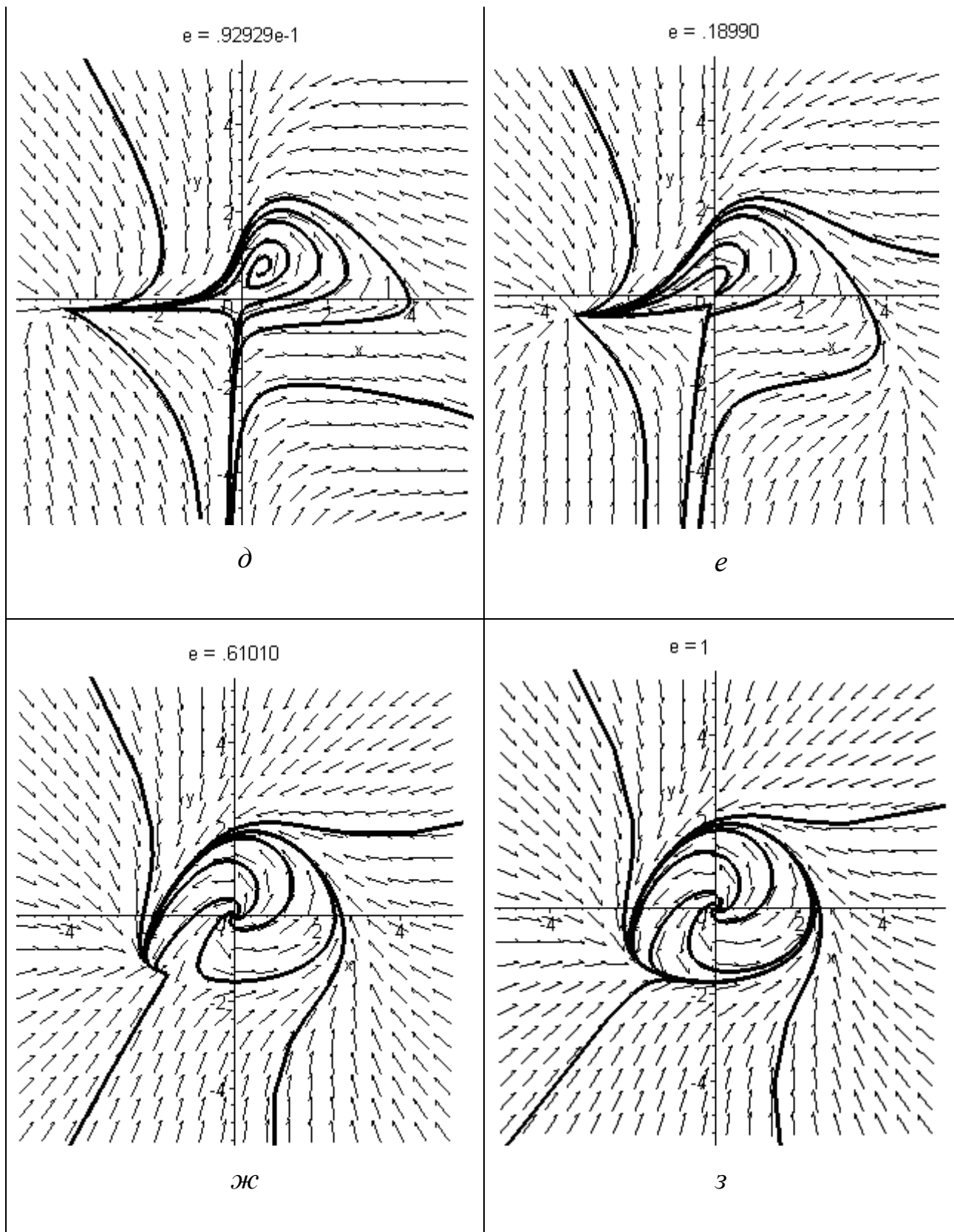


Рис. 28. Окончание

*Листинг расчетного модуля MAPLE
построения фазовых портретов возмущенной
системы Лотка-Вольтерра (рис. 28):*

```
> restart;
> with(DEtools):with(plots):
> F:=proc(e) phaseportrait([diff(x(t),t)=x(t)-
y(t)*x(t)+e*(x(t)*(4-(sqrt(x(t)^2+y(t)^2))^2)-4*y(t)),
diff(y(t),t)=-y(t)+y(t)*x(t)+e*(y(t)*(4-
(sqrt(x(t)^2+y(t)^2))^2)+4*x(t))],
[x(t),y(t)],t=-10..10,[[0,.5,.3],[0,-.5,.3],[0,-.5,-.3],
[0,.5,-.3],[0,2,2],[0,-2,2],[0,-2,-2],[0,2,-2]], step-
size=0.05, x=-5..5,y=-5..5, color=black, line-
color=black);
end:
> animate(F,[e,2],e=0..1,frames=100);
```

4. РЕГУЛЯРНЫЕ И СТРАННЫЕ АТТРАКТОРЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В главе 3 было введено понятие аттракторов динамической системы и представлены их основные типы. Тривиальными типами аттракторов являются положения равновесия и предельные циклы, которыми, однако, далеко не исчерпывается этот класс предельных множеств. Для расширения границ представлений об аттракторах рассмотрим некоторые примеры динамических систем, демонстрирующих наличие различных типов аттракторов, включая автоколебательные дискретные системы и системы со «странными» аттракторами.

4.1. Динамическая система и аттрактор Ван дер Пола

Рассмотрим динамическую систему следующего вида [1, 3, 5]:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = (a - x^2)y - x. \end{cases} \quad (4.1)$$

Систему (4.1) ввел голландский инженер Балтазар Ван дер Пол, работавший в научной лаборатории по выпуску электроламп фирмы Philips, для моделирования вакуумной трубки. Фазовый портрет системы демонстрирует ряд особенностей в зависимости от значений параметра a . Рассмотрим следующий диапазон изменения параметра: $-2 \leq a \leq 2$. Как следует из уравнений (4.1), имеется единственное положение равновесия

$x = y = 0$. Матрица линеаризации и характеристическое уравнение для определения ее собственных чисел в окрестности положения равновесия $x = y = 0$ имеют следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2xy-1 & a-x^2 \end{bmatrix}_{x=y=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0-\rho & 1 \\ -1 & a-\rho \end{vmatrix} = \rho^2 - a\rho + 1 = 0,$$

поэтому собственные числа равны:

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{2} \left(a \pm \sqrt{a^2 - 4} \right). \quad (4.2)$$

Согласно (4.2), при $a = -2$ имеются два кратных корня $\rho_{1,2} = -1$, т.е. реализуется устойчивый узел с кратным наклоном (рис. 29).

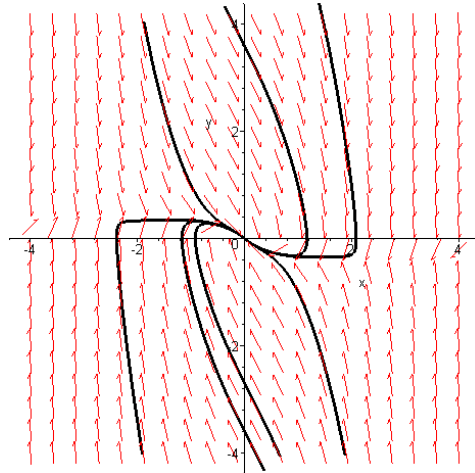


Рис.29. Фазовый портрет системы Ван дер Пола при $a=-2$

Для a из диапазона $-2 < a < 0$ собственные числа являются комплексно-сопряженными с отрицательными вещественными частями, т.е. реализуется переход к устойчивому фокусу (рис. 30).

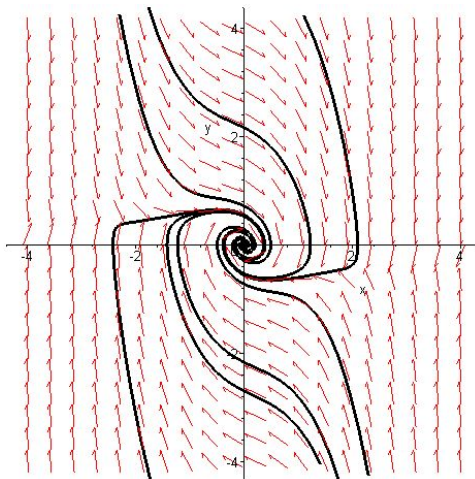


Рис.30. Фазовый портрет системы Ван дер Пола при $a=-0.5$

Для $a = 0$ собственные числа чисто мнимые $\rho_{1,2} = \pm i$ и фокус локально вырождается в центр (рис. 31,б), но по мере удаления от положения равновесия (в нелинейной ситуации) траектории по-прежнему «спирально стремятся» внутрь (рис. 31,а), наматываясь на траекторию центра.

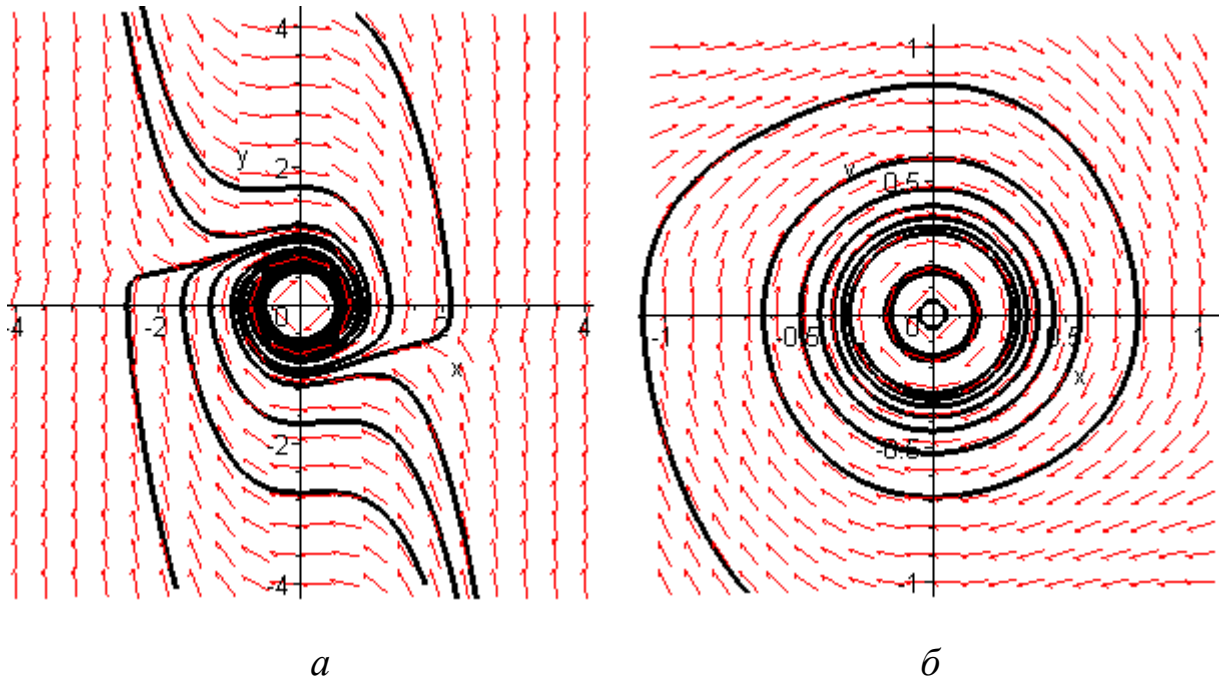


Рис.31. Фазовый портрет системы Ван дер Пола при $a=0$:
 а – большой масштаб (нелинейная ситуация); б – малый масштаб
 (линейная ситуация)

Далее, при $0 < a < 2$, положение равновесия становится неустойчивым фокусом, т.к. собственные числа будут являться комплексно-сопряженными с положительными вещественными частями, поэтому траектории спирально раскручиваются наружу. Однако по мере удаления от начала координат траектории снова «смаываются» внутрь. Так как система является автономной и фазовые траектории не могут иметь пересечений ни с соседними траекториями, ни с собой, то в этой ситуации будет иметь место единственная предельная замкнутая траектория, к которой стремятся остальные траектории как снаружи, так и изнутри. Таким образом, при $0 < a < 2$ в системе рождается устойчивый предельный цикл – *аттрактор Ван дер Пола* (рис.32).

При $a = 2$ предельный цикл разрушается и имеет место неустойчивый узел (рис. 33).

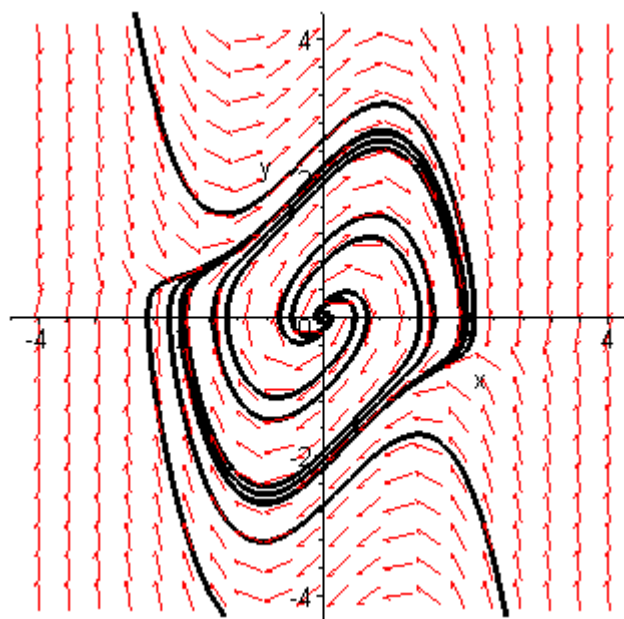


Рис.32. Аттрактор Ван дер Пола при $a=1$

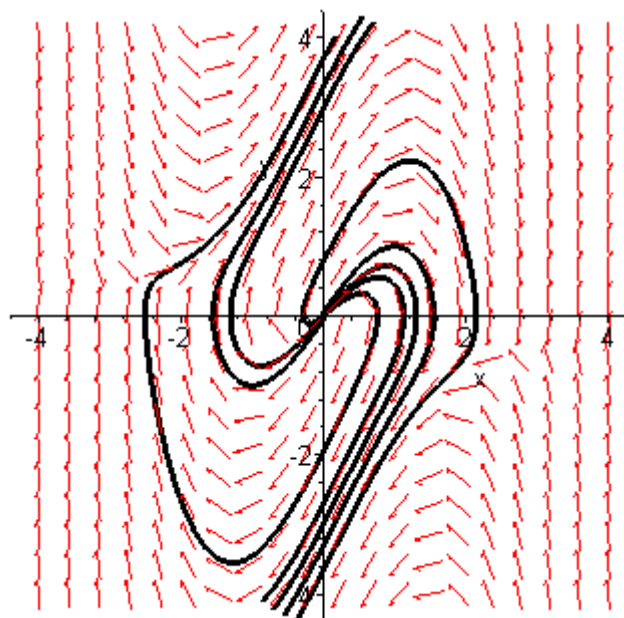


Рис.33. Гибель аттрактора Ван дер Пола при $a=2$

*Листинг расчетного модуля MAPLE
 построения фазовых портретов системы Ван дер Пола (рис. 29-33):*

```
> restart;
> with(plots):
> with(DEtools):
> with(plottools,line):
> lambda:=1:
> ur1:=diff(x(t),t)=y(t):
```

```

> ur2:=diff(y(t),t)=(lambda-x(t)^2)*y(t)-x(t):
> Ics:=[[x(0)=1,y(0)=1] ,[x(0)=-1,y(0)=1],[x(0)=1,y(0)=-1],
[x(0)=-1,y(0)=-1], [x(0)=2,y(0)=1] , [x(0)=0,y(0)=-2.7],
[x(0)=-2.2,y(0)=-2]]:
> phaseportrait([ur1,ur2], [x(t),y(t)], t=-10..15, Ics,
linecolor=black, color=red, stepsize=.05,x=-4..4,y=-
4..4);

```

Задание 11. Провести возможно наиболее полный бифуркационный анализ возмущенной системы Ван дер Пола:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon f(x, y), \\ \dot{y} = (a - x^2)y - x + \varepsilon g(x, y), \end{cases}$$

где возмущения $f(x, y)$, $g(x, y)$ имеют вид (3.13), а ε принимает значения из диапазона $[0, 1]$.

4.2. Аттрактор в системе Хенона (Эно)

Везде выше рассматривались непрерывные динамические системы, задаваемые дифференциальными уравнениями. Рассмотрим теперь дискретную динамическую систему, которая задается следующим отображением последования, когда по предыдущей точке можно вычислить следующую:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - by_n, \\ y_{n+1} = x_n. \end{cases} \quad (4.3)$$

Система (4.3) называется системой Хенона (М. Хенон – в литературе эту фамилию также указывают как Эно) [15, 6]. Система Хенона демонстрирует аттрактор при значениях параметров $a = 1,4$; $b = -0,3$. Аттрактор в этом случае также означает, что, однажды попав на него, изображающая точка всегда останется на нем для всех дальнейших шагов последования, а точки, изначально не принадлежавшие аттрактору, будут приближаться к нему при $n \rightarrow \infty$.

Рис. 34 демонстрирует притяжение точек к аттрактору и с достаточно высокой точностью отображает сам аттрактор Хенона.

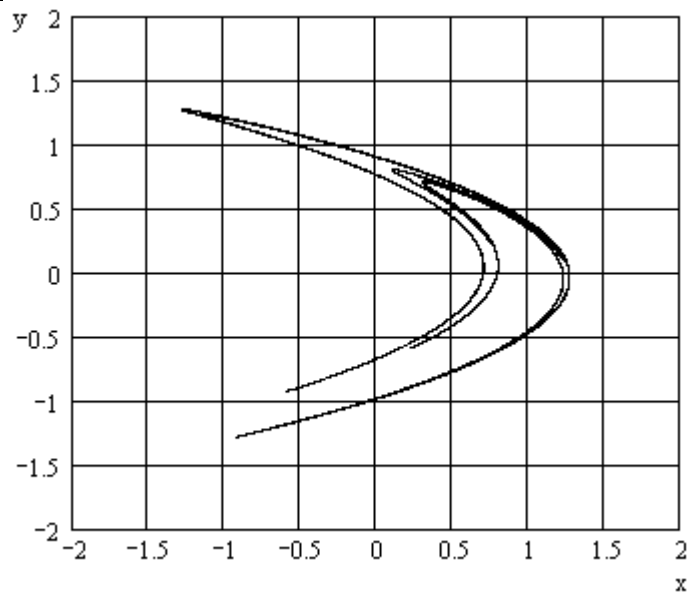
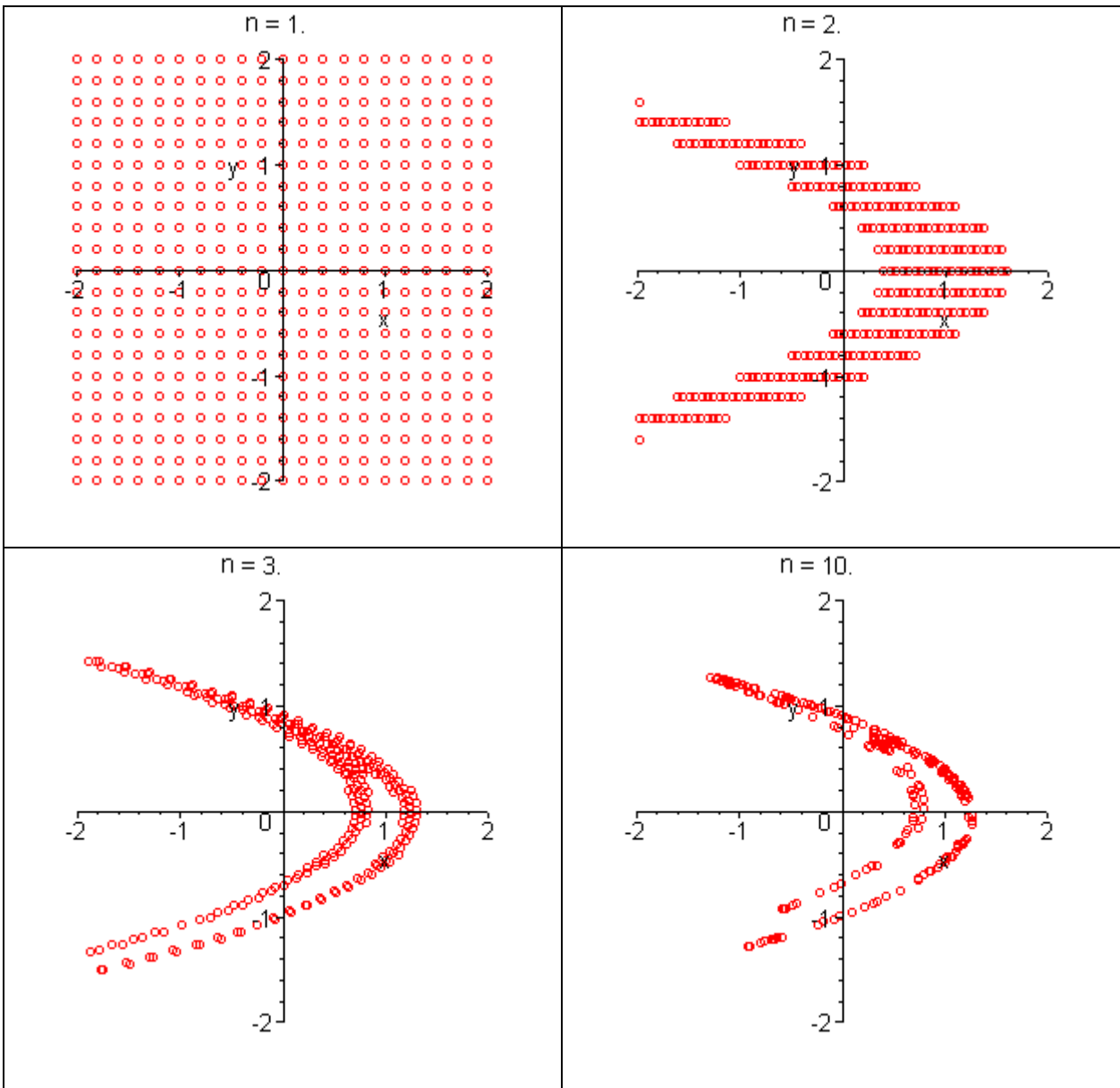


Рис.34. Начальное состояние системы Хенона, его трансформация при отображении последования и аттрактор Хенона

*Листинг расчетного модуля MAPLE
построения аттрактора в системе Хенона
как анимационного изображения (рис. 34):*

```
> restart;
> Eno:=proc(a,b,x0,y0,n) local i,x,y;
  x[1]:=x0;y[1]:=y0;
  for i from 1 by 1 to n do
    x[i+1] := 1-a*x[i]^2-b*y[i];
    y[i+1] := x[i];
  end do:
[[[x[j],y[j]]] $j=1..n];
end proc:
> Eno(1.4,-0.3,0,0,10):
> a:=1.4:b:=-0.3:
> FF:=proc(t)local P;
P:=seq(seq(plot(Eno(a,b,p*0.2,q*0.2,100)[round(t)], x=-
2..2,
y=-2..2,style=point, symbol=circle),p=-10..10),q=-
10..10):
plots[display](P);
end proc:
> plots[animate](FF,[t],t=1..10,frames=10);
```

*Листинг расчетного модуля MathCAD
построения аттрактора в системе Хенона
как статического портрета (рис. 34):*

$y := \left \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..100000 \\ x_0 \leftarrow 0 \\ y_0 \leftarrow 0 \\ y_{i+1} \leftarrow x_i \\ x_{i+1} \leftarrow 1 - 1.4(x_i)^2 + 0.3 \cdot y_i \end{array} \right _y$	$x := \left \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..100000 \\ x_0 \leftarrow 0 \\ y_0 \leftarrow 0 \\ y_{i+1} \leftarrow x_i \\ x_{i+1} \leftarrow 1 - 1.4(x_i)^2 + 0.3 \cdot y_i \end{array} \right _x$
---	---

4.3. Аттрактор Лози

Система Лози [5] представляет собой модификацию системы Хенона (4.3), когда нелинейный квадратичный член заменяется на нелинейный член с модулем:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - a|x_n| - by_n, \\ y_{n+1} = x_n. \end{cases} \quad (4.4)$$

Для системы (4.4) при $|b| < 1$ отображение (4.4) является диссипативным и имеет аттрактор, представленный на рис. 35 ($a=1.4$, $b=-0.3$). Динамика притяжения похожа на притяжение в системе Хенона.

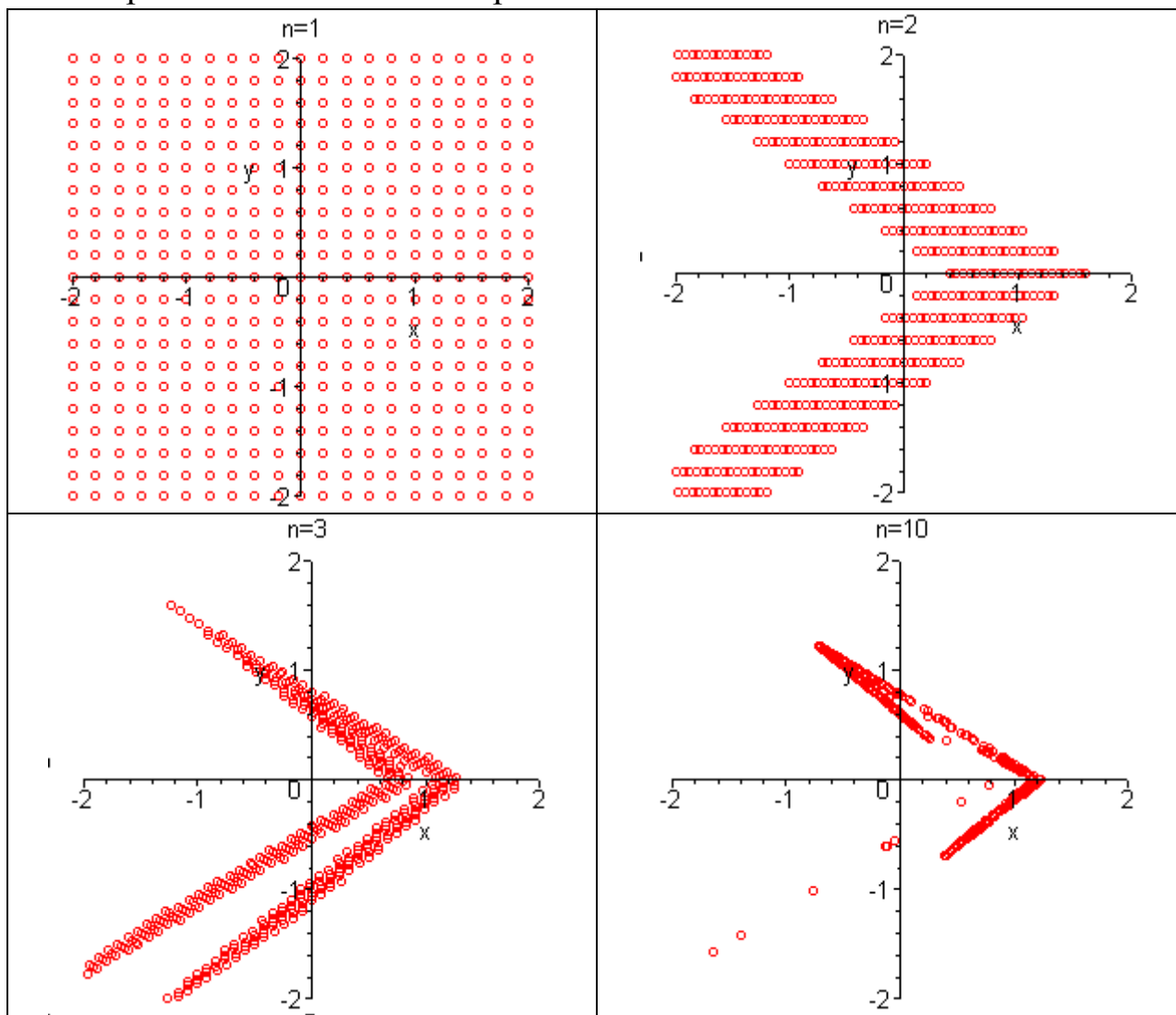


Рис.35. Система Лози: динамика притяжения точек и аттрактор Лози

4.4. Странный аттрактор Лоренца

Важным результатом исследований последних лет явилось обнаружение принципиально новых типов движений в динамических системах. Таким движениям в фазовом пространстве размерности $N \geq 3$ соответствуют сложным образом устроенные притягивающие множества, траектории изображающих точек которых не принадлежат ни к одному из описанных выше типов аттракторов. Фазовые траектории представляются здесь в виде бесконечной, нигде не пересекающейся линии. При $t \rightarrow \infty$ тра-

ектория не покидает замкнутой области и не притягивается к известным типам аттракторов. Именно с существованием таких траекторий связывают возможность хаотического поведения детерминированных динамических систем.

Впервые подобные свойства динамической системы в 1963 году обнаружил Эдвард Лоренц при численном исследовании динамики атмосферных потоков, результаты которого впервые опубликованы в его работе «Детерминированное непериодическое течение» [13]. Лоренц сильно упростила модель тепловой конвекции, сведя ее к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений [13, 1, 3, 5]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma(x - y), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (4.5)$$

Для расчетов Лоренцем были приняты следующие значения параметров:

$$\sigma = 10, \quad b = 8/3, \quad r = 28. \quad (4.6)$$

Уравнения (4.5) с параметрами (4.6) многократно перепроверялись и показывали всегда один и тот же «странный» результат. Заметим, что поведение решений (4.5) существенно зависит от выбора тройки параметров σ , b , r . Например, самое простое поведение реализуется при $r < 1$, тогда все траектории стремятся к началу координат при $t \rightarrow \infty$.

Позднее в 1971г. в теоретической работе Дэвида Рюэля и Флориса Такенса «О природе турбулентности» [14] притягивающая область в фазовом пространстве динамической системы, характеризующая режимом установившихся непериодических колебаний, была названа странным аттрактором. Этот термин утвердился для обозначения математического образа режима нерегулярных колебаний детерминированных динамических систем. Со странным аттрактором связывается реализация нерегулярного (в смысле отсутствия периодичности) колебательного режима, который во многом сходен с нашими представлениями о стационарных случайных процессах и подобен сложному "шумоподобному" режиму автоколебаний [1, 5]. Случайное движение непредсказуемо, либо предсказуемо с определенной вероятностью. Траектории случайного движения нельзя многократно и однозначно воспроизвести ни в численном, ни в физическом эксперименте (движение броуновской частицы). В случае странного аттрактора имеется *строгая предсказуемость* в смысле детерминированности закона эволюции. Решение дифференциальных уравнений (как и для обычных – регулярных аттракторов) подчиняется теореме

единственности и *однозначно воспроизводится* при фиксированных начальных условиях. Поэтому для обозначения сложных "шумоподобных" автоколебаний, математическим образом которых служит странный аттрактор, используются термины типа динамическая стохастичность, *детерминированный хаос* и подобные. Важно отличать эти процессы от стохастических в классическом смысле, которые при описании требуют учета флуктуаций в исходных динамических уравнениях либо непосредственно подчиняются уравнениям для плотности распределения вероятностей статистической теории.

Приведем классический вид фазовой траектории системы (4.5) для параметров (4.6), представленный на рис. 36 и называемый «странный аттрактор».

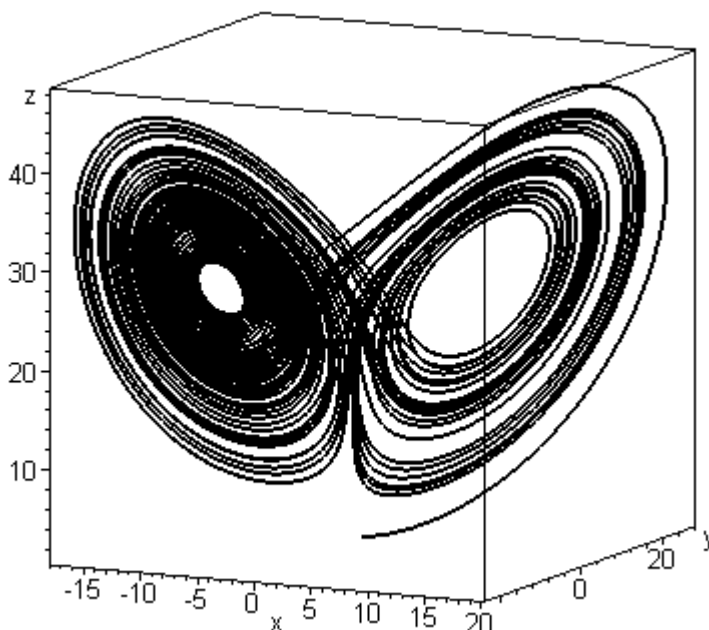


Рис. 36. Странный аттрактор Лоренца

*Листинг расчетного модуля MAPLE
построения аттрактора Лоренца (рис. 36):*

```
> restart;
> with(plots):
> with(DEtools):
> with(plottools,line):
> b:=8/3: r:=28: sigma_:=10:
> ur1:=diff(x(t),t)=-sigma_*(x(t)-y(t)):
> ur2:=diff(y(t),t)=r*x(t)-y(t)-x(t)*z(t):
> ur3:=diff(z(t),t)=x(t)*y(t)-b*z(t):
> Resh:=dsolve( [ur1,ur2,ur3,x(0)=0.5,y(0)=1,z(0)=1.5],
[x(t),y(t),z(t)], type=numeric, method=dverk78):
```

```
>odeplot(Resh,[x(t),y(t),z(t)],0..35,
numpoints=10000,color=black);
```

Нельзя все же не согласиться с тем, что аттрактор Лоренца представляет собой абстрактный математический (и геометрический) объект, поэтому весьма интересны механические интерпретации системы Лоренца. Во-первых, как указано в [3], механическим аналогом системы Лоренца является водяное колесо, а, во-вторых, систему Лоренца можно интерпретировать как маятник с обратной связью. Приведем вычислительный пример, реализованный в пакете Maple и подробно разобранный в [8], иллюстрирующий движение маятниковой системы с аттрактором Лоренца. Далее последует текст, содержащий команды Maple и комментарии к исследованиям; рисунки примера не нумеруются.

В работе Юдовича В.И.* показано, что система Лоренца (4.5) может быть переписана с помощью введения новых переменных в виде:

```
>ur1_0:=diff(x(t),t$2)+epsilon*h*diff(x(t),t)+x(t)^3+
+(q(t)-1)*x(t)=0;
```

$$ur1_0 := \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + \varepsilon h \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) + x(t)^3 + (q(t) - 1) x(t) = 0$$

```
> ur2_0:=diff(q(t),t)=-
epsilon*a*q(t)+epsilon*beta*x(t)^2;
```

$$ur2_0 := \frac{d}{dt} q(t) = -\varepsilon a q(t) + \varepsilon \beta x(t)^2$$

```
> ur3:=diff(x(t),t)=y(t);
```

$$ur3 := \frac{d}{dt} x(t) = y(t)$$

Здесь параметры маятника связаны с параметрами Лоренца следующим

образом: $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{r-1}}$, $h = \frac{\sigma+1}{\sqrt{\sigma}}$, $a = \frac{b}{\sqrt{\sigma}}$, $\beta = \frac{2\sigma-b}{\sqrt{\sigma}}$.

Если принять $\varepsilon = 0$:

```
> ur1:=subs(epsilon=0,ur3,ur1_0);
```

$$ur1 := \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + x(t)^3 + (q(t) - 1) x(t) = 0$$

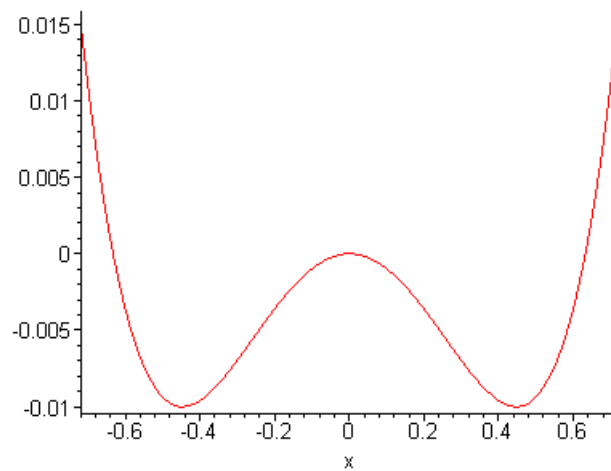
то будет иметь место консервативная маятниковая система без обратной связи с потенциальной энергией:

```
> P:=x^4/4+(qq-1)*x^2/2;
```

* Юдович В.И. Асимптотика предельных циклов системы Лоренца при больших числах Релея. Деп. ВИНТИ №2611-78.

$$P := \frac{x^4}{4} + \frac{(qq-1)x^2}{2}$$

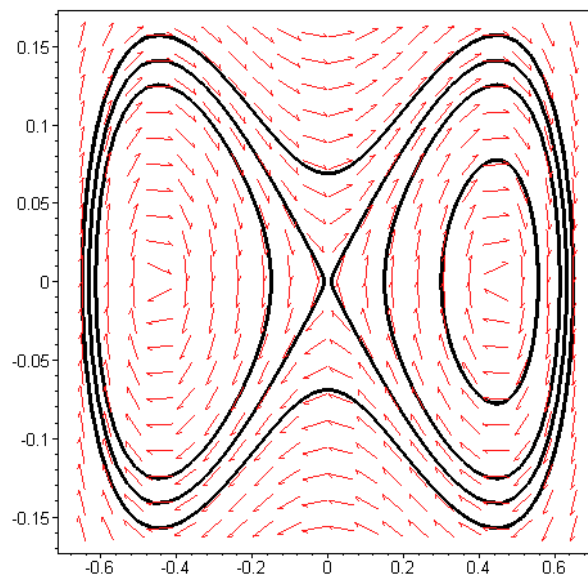
```
> plot(subs(qq=0.8,P),x=-0.72..0.72,axes=FRAMED);
```



В этом случае характерен классический фазовый портрет:

```
> with(DEtools):
```

```
> phaseportrait([eval(diff(x(t),t)=y(t)),diff(y(t),t)=-
(x(t)^3+(0.8-1)*x(t))],[x(t),y(t)],t=0..30,[[x(0)=-
0.65,y(0)=0],[x(0)=-0.15,y(0)=0],[x(0)=-.01,y(0)=0],
[x(0)=0.65,y(0)=0],[x(0)=0.3,y(0)=0],[x(0)=0.15,y(0)=0],
[x(0)=0.01,y(0)=0]], stepsize=0.25,axes=BOXED);
```



Далее рассмотрим систему при $\varepsilon \neq 0$:

```
> ur3:=diff(x(t),t)=y(t);
```

$$ur3 := \frac{d}{dt} x(t) = y(t)$$

```
> ur1:=subs(ur3,ur1_0);
```

$$ur1 := \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + \varepsilon h y(t) + x(t)^3 + (q(t) - 1) x(t) = 0$$

> ur2:=subs(ur3,ur2_0);

$$ur2 := \frac{d}{dt} q(t) = -\varepsilon a q(t) + \varepsilon \beta x(t)^2$$

> b:=8/3: r:=28: sigma:=10:

> epsilon:=1/sqrt(r-1); h:=(sigma+1)/sqrt(sigma);

$$\varepsilon := \frac{\sqrt{3}}{9} \quad h := \frac{11\sqrt{10}}{10}$$

> a:=b/sqrt(sigma); beta:=(2*sigma-b)/sqrt(sigma);

$$a := \frac{4\sqrt{10}}{15} \quad \beta := \frac{26\sqrt{10}}{15}$$

Строим процедуру интегрирования:

> nsol:=dsolve({ur1,ur2,ur3,x(0)=-3/10,y(0)=-1/10,

q(0)=1/2},

{x(t),y(t),q(t)},type=numeric,method=rkf45,relerr=0.00001,

abserr=0.000001,output=listprocedure):

> with(plots,odeplot):

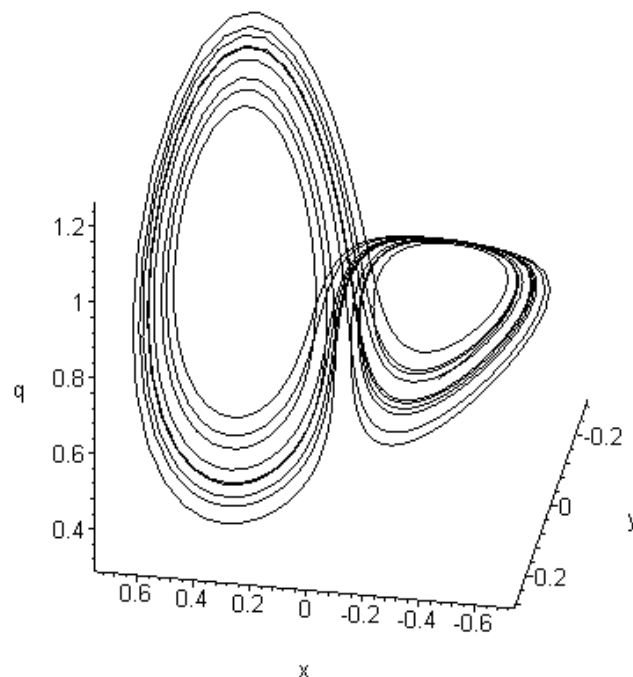
Строим фазовую траекторию системы:

> odeplot(nsol, [x(t),y(t),q(t)], 0..250,numpoints=800,

axes=FRAME,

labels=[x,y,q], style=line, orientation=[100,60], color =

black);



Как видно, имеет место аттрактор Лоренца, следовательно маятник с обратной связью, определенный уравнениями $ur1_0$, $ur2_0$, $ur3$, должен демонстрировать странные свойства и проявлять свое хаотическое поведение.

Далее необходимо по результатам численного интегрирования, размещаемым в массивах, получить сплай-аппроксимации решений для приближенного аналитического выявления ожидаемых хаотических свойств:

```
> tm:=array(1..301):
> for i from 1 to 301 do tm[i]:=(i-1)/300*150;od:
> pppp:=evalf(seq((i-1)/300*150,i=1..301)):

> nsol1:=dsolve([ur1,ur2,ur3,x(0)=-0.3,y(0)=-
0.10,q(0)=0.5],
[x(t),y(t),q(t)],type=numeric,method=rkf45,
relerr=0.00001,abserr=0.000001,output=tm):

> for i from 1 to 5 do
> xm:=array(1..301);
> ym:=array(1..301):
> qm:=array(1..301):
> pem:=array(1..301):

> for i from 1 to 301 do
> xm[i]:=nsol1[2,1][i,2];
> qm[i]:=nsol1[2,1][i,4];
> ym[i]:=nsol1[2,1][i,3];
> pem[i]:=evalf(subs(qq=qm[i],x=xm[i],P)); od:
> readlib(spline):

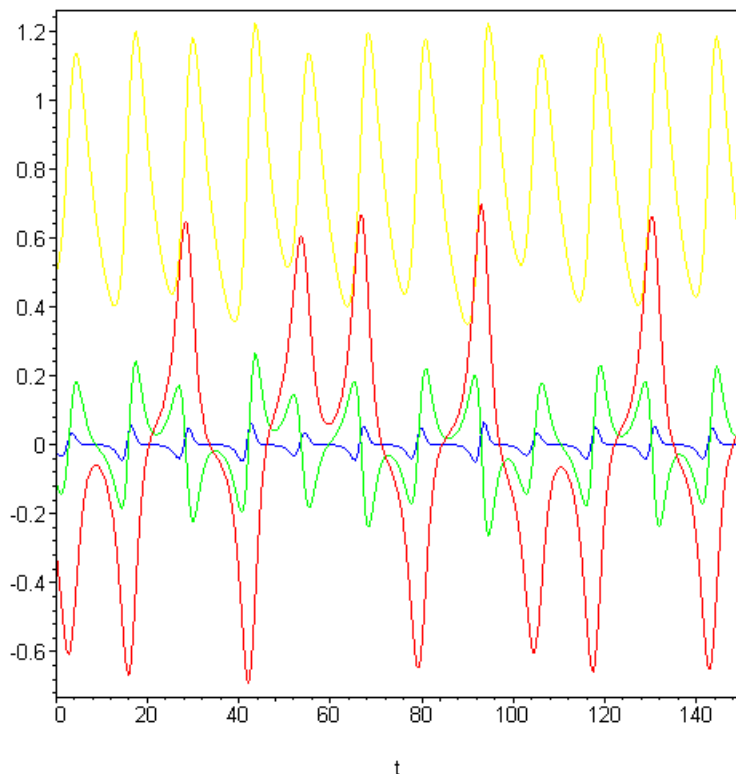
> spline(tm,xm,t,linear):
> spx:=spline(tm,xm,t,linear):
> spy:=spline(tm,ym,t,linear):
> spq:=spline(tm,qm,t,linear):
> sppe:=spline(tm,pem,t,linear):
spx_:=unapply(spx,t):
spy_:= unapply(spy,t):
```



```
sppe_:=unapply(sppe,t):  
spq_:=unapply(spq,t):
```

Строим сплайн-аппроксимации решений:

```
>plot([spx_(t),spy_(t),spq_(t),sppe_(t)],t=0...150,axes=  
BOXED);
```



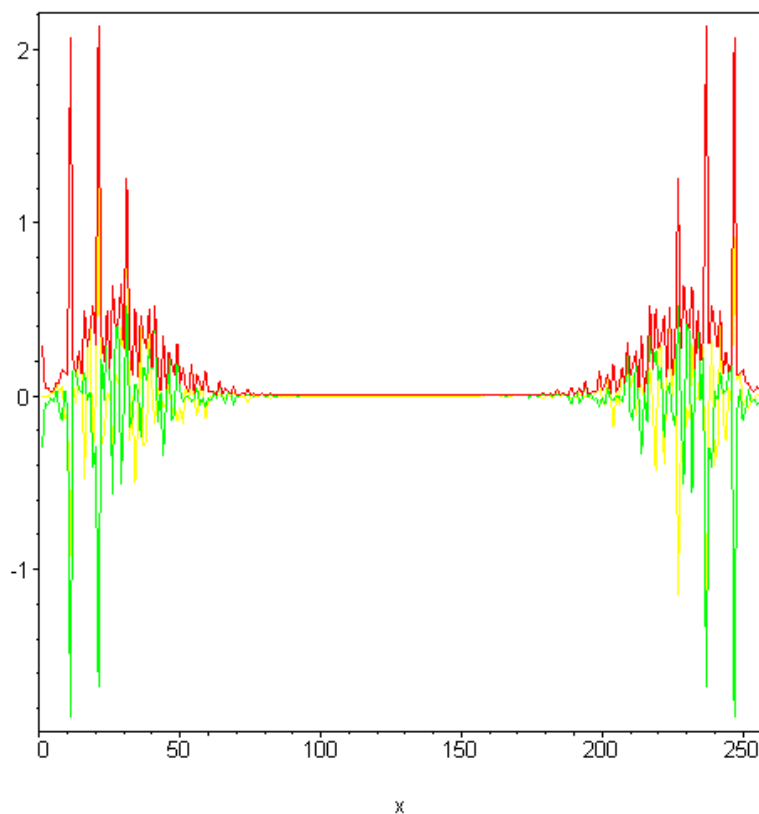
Для функций, демонстрирующих сложное аperiodическое хаотическое поведение, характерен сложный спектр частот их преобразования Фурье. Проведем быстрое преобразование Фурье и построим спектр первых 256 частот разложений полученных решений для маятника (в виде сплайн-аппроксимации) и построим в одних осях графики действительной, мнимой части фурье-спектра, а также их модуля:

```
> xvar:=array(1..256):  
> yvar:=array(1..256):  
> mvar:=array(1..256):  
> for i from 1 to 256 do  
> xvar[i]:=pem[i];  
> yvar[i]:=0; od:
```

```

> readlib(FFT):
> FFT(8,xvar,yvar);
> for i from 1 to 256 do
> mvar[i]:=sqrt(xvar[i]^2+yvar[i]^2);
> od:
> plot({[[k,xvar[k]] $k=1..256],[[1,yvar[1]]
$1=1..256],[[m,mvar[m]] $m=1..256]},x=0..256,axes=BOXED);

```



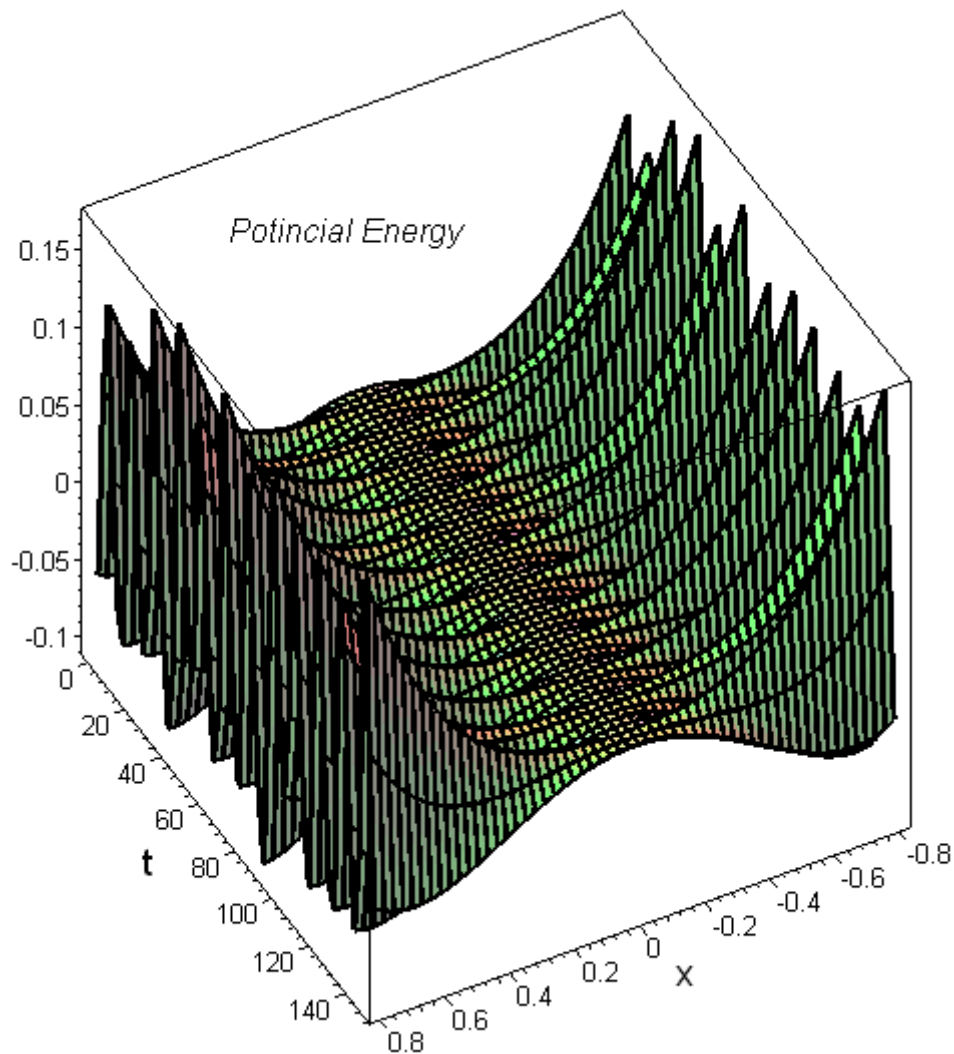
Как видно, полученное решение демонстрирует сложный спектр, не убывающий с увеличением частоты, а наоборот, имеющий зоны провала и снова сильно проявляющий себя на старших частотах (шумоподобие). Таким образом, решение действительно хаотично во введенном выше смысле, т.е. демонстрирует сложное аперриодическое поведение с шумоподобным спектром частот.

Для рассмотренной задачи имеется механико-геометрическая интерпретация – изученный маятник описывает движение идеального шарика в потенциальной яме, форма которой меняется во времени. Для начала изобразим форму потенциальной ямы как поверхность с изменяющейся во времени образующей:

```

> poten:=(x,t)->x^4/4+(spq_(t)-1)*x^2/2;
> with(plots):pic1:=plot3d(poten,-
0.8..0.8,0..150,numpoints=3000,style=WIREFRAME): pic1;

```

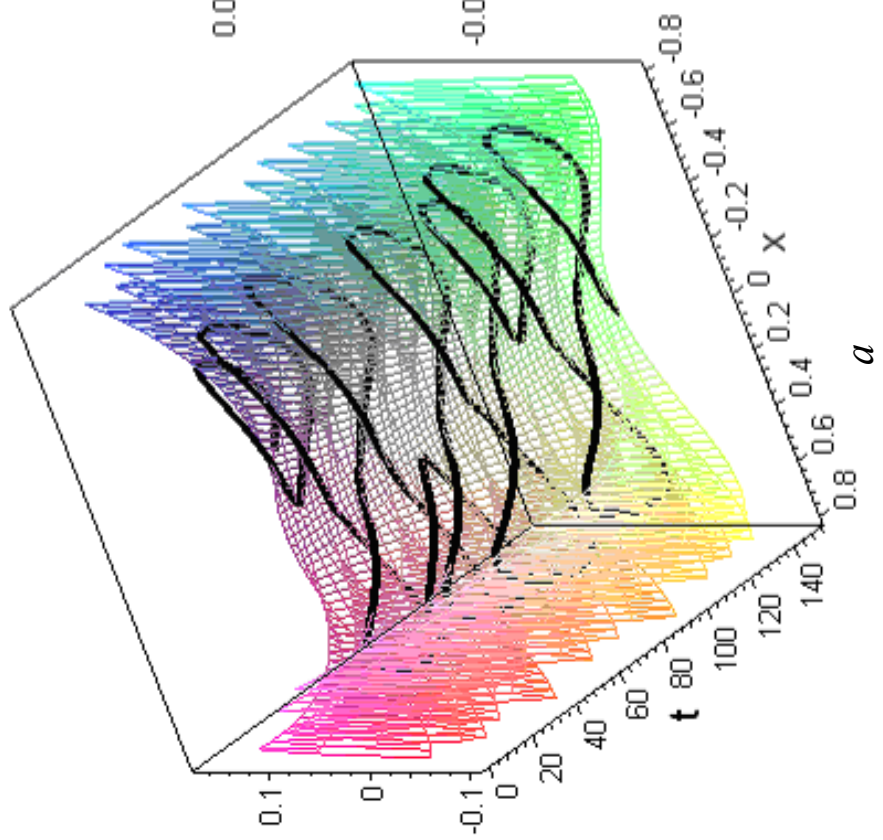
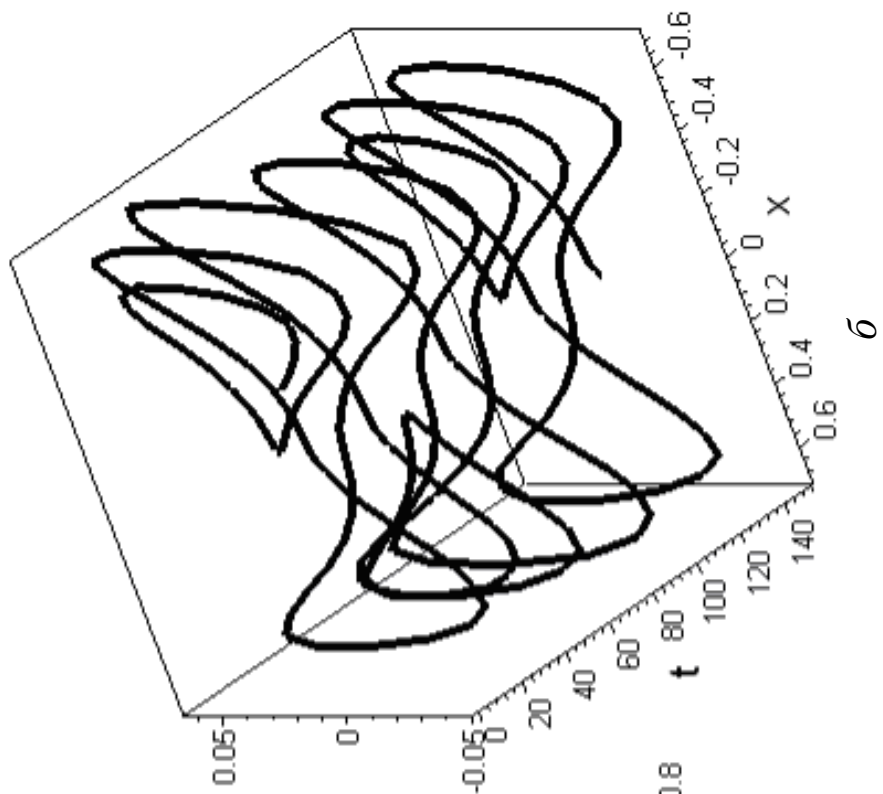


Далее изобразим траекторию шарика на поверхности потенциальной энергии (а) и отдельно (б):

```

> timet:=t->t;
> pic2:=spacecurve([spx_(t),timet(t),sppe(t)],t=0..150,
numpoints=400,color=black,thickness=2): pic2;
> display3d({pic1,pic2},orientation=[-18,35],
axes=FRAMED, labels=[x,t,Energy]);

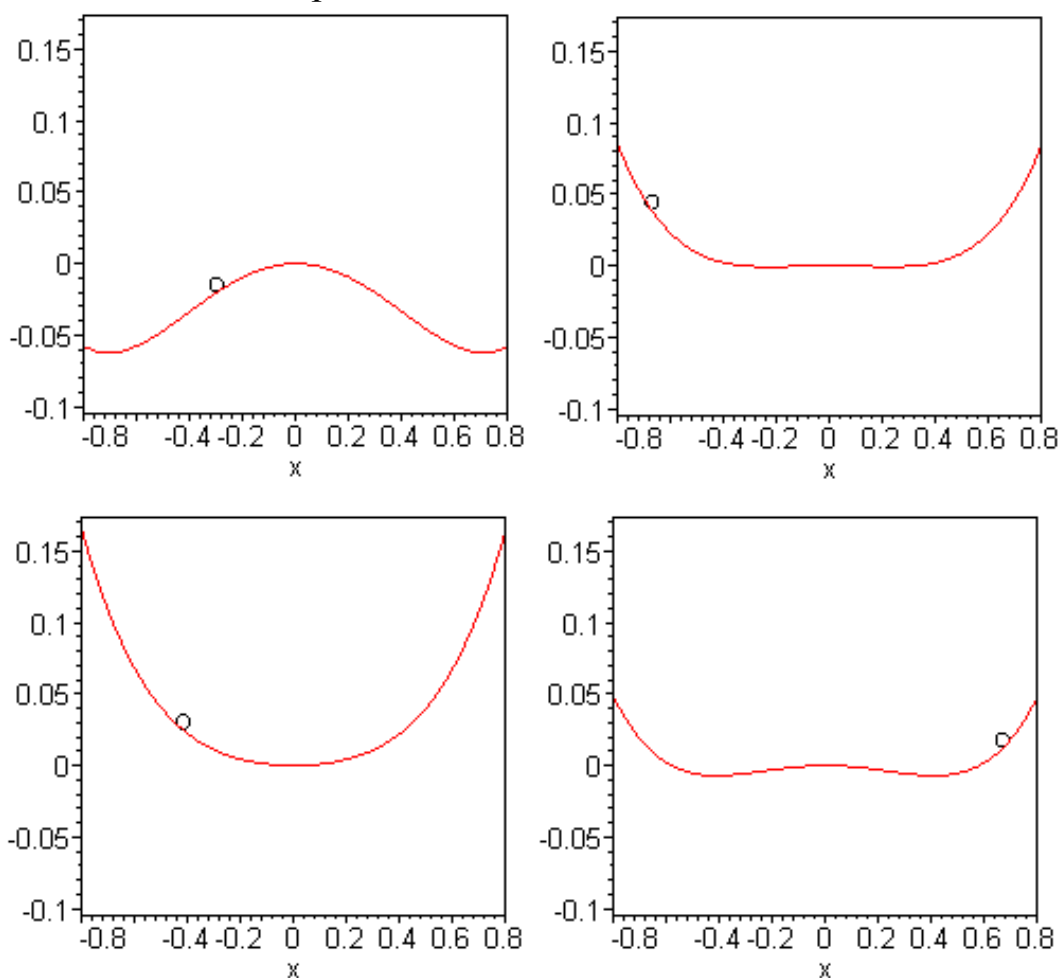
```



Можно подготовить анимацию движения шарика в яме, меняющейся во времени:

```
> ball:=proc(x,y) local i;
> PLOT(POLYGONS([seq([evalf(x+0.05*cos(Pi*i/10)/2),
evalf(0.006+y+0.01*sin(Pi*i/10)/2)],i=1..20)])); end:
> figpic:=proc(n); display({plot(subs(qq=qm[n],P),
x=-0.80..0.8), ball(xm[n],pem[n]))}); end:
> display([seq(figpic(i),i=1..150)], insequence=true,
axes=BOXED);
```

Приведем несколько кадров анимации:



Таким образом, продемонстрирован механический смысл системы Лоренца, соответствующий движению маятниковой системы и идеализированного шарика по поверхности потенциальной энергии. Движение проявляет хаотические свойства и демонстрирует странный аттрактор в своем фазовом пространстве.

Задание 12. Провести возможно наиболее полный бифуркационный и фурье-спектральный анализ системы Лоренца для параметров, отличающихся от (4.5).

4.5 Странный аттрактор Ресслера

Рассмотрим еще один пример аттрактора, демонстрирующего "странные" свойства – аттрактор Ресслера*, возникающий в следующей динамической системе:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - c),\end{aligned}\tag{4.7}$$

где постоянные параметры взяты со следующими своими значениями:

$$a = b = 0.2, \quad c = 5.7.\tag{4.8}$$

В этом случае будет иметь место трехмерный фазовый портрет, демонстрирующий аттрактор Ресслера (рис. 37).

Файл ressler_scenary.m сценария MATLAB, строящего аттрактор Ресслера (рис. 37):

```
[T,Y]=ode23('ressler', [0,400], [-0.7,-0.7,1]);
comet3(Y(:,1),Y(:,2),Y(:,3))
figure plot3(Y(:,1),Y(:,2),Y(:,3))
figure plot(Y(:,1),Y(:,2))
figure plot(Y(:,1),Y(:,3))
figure plot(Y(:,2),Y(:,3))
```

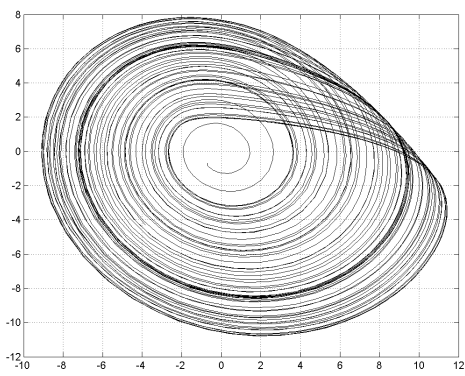
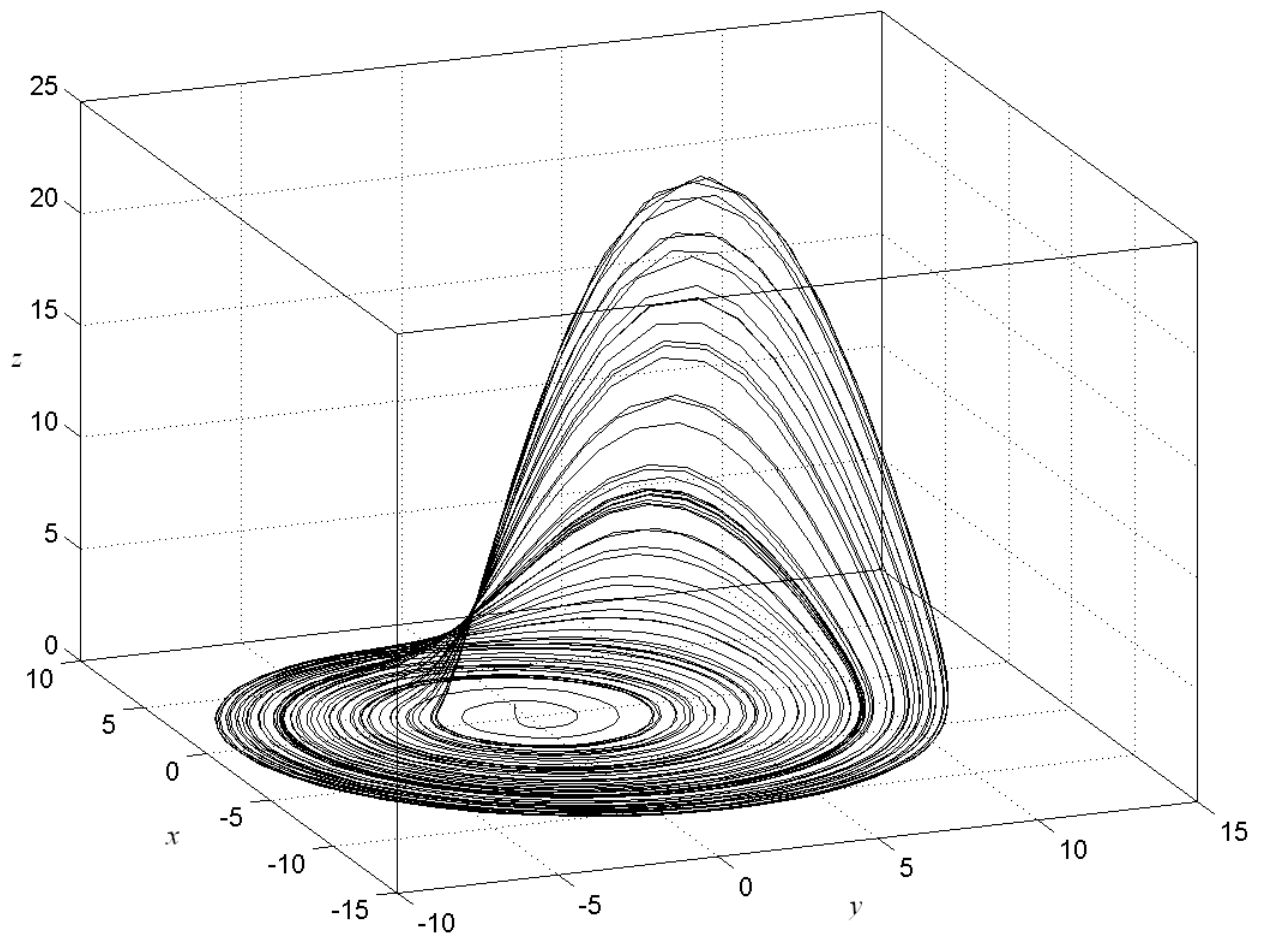
Файл ressler.m, содержащий правые части системы (4.7):

```
function f=ressler(t,y)
f=[-y(2)-y(3); y(1)+0.2*y(2); 0.2+y(3)*(y(1)-5.7)];
```

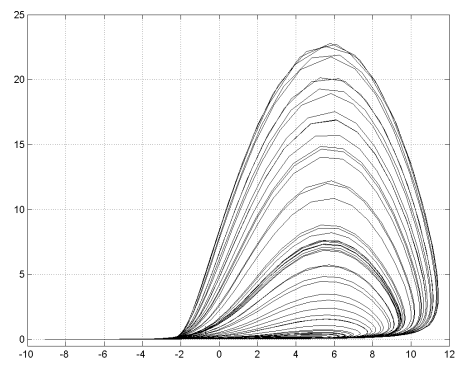
Файлы ressler_scenary.m и ressler.m находятся в рабочем каталоге среды MATLAB. Запуск сценария осуществляется командой:

```
>>ressler_scenary
```

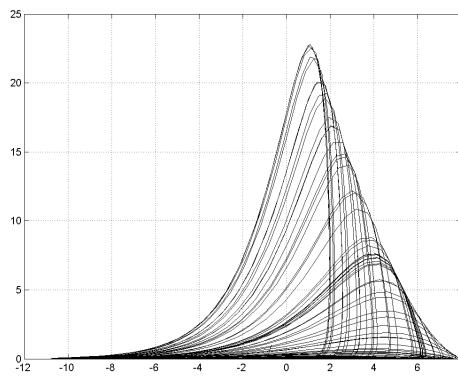
* Хакен Г. Синергетика: иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. – М.: Мир, 1985.



плоскость $[x, y]$



плоскость $[x, z]$



плоскость $[y, z]$

Рис. 37. Аттрактор Ресслера

5. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС И СЦЕНАРИИ ПЕРЕХОДА К ХАОСУ

В предыдущей главе был описан странный аттрактор Лоренца, демонстрирующий сложный апериодический процесс. Важным и интересным представляется вопрос о причинах и механизмах реализации таких процессов в, казалось бы, простых динамических системах. Раскрыть существо поставленных вопросов мы постараемся в настоящей главе, ничуть не претендуя на всеобъемность и законченность излагаемого в ней материала, так как сама теория детерминированного хаоса в настоящее время претерпевает бурное развитие [5, 3, 6, 7].

5.1. Фракталы и фрактальная размерность

Как определить является ли аттрактор странным, и что представляет странность сама по себе? Для ответа на эти вопросы необходим экскурс в теорию фракталов и фрактальной размерности.

Введем в рассмотрение геометрический объект, получаемый из сплошного равностороннего треугольника (плоской фигуры) по следующему алгоритму [3]:

1. Каждая сторона делится пополам и основания этих медиан образуют внутренний равносторонний треугольник.
2. Внутренний треугольник вырезается из фигуры.
3. После вырезания внутреннего треугольника осталась фигура, образованная тремя равносторонними треугольниками и треугольной дырки.
4. Каждый из оставшихся треугольников подвергается аналогичной процедуре вырезки срединных внутренних треугольников.
5. Процесс повторяется бесконечное число раз.

В итоге получается несвязная геометрическая фигура, представленная на рис. 38, которая носит название «салфетки Серпинского» [3, 9]. Эта фигура, вообще говоря, представляет собой геометрический образ несвязного несчетного точечного множества – *канторово* множество.

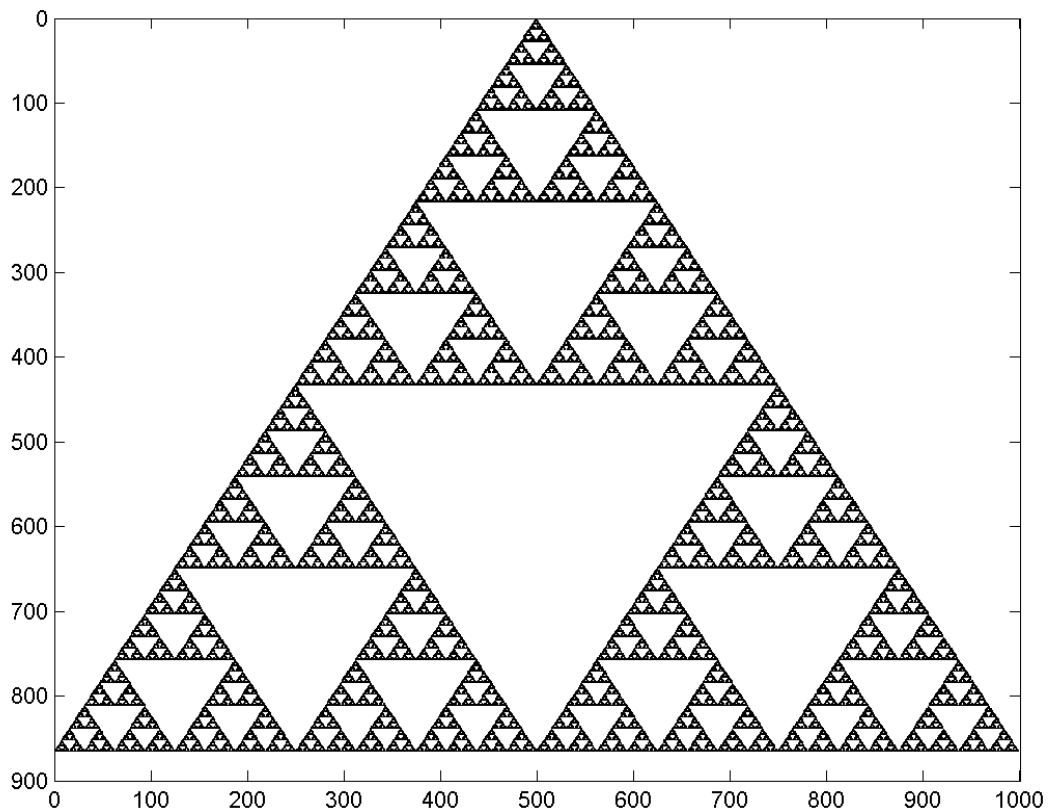


Рис.38. Фрактал «салфетка Серпинского»

Салфетка Серпинского является типичным примером математического объекта, называемого «фрактал».

Для построения салфетки Серпинского был использован алгоритм, представленный в справочной системе MATLAB (gasket.m):

```
function theImage = gasket(numPoints)
%GASKET An image of a Sierpinski Gasket.
% IM = GASKET(NUMPOINTS)
% Example:
% x = gasket(50000);
% imagesc(x);colormap([1 1 1;0 0 0]);
% axis equal tight
% Copyright (c) 1984-98 by The MathWorks, Inc
% $Revision: 1.1 $ $Date: 2000/09/08 18:42:05 $
theImage = zeros(1000,1000);
corners = [866 1;1 500;866 1000];
startPoint = [866 1];
theRand = rand(numPoints,1);
theRand = ceil(theRand*3);
for i=1:numPoints
startPoint = floor((corners(theRand(i),:)+startPoint)/2);
theImage(startPoint(1),startPoint(2)) = 1;
end
```

Запуск вычислений из среды MATLAB (файл gasket.m при этом находится в рабочем каталоге среды):

```
>>x = gasket(9000000);  
>>imagesc(x); colormap([1 1 1;0 0 0]);
```

Какова размерность построенного геометрического объекта, ведь он не является ни однородной плоской фигурой с размерностью 2, ни сплошной ломаной линией с размерностью 1?

Дадим сначала общее определение фрактальной размерности [9, 18]. Пусть d – евклидова размерность пространства, в котором построен фрактальный объект (точнее размерность пространства, в которое может быть вложен элемент фрактала). Покроем теперь этот объект целиком d -мерными элементарными объемами с длиной гиперребра r (при $d = 1$ – это отрезок длины r , при $d=2$ – квадрат со стороной r , при $d = 3$ – куб с ребром r и т.д.). Предположим, что для этого потребовалось не менее, чем $N(r)$ объемов. Если при достаточно малых r величина $N(r)$ меняется по степенному закону:

$$N(r) \propto \frac{1}{r^D}, \quad (5.1)$$

то D называют фрактальной или хаусдорфовой размерностью. Заметим здесь, что т.к. в формуле (5.1) использован знак линейной пропорциональности, а не точного равенства, то за элементарный объем можно принимать не только гиперкубы, а, например, гипершары, либо другие удобные для решения гиперобъемы. Например, при $d = 3$ объем куба $V = r^3$, объем шара $V = 4/3 \pi r^3$, т.е. в любом случае $V \sim r^3$, отметим также, что и размер фрактала (его образующего элемента) в этом случае не играет роли, т.к. всегда можно провести перенормировку и перейти к его единичному размеру. Таким образом, из (5.1) следует определение для фрактальной (хаусдорфовой) размерности:

$$D = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N}{\ln r}. \quad (5.2)$$

Пусть фрактал обладает свойством самоподобия, когда при его построении вновь и вновь возникает одна и та же структура, но в меньшем масштабе (салфетка Серпинского). Покрытие таких фракталов можно осуществлять элементами, из которых состоит сам фрактал. Пусть на некотором этапе покрытия фрактала пришлось использовать, как минимум, $N(r)$ таких элементов характерного размера r , а на другом – $N(r')$ элемен-

тов размера r' . В этом случае формулу фрактальной размерности можно записать:

$$D = -\frac{\ln\left(\frac{N(r)}{N(r')}\right)}{\ln\left(\frac{r}{r'}\right)}. \quad (5.3)$$

Пример 1. Вычислим фрактальную размерность отрезка прямой линии единичной длины.

Размерность пространства, в которое может быть вложен отрезок прямой, равна $d=1$. Элементарный объем, которым мы будем покрывать отрезок – это элементарный отрезок длины r . Количество элементарных объемов, покрывающих исходный отрезок, очевидно равно $N_{-}=1/r$. Таким образом, фрактальная размерность отрезка согласно (5.2) равна:

$$D = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(1/r)}{\ln r} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{\ln r}\right) = 1,$$

т.е. совпадает с его метрической размерностью.

Пример 2. Вычислим теперь фрактальную размерность объекта, получаемого из отрезка единичной длины после вырезания из него центральной части длиной $1/3$, т.е. системы двух отрезков длиной $1/3$.

Очевидно, что после вырезания $1/3$ из центра отрезка по сравнению с предыдущим примером изменится только $N_{-} = 2/3N_{-}$. Поэтому размерность объекта равна:

$$\begin{aligned} D &= -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln((2/3)/r)}{\ln r} = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(2/3) - \ln r}{\ln r} = \\ &= -\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(2/3)}{\ln r} - 1\right) = 1, \end{aligned}$$

т.е. фрактальная размерность по-прежнему совпадает с метрической размерностью отрезка.

Пример 3. Повторим теперь процедуру вырезания серединной «третьей» части из каждого «предыдущего» отрезка (см. пример 2) бесконечное число раз. Вычислим хаусдорфову размерность полученного канторова множества. В процессе вырезания серединной части мы будем всякий раз получать самоподобную систему двух отрезков. На нулевом шаге мы имели один отрезок длины 1, на первом шаге – 2 отрезка с длиной $1/3$, поэтому по формуле (5.3) получим:

$$D = -\frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln \frac{1}{1/3}} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,6309,$$

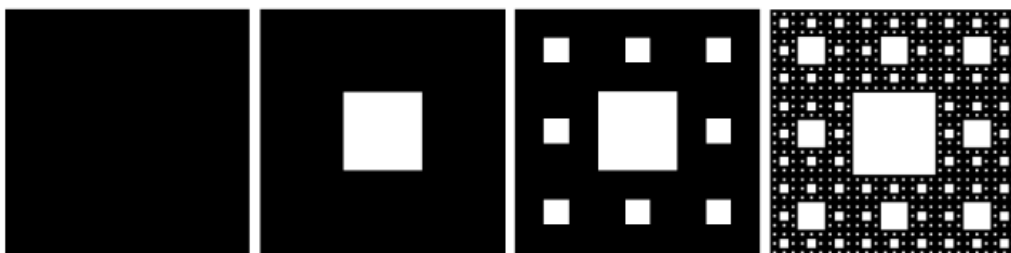
т.е. теперь фрактальная размерность стала меньше метрической размерности отрезка.

Пример 4. Вычислим фрактальную размерность салфетки Серпинского – самоподобного фрактала. В основе фрактала лежит треугольник, следовательно покрытие фрактала можно осуществлять треугольниками. При построении салфетки на нулевом шаге мы имели один треугольник с единичной стороной, следовательно $N(r)=1$ и $r=1$. На первом шаге получено три сплошных треугольника со стороной $r/2$, следовательно, $N(r')=3$, $r'=1/2$. Согласно формуле (5.3) размерность салфетки будет равна:

$$D = -\frac{\ln(1/3)}{\ln(2)} = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1,5849.$$

Отметим, что в процессе построения салфетки была исключена вся ее начальная площадь (исходного треугольника), что можно проверить расчетом. Об этом же говорит и значение ее фрактальной размерности $D < 2$, которая меньше размерности плоскости, на которой находится салфетка.

Задание 13. Разработать в произвольном математическом пакете алгоритм геометрического построения ковра Серпинского. Ковер строится следующим образом. Изначально имеется равносторонний сплошной квадрат с единичной стороной. Из его центральной части вырезается квадрат с длиной стороны $1/3$. Далее оставшаяся часть делится на восемь равносторонних квадратов, и с каждым из них поступают как с изначальным, процесс повторяют бесконечно:



Приведем еще один пример самоподобного фрактала, в основании которого лежит отрезок, точнее три отрезка. Рассмотрим каркасный равносторонний треугольник с единичной стороной. Каждую из сторон разделим на три равные части, уберем среднюю часть и достроим новые равносторонние треугольники, как показано на рис. 39. Затем с каждым лучом полученной звезды, являющимся равносторонним треугольником, поступим также, как с исходным треугольником, и продлим процедуру до бесконечности (рис.39). Эта фигура носит название снежинки Коха.

Вычислим фрактальную размерность снежинки Коха. На нулевом этапе построения снежинки мы имели три отрезка единичной длины, следовательно $N(r)=3$, $r=1$. После первого шага получаем 12 отрезков с длиной $1/3$, следовательно $N(r')=12$, $r'=1/3$. По формуле (5.3) получаем, что хаусдорфова размерность снежинки равна:

$$D = -\frac{\ln(3/12)}{\ln(3)} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,2618.$$

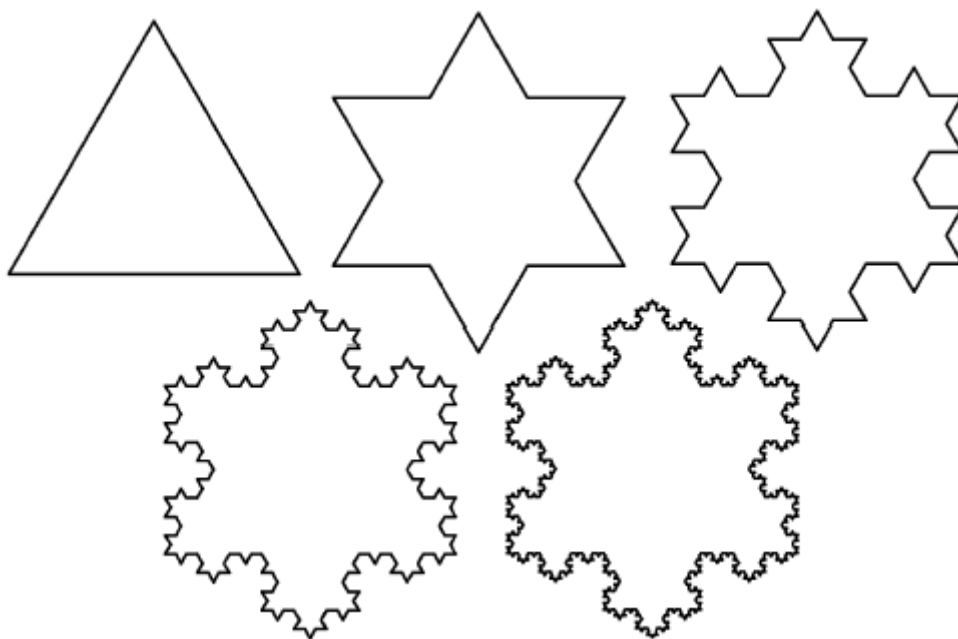


Рис.39. Снежинка Коха

Задание 14. Вычислить фрактальную размерность ковра Серпинского.

Задание 15. Разработать аналог трехмерного ковра Серпинского – так называемой губки Серпинского и вычислить хаусдорфovu размерность.

Задание 16. Разработать алгоритм геометрического построения снежинки Коха в произвольном математическом пакете.

5.2. Критерии регулярности, странности и хаотичности аттракторов

До открытия детерминированного хаоса было известно три типа устойчивых установившихся решений для динамической системы: состояние равновесия, устойчивое периодическое решение и устойчивое квазипериодическое (почти периодическое) решение. Для первых двух перечисленных решений соответствующие аттракторы, представляющие собой точку равновесия и предельный цикл, были описаны выше. Аттрактором же квазипериодического решения является предельный n -мерный тор.

Приведем простой пример предельного тора для системы с двумя степенями свободы, для которой тор является также конфигурационным пространством. Пусть мы рассматриваем вращательные движения свободного двойного маятника, у которого медленно укорачивается одно из звеньев (либо оба звена). Если звенья имеют постоянную длину, то имеет место периодическое движение и фазовая траектория будет замкнутой кривой в тороидальном пространстве (рис. 40): точка на торе соответствует каким-то двум значениям углов отклонения звеньев двойного маятника, поэтому тор – геометрическое место всевозможных состояний маятника, т.е. конфигурационное пространство.

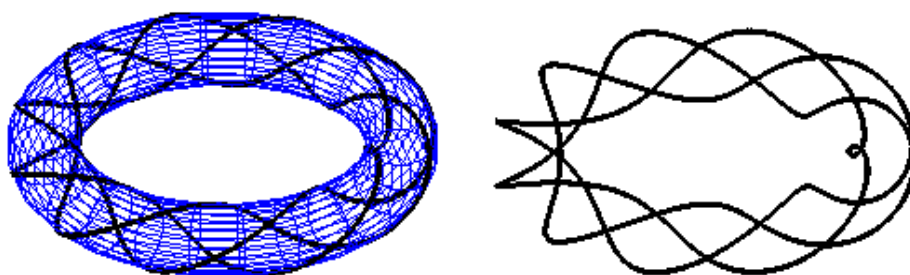


Рис. 40. Периодическое движение на торе

Отметим здесь, что хорошо видны следующие особенности изображения гладкой пространственной кривой на плоскости (рис. 40): появляются так называемые петли и ласточкины хвосты (в терминологии Арнольда В.И.).

Если же длина одного из звеньев медленно уменьшается, то, по крайней мере, будет увеличиваться одна из частот вращения звеньев и в этом случае фазовая траектория не будет замкнутой. В этом случае на

бесконечном интервале времени траектория пройдет все точки конфигурационного пространства и «закрасит» его целиком (рис. 41). Это явление также называют эргодическим движением. Здесь, определенно, понятен тот смысл, что тор оказывается предельным множеством для всех квазипериодических движений – т.е. аттрактором.

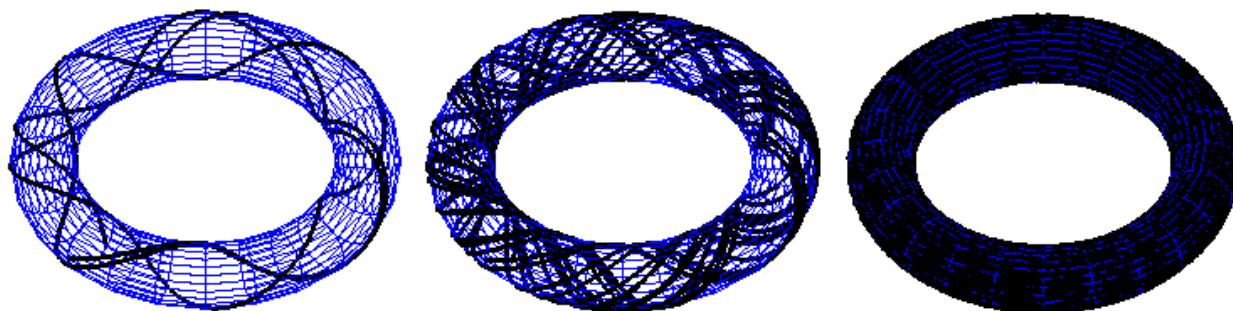


Рис. 41. Квазипериодическое эргодическое движение. Эргодический тор

Листинг расчетного модуля MAPLE

построения периодического и эргодического торов (рис. 40, 41):

```
> with(plots):
> pic1:=plot3d([(10+2*cos(phi))*cos(theta),
(10+2*cos(phi))*sin(theta),2*sin(phi)], theta=0..6.28,
phi=0..6.28,style=WIREFRAME, color=blue, thickness=1):pic1;
> epsilon:=0.1:
> pic2:=spacecurve([(10+2*cos((10+epsilon*t)*t))*cos(3*t),
(10+2*cos((10+epsilon*t)*t))*sin(3*t),
2*sin((10+epsilon*t)*t)],
t=0..10*Pi, thickness=3,numpoints=1000,color=black):pic2;
> display(pic1,pic2);
```

Задание 17. Записать уравнения свободного вращения двойного маятника с медленно меняющимися по линейным законам длинами звеньев, провести интегрирование и построение фазовых траекторий в конфигурационном пространстве.

Если спектр характеристических показателей Ляпунова (см. парагр. 3.2) фазовой траектории на аттракторе содержит только нулевые и отрицательные показатели, аттрактор называют *регулярным*.

Наравне с периодическими и квазипериодическими решениями диссипативной динамической системы, отмеченными выше, возможны также непериодические решения, которые могут, в том числе, соответствовать *хаотическим* аттракторам сложной геометрической структуры.

Хаотическими аттракторами называют такие аттракторы, на которых решения имеют, по крайней мере, один положительный показатель Ляпунова. В этом случае решения демонстрируют экспоненциальную неустойчивость близких траекторий на аттракторе – говорят, что в системе присутствует так называемое *перемешивание*.

Задание 18. Показать, что рассмотренные в парагр. 4.2-4.4 аттракторы Хенона, Лози и Лоренца, являются хаотическими.

Указание: На основе формул (3.4) или (3.5) построить необходимый алгоритм в математическом пакете и численно вычислить положительные показатели Ляпунова соответствующих решений на аттракторах (решений взятых вблизи аттракторов из их бассейнов притяжения – они быстро притянутся и «встанут» на аттрактор).

Наличие у решения на аттракторе положительных показателей Ляпунова может приводить к дробной фрактальной размерности аттрактора. Так, для определения хаусдорфовской размерности ранее была указана формула (5.2). Использование этой формулы напрямую для вычисления размерности аттрактора весьма затруднительно, поэтому фрактальную размерность аттрактора оценивают (оценка снизу) по известной формуле Каплана-Йорка [1, 5]:

$$D_L = j + \left(\sum_{i=1}^j \lambda_i \right) / |\lambda_{j+1}|, \quad (5.4)$$

где j – наибольшее целое число, для которого сумма ляпуновских показателей из спектра Ляпунова $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j \geq 0$. Порядок нумерации показателей Ляпунова соответствует порядку в спектре Ляпунова, т.е. по мере убывания значений показателей (см. парагр. 3.2). Размерность, вычисляемая по формуле (5.4), называется *ляпуновской размерностью*. Если применить формулу (5.4) для вычисления размерности регулярных аттракторов, то получим:

1. Устойчивое положение равновесия: все характеристические показатели отрицательны и, следовательно, $D_L = 0$.

2. Предельный цикл: один показатель равен нулю, остальные – отрицательны, следовательно $j = 1$, $D_L = 1$.

3. N -мерный тор: n первых показателей нулевые, остальные отрицательны, следовательно $j = n$, $D_L = n$.

Таким образом, ляпуновская размерность для регулярных аттракторов совпадает с их метрической размерностью, т.е. регулярные аттракторы всегда имеют простую геометрическую структуру, при этом решения вдоль них являются асимптотически устойчивыми.

Если ляпуновская (фрактальная) размерность аттрактора принимает дробные значения, то такой аттрактор, соответствующий сложной фрактальной геометрической структуре, называют *странным*.

Ситуация, связанная с хаотическими аттракторами представляется еще более богатой и требует введения еще одного критерия классификации – оценки так называемой *грубой гиперболичности аттрактора*. Укажем сначала требования гиперболичности:

1. Аттрактор должен состоять из непрерывного набора неустойчивых кривых (или листов), всюду плотных на аттракторе, вдоль которых близкие фазовые траектории экспоненциально расходятся.
2. В окрестности любой своей точки аттрактор должен обладать сложной геометрической фрактальной структурой (канторово множество в прямом произведении на непрерывный интервал).
3. Аттрактор должен иметь окрестность в виде расщепленных устойчивых слоев, вдоль которых близкие к аттрактору траектории притягиваются к нему.

Требование *грубости* гиперболичности означает, что при малых возмущениях (малом шевелении фазового портрета) требования гиперболичности не нарушаются, т.е. бифуркаций быть не должно.

В реальных системах естествознания грубых гиперболических аттракторов пока не обнаружено – это идеальная модель детерминированного хаоса. Даже странный аттрактор Лоренца, который сам по себе является образом детерминированного хаоса, не удовлетворяет условию 2 гиперболичности. Однако существуют динамические системы, аттракторы которых близки по структуре и свойствам к гиперболическим. Такие ат-

тракторы являются хаотическими, не включают устойчивых регулярных траекторий и сохраняют эти свойства при малых возмущениях. В этом случае изменения в структуре аттрактора по сравнению с гиперболическим настолько незначительны, что не отражаются в измеряемых экспериментально характеристиках. Такие почти гиперболические аттракторы называют *квазигиперболическими*. К квазигиперболическим аттракторам относятся, например, аттракторы Лоренца и Лози (рассмотрены в парагр. 4.3 и 4.4).

Если имеет место сильное нарушение условий гиперболичности, то аттракторы называют *негиперболическими* или просто *квазиаттракторами*. Квазиаттракторы характеризуются одновременным сосуществованием счетного множества различных хаотических и регулярных притягивающих подмножеств в ограниченном элементе объема фазового пространства, что в итоге приводит к сложнейшей структуре бассейнов притяжения, в том числе возможна фрактальная структура бассейнов. Более того, при различных возмущениях возможны целые каскады бифуркаций хаотических и регулярных подмножеств опять же с соответствующей перестройкой бассейнов их притяжения. Причинами существования квазиаттракторов являются сильные нарушения гиперболичности за счет эффектов гомоклинического касания устойчивых и неустойчивых многообразий седловых траекторий (см. парагр. 3.1), возникновения петель сепаратрисы седло-фокуса. Примером квазиаттрактора является аттрактор Хенона (см. парагр. 4.2), который характеризуется сложной структурой бассейнов притяжения к каждой «ветке» аттрактора Хенона.

Задание 19. Провести возможно более полный анализ структуры бассейнов притяжения аттрактора в системе Хенона.

Выше было отмечено, что если на аттракторе *есть перемешивание*, т.е. экспоненциальная неустойчивость соседних фазовых траекторий, то *аттрактор является хаотическим*, а если аттрактор *имеет дробную фрактальную размерность*, то – *странным*. Совместимы ли хаотичность и странность аттракторов, могут ли они быть только вместе или возможны различные их сочетания? Результаты последних исследований в области динамических систем и детерминированного хаоса показывают, что воз-

можно произвольные сочетания. Так, аттракторы могут быть странными хаотическими, хаотическими нестранными, странными нехаотическими:

I. Странный хаотический аттрактор (СХА). СХА имеет дробную фрактальную размерность, при этом индивидуальные фазовые траектории на аттракторе экспоненциально неустойчивы.

II. Странный нехаотический аттрактор (СНА). СНА имеет сложную геометрическую структуру с дробной фрактальной размерностью, но индивидуальные фазовые траектории на нем устойчивы по Ляпунову. Перемешивание отсутствует.

III. Хаотический нестранный аттрактор (ХНА). ХНА имеет простую (регулярную) геометрическую структуру с целой метрической размерностью, но индивидуальные фазовые траектории на аттракторе экспоненциально неустойчивы.

Примерами СХА являются и аттракторы Лоренца, Хенона и Лози, хотя они сами различаются по своей принадлежности к квазигиперболическим аттракторам и негиперболическим квазиаттракторам.

Пример ХНА. Приведем теперь пример хаотического нестранного аттрактора в модифицированном отображении Арнольда:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= (x_n + y_n + \delta \cos 2\pi y_n) \bmod 1, \\y_{n+1} &= (x_n + 2y_n) \bmod 1,\end{aligned}\tag{5.5}$$

где операция $a \bmod b$ означает взятие остатка от деления a на b . В случае (5.5), таким образом, берется просто дробная часть числа (остаток от деления на единицу). Отображение (5.5) отображает единичный квадрат $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ на самого себя. Любая точка квадрата посредством этого отображения посетит каждую точку квадрата, поэтому ее движение является эргодическим (квадрат – развертка тора). Естественно, фазовый объем при отображении не увеличивается, следовательно, система, по крайней мере, «близка» к диссипативной (в [5] указано, что при $\delta < \frac{1}{2\pi}$ имеет место диссипативное отображение). Можно, таким образом, считать, что квадрат – есть аттрактор. Фрактальная размерность аттрактора совпадает с

метрической размерностью обычной плоской фигуры ($D=2$) и является целой, поэтому *аттрактор нестранный*.

Оценим величины показателей Ляпунова для решения на аттракторе. Вычислим матрицу Якоби и найдем ее собственные числа:

$$J(n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 - 2\pi\delta \sin 2\pi y_n \\ 1 & 2 \end{vmatrix},$$

$$\mu_{1,2}(n) = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5 - 8\pi\delta \sin 2\pi y_n}}{2}. \quad (5.6)$$

Из собственных чисел (5.6) следуют следующие их оценки:

$$\mu_{1,2}^{\sup} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5 + 8\pi\delta}}{2}, \quad \mu_{1,2}^{\inf} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5 - 8\pi\delta}}{2}. \quad (5.7)$$

Из формулы (3.5.1) можно получить следующую оценку для показателей Ляпунова:

$$\lambda_{1,2} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |\mu_{1,2}(k)| > \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |\mu_{1,2}^{\inf}| = \ln |\mu_{1,2}^{\inf}|;$$

$$\lambda_{1,2} > \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5 - 8\pi\delta}}{2}. \quad (5.8)$$

При $\delta \leq \frac{5}{8\pi}$ исключаются возможные «нюансы» с комплексными значениями и в силу (5.8) очевидно, что существует, по крайней мере, один положительный показатель Ляпунова:

$$\lambda_1 > \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5 - 8\pi\delta}}{2} > 0,$$

т.е. *аттрактор является хаотическим*.

Таким образом, аттрактор Арнольда имеет простую геометрическую структуру с целой метрической размерностью и при этом является хаотическим, следовательно, это *хаотический нестранный аттрактор* (ХНА).

На рис. 42 представлена динамическая картина движения точек по аттрактору: видны «волны уплотнения» в распределении точек по квадрату. Хотя плотность распределения точек по аттрактору неравномерна, она не является нулевой ни в одной точке квадрата.

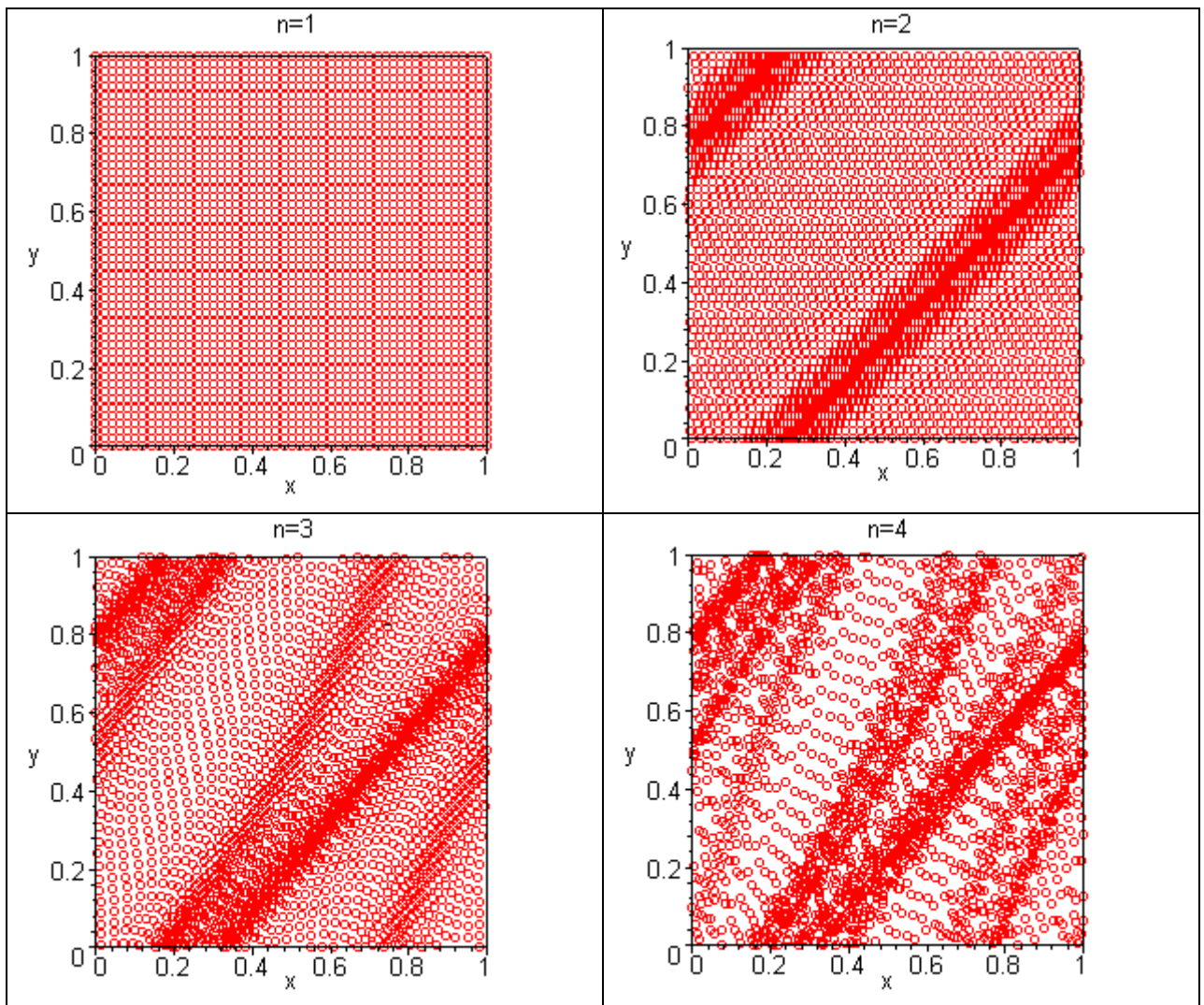


Рис. 42. Динамика распределения точек по аттрактору Арнольда

*Листинг расчетного модуля MAPLE
 построения эргодического движения фазовой точки
 по аттрактору Арнольда (рис. 42):*

```
> restart;
> delta:=0.1:
> Arnold:=proc(x0,y0,n) local i,x,y;
  x[1]:=x0;y[1]:=y0;
  for i from 1 by 1 to n do
    x[i+1] := frac((x[i]+y[i]+delta*cos(2*3.1415*y[i]))/1 );
    y[i+1] := frac((x[i]+2*y[i])/1);
  end do:
  [[x[j],y[j]] $j=1..n];
end proc:
> Arnold(0,0,10):
> FF:=proc(t)local P;
P:=seq(seq(plot(Arnold(p/50,q/50,5)[round(t)], x=0..1,
```

```

y=0..1,style=point, symbol=circle),p=0..50),q=0..50):
plots[display](P);
end proc:
> plots[animate](FF,[t],t=1..5,frames=5);

```

Пример СНА. В заключение настоящего пункта приведем пример странного нехаотического аттрактора в следующей динамической системе:

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= 2\delta \tanh(x_n) \cos 2\pi y_n, \\
 y_{n+1} &= (\omega + y_n) \bmod 1,
 \end{aligned}
 \tag{5.9}$$

где δ и ω – константы.

При $\delta > 1$ отображение (5.9) имеет аттрактор (рис. 43). Аттрактор, как видно, обладает сложной геометрической структурой и, следовательно, дробной фрактальной размерностью, т.е. является *странным*. Аттрактор является *нехаотическим*.

Задание 20. Доказать, что аттрактор в системе (5.9) является нехаотическим.

Таким образом, имеет место *странный нехаотический аттрактор* (СНА).

Листинг расчетного модуля MAPLE

построения картины динамики притяжения точек к СНА (рис. 43):

```

> restart;
> delta:=1.5;omega:=1:
> SNA:=proc(x0,y0,n) local i,x,y;
  x[1]:=x0;y[1]:=y0;
  for i from 1 by 1 to n do
    x[i+1] := 2*delta*tanh(x[i])*cos(2*3.1415*y[i]);
    y[i+1] := frac((omega+y[i])/1);
  end do:
[[[x[j],y[j]]] $j=1..n];
end proc:
> FF:=proc(t)local P;
P:=seq(seq(plot(SNA(p/10,q/60,10)[round(t)], x=-4..4,
y=0..1,style=point, symbol=circle),p=-30..30),q=0..60):
plots[display](P);
end proc:
> plots[animate](FF,[t],t=1..10,frames=10);

```

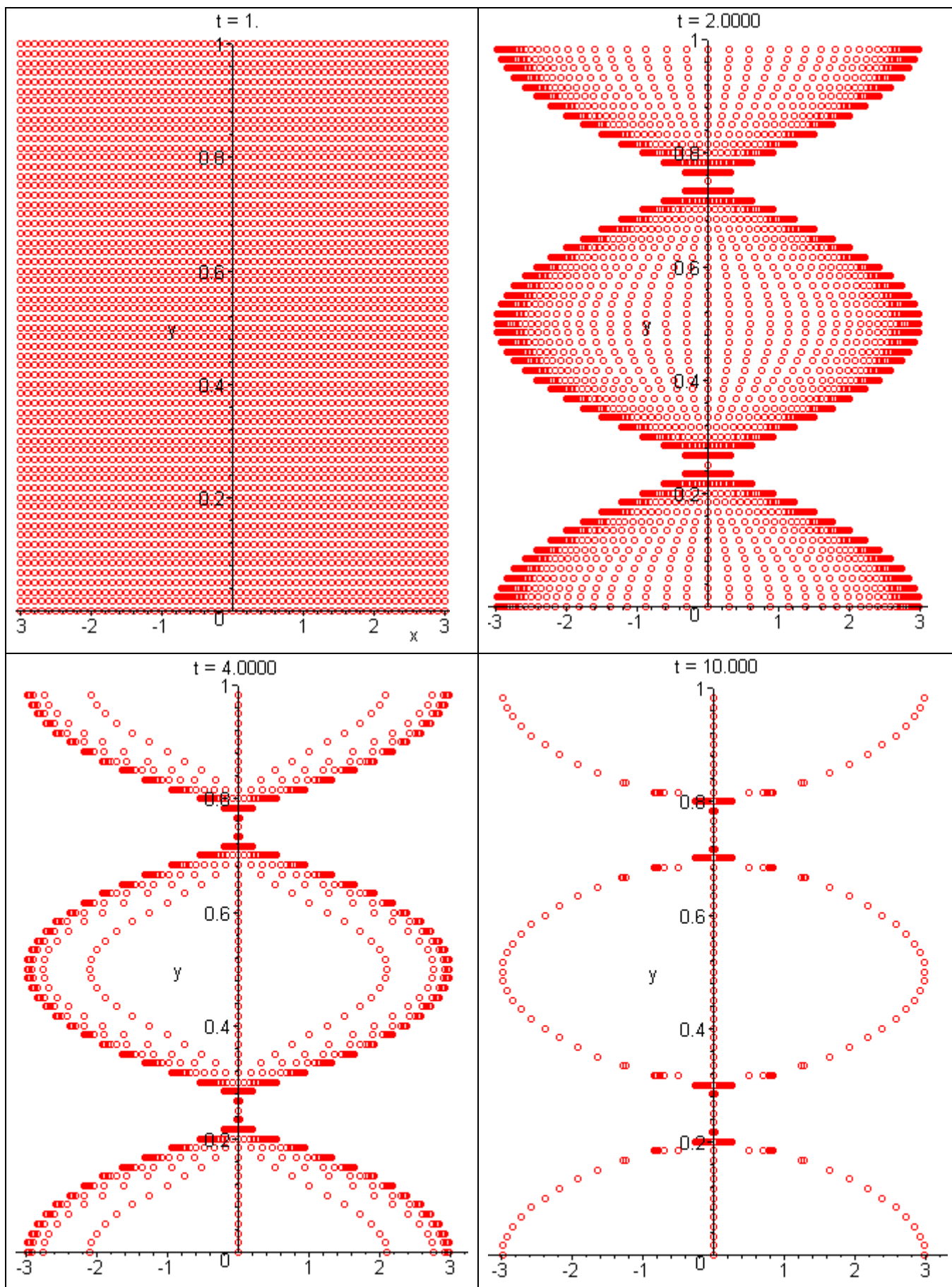


Рис. 43. Динамика притяжения точек к СНА и сам аттрактор

Задание 21. Определить, к какому типу относится аттрактор Ресслера в системе (4.7).

5.3. Сценарии развития хаоса

При изменении параметров динамической системы проявляются ее нелинейные свойства. С ростом нелинейности происходит усложнение динамического режима. Простые аттракторы в системе сменяются все более сложными, а при определенных условиях нелинейности приводят к возникновению динамического (детерминированного) хаоса. Анализ изменения параметров системы позволяет наблюдать последовательность бифуркаций, в результате которой формируется хаотический аттрактор. Такие типичные бифуркационные последовательности называются *бифуркационными механизмами* (или *сценариями*) *развития хаоса* [5]. Отметим, что сценарии перехода к хаосу не зависят от вида оператора эволюции и являются *универсальными* для всех динамических систем.

5.3.1. Последовательность бифуркаций удвоения периода.

Сценарий Фейгенбаума

Первый сценарий перехода от регулярного поведения динамической системы к нерегулярному был предложен Л.Д. Ландау и Э.Хопфом в связи с попыткой объяснить возникновение турбулентности жидкости с ростом числа Рейнольдса (с уменьшением вязкости). Сценарий Ландау-Хопфа состоит в последовательности бифуркаций, каждая из которых рождает новую несоизмеримую частоту колебаний. В результате возникает многочастотный квазипериодический режим, соответствующий многомерному тору в фазовом пространстве системы. Если число бифуркаций и возникших новых частот велико, то спектр частот системы становится неотличим от сплошного.

Последовательность бифуркаций удвоения периода очень похожа на сценарий Ландау-Хопфа и предусматривает бифуркации предельных циклов, при которых цикл удваивает (на самом может быть не кратное 2 увеличение) свой период колебаний. После бесконечной последовательности таких бифуркаций возникают субгармоники с какими угодно значениями частот ($2\pi/T_i$) и спектр становится сплошным, как в хаотической системе. В итоге возникают апериодические колебания, неустойчивые по Ляпунову.

Этим колебаниям соответствует странный аттрактор в фазовом пространстве системы.

Теория перехода к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода была развита на базе одномерных моделей М. Фейгенбаумом, поэтому этот сценарий получил название *сценария Фейгенбаума*.

Простейшей моделью, в которой реализуется сценарий Фейгенбаума, является логистическое отображение, приведенное к следующему виду:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n). \quad (5.10)$$

При изменении параметра r происходит последовательный каскад бифуркаций, в которых из неподвижной точки отображения (цикл периода 1) рождаются повторяющиеся серии движения фазовой точки по орбитам, состоящим из двух (после первой бифуркации) неподвижных точек – цикл периода 2, затем из четырех (после второй бифуркации) точек – цикл периода 4 и т.д.

На рис. 44 представлена диаграмма, описывающая возникновение циклов периода $n \rightarrow \infty$ при движении параметра к значению $r = 4$. Диаграмма носит имя Фейгенбаума, а также называется деревом Фейгенбаума.

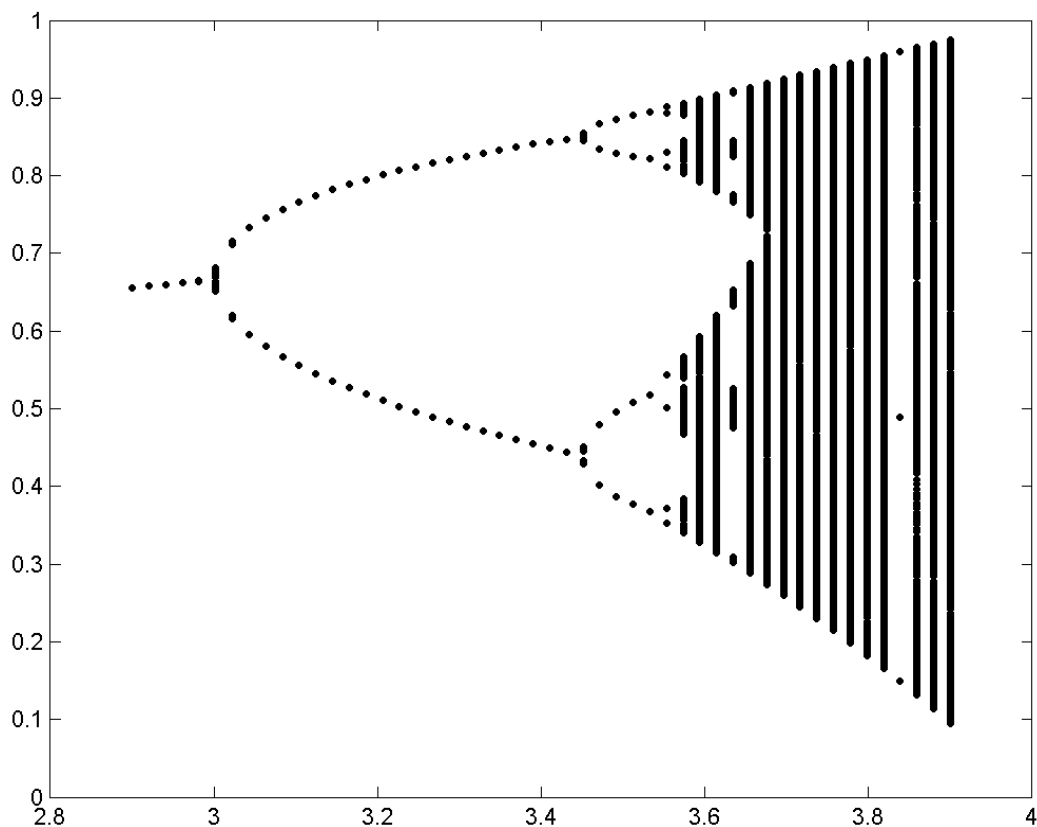


Рис. 44. Диаграмма Фейгенбаума

Листинг файла-сценария MATLAB построения диаграммы Фейгенбаума удвоения периодов (рис.44).

```
r_start=2.9; r_finish=4; nn=200; pre=100; all=5000;
x0=1-1/r_start; dr=(r_finish-r_start)/(nn-1); n=0;
for r=r_start: dr: r_finish
for i=1: pre x0=r*x0*(1-x0); end;
for i=1: all n=n+1; lt_r(n)=r;
x0=r*x0*(1-x0); lt_x(n)=x0; end; end;
plot(lt_r,lt_x,'.k')
```

Из диаграммы видно, что с ростом параметра r возникают сложные циклы, состоящие практически из сплошных областей. Можно говорить о частотах движения фазовой точки по таким циклам как по «прыжковым» орбитам, когда точка после серии прыжков вновь появится на исходной точке. Частот таких циклов по мере роста параметра все больше и больше и, в итоге, они образуют сплошной спектр. То есть теоретически появится цикл с бесконечным периодом, когда фазовая точка вернется в исходную позицию через бесконечное число прыжков, т.е. никогда.

5.3.2. Жесткий переход к хаосу. Перемежаемость

Исследования сценариев хаотизации показали, что возможен скачкообразный переход к хаосу, происходящий в результате одной бифуркации в системе. Такой механизм назван *жестким*. Такой механизм сопровождается явлением, называемым *перемежаемость*, когда во времени чередуются режимы почти регулярных колебаний (ламинарная фаза) и режимы хаотического поведения (турбулентная фаза). Подобные бифуркационные сценарии получили название сценариев Помо-Манневиля.

Примером системы с жестким переходом к хаосу может служить известная система Лоренца при неклассических значениях параметров, отличных от (4.6):

$$r = 166.1, \quad \sigma = 10, \quad b = 8/3. \quad (5.11)$$

В этом случае получаем результаты интегрирования (рис. 45) системы Лоренца и фазовый портрет (рис. 46).

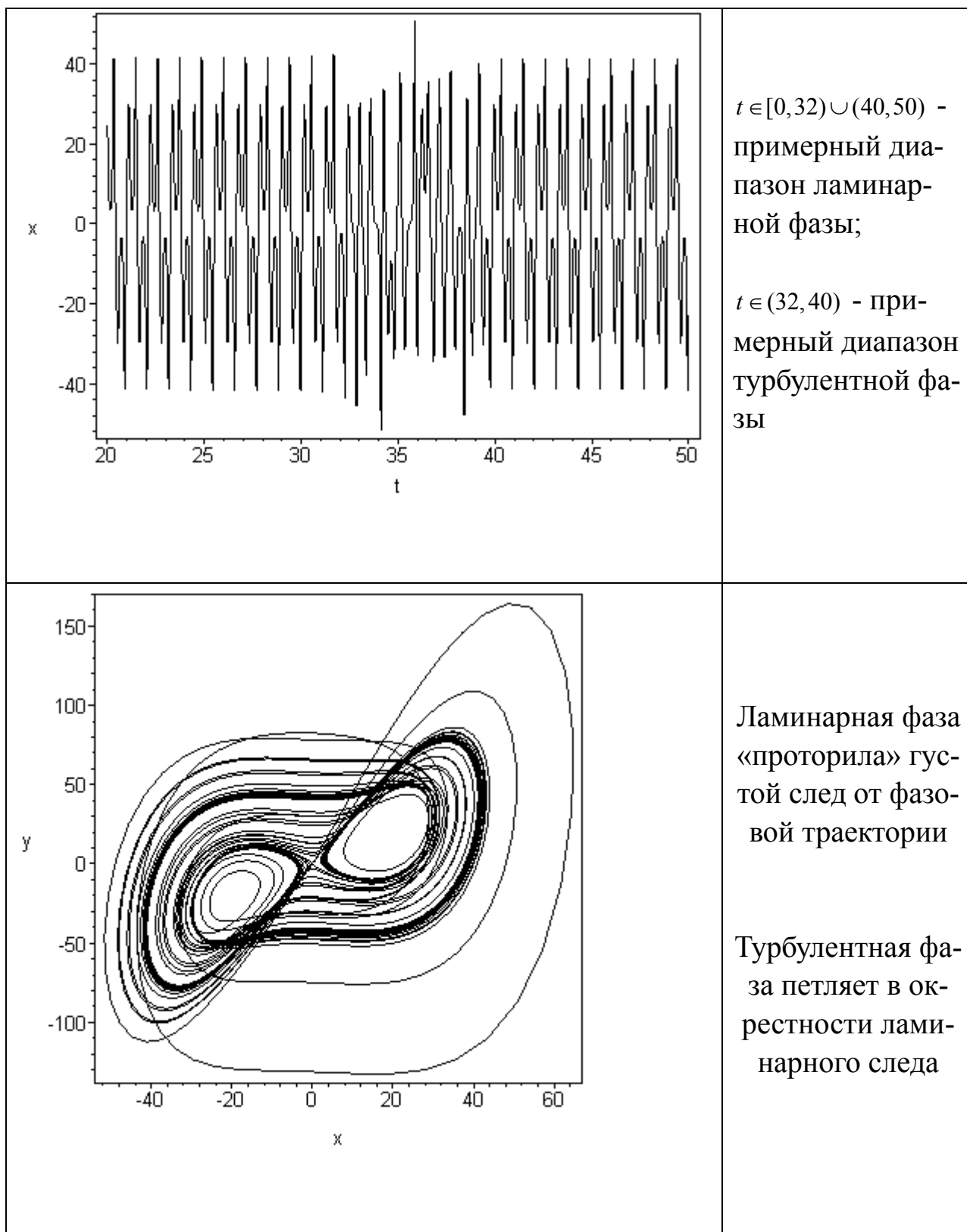


Рис.45,а. Перемежаемость в системе Лоренца

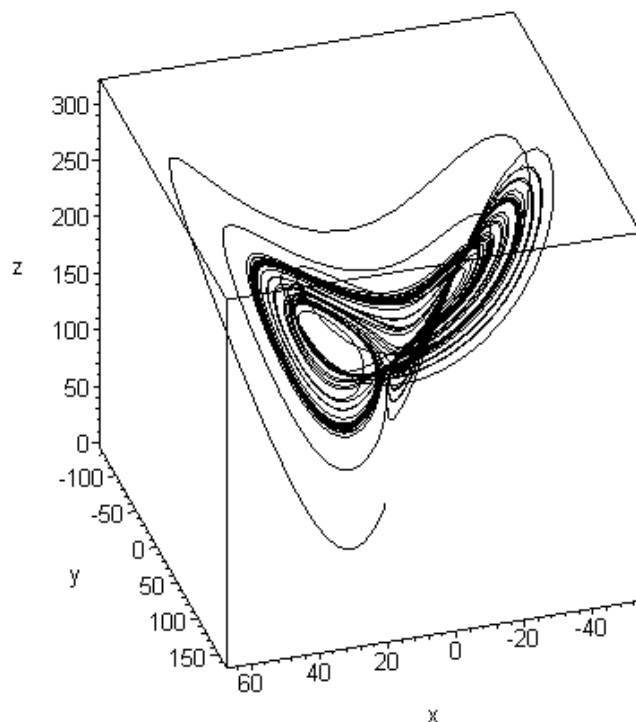


Рис. 45,б. Фазовый портрет системы Лоренца при перемежаемости

Если немного изменить параметры (5.11):

$$r = 166, \quad \sigma = 10, \quad b = 8/3, \quad (5.12)$$

то произойдет бифуркация гибели перемежаемости и останется практически только ламинарная фаза, а хаос исчезнет (рис. 46).

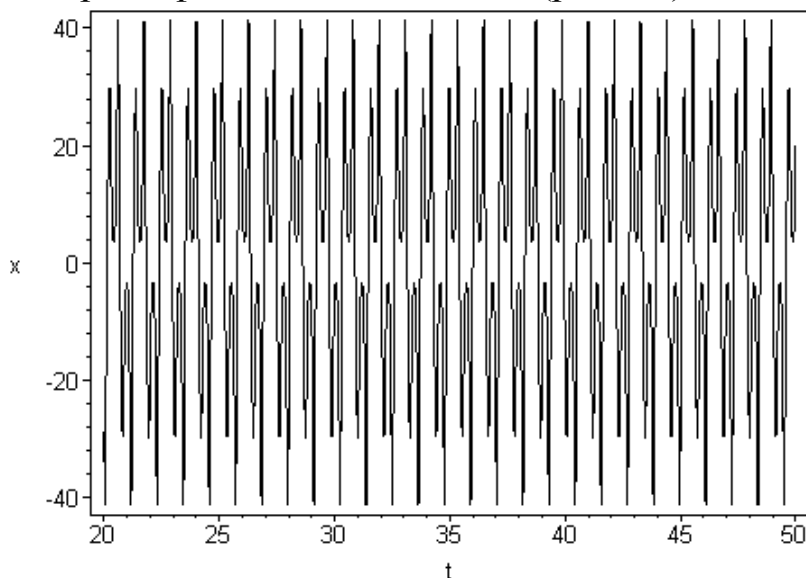


Рис. 46. Гибель перемежаемости в системе Лоренца

Интересен также случай, когда турбулентная фаза разрушается после некоторого момента времени и наступает фаза вполне детерминированных затухающих колебаний. Этот процесс может возникать в системе Лоренца, например, при $r = 22$ (рис. 47). Такую ситуацию называют «метастабильный хаос» [17].

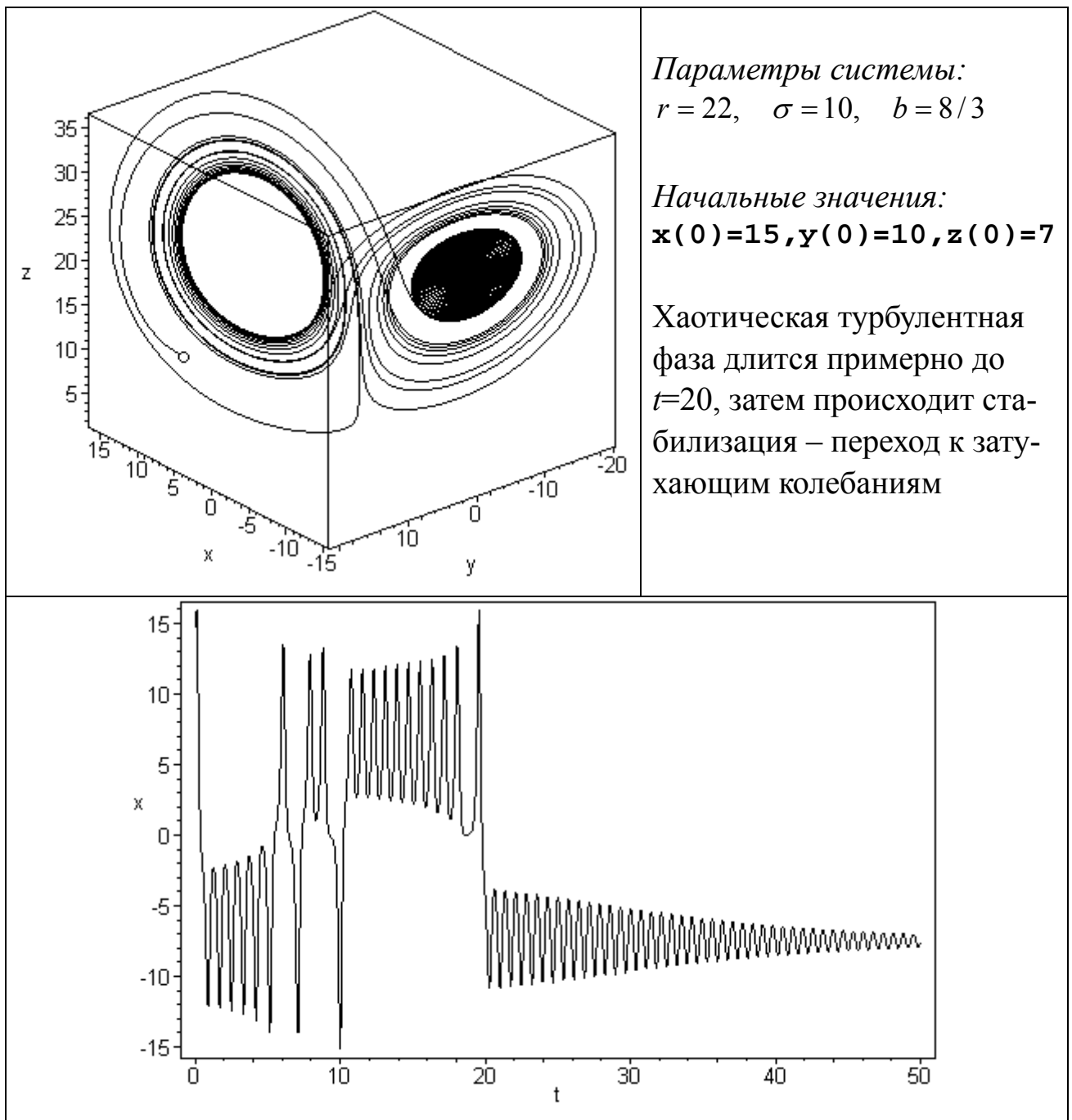


Рис. 47. Метастабильный хаос в системе Лоренца

Задание 22. Самостоятельно получить рис. 45-47 и максимально полно изучить спектральные особенности системы Лоренца при перемежаемости и метастабильном хаосе на основе алгоритма, описанного в пункте 4.4.

5.3.3. Переход к хаосу через разрушение двухчастотных колебаний. Тор-хаос

Согласно сценарию Рюэля-Тakensа переход от квазипериодического движения к хаосу происходит после *рождения третьей частоты*, когда на трехмерном торе становится возможным появление неустойчивых по

Ляпунову хаотических траекторий. Однако исследования показали, что не менее типичным является переход к хаосу через *разрушение двухчастотного квазипериодического движения*. При этом должен разрушиться двумерный тор в фазовом пространстве, после чего траектории попадают на множество с фрактальной размерностью $2+d$, $d \in [0,1]$, образующееся в окрестности тора. Это фрактальное множество называют *тор-хаосом*.

Рассмотренные выше сценарии перехода к хаосу являются типичными в том смысле, что наблюдаются для широкого класса динамических систем. Возможны ли другие механизмы хаотизации – должны ответить дальнейшие исследования теории динамических систем и детерминированного хаоса.

6. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ И ХАОТИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ СЕЧЕНИЯ ПУАНКАРЕ

Одним из мощных инструментов для исследования сложных многомерных фазовых пространств динамических систем является так называемое отображение Пуанкаре, также называемое сечением Пуанкаре, либо отображением последования. Идея отображения Пуанкаре состоит в сведении фазового потока к дискретному двумерному отображению плоскости на себя. Если говорить проще, то при сечении Пуанкаре происходит следующее:

1. Выбирается некоторая гиперплоскость, называемая плоскостью Пуанкаре $\Lambda : ax + by + cz + \dots + eu + gv = 0$, в фазовом пространстве системы $\{x, y, z, \dots, u, v\}$. Если фазовое пространство трехмерно, то плоскость Пуанкаре – это обычная плоскость.
2. На плоскости Пуанкаре строится стартовая точка, соответствующая начальным условиям фазовой траектории.
3. Далее, в процессе эволюции динамической системы (по заданным дифференциальным либо дискретным, либо другим уравнениям) фазовая траектория будет "протыкать" выбранную плоскость Пуанкаре и формировать серию точек "проколов".
4. Эта последовательность точек "проколов" и есть геометрическое изображение сечения Пуанкаре (рис. 48).

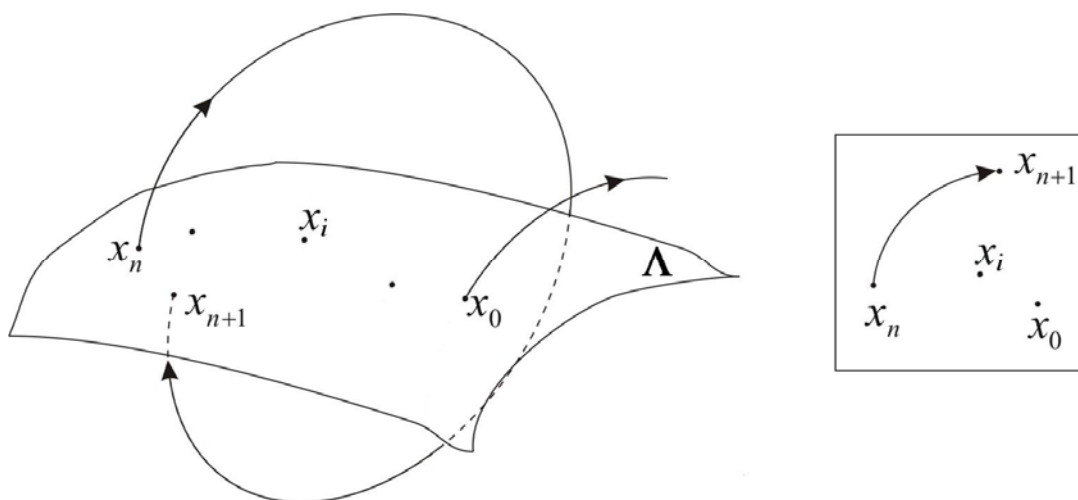


Рис.48. *Отображение Пуанкаре*

Отображение Пуанкаре также можно строить как дискретную последовательность фазовых точек в определенном сечении фазового пространства, когда на этих фазовых точках выполняется определенное условие. Например, это можно делать следующим образом: сначала численно интегрируется динамическая система и тем самым определяется фазовая траектория; далее на этой фазовой траектории ищутся те точки, на которых выполняется некоторое условие; найденные точки изображаются в системе координат, соответствующей выбранному сечению фазового пространства. Таким образом, в последнем алгоритме сечения Пуанкаре секущая плоскость заменяется "секущим условием".

Отображение Пуанкаре сопоставляет каждой точке x_n ее последовательную итерацию x_{n+1} , принадлежащую той же фазовой траектории. Это отображение, вообще говоря, определено локально вблизи некоторого периодического решения, т.к. при действии фазового потока точка может сойти с секущей плоскости и больше никогда на нее не вернуться.

Отметим, что в сечении Пуанкаре точки могут ложиться на регулярные кривые (замкнутые и незамкнутые), что также говорит о регулярности исходного решения, а могут, наоборот, заполнять какие-либо области без определенного порядка, что, вообще говоря, свидетельствует о хаотическом поведении решения.

Приведем далее пример построения отображения Пуанкаре для анализа движения механической системы соосных тел, образований двумя твердыми телами, вращающимися относительно общей продольной оси (рис. 49) [11, 12].

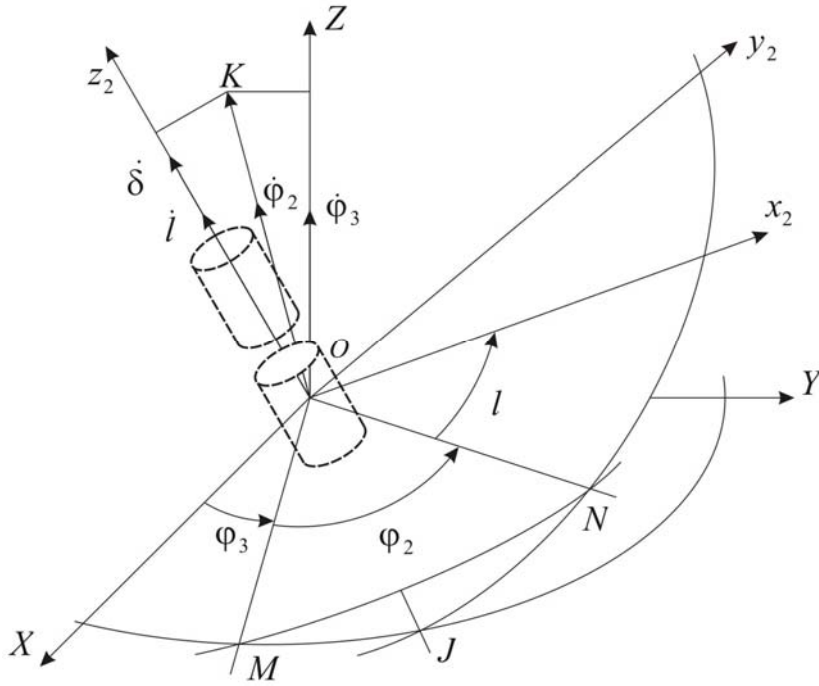


Рис. 49. Соосные тела и переменные Андуайе-Депри

Будем использовать для описания ее движения известные из курса динамики твердого тела переменные Андуайе-Депри [10]. Динамика системы двух соосных тел описывается восьмью параметрами и поэтому фазовое пространство восьмимерно: имеется четыре координаты (угловые координаты) $l, \varphi_2, \varphi_3, \delta$ и соответствующие им четыре импульса L, I_2, I_3, Δ .

Не вдаваясь в подробности, укажем лишь Гамильтониан свободной системы соосных тел в переменных Андуайе-Депри [12], позволяющий явно выписать уравнения Гамильтона (1.3):

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2((A_1 \sin^2 \delta + B_1 \cos^2 \delta + B_2)(A_1 \cos^2 \delta + B_1 \sin^2 \delta + A_2) - (A_1 - B_1)^2 \sin^2 \delta \cos^2 \delta)} \times \\
 & \times \left\{ A_1(I_2^2 - L^2) \left[(A_1 \sin^2 \delta + B_1 \cos^2 \delta + B_2) \sin l \cos \delta - (A_1 - B_1) \sin \delta \cos^2 \delta \cos l + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (A_1 \cos^2 \delta + B_1 \sin^2 \delta + A_2) \cos l \sin \delta - (A_1 - B_1) \sin^2 \delta \cos \delta \sin l \right]^2 + \right. \quad (6.1) \\
 & + B_1 \left[(I_2^2 - L^2)(A_1 \cos^2 \delta + B_1 \sin^2 \delta + A_2) \cos l \cos \delta - (A_1 - B_1) \sin \delta \cos^2 \delta \sin l - \right. \\
 & \left. - (A_1 \sin^2 \delta + B_1 \cos^2 \delta + B_2) \sin l \sin \delta - (A_1 - B_1) \sin^2 \delta \cos \delta \cos l \right]^2 + \frac{\Delta^2}{C_1} + \\
 & + A_2(I_2^2 - L^2) \left[(A_1 \sin^2 \delta + B_1 \cos^2 \delta + B_2) \sin l - (A_1 - B_1) \sin \delta \cos \delta \cos l \right]^2 + \\
 & \left. + B_2(I_2^2 - L^2) \left[(A_1 \cos^2 \delta + B_1 \sin^2 \delta + A_2) \cos l - (A_1 - B_1) \sin \delta \cos \delta \sin l \right]^2 + \frac{(L - \Delta)^2}{C_2} \right\},
 \end{aligned}$$

где A_i , B_i , C_i – моменты инерции соосного тела i ($i=1, 2$). Из (6.1) видно, что в случае динамической симметрии тела-ротора ($i=1$), когда $A_1=B_1$, гамильтониан системы существенно упрощается и перестает быть зависимым от угла δ . Из общей теории гиростата известно, что в случае динамической симметрии тела-ротора система является *интегрируемой*, что означает возможность получения решений для всех переменных в квадратурах, выражаемых в явных однозначных функциях времени (в нашем случае в эллиптических функциях и интегралах) [12, 10]. В случае интегрируемости система обладает, так сказать, обычным фазовым портретом, который может иметь хотя и сложную структуру, но все его области и фазовые траектории являются отделимыми, а через любую точку портрета проходит только одна фазовая траектория. Например, для системы соосных тел с симметричным телом-ротором ($A_1=B_1=5$) имеет место следующий портрет (рис. 50) для угла l и соответствующего импульса L . При построении портрета для нормировки величины импульса и отражения периодичности угла мы перешли [10] от фазового пространства $\{l, L\}$ к структурно эквивалентному пространству $\{l \bmod 2\pi, L/I_2\}$. Используемые для построения портрета параметры системы и начальные условия можно найти в последующем ниже листинге сценария MATLAB.

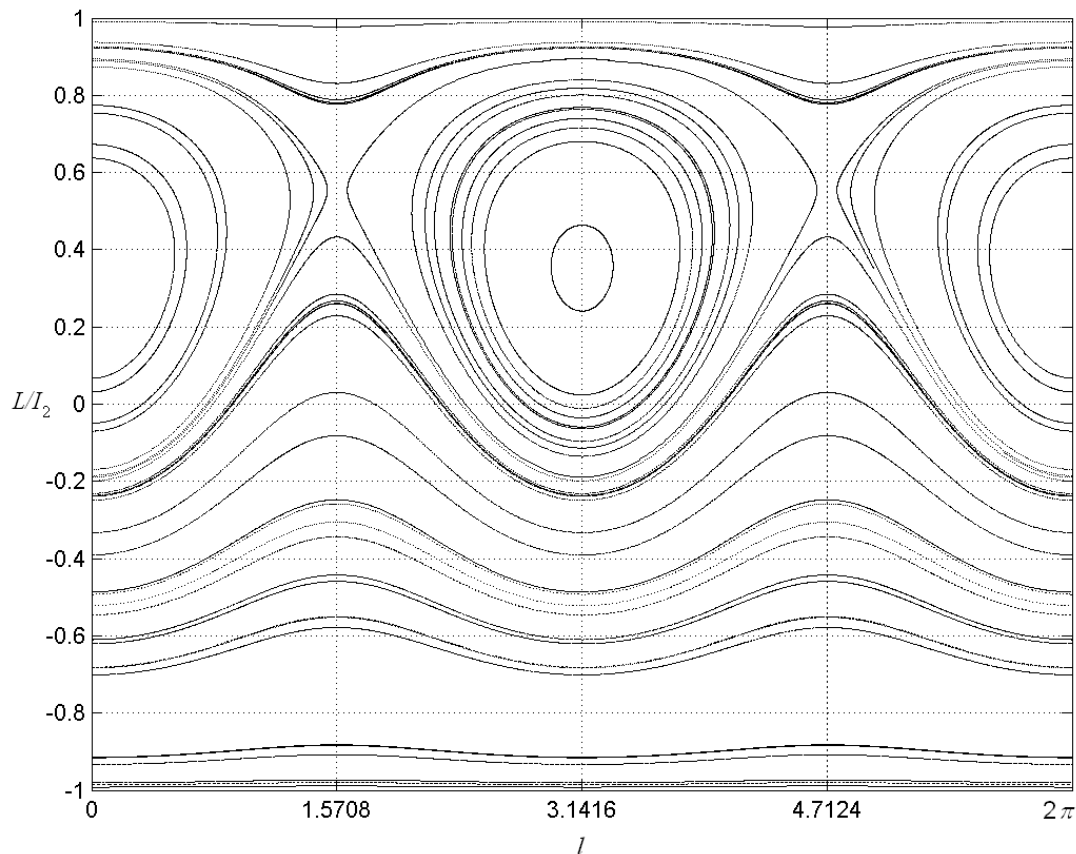
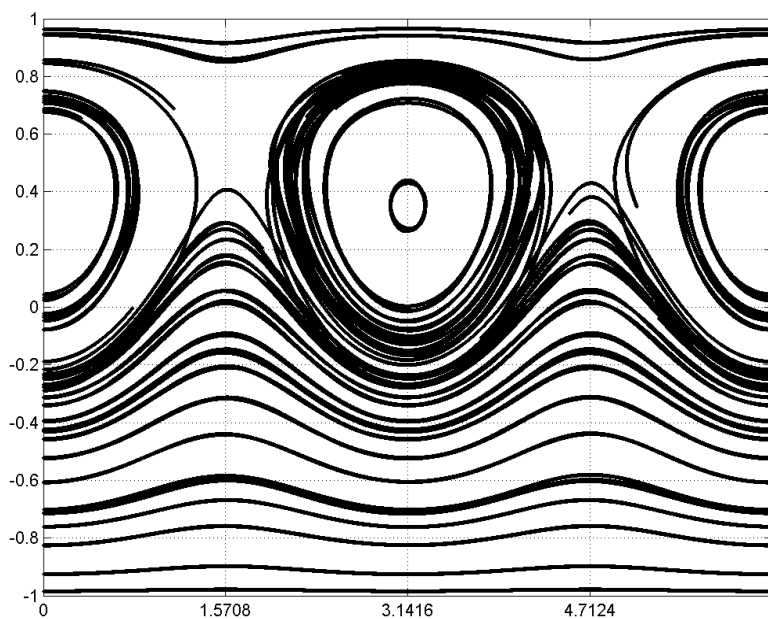
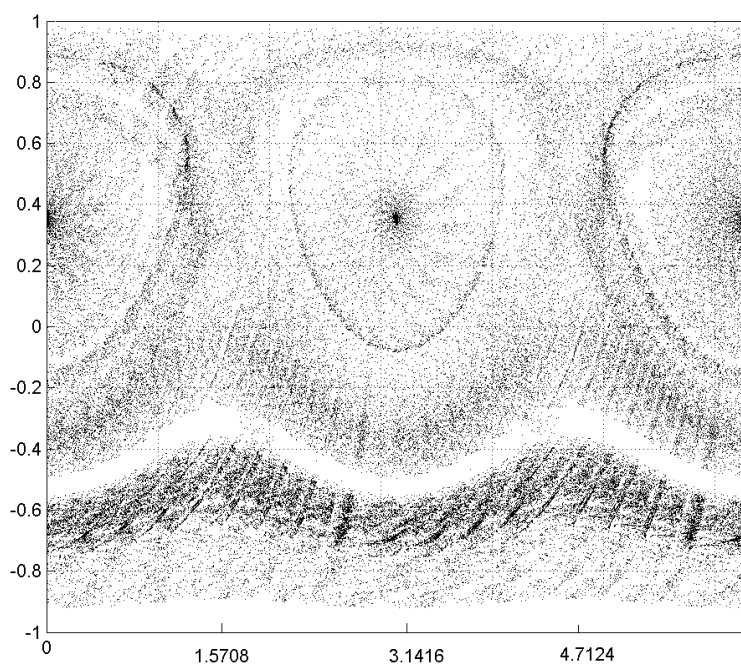


Рис. 50. Фазовый портрет соосных тел с динамически симметричным телом-ротором – интегрируемый случай

При нарушении динамической симметрии тела-ротора ($A_1=5, B_1=5,2$) система становится в общем случае неинтегрируемой, что также отражается на ее фазовом портрете. Теперь портрет содержит пересекающиеся траектории и сложные (хаотические) «туманности» (рис.51, *a, б*) – портреты в случаях *a* и *б* отличаются способами построения и длительностью интервалов времени исследования, на чем мы не станем заострять внимание.



a



б

Рис. 51. Фазовые портреты в неинтегрируемом случае

Построим первое сечение Пуанкаре таким образом, чтобы на фазовых точках системы выполнялось следующее условие:

$$\varphi_2 \bmod 2\pi = \varphi_{20}, \quad \varphi_{20} = \text{const.} \quad (6.2)$$

Точки отображения Пуанкаре по условию (6.2) будем выводить на плоскость $\{l \bmod 2\pi, L/I_2\}$; получим следующее сечение (рис. 52).

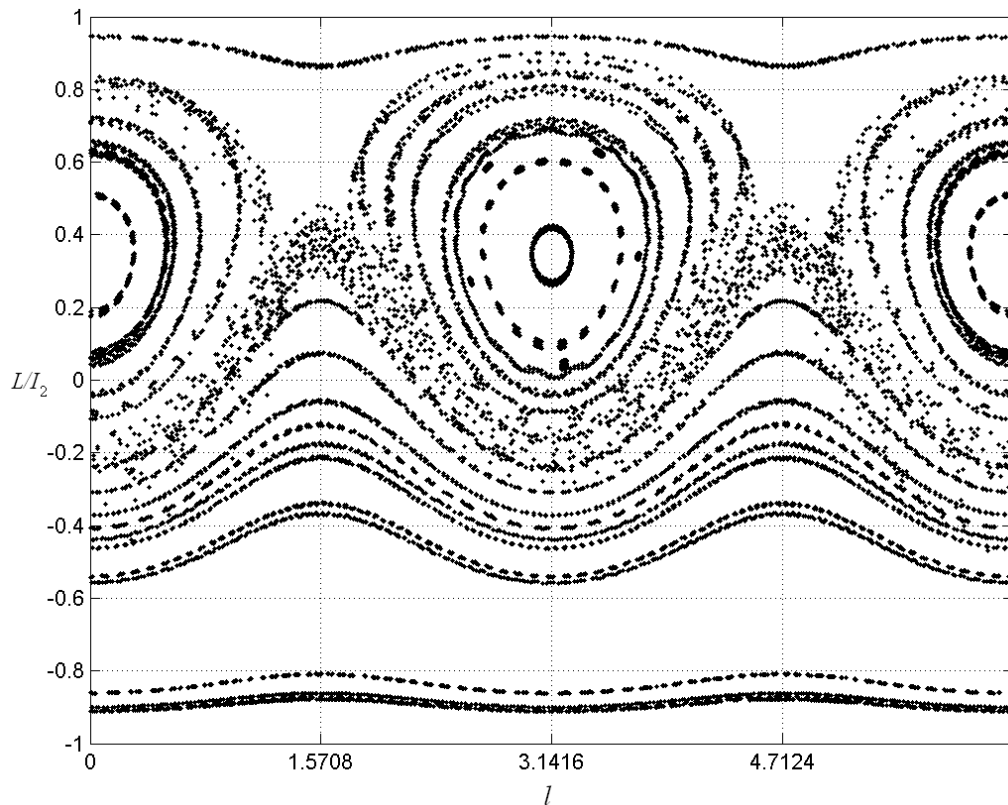


Рис. 52. Сечение Пуанкаре по условию (6.2)

На сечении (рис. 52) хорошо просматривается «размытие» траекторий в области сепаратрис, разделяющих вращательные и колебательные движения, что свидетельствует о хаотизации соответствующих решений.

Второе сечение Пуанкаре построим в тех же осях, что и на рис. 52, но при выполнении условия:

$$\varphi_2 \bmod \pi = \varphi_{20}, \quad \varphi_{20} = \text{const.} \quad (6.3)$$

В этом случае получим следующую картину (рис. 53).

На сечении (рис. 53) видно не только «размытие» траекторий в области сепаратрис, но и изменение их формы (на сепаратрисах возникают «горы») – так называемое расщепление сепаратрис.

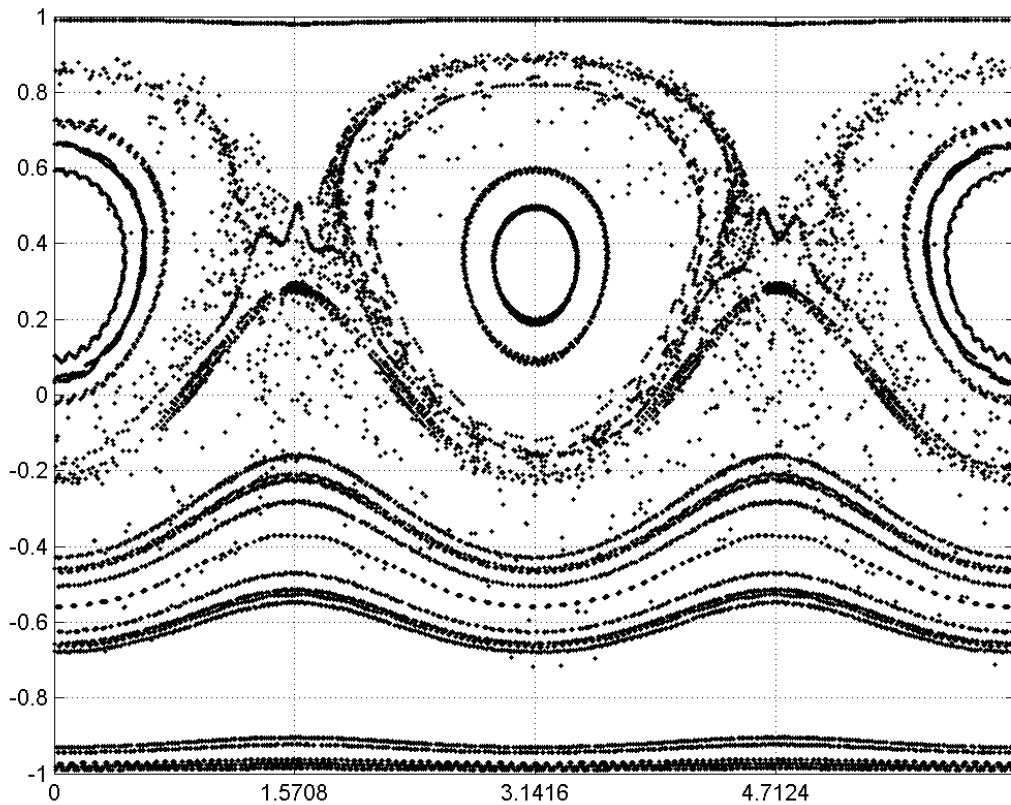


Рис. 53. Сечение Пуанкаре по условию (6.3)

Построим третье сечение Пуанкаре (рис. 54):

$$\varphi_2 \bmod \frac{\pi}{2} = \varphi_{20}, \quad \varphi_{20} = 0. \quad (6.4)$$

Из рис. 54 видно, что теперь имеет место еще более сильное распыление точек, что говорит о хаотизации траекторий не только в окрестности сепаратрисс, но и в более удаленных от них областях.

Отмеченные эффекты «размытия» и расщепления сепаратрисс, а также хаотизация решений как раз и являются причинами, препятствующими интегрируемости системы.

Алгоритм построения сечений (рис. 52–54) заключается в следующем. Итерации отображения Пуанкаре определяются при помощи численного интегрирования уравнений движения, а при выводе на плоскость оставляются только те точки, которые удовлетворяют условию с заданной точностью, например когда $\left| \left(\varphi_2 \bmod \frac{\pi}{2} \right) - \varphi_{20} \right| < \varepsilon = 0,001$. Это делается, во-первых, для учета неточности численного интегрирования, и, во-вторых, для сокращения времени счета.

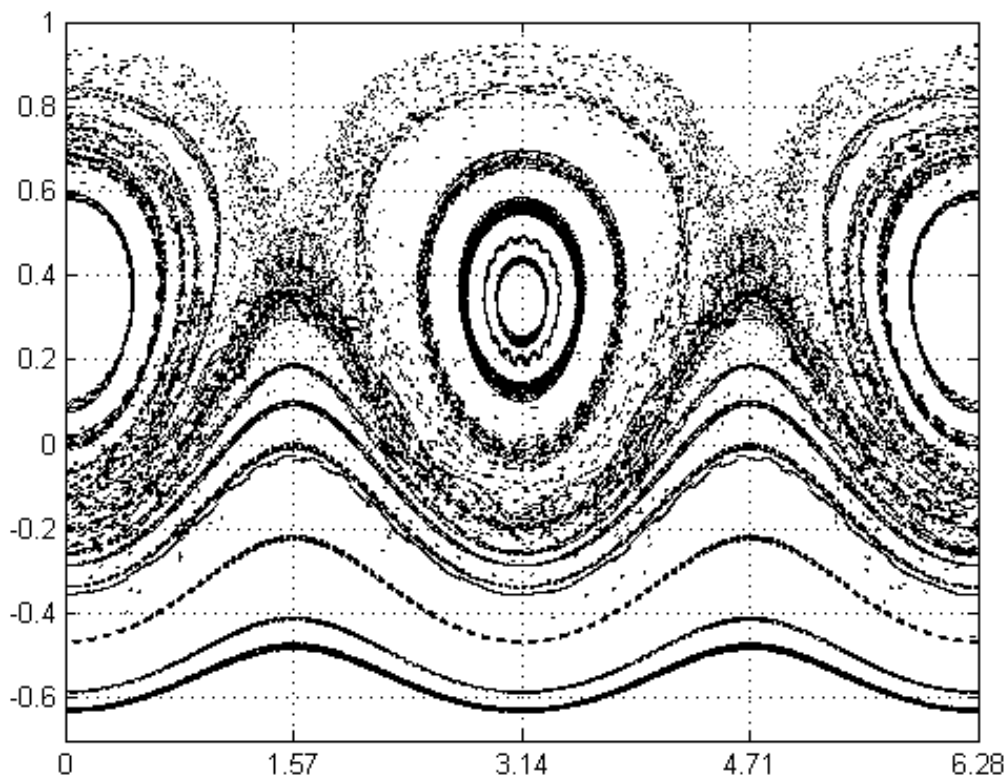


Рис. 54. Сечение Пуанкаре по условию (6.4)

Приведем листинги используемых файлов MATLAB.

Файл Puancaire_scenario.m – сценарий построения сечения Пуанкаре по условию (6.3) при $\varphi_{20}=0$.

```

hold on
sech=pi  tupi=2*pi  G=2.5  r=35
for i=1: r
m1=i
options = odeset('RelTol',1e-3,'AbsTol',
[1e-3 1e-3 1e-3 1e-3 1e-3 1e-3 1e-3 1e-3],'MaxStep', 0.1);
[t,h]=ode45(@Gyrostat,[0,10000],
[rand*m1,0,rand*m1,0,(2*rand-1)*G,G,0.3,0.5],options);
x1=h(:,1);x2=h(:,2);x3=h(:,3);x4=h(:,4);x5=h(:,5);
x6=h(:,6);x7=h(:,7);x8=h(:,8);
    num=[ ];
    num=find(abs(mod(x2,sech))<0.01);
    length(num)
    plot(mod(x1(num),tupi),x5(num)./x6(num),'k.','MarkerSize',6);
end
hold off

```

Файл Gyrostat.m с правыми частями уравнений движения системы

Здесь сокращена запись громоздких выражений для правых частей системы, следующих из уравнений Гамильтона (1.3) по гамильтониану (6.1)! Полные выражения строились с помощью символического дифференцирования $\text{diff}(u(v),v)$ гамильтониана в системе MAPLE, после чего структура выражений приводилась к требуемому системой MATLAB виду с помощью операций замены $\text{subs}(\text{old}=\text{new}, \text{eq})$. Далее выражения копировались как текстовые блоки и сохранялись в файле Gyrostat.m.

```
function G=Gyrostat(t,x)
```

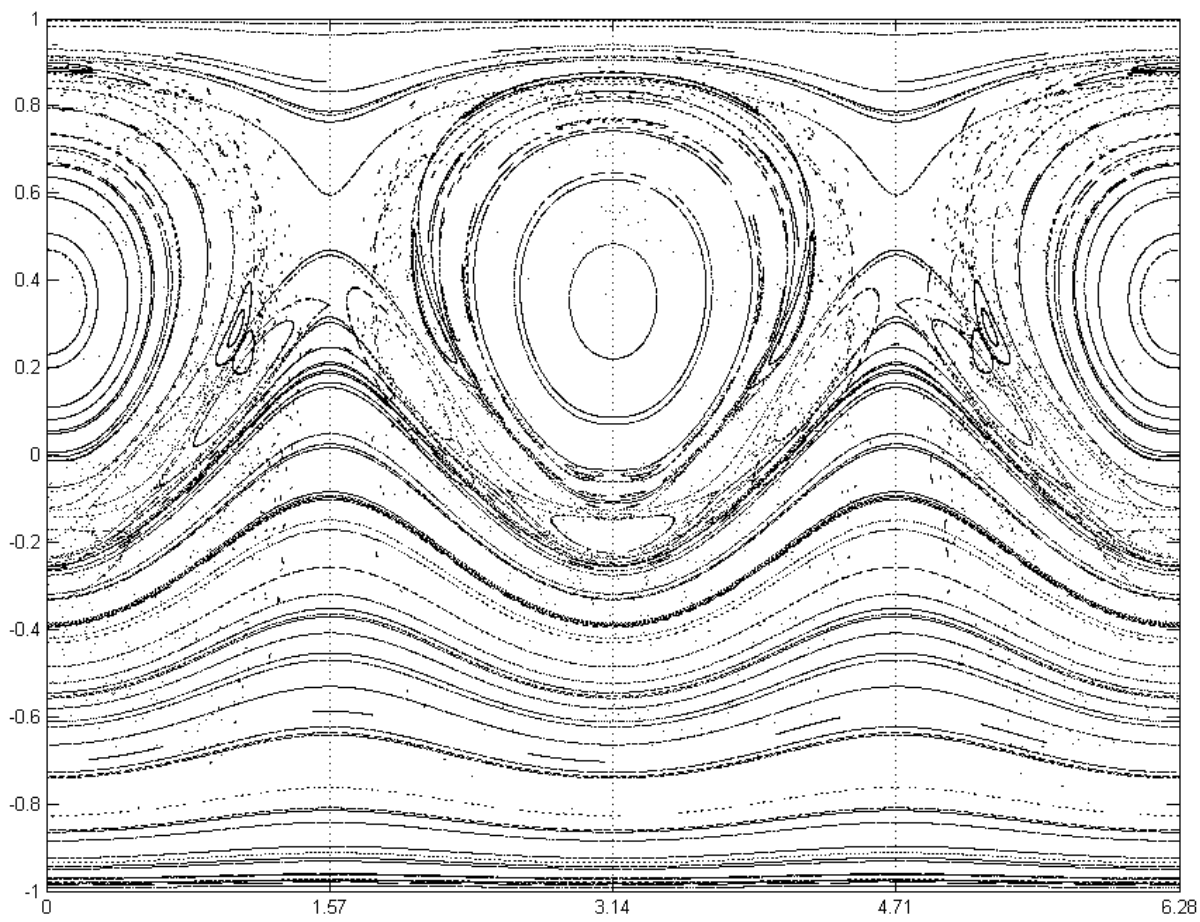
```
a1=5; a2=7.5; b1=5.2; b2=13.5; c1=4; c2=8;
```

```
G=[-a1*x(5)*(((a1*sin(x(4))^2+...; ... % продолжение выражения  
0; ...  
x(8)/c1-(x(5)-x(8))/c2; ...  
-a1*(x(6)^2-x(5)^2)*(((a1*sin(x(4))^2+...; ...% продолжение выражения  
0; ...  
0; ...  
-a1*(x(6)^2-x(5)^2)*(((a1*sin(x(4))^2+... ] ;
```

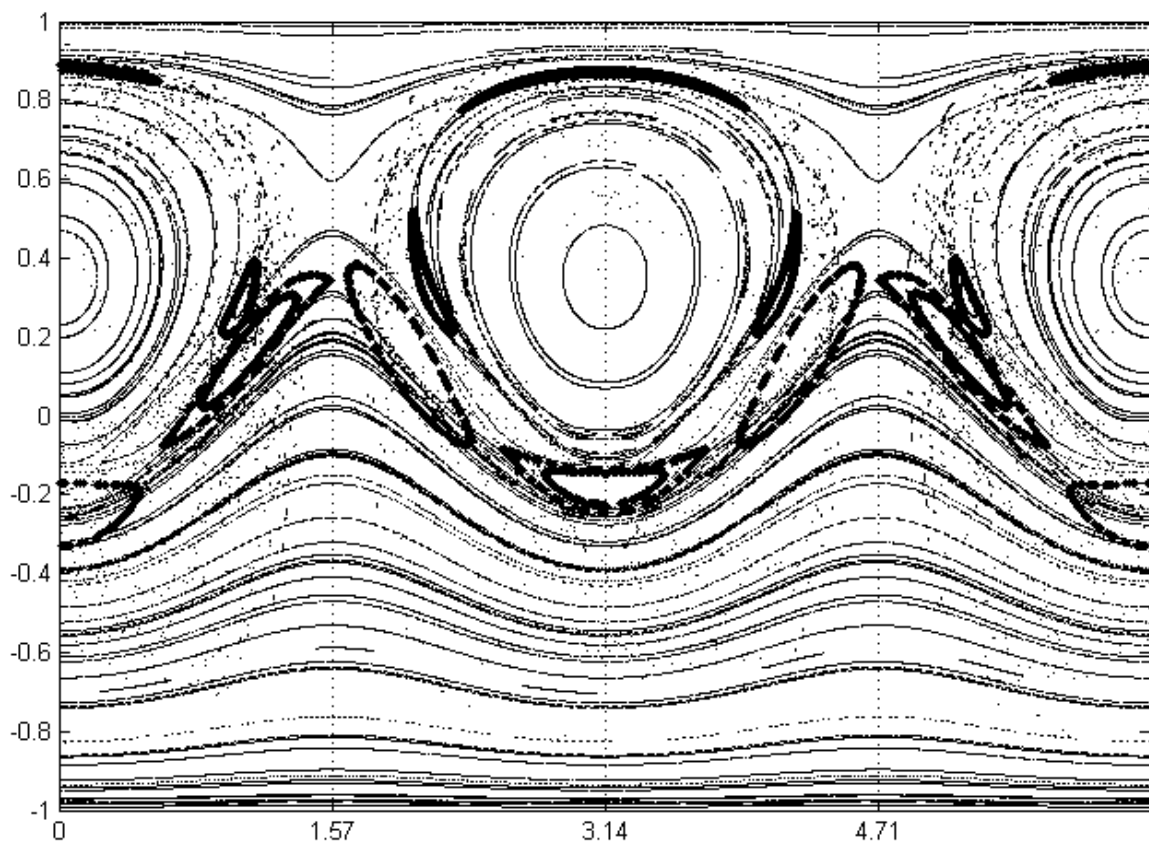
Приведем еще одно сечение Пуанкаре (рис. 55), выполненное по условию:

$$\delta \bmod 2\pi = \delta_0, \quad \delta_0 = 0. \quad (6.5)$$

Сечение (рис. 55, *a, б*) кроме описанных выше особенностей также демонстрирует рождение замкнутых регулярных кривых в колебательной и даже во вращательной областях, не характерных для классического фазового пространства. Эти кривые соответствуют частным периодическим (либо почти периодическим) решениям и, возможно, характеризуют бифуркации удвоения периода при переходе от динамической симметрии тела-ротора к его малой асимметрии – в системе возникли новые колебательные режимы. Отметим здесь, что подобные утверждения и выводы должны тщательно обосновываться при глубоком анализе системы. В свою очередь, полное исследование фазового пространства и сечений Пуанкаре нелинейных неинтегрируемых систем в общем случае представляет собой очень сложную задачу.



a



б

Рис. 55. Сечение Пуанкаре по условию (6.5):
 неклассические частные решения выделены жирным начертанием

Как было отмечено выше, обстоятельствами, препятствующими интегрируемости системы, являются хаотизация областей фазового пространства и расщепление сепаратрисс. В этой связи интересным и практически важным является сам механизм возникновения расщепленных сепаратрисс. Этот механизм связан с возмущениями устойчивого и неустойчивого многообразий седловых точек, через которые проходят сепаратриссы.

В случае, когда система соосных тел состоит из трехосного тела-носителя и динамически симметричного ротора, она может быть приведена к «одностепенной» механической системе с гамильтонианом $H = H(l, L, \text{const}_i)$, что видно из выражения (6.1) при $\delta \equiv 0$, и поэтому является интегрируемой. На фазовой плоскости имеют место классические седла и центры (см. рис. 50).

В случае же наличия асимметрии ротора система повышает свою фазовую размерность, а возмущения искажают траектории сепаратрисс. Это происходит в силу действия в окрестности седловых множеств фазового потока, который локально становится диффеоморфизмом, «растягивающим» фазовое пространство в одном направлении, «сжимающим» в другом, а также «вращательно» действующим на фазовые траектории. В подобных случаях отмечают, что локально формируется так называемая подкова Смейла [3, 5, 16]. Процесс формирования подковы из прямолинейного отрезка (тонкого прямоугольника) за счет сжатия по одному направлению, растяжения по другому направлению и вращения схематически показан на рис. 56 (масштаб не сохранен).

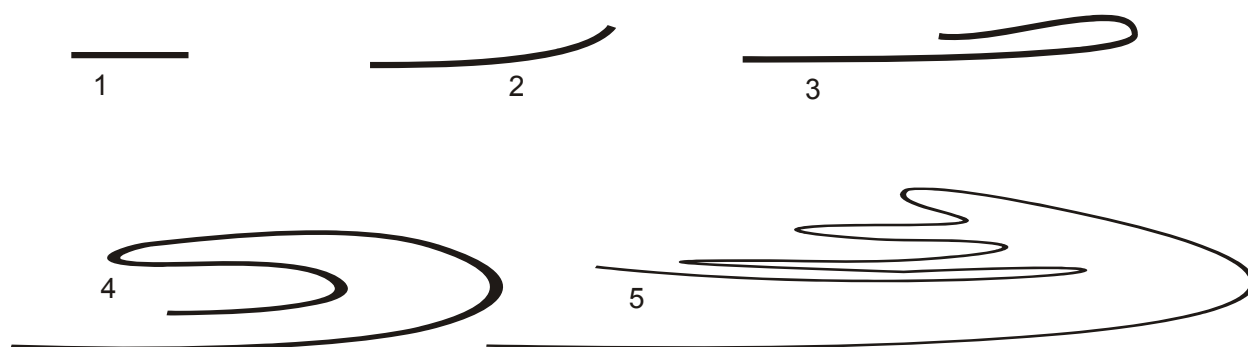


Рис.56. Схема формирования подковы Смейла

В итоге в секущей плоскости Пуанкаре на фазовом портрете системы из сепаратрисс образуются траектории с многократными пересечениями устойчивых и неустойчивых многообразий седловых точек – т.е. происхо-

дит рассечение сепаратрисс и возникновение «гор», указанных на рис. 53. Схема пересечения устойчивого (W^s) и неустойчивого (W^u) многообразий седловой точки O при возмущении сепаратриссы указана на рис. 57.

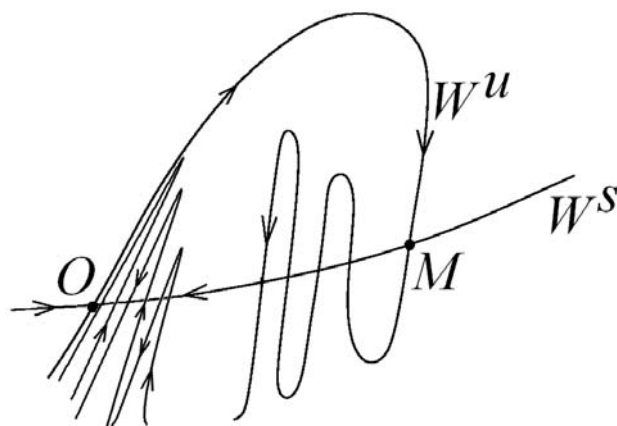


Рис. 57. Возникновение пересечений устойчивого и неустойчивого многообразий седлового множества при возмущении сепаратриссы

Итак, выше дана иллюстрация существенного усложнения фазового портрета системы при переходе к двум несимметричным телам в соосной системе. Отметим, что анализ процесса формирования подков и рассечения сепаратрисс в фазовом пространстве соосной системы является сложной и не решенной к настоящему времени задачей.

Таким образом, отображения Пуанкаре позволяют выявлять какие-либо характерные особенности и «нюансы» в движении системы посредством расслоения ее фазового пространства на серию плоскостей Пуанкаре. Естественно, обычный фазовый портрет, получаемый прямым построением фазовых траекторий (например, аналогичный рис. 51) представляет собой наложение бесконечного числа всех возможных плоскостей Пуанкаре.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Анищенко, В.С.* Знакомство с нелинейной динамикой / *В.С. Анищенко*. – Москва-Ижевск: ИКИ, 2002.
2. *Арнольд, В.И.* «Жесткие» и «мягкие» математические модели / *В.И. Арнольд*. – М.: МЦНМО, 2000.
3. *Каток, А.Б.* Введение в теорию динамических систем / *А.Б. Каток, Б. Хасселблат*. – М.: МЦНМО, 2005. (Оригинальное издание: *В. Hasselblatt, A. Katok. A first Course in Dynamics. Cambridge University Press, 2003.*)
4. *Андронов, А.А.* Теория колебаний / *А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин*. – М.: Наука, 1981.
5. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах / *В.С. Анищенко, В.В. Астахов [и др.]*. – Москва-Ижевск: ИКИ, 2003.
6. *Кузнецов, А.П.* Наглядные образы хаоса / *А.П. Кузнецов*. // Соросовский образовательный журнал. Т.6, №11, 2000.
7. *Белых, Н.В.* Элементарное введение в качественную теорию и теорию бифуркаций динамических систем / *Н.В. Белых* // Соросовский образовательный журнал. №1, 1997.
8. *Говорухин, В.Н.* Введение в Maple / *В.Н. Говорухин, В.Г. Цибулин*. – М.: Мир, 1997.
9. *Божокин, С.В.* Фракталы и мультифракталы / *С.В. Божокин, Д.А. Паршин*. – Москва-Ижевск: РХД, 2001.
10. *Архангельский, Ю.А.* Аналитическая динамика твердого тела / *Ю.А. Архангельский*. – М.: Наука, 1977.
11. *Асланов, В.С.* О двух случаях движения неуравновешенного гиростата / *В.С. Асланов, А.В. Дорошин* // Известия академии наук: Механика твердого тела. №4, 2006.
12. *Дорошин, А.В.* Переменные действие–угол в задаче исследования движения соосных тел / *А.В. Дорошин, О.И. Малыхина* // Труды XII Всероссийского научно-технического семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. – Самара: Изд-во СГАУ, 2006.
13. *Lorenz, E.* Deterministic Nonperiodic Flow / *E. Lorenz* // Journal of the Atmospheric Sciences, 20, 1963. – русский перевод в сборнике статей «Странные аттракторы» (Серия «Математика. Новое в зарубежной науке»). – М.: Мир, 1981. С.88-117.

14. *Ruelle, D.* On the Nature of Turbulence / *D. Ruelle, F. Takens* // *Commun. Math. Phys.*, 20, Springer-Verlag, 1971. – русский перевод в сборнике статей «Странные аттракторы» (Серия «Математика. Новое в зарубежной науке»). – М.: Мир, 1981. С.117-152.

15. *Henon, M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor / *M. Henon* // *Comm. Math. Phys.*, 50, 1976. – русский перевод в сборнике статей «Странные аттракторы» (Серия «Математика. Новое в зарубежной науке»). – М.: Мир, 1981. С.152-164.

16. *Kaplan, L.* Perturbulence: a regime observed in a fluid flow model of Lorenz / *L. Kaplan, J. Yorke* // *Comm. Math. Phys.*, 2, Springer-Verlag, 1979. – русский перевод в сборнике статей «Странные аттракторы» (Серия «Математика. Новое в зарубежной науке»). – М.: Мир, 1981. С.213-239.

17. *Yorke, J.* Metastable chaos: the transition to sustained chaotic behavior in the Lorenz model / *J. Yorke, E. Yorke* // *The Journal of Statistical Physics*. V.21, #3, 1979. – русский перевод в сборнике статей «Странные аттракторы» (Серия «Математика. Новое в зарубежной науке»). – М.: Мир, 1981. С.193-213.

18. *Mandelbrot, Benoit B.* Fractals and turbulence: attractor and dispersion / *Benoit B. Mandelbrot* // *Lecture Notes in Mathematics*, 615, Springer-Verlag, 1977. – русский перевод в сборнике статей «Странные аттракторы» (Серия «Математика. Новое в зарубежной науке»). – М.: Мир, 1981. С.47-57.

Учебное издание

Дорошин Антон Владимирович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ**

Учебное пособие

Редактор Н. С. К у п р и я н о в а
Компьютерная верстка Т. Е. П о л о в н е в а

Подписано в печать 11.07.08. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Печ. л. 6,25.

Тираж 100 экз. Заказ

Арт. С9/2008

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.