МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»
(Самарский университет)

Л.С. КЛЕНТАК, А.С. КЛЕНТАК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПЛАНИРОВАНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

(на примере дисциплины «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»)

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по основным направлениям укрупненной группы направлений и специальностей 38.00.00 Экономика и управление

САМАРА
Издательство Самарского университета
2018

УДК 338(075)
ББК 65.050я7
К484

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. кафедры прикладной математики и эконометрики ЧАО ВО МИР И.Н. Хаймович,
д-р пед. наук, проф. кафедры социальных систем и права, начальник управления внеучебной работы Самарского университета М.Г. Резниченко

Клентак, Людмила Стефановна
К484 Методические основы планирования практических занятий по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»: учеб. пособие / *Л.С. Клентак, А.С. Клентак*. – Самара: Изд-во Самарского ун-та, 2018. – 168 с.

ISBN 978-5-7883-1213-2

Предлагаются методические основы планирования учебного материала, представлен вариант планирования, охватывающего учебно-воспитательные задачи, подбор учебного материала, организации самостоятельной работы студентов в условиях компетентностного подхода в обучении.

Кратко и в доступной форме рассматривается математический аппарат, обеспечивающий студентам Института экономики и управления Самарского университета повышение общего уровня математической культуры, выработку навыков самостоятельного исследования вероятностно-статистических законов. В ФГОС ВО декларировано формирование электронного портфолио студентами. Данное пособие удачно позволяет накапливать самостоятельную работу, выполненную студентом в семестре, для контроля и анализа ее выполнения преподавателем и самоконтроля и самоанализа студентом.

Данное пособие подготовлено на кафедре математических методов в экономике для студентов Института экономики и управления Самарского университета, обучающихся по направлениям бакалавриата: 38.03.01 Экономика, 38.03.02 Менеджмент, 38.03.05 Бизнес-информатика, и может быть полезно преподавателям дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика».

УДК 338(075)
ББК 65.050я7

ISBN 978-5-7883-1213-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие предназначено для студентов любой формы обучения института экономики и управления Самарского университета при изучении дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», а также полезно и преподавателям данной дисциплины. В настоящее время очевидна универсальность вероятностно-статистических законов, не только естественно-научные дисциплины, но и весь комплекс социально-экономических наук развиваются на вероятностно-статистической базе.

При планировании учебного процесс по данной дисциплине в пособии намечены конкретные цели обучения и воспитания и пути их достижения. В связи с этим в пособие включены методические рекомендации как общего, так и частного характера. Пособие охватывает разные стороны процесса изучения курса, намечает основные пути выявления воспитательных возможностей дисциплины.

В каждой теме пособия теория дается в сжатой форме и служит в основном для того, чтобы при решении задач можно было делать точные ссылки на нужные формулы, определения, теоремы, правила.

Контрольные работы следует выполнять после того, как проработан соответствующий теоретический материал и решен необходимый минимум задач. Так как каждой теме соответствует задача или упражнение, домашнюю работу следует выполнять постепенно по мере изучения материала.

При решении задач следует обосновать каждый шаг решения, исходя из теоретических основ курса. Решение должно быть доведено до окончательного ответа.

Избрав учебное пособие в качестве основного, придерживайтесь его при изучении всей части курса, так как использование различных пособий может привести к утрате логической связи между отдельными разделами. Пособие составлено с учетом единого уровня подготовки студентов. Оно содержит планирование 27 практических занятий, что соответствует 54 учебным часам и согласуется с учебным планом дисциплины по направлениям 38.03.01 Экономика, 38.03.02 Менеджмент, а также позволяет рассматривать его в качестве основного по направлению 38.03.05 Бизнес-информатика, где учебным планом предусмотрено 18 практических занятий, что соответствует 36 учебным часам с общим по данным направлениям лекционным курсом в размере 18 часов и экзаменом, предусмотренным при его завершении.

Авторы стремились отразить связь воспитания и обучения. Конспекты по дисциплине главным образом должны содержать определения, чертежи и выводы основных формул. Записи должны быть аккуратными, т.е. чтобы ими можно было пользоваться в дальнейшем. Необходимо осваивать навыки самоконтроля. Для студента – это важнейшая форма проверки правильности понимания и усвоения материала.

1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Предмет теории вероятностей. Возникновение теории вероятностей относится к середине XVII в. и связано с исследованиями Б. Паскаля, П. Ферма и Х. Гюйгенса (1629-1695). В переписке между ними, вызванной анализом задач, связанных с азартными играми, формировались основные понятия теории вероятностей. При этом следует отметить, что выдающиеся ученые, решая различные задачи азартных игр, предвидели фундаментальную роль науки, изучающей случайные явления. Крупный шаг в развитии теории вероятностей связан с работами Я. Бернулли (1654-1705). Ему принадлежит первое доказательство одного из важнейших положений теории вероятностей – закона больших чисел. Следующий этап в развитии теории вероятностей связан с именами А. Муавра (1667-1754), К. Гаусса, П. Лапласа (1749-1827), С. Пуассона (1781-1840). Среди ученых Петербургской школы следует назвать имена В.Я. Буняковского (1804-1889), выдающегося русского математика и механика П. Л. Чебышева (1821-1894) и его учеников А.М. Ляпунова (1857-1918) и А.А. Маркова (1856-1922). После работ этих математиков во всем мире теорию вероятностей стали называть «русской наукой». В середине 20-х годов А.Я. Хинчин (1894-1959) и А. Н. Колмогоров создали московскую школу теории вероятностей. Вклад акад. А.Н. Колмогорова – Героя Социалистического Труда, лауреата Ленинской премии, Международной премии им. Б. Больцано, члена ряда зарубежных академий – в современную математику огромен. Заслуга А.Н. Колмогорова состоит не только в разработке новых научных теорий, но еще в большей степени в том, что он воспитал целую плеяду талантливых ученых (акад. АН УССР Б. В. Гнеденко, акад. Ю.В. Прохоров, Б.А. Севастьянов и др.).

В настоящее время теория вероятностей характеризуется всеобщим подъемом интереса к ней, а ее методы находят широкое применение в различных областях. Теперь не мыслимо успешное развитие теории массового обслуживания, теории информации, теории управления, теории надежности, физики, геодезии, астрономии, экономики и других разделов науки без четких представлений о случайных явлениях (событиях) и их закономерностей.

Всякое случайное событие является следствием очень многих причин. Например, выпадение герба или цифры при бросании монеты зависит от силы, с которой брошена монета, ее формы, сплава и многих других причин. Попадание или промах при стрельбе зависят от расстояния до мишени, формы и веса пули (снаряда), от направления и силы ветра и других случайных причин. В связи с этим невозможно заранее предсказать, произойдет единичное событие или нет. Иначе обстоит дело при изучении многократно повторяющихся опытов. Оказывается, что однородные случайные события при многократном повторении опыта подчиняются определенным закономерностям. Изучением этих закономерностей и занимается теория вероятностей. К основным понятиям теории вероятностей относятся испытания и события.

Под *испытанием* (*опытом*) понимают реализацию данного комплекса условий, в результате которого непременно произойдет какое-либо событие. Например, бросание монеты – испытание; появление герба или цифры – событие.

Случайным называется событие, связанное с данным испытанием, которое при осуществлении испытания может произойти, а может и не произойти. Слово «случайное» для краткости часто опускают и говорят просто «событие». Например, выстрел по цели – это опыт, случайные события в этом опыте – попадание в цель или промах.

Событие называется *достоверным,* если в результате опыта оно непременно должно произойти, и *невозможным,* если оно заведомо не произойдет, пример, выпадение не более шести очков при бросании одной игральной кости – достоверное событие; выпадение десяти очков при бросании одной игральной кости – невозможное событие.

Два события называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого. В противном случае события называются *совместными.*

Пример 1. В ящике имеются стандартные и нестандартные детали. Наудачу берут одну деталь. События A_1 – «появилась стандартная деталь» и A_2 – «появилась нестандартная деталь» являются несовместными событиями.

Пример 2. Брошена игральная кость. Событие A_1 – «появление двух очков» и событие A_2 – «появление четного числа очков» совместны, так как появление одного из них не исключает появления другого.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *попарно несовместными*, если любые два из этих событий несовместны.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют *полную систему событий*, если в результате данного испытания непременно произойдет хотя бы одно из них.

Пример 3. Учащемуся на экзаменах достался билет с двумя теоретическими вопросами. События A_1 – «учащийся знает оба вопроса», A_2 – «учащийся знает первый вопрос, но не знает второго», A_3 – «учащийся знает второй вопрос, но не знает первого», A_4 – «учащийся знает только один вопрос», A_5 – «учащийся не знает ни одного из вопросов» образуют полную систему событий, среди которых имеются как несовместные A_1 и A_2, A_1 и A_5 и другие, так и совместные A_2 и A_4, A_3 и A_4.

В теории вероятностей важную роль играет *полная система попарно несовместных событий*, т.е. такая система событий, что в результате данного испытания непременно произойдет одно и притом только одно событие данной системы.

Различают события *элементарные и составные.* Так, в примере 4 событие A_4 является составным событием из A_2 и A_3, потому что событие A_4 наступит только в результате наступления либо только события A_2, либо только события A_3. В таком случае говорят, что событие A_4 разлагается на элементарные события A_2 и A_3, и пишут $A_4=\{A_2, A_3\}$.

Пример 4. При однократном бросании игральной кости элементарными являются события: $A_1 = \{1\}$ – «появление одного очка», $A_2 = \{2\}$ – «появление двух очков», $A_3 = \{3\}$ – «появление трех очков», $A_4 = \{4\}$ – «появление четырех очков», $A_5 = \{5\}$ – «появление пяти очков», $A_6 = \{6\}$ – «появление шести очков». События $B = \{1,3,5\}$ – «появление нечетного числа очков», $B_2 = \{3, 6\}$ – «появление числа очков, кратного 3», $B_3 = \{1, 2, 3, 4\}$ – «появление числа очков, меньшего пяти» являются составными, так как их можно разложить соответственно на три $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, два $\{3\}$, $\{6\}$ и четыре $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$ элементарных события.

События A_1, A_2, ..., A_n называются *равновозможными*, если условия испытания обеспечивают одинаковую возможность осуществления каждого из них.

Множество всех элементарных событий, связанных с некоторым опытом, называется пространством элементарных событий Ω. Будем считать, что пространство Ω конечно или счетно.

Классическое и статистическое определение вероятности. Каждое событие обладает какой-то степенью возможности. Численная мера степени объективной возможности события – это вероятность события. Вероятность события A обозначается $P(A)$. Пусть из системы n несовместных равновозможных исходов испытания m исходов благоприятствуют событию A.

Вероятностью события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех несовместных равновозможных элементарных исходов, образующих полную группу данного испытания:

$$P\left(A\right)=\frac{m}{n}. \tag{1.1.1}$$

Эта формула носит название *классического определения вероятности.*

Отметим *свойства* вероятности события.

1.Вероятность любого события заключена между нулем и единицей, т.е. $0 \leq P(A) \leq 1$.

2.Вероятность достоверного события равна единице, т.е. $P(U) = 1$, т.к. если U – достоверное событие, то $m = n$.

3.Вероятность невозможного события равна нулю, т.е. $P(V) = 0$, т.к. если V – невозможное событие, то $m = 0$.

Пример 5. Игральную кость подбрасывают один раз. Найти вероятности событий: A— появление четного числа очков; B – появление не менее пяти очков; C – появление не более пяти очков.

Решение. Опыт имеет шесть равновозможных независимых исходов (появление одного, двух, трех, четырех, пяти и шести очков), образующих полную систему.

Событию *A* благоприятствуют три исхода (выпадение двух, четырех и шести очков), поэтому $P(A) = 3/6 = 1/2$; событию *B* – два исхода (выпадение пяти и шести очков), поэтому $P(B) = 2/6 = 1/3$; событию *C* – пять исходов (выпадение одного, двух, трех, четырех и пяти очков), поэтому $P(C) = 5/6$.

Классическое определение вероятностей применимо только для тех событий, которые могут появиться в результате испытаний, обладающих *симметрией* возможных исходов, т.е. сводящихся к схеме случаев.

Но есть и другой подход при оценке вероятности событий, основанный на том, насколько *часто* будет появляться данное событие в произведенных испытаниях. В этом случае используется *статистическое определение* вероятности.

Статистической вероятностью события *A* называется относительная частота (частость) появления этого события в *n* произведенных испытаниях, т.е.

$$\tilde{P}(A) = w(A) = \frac{m}{n}. \qquad (1.1.2)$$

где $\tilde{P}(A) -$ статистическая вероятность события *A*;
$w(A) -$ относительная частота (частость);
$m -$ число испытаний, в которых появилось событие *A;*
$n -$ общее число испытаний.

В отличие от «математической» вероятности, рассматриваемой в классическом определении, статистическая вероятность является характеристикой *опытной, экспериментальной*.

Операции над событиями. Укажем некоторые соотношения, которые могут существовать между событиями системы.

1. Если в результате испытания при каждом появлении события *A* наступает событие *B*, то говорят, что *A является частным случаем B*, и записывают этот факт в виде $A \subset B$.

2. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A=B$. События *A и B называются равными*, если при каждом испытании они оба наступают либо не наступают.

3. *Произведением событий A и B* называется такое событие *AB*, которое заключается в совместном наступлении этих событий.

4. *Суммой событий A и B* называется такое событие $A+B$, которое заключается в наступлении, по крайней мере, одного из этих событий.

5. Событие $\overline{A}$ называется противоположным событию A (и наоборот), если для них одновременно выполняются равенства: $A+\overline{A}=U;\ \ A\cdot\overline{A}=V$.

6. События A и B называются несовместными, если их совместное наступление неосуществимо, т. е. если $AB=V$.

Введенные операции над событиями удовлетворяют следующим правилам:

1. $A+B=B+A$ – коммутативность сложения.
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$ – ассоциативность сложения.
3. $A\cdot B=B\cdot A$ – коммутативность умножения.
4. $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$ – ассоциативность умножения.
5. $A(B+C)=AB+AC$ – закон дистрибутивности.

Из определения операций над событиями вытекают равенства:

$$
\begin{array}{ll}
A+A=A & A\cdot A=A \\
A+U=U & A\cdot U=A \\
A+V=A & A\cdot V=V \\
A+\overline{A}=U & A\cdot\overline{A}=V \\
U+V=U & U\cdot V=V
\end{array}
$$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практического занятия по курсу
«Теория вероятностей и математическая статистика»

Тема: «Введение. Основные понятия теории вероятностей»

Дидактическая цель. Изложить исторический материал по возникновению теории вероятностей; изучить основные понятия теории вероятностей; знать классификацию событий и методы вычисления вероятности событий.

Воспитательная цель. Прививать интерес к математическим дисциплинам, используя исторический материал.

1. Теоретическая часть:

По данной теме необходимо изучить теоретический материал, изложенный в учебном пособии В.Е. Гмурмана «Теория вероятностей и математическая статистика» [1, введ., ч. 1, гл. 1, § 1-3].

2. Методические рекомендации

Изучив основные теоретические сведения, ответьте на контрольные вопросы и только затем приступите к решению задач.

Вопросы для самопроверки:

1. Какое событие называется невозможным, достоверным, случайным?
2. Какие события называются совместными, несовместными, равновозможными?
3. Какие события образуют полную систему событий?
4. Что понимается под вероятностью события?
5. Дайте классическое определение вероятности события.

3. Решение задач:

1. Найти вероятность того, что при бросании игральной кости выпадает число очков, кратное 3. *Ответ.* 1/3.

2. Из слова «автоматика» выбирается наугад одна буква. Какова вероятность того, что это буква «а»? *Ответ.* 0,3.

3. Отправитель письма забыл номер дома адресата и помнил лишь, что номер – двузначное число, четное и не содержащее цифру 6. Он написал номер наугад. Найти вероятность того, что номер указан верно. *Ответ.* 0,0313.

4. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадает четное число очков. *Ответ.* 0,5.

5. В ящике имеется 50 одинаковых деталей, из них 5 окрашенных. Наудачу вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окрашенная. *Ответ.* 0,1.

6. Совместно со студентами обсуждается решение задач № 1, 4 из задачника Гмурмана В.Е. «Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике» [2].

1. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях – четная, причем на грани хотя бы одной из костей появится шестерка.

4. Указать ошибку «решения» задачи: брошены две игральные кости; найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 3 (событие *A*).

4. Подведение итогов занятия

5. Домашнее задание

Решить задачи типа:

1. Из полного набора домино наудачу выбирается одна пластинка. Какова вероятность появления пластинки с шестью очками?

2. Из 25 экзаменационных билетов наудачу выбирается 4 (от 1 до 25). Какова вероятность того, что номер вытянутого билета есть число, кратное 3?

3. На карточках написаны целые числа от 1 до 15 включительно. Наудачу извлекается 2 карточки. Какова вероятность того, что сумма чисел, написанных на карточках, равна 10?

4. Задача 1.1 к РГР 1.

5. Из учебного пособия [2] решить задачи № 2, 3, 5:

2. При перевозке ящика, в котором содержались 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причем неизвестно какая. Наудачу извлеченная (после перевозки) из ящика деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь.

3. Задумано двузначное число. Найти вероятность того, что задуманным числом окажется: а) случайно названное двузначное число; б) случайно названное двузначное число, цифры которого различны.

5. Брошены две игральные кости. Найти вероятности следующих событий: а) сумма выпавших очков равна семи; б) сумма выпавших очков равна восьми, а разность – четырем; в) сумма выпавших очков равна восьми, если известно, что их разность равна четырем; г) сумма выпавших очков равна пяти, а произведение – четырем.

1.2. КОМБИНАТОРИКА. НЕПОСРЕДСТВЕННЫЙ ПОДСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

При решении ряда теоретических и практических задач требуется из конечного множества элементов по заданным правилам составлять различные комбинации и производить подсчет числа всех возможных таких комбинаций. Такие задачи принято называть *комбинаторными,* а раздел математики, занимающийся их решением, называется *комбинаторикой.* Комбинаторика широко применяется в теории вероятностей, теории массового обслуживания, теории управляющих систем и вычислительных машин и других разделах науки и техники.

Упорядоченные и неупорядоченные подмножества. Основными понятиями комбинаторики являются понятия множеств *неупорядоченного и упорядоченного.* Следует сразу сказать, что в комбинаторике множество рассматривается с точки зрения того, что можно с ним сделать или как одно множество соотнести с другим. Исходя из этого, понятие *неупорядоченного множества* можно описать как некий набор элементов, связанных между собой лишь отношением принадлежности данному множеству, т. е. по отношению друг к другу элементы этого множества обладают неограниченной (качественно) свободой взаиморасположения и взаимосвязей. Понятие *упорядоченного множества* можно описать как множество, на котором задан некоторый порядок, т.е. элементы его либо ограничены в свободе взаиморасположения (произведена их фиксация в множестве), либо на множестве задана какая-то структура, либо каждому элементу присвоена возможность оказывать воздействие на элементы другого множества, причем воздействия не одинаковые, но взаимосвязанные (порядок через последовательность, структуру воздействия).

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие сказанное.

Пример 1. Пусть дано неупорядоченное числовое множество $A = \{1; 2; 5; 7\}$. Используя это множество, можно получить упорядоченные множества. Так, $B = (1; 2; 5; 7)$ получено введением на A порядка не меньше, $C = (7; 5; 2; 1)$ – порядка не больше, $D = (1; 5; 2; 7)$ и $E = (7; 1; 5; 2)$ – фиксацией элементов, т.е. ограничением свободы взаиморасположения.

При решении комбинаторных задач первым шагом выделяется множество, о котором идет речь в задаче, и определяется число его элементов. Вторым шагом выясняется, о чем идет речь: о самом множестве или о его подмножестве, сколько в нем элементов. Третьим шагом определяется упорядоченное ли подмножество или нет, и затем соотносим задачи к сочетанию, размещению или перестановке.

Основные понятия комбинаторики: перестановки, сочетания, размещения. Дадим их определения.

Размещения. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, содержащее m элементов, называется из n элементов по m элементов.

Пример 2. Например, из элементов 1, 2, 3 можно составить размещения по 2 элемента в каждом:12, 21, 13, 31, 23, 32.

Из определения вытекает, что $0 \le m \le n$ и что размещения из n элементов по m – это все m-элементные подмножества, отличающиеся составом элементов или порядком их следования.

Число размещений из n элементов по m элементов в каждом обозначают A_n^m и вычисляют по формуле

$$A_n^m = n\,(n-1)\,(n-2)\,...\,(n-m+1). \qquad (1.2.1)$$

Число размещений из *n* элементов по *m* элементов в каждом равно произведению *m* последовательно убывающих натуральных чисел, из которых большее есть *n.*

Для краткости произведение первых *n* натуральных чисел принято обозначать *n!* (*n* – факториал):

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n = n! \qquad (1.2.2)$$

Условились считать, что **0! = 1.**

Тогда формулу числа размещений из *n* элементов по *m* элементов можно записать и в другом виде:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}\,. \qquad (1.2.3)$$

Пример 3. Вычислить A_8^3.

Решение.

$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$. Ответ: 336.

Пример 4. Из 10 студентов надо отобрать по одному человеку для участия в одновременно проходящих олимпиадах по математике, истории, статистике и специальной дисциплине. Сколькими способами это можно сделать, если все студенты хорошо знают эти дисциплины?

1. Множество – «студенты», $n = 10$.

2. Подмножество – «студенты, идущие на олимпиаду», $k = 4$.

3. Упорядоченное (порядок определяется функцией студента в подмножестве).

4. Задача относится к размещению (по определению):

$A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$. Ответ: 5040.

Пример 5. Сколькими способами собрание, состоящее из 30 человек, может выбрать из присутствующих президиум в составе председателя, секретаря и члена президиума?

Решение. Состав президиума собрания является упорядоченным множеством из 30 элементов по три элемента. Значит, искомое число способов равно числу размещений из 30 элементов по три элемента в каждом:

$A_{30}^{3} = \frac{30!}{(30-3)!} = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360$. Ответ: 24360.

Перестановки. Размещения из n элементов по m элементов называются *перестановками* из n элементов.

Пример 6. Например, из элементов 1, 2, 3 можно составить перестановки:123, 132, 213, 231, 312, 321.

Из определения следует, что перестановки являются частным случаем размещений. Так как каждая перестановка содержит все n элементов множества, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком элементов.

Число перестановок из n элементов данного множества обозначают P_n и вычисляют по формуле

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n! \qquad (1.2.4)$$

Пример 7. Дано множество цифр {1; 3; 0; 4; 5}. Найти сколько 5-значных чисел из него можно составить:

1. Множество – «цифры», $n = 5$.
2. Подмножество – «цифры», $k = 5$.
3. Упорядоченное.
4. Перестановка P_5.

Ограничение: числа 5-значные, следовательно 0 на первом месте исключается. Найдем число таких перестановок, у которых 0 на первом месте (задача с фиксацией).

Выбираем из множества 0 и фиксируем его в подмножестве (0....): n стало равно 4, k стало равно 4. Получаем P_4.

Итак, 5-значных чисел $P_5 - P_4$.=5! − 4! = 120 – 24 = 96.

Пример 8. Сколько четырехзначных чисел можно составить из четырех цифр 1, 2, 3, 4 без повторений?

Решение. По условию дано множество из четырех элементов, которые требуется расположить в определенном порядке. Значит требуется найти количество перестановок из четырех элементов:

$P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, т. е. из цифр 1, 2, 3, 4 можно составить 24 четырехзначных числа (без повторений цифр).

Сочетания. Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Каждое его подмножество, содержащее m элементов, называется *сочетанием* из n элементов по m элементов.

Пример 9. Например, из элементов 1, 2, 3 можно составить только одно сочетание, состоящее из трех элементов:123. Все остальные (132, 213, 231, 312, 321) отличаются от 123 только порядком, а элементы в них те же.

Таким образом, сочетания из n элементов по m элементов – это все m-элементные подмножества, которые имеют одинаковый состав элементов. Подмножества, отличающиеся друг от друга порядком следования элементов, не считаются различными.

Число подмножеств по m элементов в каждом, содержащихся во множестве из n элементов, т. е. число сочетаний из n элементов по m элементов в каждом обозначают C_n^m и вычисляют по формуле

$$C_n^m = \frac{A_m^n}{P_m} \qquad (1.2.5)$$

$$\text{или } C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (1.2.6)$$

Число сочетаний C_n^mобладает *основным свойством:*

$$C_n^m = C_n^{n-m} \quad (0 \le m \le n). \qquad (1.2.7)$$

Пример 10. Сколькими способами можно распределить 12 человек по бригадам, если в каждой бригаде по 6 человек?

Решение. Состав каждой бригады является конечным множеством из 12 элементов по 6. Значит, искомое число способов равно числу сочетаний из 12 элементов по 6 в каждом:

$C_{12}^6 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 924$. Ответ. 924.

Введенные таким образом понятия легко позволяют установить переход от одного понятия к другому; установить, какое из них является по отношению к какому общим, какое – частным.

Так, сочетание является обобщенным для размещения и перестановки. Из него может быть получено размещение введением дополнительного ограничения на элементы подмножества − упорядочения; перестановка − расширением числа элементов подмножества до всего множества и их упорядочение, т. е. двумя ограничениями.

Правило произведения: «Если элемент a можно выбрать m способами и элемент b-n способами, то пару (a, b) можно выбрать m n способами».

Пример 11. На тарелке лежат 7 слив и 3 яблока. Сколькими способами можно выбрать пару (слива, яблоко)?

Решение. С каждой из 7 слив можно выбрать каждое из 3 яблок, поэтому пару (слива, яблоко) можно выбрать 21 способом ($7 \cdot 3 = 21$).

Ответ: 21 способом.

Правило суммы: «Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b (независимо от первого выбора) n способами, то выбор или a, или b можно сделать $n+m$ способами».

Пример 12. На тарелке лежит 7 слив и 3 яблока. Сколькими способами можно выбрать или сливу или яблоко?

Решение. 7 способами можно выбрать одну из 7 слив и 3 способами одно из 3 яблок. Поэтому выбор или сливу, или яблоко можно сделать 10 способами (7+3=10).

Ответ: 10 способами.

Соединения с повторениями. В рассмотренных выше соединениях каждый элемент входил в соединение не более одного раза. Существуют соединения, которые содержат один и тот же элемент несколько раз. Такие соединения носят название соединений с повторениями.

Число *размещений с повторениями* из n элементов
по m элементов равно n^m. (1.2.8)

Число различных *перестановок* из n элементов, *в которых элементы* a, b, $c, \ldots, l$ *повторяются* соответственно $\propto, \beta, \gamma, \ldots, \lambda,$ раз, равно

$$\frac{n!}{\propto!\,\beta!\,\gamma!\ldots\lambda!},\ \text{где}\ \ n = \propto + \beta + \gamma + \cdots + \lambda\,. \qquad (1.2.9)$$

Число возможных *сочетаний с повторениями* из *n* элементов по *m* элементов равно

$$\frac{(n+m-1)!}{(n-1)!\,m!}\,. \qquad (1.2.10)$$

Если в перестановках из общего числа *n* элементов есть k различных элементов, при этом 1-й элемент повторяется n_1 раз, 2-й элемент – n_2 раз, k-й элемент – n_k раз, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, то такие перестановки называют *перестановками с повторениями* из *n* элементов. Число перестановок с повторениями из *n* элементов равно

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_3) = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}\,. \qquad (1.2.11)$$

Пример 13. В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены: а) различные призы; б) одинаковые призы?

Решение. а) Каждый из вариантов распределения призов представляет собой комбинацию *5* фильмов из 10, отличающуюся от других комбинаций как составом фильмов, так и их порядком по номинациям (или и тем и другим), причем одни и те же фильмы могут повторяться несколько раз, т.е. представляет размещение с повторениями из 10 элементов по 5. Их число по формуле **(**1.10**)** равно$10^5 = 100000$.

б) Если по каждой номинации установлены одинаковые призы, то порядок следования фильмов в комбинации 5 призеров значения не имеет и число вариантов распределения призов представляет собой число сочетаний с повторениями из 10 элементов по 5, определяемое по формуле **(**1.2.10**)** с учетом равенства **(**1.2.2**):**

$$\frac{(n+m-1)!}{(n-1)!\,m!} = C_{10+5-1}^{5} = C_{14}^{5} = \frac{14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 2002.$$

Пример 14. Сколько существует семизначных чисел, состоящих из цифр 4, 5 и 6, в которых цифра 4 повторяется 3 раза, а цифры 5 и 6 – по 2 раза?

Решение. Каждое семизначное число отличается от другого порядком следования цифр (причем $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$, а их сумма равна 7), т.е. является перестановкой с повторениями из 7 элементов. Их число по формуле (1.2.11):

$$P_7(3,2,2) = \frac{7!}{3!\,2!\,2!} = 210.$$

Пример 15. В урне 5 черных и 6 белых шаров. Случайным образом вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что среди них имеется:

а) 2 белых шара;

б) меньше, чем 2 белых шара;

в) хотя бы один белый шар.

Испытанием будет случайное вынимание четырех шаров. Элементарными событиями являются всевозможные сочетания по 4 из 11 шаров. Их число равно

$$n = C_{11}^4 = \frac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 330.$$

а) A_1 – среди вынутых шаров 2 белых. Значит, среди вынутых шаров 2 белых и 2 черных. Используя правило умножения, получаем

$$m = C_6^2 \cdot C_5^2 = \frac{5\cdot 6}{1\cdot 2}\cdot\frac{4\cdot 5}{1\cdot 2} = 15\cdot 10 = 150.$$

$$P(A_1) = \frac{150}{330} = \frac{5}{11} \approx 0{,}4545.$$

б) A_2 – среди вынутых шаров меньше, чем 2 белых. Это событие состоит из двух несовместных событий:

B_1 – среди вынутых шаров только один белый и 3 черных шара;

B_2 – среди вынутых шаров нет ни одного белого, все 4 шара черные:

$$A_2 = B_1 \bigcup B_2.$$

Так как события B_1 и B_2 несовместны, можно использовать формулу:

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B).$$

Имеем:

$$P(A_2) = P(B_1) + P(B_2).$$

$$m_1 = C_6^1 \cdot C_5^3 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 1 \cdot 2} = 60,$$

$$m_2 = C_5^4 = 5.$$

$$P(B_1) = \frac{60}{330}; \qquad P(B_2) = \frac{5}{330};$$

$$P(A_2) = \frac{60}{330} + \frac{5}{330} = \frac{65}{330} = \frac{13}{66}.$$

в) A_3 – среди вынутых шаров хотя бы один белый. Этому событию удовлетворяют следующие сочетания шаров: 1 белый шар и 3 черных (B_1), 2 белых и 2 черных (B_2), 3 белых и 1 черный (B_3), 4 белых (B_4).

Имеем:

$$A_3 = B_1 \bigcup B_2 \bigcup B_3 \bigcup B_4.$$

Здесь событие A_3 определяется словами «хотя бы один» и прямое решение приводит обычно к сложным вычислениям. Проще сначала найти вероятность противоположного события и затем по формуле

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

вычислить вероятность искомого события.

$\overline{A}_3$ – среди вынутых шаров нет ни одного белого. В этом случае

$$m = C_5^4 = 5;$$

$$P(\overline{A}_3) = \frac{5}{330} = \frac{1}{66};$$

$$P(A_3) = 1 - P(\overline{A}_3) = 1 - \frac{1}{66} = \frac{65}{66}.$$

Ответ: $P(A_1) = \frac{5}{11}$, $P(A_2) = \frac{13}{66}$, $P(A_3) = \frac{65}{66}$.

Бином Ньютона. Широко известные формулы сокращенного умножения квадрата суммы и разности, куба суммы и разности являются частными случаями бинома Ньютона *(полиномиальная формула)*. Бином Ньютона – это формула, представляющая выражение $(a + b)^n$ в виде многочлена. Она имеет вид:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + b^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i, \quad (1.2.12)$$

где C_n^k – число сочетаний из n элементов по k.

Любой член разложения может быть вычислен по формуле

$$T_{k+1} = C_n^k \, a^{n-k} x^k. \quad (1.2.13)$$

Пример 16. Найти 5-й член разложения $(a + b)^9$.

Решение.

$T_{4+1} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \, a^{9-4} b^4 = 126 a^5 b^4$.

Ответ: $T_5 = 126 a^5 b^4$.

Когда степень бинома невысока, коэффициенты многочлена могут быть найдены не расчетом по формуле количества сочетаний, а с помощью так называемого треугольника Паскаля. (Блез Паскаль (1623 – 1662) – французский математик). А еще проще объясняют устройство треугольника Паскаля слова: каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Все элементарно, но сколько в этом таится чудес.

Этот треугольник имеет вид (рис. 1.2.1):

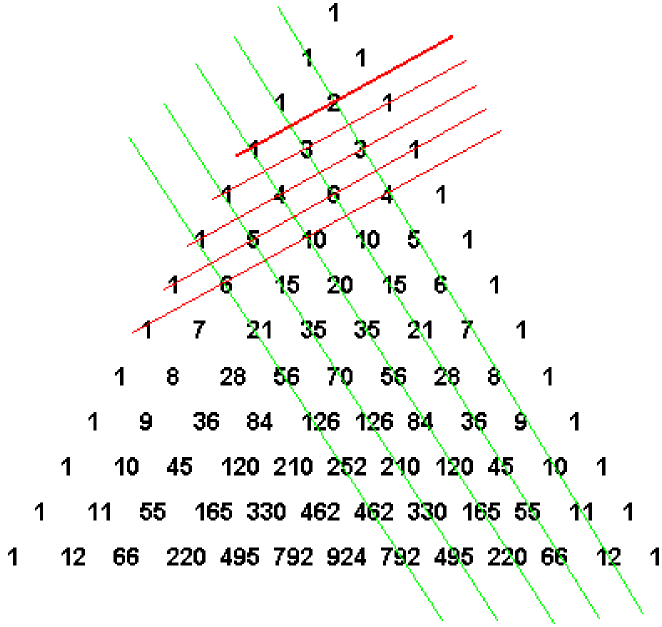

Рис. 1.2.1. Треугольник Паскаля

Использование табличного процессора Excel. Для вычислений использовать калькулятор или встроенные функции табличного процессора Excel ПЕРЕСТ, ЧИСЛКОМБ и ФАКТОРИАЛ.

Для вычислений использовать калькулятор или встроенные функции табличного процессора Excel ПЕРЕСТ, ЧИСЛКОМБ и ФАКТОРИАЛ (ФАКТР). Функция ПЕРЕСТ относится к категории статистические, ФАКТР и ЧИСЛКОМБ – математические.

1. В группе 25 студентов. Сколько вариантов может быть при выборе актива из двух человек?

Активизировать ячейку А2 (рис.1.2.2), щелкнуть по пиктограмме f_x, выбрать: «Категория» -*Математические*, среди них функцию ЧИСЛКОМБ (рис.1.2.3). В диалоговом окне «ЧИСЛКОМБ» записать в поле «Число» значение 25, а в поле «Выбранное число» – значение 2. Результат – число 300 (рис. 1.2.4 и 1.2.5).

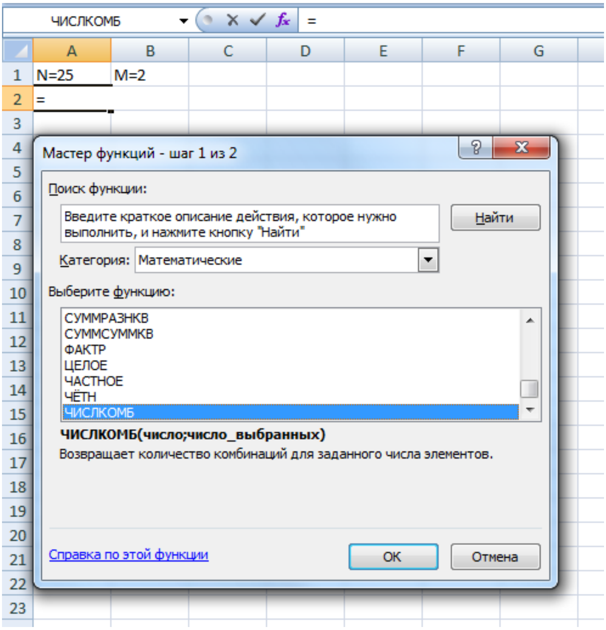

Рис. 1.2.2

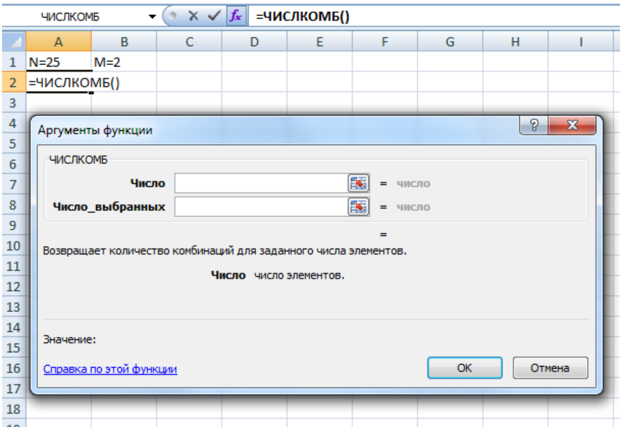

Рис. 1.2.3

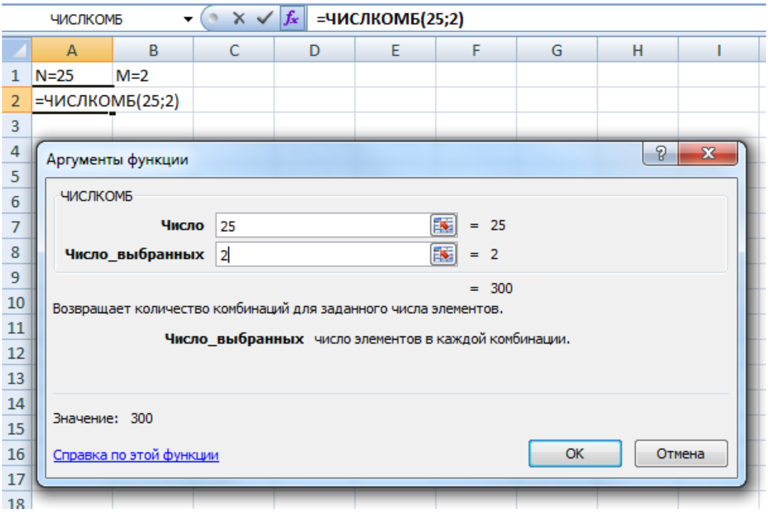

Рис. 1.2.4

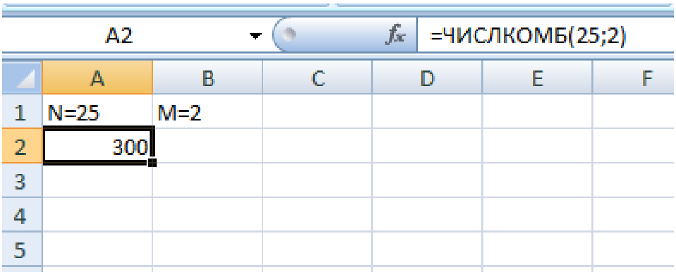

Рис. 1.2.5

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практического занятия по курсу
«Теория вероятностей и математическая статистика»

Тема: «Комбинаторика. Непосредственный подсчет вероятностей»

Дидактическая цель. Научиться анализировать возможную ситуацию, правильно оценивать ее и принимать решение; ознакомиться с основными правилами комбинаторики и методом вычисления вероятности событий.

Воспитательная цель. Прививать интерес к математическим дисциплинам, используя исторический материал.

1. Теоретическая часть

По данной теме необходимо изучить теоретический материал, изложенный в [1, введ., ч. 1, гл. 1, § 4-8].

2. Методические рекомендации

Изучив основные теоретические сведения, ответьте на контрольные вопросы, только затем приступите к решению задач.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется размещениями? перестановками? сочетаниями?
2. Что такое факториал?
3. Напишите формулы для нахождения числа размещения, перестановок, сочетаний без повторений и с повторениями.
4. Чем отличаются перестановки от размещений?
5. Чем отличаются сочетания от размещений?
6. Сформулируйте основное свойство сочетаний.
7. Сформулируйте правила суммы и произведения.
8. Какое разложение называют биномом Ньютона?
9. По какой формуле находят $(k + 1)$-й член разложения бинома Ньютона?

3. Решение задач:

1. Совместно со студентами обсуждается решение следующих задач из учеб. пособия Е.С. Венцель, Л.А. Овчарова. Задачи и упражнения по теории вероятностей [4, № 1, 5].

1. Сколькими способами можно разложись равномерно семь нумерованных шаров по семи нумерованным ящикам?

5. Студенты некоторой группы изучают в данном семестре 9 предметов, занимаясь ежедневно по 3 «пары». Сколькими способами могут быть распределены изучаемые предметы в отдельный день без повторений?

2. Совместно со студентами обсуждается решение следующих задач из учеб. пособия [2, № 9, 11].

№ 9. Найти вероятность того, что при бросании трех игральных костей шестерка выпадет на одной (безразлично какой) кости, если на гранях двух других костей выпадут числа очков, не совпадающие между собой (и не равные шести).

№ 11. В ящике 10 одинаковых деталей, помеченных номерами 1, 2, ..., 10. Наудачу извлечены шесть деталей. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей окажутся:

а) деталь № 1; б) детали № 1 и № 2.

4. Подведение итогов занятия

5. Домашнее задание

1. Решить задачи из [2, № 17, 18, 19].

№17. В партии из N деталей имеется n стандартных. Наудачу отобраны М деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно k стандартных.

№18. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.

№19. На складе имеется 15 кинескопов, причем 10 из них изготовлены Львовским заводом. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наудачу кинескопов окажутся три кинескопа Львовского завода.

4. Задача 1.2 к РГР 1.

1.3. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теорема 1. Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{1.3.1}$$

Следствие. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n). \tag{1.3.2}$$

Пример 1. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих, 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение. Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара.

Вероятность появления красного шара (событие A):

$P(A) = 10/30 = 1/3$.

Вероятность появления синего шара (событие B):

$P(B) = 5/30 = 1/6$.

События A и B несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому теорема сложения применима.

Искомая вероятность $P(A + B) = P(A) + P(B) = 1/3 + 1/6 = 1/2$.

Пример 2. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 3 области. Вероятность попадания в первую область равна 0,45, во вторую – 0,35. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет либо в первую, либо во вторую область.

Решение. События A – «стрелок попал в первую область» и B – *«стрелок попал во вторую область» – несовместны. (попадание* в одну область исключает попадание в другую), поэтому теорема сложения применима. Искомая вероятность:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0{,}45 + 0{,}35 = 0{,}80.$$

Теорема 2. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (1.3.3)$$

Теорема 3. Сумма вероятностей событий $A_1,\ A_2, ..., A_n$, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1. \qquad (1.3.4)$$

Пример 3. Консультационный пункт института получает пакеты с контрольными работами из городов A, B и C. Вероятность получения пакета из города A равна 0,7, из города B – 0,2. Найти вероятность того, что очередной пакет будет получен из города C.

Решение. События «пакет получен из города A», «пакет получен из города B», «пакет получен из города C» образуют полную группу, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице:

$0{,}7 + 0{,}2 + p = 1$.

Отсюда искомая вероятность

$p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

Два несовместных и единственно возможных события называют *противоположными событиями* и обозначают A и $\overline{A}$. Так, промах ($\overline{A}$) при выстреле в цель и попадание (A) – события противоположные.

Теорема 4. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \tag{1.3.5}$$

Замечание 1. Если вероятность одного из двух противоположных событий обозначена через p, то вероятность другого события обозначают через q. Таким образом, в силу предыдущей теоремы

$$p + q = 1. \tag{1.3.6}$$

Принцип практической невозможности маловероятных событий. Появление или непоявление маловероятного события в единичном испытании предсказать невозможно. Однако длительный опыт показывает, что маловероятное событие в единичном испытании в подавляющем большинстве случаев не наступает. На основании этого факта принимают следующий «принцип практической невозможности маловероятных событий»: если случайное событие имеет очень малую вероятность, то практически можно считать, что в единичном испытании это событие не наступит.

Естественно возникает вопрос: насколько малой должна быть вероятность события, чтобы можно было считать невозможным его появление в одном испытании? На этот вопрос нельзя ответить однозначно. Для задач, различных по существу, ответы разные. Например, если вероятность того, что парашют при прыжке не раскроется, равна 0,01, то было бы недопустимым применять такие парашюты. Если же вероятность того, что поезд дальнего следования прибудет с опозданием, равна 0,01, то можно практически быть уверенным, что поезд прибудет вовремя.

Достаточно малую вероятность, при которой (в данной определенной задаче) событие можно считать практически невозможным, называют *уровнем значимости.* На практике обычно принимают уровни значимости, заключенные между 0,01 и 0,05. Уровень значимости, равный 0,01, называют однопроцентным; уровень значимости, равный 0,02, называют двухпроцентным и т. д.

Подчеркнем, что рассмотренный здесь принцип позволяет делать предсказания не только о событиях, имеющих малую вероятность, но и о событиях, вероятность которых близка к единице.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практического занятия по курсу
«Теория вероятностей и математическая статистика»

Тема: «Теоремы сложения вероятностей»

Дидактическая цель. Научить применять теоремы сложения вероятностей для решения задач.

Воспитательная цель. Изучение теории вероятностей способствует формированию логического мышления студентов, является средством познания.

1. Теоретическая часть:

По данной теме необходимо изучить теоретический материал, изложенный в [1, ч.1, гл.2, §1 – 4].

2. Методические рекомендации

Изучив основные теоретические сведения, ответьте на контрольные вопросы, только затем приступите к решению задач.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулировать определение суммы и произведения событий.
2. Теоремы сложения несовместных событий.
3. Теорема сложения для совместных событий.
4. Вероятность появления хотя бы одного события.
5. Принцип практической невозможности маловероятных событий.

3. Решение задач:

1. Совместно со студентами обсуждается решение следующих задач из задачника [2, № 46, 48].

№46. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу три учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете (событие A).

1-й способ решения.

Использует решение домашней задачи №17.

Разобрать 2-й способ решения.

№48. Доказать, что если событие A влечет за собой событие B, то $P(B) \geq P(A)$.

4. Письменный опрос:

Доказательство теоремы, изученной на лекции.

5. ***Подведение итогов занятия.***

6. ***Домашнее задание.***

1. Решить задачу из [2, № 47].

№47. В ящике 10 деталей, из которых четыре окрашены. Сборщик наудачу взял три детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

2. Оформить задачи 1.1 и 1.2 к РГР 1.

1.4. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. ТЕОРЕМЫ УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛЫ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ГИПОТЕЗ (ФОРМУЛЫ БАЙЕСА)

Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей. Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Пример 1. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие B), если при первом испытании был извлечен черный шар (событие A).

Решение. После первого испытания в урне осталось 5 шаров. из них 3 белых. Искомая условная вероятность $P_A(B) = 3/5$.

Этот же результат можно получить по формуле:

$P_A(B) = P(AB) / P(A)$, причем $P(A) > 0$.

Действительно, вероятность появления белого шара при первом испытании $P(A) = 3/6 = 1/2$.

Найдем вероятность $P(AB)$ того, что в первом испытании появится черный шар, а во втором – белый. Общее число исходов совместного появления двух шаров, безразлично какого цвета, равно числу размещений A_6^2 = 6·5=30. Из этого числа исходов событию *AB* благоприятствуют 3·3=9 исходов. Следовательно

$P(AB)$= 9/30 =3/10.

Искомая условная вероятность

$P_A(B) = P(AB) / P(A)$ = (3/10)/(1/2)=3/5. Как видим, получен прежний результат.

Таким образом, условная вероятность события B при условии, что событие A уже наступило, по определению, равна:

$$P_A(B) = P(AB) / P(A), \text{ причем } (P(A)>0) \tag{1.4.1}$$

Теорема 1. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B). \tag{1.4.2}$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$$P(A_1 \ A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2)\ P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n), \tag{1.4.3}$$

где $P_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n)$ – вероятность события A_n, вычисленная в предположении, что события A_1, A_2, ..., A_{n-1} наступили. *B* частности, для трех событий

$$P(ABC) = P(A)\, P_A(B)\ P_{AB}(C). \tag{1.4.4}$$

Заметим, что порядок, в котором расположены события, может быть выбран любым, т.е. безразлично какое событие считать первым, вторым и т.д.

Пример 2. У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик взял один валик, а затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков – конусный, а второй – эллиптический.

Решение. Вероятность того, что первый валик окажется конусным, равна (событие A), $P(A) = 3/10$.

Вероятность того, что второй валик окажется эллиптическим (событие B), вычисленная в предположении, что первый валик – конусный, т.е. условная вероятность $P_A(B) = 7/9$.

По теореме умножения искомая вероятность

$P(AB)=P(A)\,P_A(B)= (3/10)\cdot(7/9) = 7/30.$

Заметим, что, сохранив обозначения, легко найдем:

$P(B) = 7/10$, $P_B(A) = 3/9$, $P(AB) = P(B)\,P_B(A) = 7/30$.

Независимые события. Теорема умножения для независимых событий. Пусть вероятность события B не зависит от появления события A.

Два события называются независимыми, если вероятность появления одного из них не зависит от появления или непоявления другого.

Событие B называют *независимым от события A,* если появление события A не изменяет вероятности события B, т.е. если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности:

$$P_B(A) = P(A),$$

т.е. условная вероятность события A в предположении, что наступило событие B, равна его безусловной вероятности. Другими словами, событие A не зависит от события B.

Итак, если событие B не зависит от события A, то и событие A не зависит от события B; это означает, что *свойство независимости событий взаимно.*

Теорема 2. Для независимых событий теорема умножения имеет вид

$$P(AB)= P(A)\cdot P(B), \qquad (1.4.5)$$

т. е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Итак, два события называют независимыми, если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий; в противном случае события называют зависимыми.

Пример 3. Найти вероятность совместного появления герба при одном бросании двух монет.

Решение. Вероятность появления герба первой монеты (событие A): $P(A) = 1/2$. Вероятность появления герба второй монеты (событие B): $P(B)=1/2$.

События A и B независимые, поэтому искомая вероятность по теореме умножения равна

$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4.$

Вероятность появления хотя бы одного события. Пусть в результате испытания могут появиться n событий, независимых в совокупности, либо некоторые из них (в частности, только одно или ни одного), причем вероятности появления каждого из событий известны. Как найти вероятность того, что наступит хотя бы одно из этих событий? Например, если в результате испытания могут появиться три события, то появление хотя бы одного из этих событий означает наступление либо одного, либо двух, либо трех событий. Ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.

*Теорема 3***.** Вероятность появления хотя бы одного из событий A_1, A_2, …, A_n независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n. \qquad (1.4.6)$$

Частный случай. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ имеют одинаковую вероятность, равную p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий равна:

$$P(A) = 1 - q^n. \qquad (1.4.7)$$

Пример 4. Устройство состоит из трех независимых элементов, работающих в течение времени T безотказно соответственно с вероятностями 0,851, 0,751 и 0,701. Найти вероятность того, что за время T выйдет из строя:

а) только один элемент;

б) хотя бы один элемент.

Испытание, т. е. работу за время T, нужно рассмотреть на двух уровнях: на уровне устройства и на уровне элементов. Элементарные события определять не надо, так как их вероятности заданы.

а) A_1 – за время Т выходит из строя только один элемент:

B_1 – первый элемент выходит из строя;

B_2 – второй элемент выходит из строя;

B_3 – третий элемент выходит из строя;

$\overline{B}_1$ – первый элемент не выходит из строя;

$\overline{B}_2$ – второй элемент не выходит из строя;

$\overline{B}_3$ – третий элемент не выходит из строя.

$$A_1 = (B_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3) \cup (\overline{B}_1 \cap B_2 \cap \overline{B}_3) \cup (\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap B_3).$$

Учитывая независимость элементов устройства, несовместность событий B_i и $\overline{B}_i$, и формулы $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ и $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, получаем следующую формулу:

$$P(A_1) = P(B_1) \cdot P(\overline{B}_2) \cdot P(\overline{B}_3) + P(\overline{B}_1) \cdot P(B_2) \cdot P(\overline{B}_3) +$$
$$+ P(\overline{B}_1) \cdot P(\overline{B}_2) \cdot P(B_3).$$

По условию

$P(\overline{B}_1)$ = 0,851, $P(\overline{B}_2)$ = 0,751, $P(\overline{B}_3)$ = 0,701, а по формуле $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ получаем

$P(B_1)$ = 0,149, Р(B_2) = 0,249. Р(B_3) = 0.299. Таким образом,

$$P(A_1) = 0{,}149 \cdot 0{,}751 \cdot 0{,}701 + 0{,}851 \cdot 0{,}249 \cdot 0{,}701 + 0{,}851 \cdot 0{,}751 \times$$
$$\times\, 0{,}299 = 0{,}418.$$

б) A_2 – за время T выходит из строя хотя бы один элемент. Событие определяется словами «хотя бы один», значит используем противоположное событие.

$\overline{A}_2$ – за время T все элементы работают безотказно:

$$\overline{A}_2 = \overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3.$$

$$P(\overline{A}_2) = P(\overline{B}_1) \cdot P(\overline{B}_2) \cdot P(\overline{B}_3) = 0{,}851 \cdot 0{,}751 \cdot 0{,}701 = 0{,}448.$$

$$P(A_2) = 1 - P(\overline{A}_2) = 1 - 0{,}448 = 0{,}552.$$

Ответ: $P(A_1) = 0{,}418$, $P(A_2) = 0{,}552$.

Формула полной вероятности и формулы Байеса. Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, ..., B_n$, образующих полную группу. Поскольку заранее не известно, какое из этих событий наступит, их называют *гипотезами*.

Теорема 4. Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, ..., B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(B_1)\, P_{B_1}(A) + P(B_2)\, P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)\, P_{B_n}(A)\,. \quad (1.4.8)$$

Эту формулу называют «*формулой полной вероятности*».

Пример 5. В пирамиде стоят 19 винтовок, из них 3 с оптическим прицелом. Стрелок, стреляя из винтовки с оптическим прицелом, может поразить мишень с вероятностью 0,81, а стреляя из винтовки без оптического прицела, – с вероятностью 0,46. Найти вероятность того, что стрелок поразит мишень, стреляя из случайно взятой винтовки.

В этой задаче первым испытанием является случайный выбор винтовки, вторым – стрельба по мишени. Рассмотрим следующие события:

А – стрелок поразит мишень;

B_1 – стрелок возьмет винтовку с оптическим прицелом;

B_2 – стрелок возьмет винтовку без оптического прицела.

Используем формулу полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)\,.$$

Имеем $P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)$

Учитывая, что винтовки выбираются по одной, получаем $n = C_{19}^1 = 19$ и соответственно $m_1 = C_3^1 = 3$ (для B_1) и $m_2 = C_{16}^1 = 16$ (для B_2); таким образом, $P(B_1) = \dfrac{3}{19}$, $P(B_2) = \dfrac{16}{19}$.

Условные вероятности заданы в условии задачи:

$P(A|B_1) = 0{,}81$ и $P(A|B_2) = 0{,}46$.

Следовательно

$$P(A) = 0{,}81 \cdot \frac{3}{19} + 0{,}46 \cdot \frac{16}{19} = 0{,}5150.$$

Ответ: $P(A) = 0{,}515$.

Допустим, что произведено испытание, в результате которого появилось событие A. Поставим своей задачей определить, как изменились (в связи с тем, что событие A уже наступило) вероятности гипотез. Другими словами, будем искать условные вероятности $P_A(B_1)$, $P_A(B_2)$, …, $P_A(B_n)$.

Найдем сначала условную вероятность $P_A(B_1)$.

По теореме умножения имеем

$$P(AB_1) = P(A)\ P_A(B_1) = P(B_1)\ P_{B_1}(A).$$

Отсюда $P_A(B_1) = \dfrac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}$.

Заменив здесь $P(A)$ по формуле (1.4.8), получим

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A)}. \quad (1.4.9)$$

Аналогично выводятся формулы, определяющие условные вероятности остальных гипотез, т. е. условная вероятность любой гипотезы B_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) может быть вычислена по формуле

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A)}. \quad (1.4.10)$$

Полученные формулы называют *формулами Байеса* (по имени английского математика, который их вывел; опубликованы в 1764 г.). Формулы Байеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие A.

Пример 6. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадает к первому контролеру, равна 0,6, а ко второму – 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,94, а вторым – 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

Решение. Обозначим через A событие, когда годная деталь признана стандартной. Можно сделать два предположения:

1) деталь проверил первый контролер (гипотеза B_1);

2) деталь проверил второй контролер (гипотеза B_2).

Искомую вероятность того, что деталь проверил первый контролер, найдем по формуле Байеса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A)}.$$

По условию задачи имеем:

$P(B_1) = 0{,}6$ (вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру);

$P(B_2) = 0{,}4$ (вероятность того, что деталь попадет ко второму контролеру);

$P_{B_1}(A) = 0{,}94$ (вероятность того, что годная деталь будет признана первым контролером стандартной);

$P_{B_2}(A) = 0{,}98$ (вероятность того, что годная деталь будет признана вторым контролером стандартной).

Искомая вероятность:

$P_A(B_1) = (0{,}6 \cdot 0{,}94)/(0{,}6 \cdot 0{,}94 + 0{,}4 \cdot 0{,}98) = 0{,}5899 \approx 0{,}590.$

Как видно, до испытания вероятность гипотезы B_1 равнялась 0,6, а после того, как стал известен результат испытания, вероятность этой гипотезы (точнее, условная вероятность) изменилась и стала равной 0,59. Таким образом, использование формулы Байеса позволило переоценить вероятность рассматриваемой гипотезы.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий по курсу
«Теория вероятностей и математическая статистика»

Тема: «Условная вероятность. Теоремы умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула вероятностей гипотез (формулы Байеса)»

Дидактическая цель. Познакомиться с понятием условной вероятности, изучить теоремы умножения зависимых и независимых событий, изучить методы вычисления вероятностей сложных событий с помощью формул полной вероятности Байеса.

Воспитательная цель. Сформировать у студентов такой метод научного познания как обобщение.

1. Теоретическая часть

По данной теме необходимо изучить теоретический материал, изложенный в [1, ч. 1, гл. 3, § 1-5; гл. 4. § 1-4].

2. Методические рекомендации

Изучив основные теоретические сведения, ответьте на контрольные вопросы, только затем приступите к решению задач.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулировать определение суммы и произведения событий.
2. Определение условной вероятности.
3. Теоремы о вероятности произведения независимых событий.
4. Теоремы о вероятности произведения зависимых событий.
5. Формула полной вероятности и формулы Байеса.
6. Какова роль формул Байеса?

3. Решение задач:

1. Совместно со студентами обсуждаются задачи №49, 64, 66, 89, 97, 105 из [2].

2. Решение задач из задачника [4]: гл. 2, № 2.12, 2.17, 2.19, гл. 3, № 3.5, 3.7, 3.12, 3.35.

49. Вероятности появления каждого из двух независимых событий A_1 и A_2 соответственно равны p_1 и p_2. Найти вероятность появления только одного из этих событий.

64. В читальном зале имеется шесть учебников по теории вероятностей, из которых три в переплете. Библиотекарь наудачу взял два учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в переплете.

66. В цехе работают семь мужчин и три женщины. По табельным номерам наудачу отобраны три человека. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами.

89. В урну, содержащую два шара, опущен белый шар, после чего из нее наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету).

97. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй – 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

105. Имеются три партии деталей по 20 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 20, 15, 10. Из наудачу выбранной партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Деталь возвращают в партию и вторично из той же партии наудачу извлекают деталь, которая также оказывается стандартной. Найти вероятность того, что детали были извлечены из третьей партии.

2.12. Из полной колоды карт (52 листа) вынимается одна карта. Рассматриваются события;

A – появление туза;

B – появление карты красной масти;

C – появление бубнового туза;

D – появление десятки.

Зависимы или независимы следующие пары событий:

1) A и B;	3) B и C;	5) C и D?
2) A и C;	4) B и D;	

2.17. В урне a белых и b черных шаров. Из урны в случайном порядке, один за другим, вынимают все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что вторым по порядку будет вынут белый шар.

2.19. Имеется коробка с девятью новыми теннисными мячами. Для игры берут три мяча, после игры их кладут обратно. При выборе мячей игранные от неигранных не отличают. Какова вероятность того, что после трех игр в коробке не останется неигранных мячей?

3.5. Завод изготовляет изделия, каждое из которых с вероятностью p имеет дефект. В цехе имеются три контролера; изделие осматривается только одним контролером, с одинаковой вероятностью первым, вторым или третьим. Вероятность обнаружения дефекта (если он имеется) для i-го контролера равна p_i (i =1, 2, 3). Если изделие не было забраковано в цехе, то оно попадет в ОТК завода, где дефект, если он имеется, обнаруживается с вероятностью p_0.

Определить вероятности следующих событий:

A – изделие будет забраковано;

B – изделие будет забраковано в цехе;

C – изделие будет забраковано в ОТК завода.

3.7. Имеются две урны: в первой a белых шаров и b черных, во второй c белых и d черных. Из первой урны во вторую перекладывают не глядя один шар. После этого из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

3.12. Имеется две партии однородных изделий: первая партия состоит из N изделий, среди которых n дефектных; вторая партия состоит из M изделий, среди которых m дефектных. Из первой партии берется случайным образом K изделий, а из второй L изделий $(K< N,\ L < M)$; эти $K + L$ изделий смешиваются и образуется новая партия. Из новой смешанной партии берется наугад одно изделие. Найти вероятность того, что изделие будет дефектным.

3.35. Завод изготовляет изделия, каждое из которых с вероятностью p имеет дефект. В цехе изделие с равной вероятностью осматривается одним из двух контролеров. Первый контролер обнаруживает имеющийся дефект с вероятностью p_1, второй – с вероятностью p_2. Если в цехе изделие не забраковано, оно поступает на ОТК завода, где дефект, если он имеется, обнаруживается с вероятностью p_0. Известно, что изделие забраковано. Найти вероятность того, что оно забраковано:

1) первым контролером;

2) вторым контролером;

3) ОТК завода.

4. Подведение итогов занятия

5. Домашнее задание

1. Из учебного пособия Гмурман В. Е. «Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике» [2] решить задачи: № 50, 60, 65, 91, 98, 107.

2. Решить и оформить задачу 1,3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7 к РГР 1.

50. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 – для первого сигнализатора и 0,9 – для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

60. Сколько надо бросить игральных костей, чтобы с вероятностью, меньшей 0,3, можно было ожидать, что ни на одной из выпавших граней не появится шесть очков?

65. Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранные билета окажутся выигрышными.

91. В вычислительной лаборатории имеются шесть клавишных автоматов и четыре полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения некоторого расчета автомат не выйдет из строя, равна 0,95; для полуавтомата эта вероятность равна 0,8. Студент производит расчет на наудачу выбранной машине. Найти вероятность того, что до окончания расчета машина не выйдет из строя.

98. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

107. Три стрелка произвели залп, причем две пули поразили мишень. Найти вероятность того, что третий стрелок поразил мишень, если вероятности попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелками соответственно равны 0,6, 0,5 и 0,4.

Примечание: предложить студентам для домашней проработки те из задач аудиторной работы, которые еще остались.

1.5. СХЕМА ПОВТОРНЫХ НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ (СХЕМА БЕРНУЛЛИ). ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ. НАИБОЛЕЕ ВЕРОЯТНОЕ ЧИСЛО УСПЕХОВ. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА

Повторные испытания. Формула Бернулли. Если производится несколько испытаний, причем вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют *независимыми относительно события А.* В разных независимых испытаниях событие A может иметь либо различные вероятности, либо одну и ту же вероятность. Будем далее рассматривать лишь такие независимые испытания, в которых событие A имеет одну и ту же вероятность.

Ниже воспользуемся понятием сложного события, понимая под ним совмещение нескольких отдельных событий, которые называют простыми.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться либо не появиться. Условимся считать, что вероятность события A в каждом испытании одна и та же, а именно равна p. Следовательно, вероятность ненаступления события A в каждом испытании также постоянна и равна $q=1-p$.

Искомую вероятность обозначим $P_n(k)$. Например, символ $P_5(3)$ обозначает вероятность того, что в пяти испытаниях событие A появится ровно 3 раза и, следовательно, не наступит 2 раза.

Если рассматривать все n испытаний как одно испытание, то его результатом является произведение событий A и $\overline{A}$. Здесь ввиду независимости исходных испытаний важен не порядок событий, а число повторений события A. Частоту события A обозначим через k, $0 < k < n$. Вероятность появления события A k раз вычисляют по *формуле Бернулли:*

$$p_k(n) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}. \tag{1.5.1}$$

Если нужно вычислить вероятности для всех значений k, $0 < k < n$, то можно воспользоваться формулой, с помощью которой p_k вычисляется по значению p_{k-1}:

$$p_k = \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{q} \cdot p_{k-1} \text{ }, k = 1, \ldots, n. \qquad (1.5.2)$$

Тогда p_0 следует вычислять по формуле (1.5.1), которая при $k = 0$ принимает вид $p_0 = q^n$, а все остальные p_k – по формуле (1.5.2). При больших значениях n и k вычисления по формуле Бернулли достаточно громоздки и, кроме того, на практике обычно не требуется такая высокая точность. Поэтому разработаны довольно точные приближенные методы вычисления вероятности p_k.

Иногда находят *наивероятнейшую частоту,* т.е. частоту, имеющую максимальную вероятность. Наивероятнейшая частота находится в интервале $np - q \leq k \leq np + p$. Длина этого интервала равна единице, поэтому если границы интервала – целые числа, то имеются две наивероятнейшие частоты, в противном случае – только одна.

Пример 1. В каждом из 11 независимых испытаний событие A происходит с постоянной вероятностью 0,3. Вычислить все вероятности p_k , $k = 0, 1, 2, ..., 11$, где k – частота события A. Построить график вероятностей p_k . Вычислить наивероятнейшую частоту.

Задано: $n = 11$, $p = 0{,}3$, $q = 1 - p = 0{,}7$.

Найти: $p_0, p_1, p_2, ..., p_{11}$ и k.

Используем формулу Бернулли $p_k = C_n^k p_k q^{n-k}$ и формулу вычисления последующего значения p_k через предыдущее значение p_{k-1} : $p_k = \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{q} \cdot p_{k-1}$. Значение p_0 вычисляем по первой из формул, а остальные вероятности p_k – по второй.

В рекуррентном соотношении вычисляем постоянный множитель

$$\frac{p}{q} = \frac{0{,}3}{0{,}7} = 0{,}4285714, \; p_0 = C_{11}^0 \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^{11} = 0{,}7^{11} = 0{,}0197732.$$

Результаты вычислений запишем в табл. 1.5.1.

Если вычисления верны, то должно выполняться равенство $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$. По найденным значениям вероятностей построим их график (рис. 1.5.1).

Таблица 1.5.1

k	$\frac{(n-k+1)}{k}$	p_k
0	–	0,0197732
1	11/1	0,0932168
2	10/2	0,1997503
3	9/3	0,2568218
4	8/4	0,2201330
5	7/5	0,1320798
6	6/6	0,0566056
7	5/7	0,0173282
8	4/8	0,0037131
9	3/9	0,0005304
10	2/10	0,0000454
11	1/11	0,0000017
$\sum$	–	0,9999994

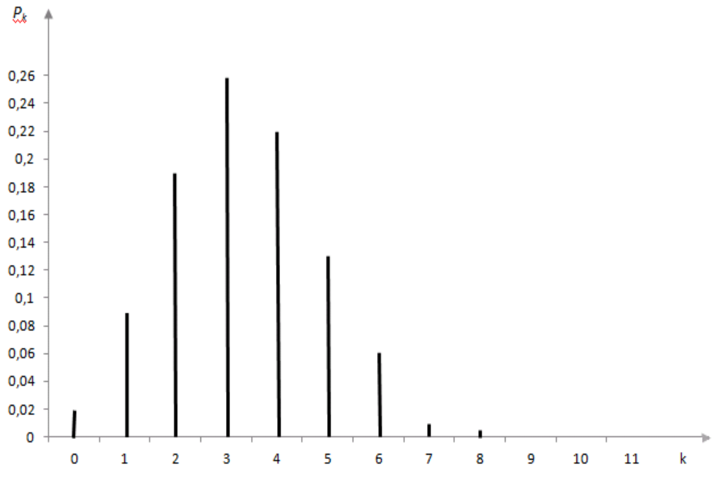

Рис. 1.5.1. График вероятностей p_k

Найдем наивероятнейшую частоту по заданным условиям:

$$n\,p - q \le k \le n\,p + p\,, \qquad (1.5.3)$$

$$np - q = 11 \cdot 0,3 - 0,7 = 3,3 - 0,7 = 2,6,$$
$$np + p = 11 \cdot 0,3 + 0,3 = 3,3 + 0,3 = 3,3.$$

Значит наивероятнейшая частота $k = 3$ и, как и было получено ранее, значение p_3 является максимальным.

Формулы Муавра – Лапласа и Пуассона. Локальная теорема Лапласа дает асимптотическую формулу, которая позволяет приближенно найти вероятность появления события ровно k раз в n испытаниях, если число испытаний достаточно велико. (Функцию $\varphi(x)$ называют асимптотическим приближением функции $f(x)$, если $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1$).

Заметим, что для частного случая, а именно для $p = 1/2$, асимптотическая формула была найдена в 1730 г. Муавром; в 1783 г. Лаплас обобщил формулу Муавра для произвольного p, отличного от 0 и 1. Поэтому теорему, о которой здесь идет речь, иногда называют *локальной теоремой Муавра—Лапласа*.

Теорема 1. Если при n независимых испытаниях событие A происходит с постоянной вероятностью p, которая не очень близка к нулю и единице ($0 < p < 1$), то при достаточно большом количестве испытаний n вероятность того, что событие A произойдет k раз, приближенно равна:

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \tag{1.5.4}$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \; x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$. (1.5.5)

Функция $\varphi(x)$ – четная ($\varphi(-x) = \varphi(x)$) и принимает только неотрицательные значения (рис. 1.5.2). Для нее составлены таблицы (см. приложение 1). Так как график функции симметричен относительно оси ординат, то таблицы составлены только для положительных значений аргумента.

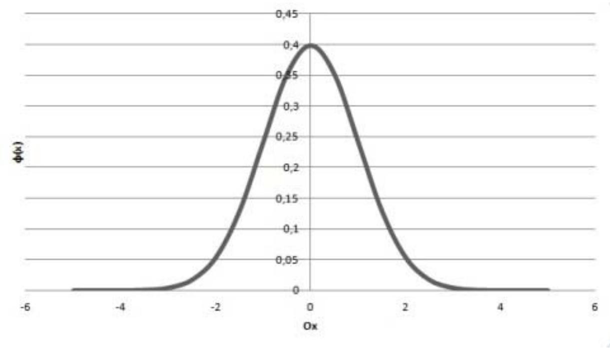

Рис. 1.5.2 График функции $\varphi(x)$

Пример 2. Вероятности попадания по мишени, равно как и промаха, равны ($p = q = 0{,}5$). Определить вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена 55 раз.

Решение. Исходными данными задачи являются: $p = q = 0{,}5$; $n = 100$; $k = 55$. Если вычислять вероятность по формуле Бернулли (1.5.1), то она равна:

$$p_n(k) = p_{100}(55) = C_{100}^{55} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{55} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{45} = 0{,}0485.$$

В то же время применение асимптотической формулы (1.5.4) и (1.5.5) дает упрощенное выражение:

$$P_n(k) = P_{100}(55) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1^2}{2}} = \frac{1}{5} \cdot \varphi(1) = \frac{1}{5} \cdot 0{,}2420 = 0{,}0484,$$

где $x = \frac{a-np}{\sqrt{npq}} = \frac{55-100\cdot0{,}5}{\sqrt{100\cdot0{,}5\cdot0{,}5}} = 1$, а значение $\varphi(x) = \varphi(1)$ определяется по таблице приложения 1 и будет равно 0,2420.

Если вероятность p реализации события A близка к нулю или к единице, то следует использовать *теорему Пуассона*, которая в этом случае дает большую точность.

Теорема 2. Если при n независимых испытаниях событие A происходит с вероятностью p, близкой к 0 (например, $n > 100$, $\lambda = np < 10$), то при достаточно большом n вероятность осуществления события A k раз приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = np. \qquad (1.5.6)$$

Вероятность появления события A не более k раз будет вычисляться по формуле:

$$p(m \le k) \approx e^{-\lambda} \cdot \sum_{m=0}^{k} \frac{\lambda^m}{m!}, \text{ где } \lambda = np. \qquad (1.5.7)$$

Для упрощения расчетов по формулам (1.5.6), (1.5.7) можно воспользоваться их табулированными значениями (приложение 3).

Пример 3. Известно, что при стрельбе из пистолета Макарова 2,5% патронов дают осечку. Найти вероятность того, что при 200 выстрелах дадут осечку: а) ровно 4 патрона; б) не более 6 патронов.

Решение. Так как по условию задачи вероятность осечки патрона равна p =0,025 и она мала, количество выстрелов n = 200 велико и $\lambda = np = 200 \cdot 0{,}025 = 5 < 10$, для определения этих вероятностей можно применить формулу Пуассона (табл. приложения 3):

а) $P_{200}(4) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{5^4}{4!} \cdot e^{-5} \approx 0{,}1755,$

б) $P_{200}(m \le 6) \approx e^{-\lambda} \cdot \sum_{m-0}^{k} \frac{\lambda^m}{m!} \approx e^{-5} \cdot \sum_{m=0}^{6} \frac{5^m}{m!} \approx 0{,}7622.$

Часто нужно найти вероятность того, что частота появления события A находится в каком-то интервале. Эту проблему позволяет решить *интегральная теорема Муавра – Лапласа:*

Теорема 3. Если в n независимых испытаниях событие A происходит с постоянной вероятностью p, которая отличается от 0 *и 1*, то при достаточно большом n вероятность того, что частота k события A находится в интервале $[a, b]$, приближенно равна

$$P_n(a \le k \le b) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (1.5.8)$$

$$\text{где} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \qquad (1.5.9)$$

$$x_1 = \frac{a-np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{b-np}{\sqrt{npq}}. \qquad (1.5.10)$$

Функция $\Phi(x)$ является интегралом от функции $\varphi(x)$ [см. формулу (1.5.9)] и принимает значения в интервале [0, 1], при этом $\Phi(-\infty) = 0$, $\Phi(\infty) = 1$ и $\Phi(0) = 0{,}5$. Геометрический смысл функции $\Phi(x)$ приведен на рис. 1.5.3.

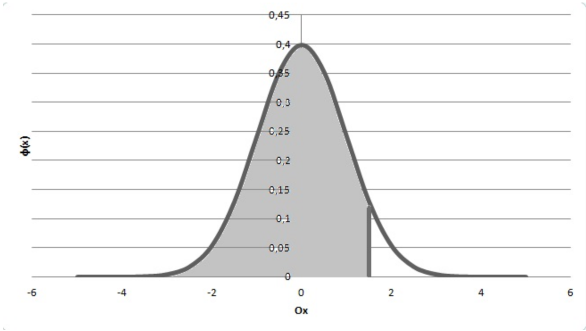

Рис. 1.5.3 Геометрический смысл функции *Ф(x)*

Для функции $\Phi(x)$ составлены таблицы (см. приложение 2). Таблицы составлены только для положительных значений аргумента. Для отрицательных аргументов значения функции можно получить из этой же таблицы, используя соотношение

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x). \qquad (1.5.11)$$

Пример 4. Вероятность того, что любой студент своевременно выполнит упражнения по стрельбе, равна 0,8. Определить вероятность того, что из 100 студентов не менее 75 (т.е. от 75 до 100 студентов) своевременно выполнят упражнения по стрельбе.

Решение. Так как значение $n = 100$ велико при оптимальных $p = 0{,}8$ и $q = 1 - p = 0{,}2$, то задача решается с помощью интегральной формулы Муавра – Лапласа (1.5.8 – 1.5.10):

$$P_{100}(75 \le k \le 100) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1);$$

$$x_1 = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -1{,}2;\ x_2 = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 5;$$

$$P_{100}(75 \le k \le 100) \approx \Phi(5) - \Phi(-1{,}2) = \Phi(5) - \big(1 - \Phi(1{,}2)\big) =$$
$$= 1 - (1 - 0{,}8849) = 0{,}8849.$$

Иногда нужно решить следующую задачу. В n независимых испытаниях событие A происходит с постоянной вероятностью p. Найти вероятность того, что относительная частота k/n события A отличается от вероятности события A по абсолютной величине не больше чем на $\varepsilon > 0$. Решение этой задачи сводится к использованию интегральной формулы Муавра – Лапласа (1.5.8), с помощью которой для решения данной задачи получаем следующую формулу:

$$P_n\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)-1. \qquad (1.5.12)$$

Пример 5. В каждом из 500 независимых испытаний событие A происходит с постоянной вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что событие A происходит:

а) точно 220 раз;

б) точно 190 раз;

в) меньше чем 240 и больше чем 180 раз;

г) меньше чем 235 раз.

При решении этой задачи используем теоремы Муавра – Лапласа: локальную в случаях а) и б) и интегральную для случаев в) и г).

а) *Задано*: n = 500, p = 0,4, k= 220.

Найти: $P_{500}(220)$.

Имеем:

$$\sqrt{n\,p\,q}=\sqrt{500\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}=\sqrt{120}\approx 11;$$

$$x=\frac{220-500\cdot 0{,}4}{11}=1{,}82; \qquad f(1{,}82)=0{,}07614.$$

$$P_{500}(220)=\frac{0{,}07614}{11}=0{,}00692.$$

б) *Задано*: n = 500, p = 0,4, k = 190.

Найти: $P_{500}(190)$.

Получаем:

$$\sqrt{n\,p\,q}=\sqrt{500\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}=\sqrt{120}\approx 11;$$

$$x=\frac{190-500\cdot 0{,}4}{11}=-0{,}91; \qquad f(-0{,}91)=0{,}26369.$$

$$P_{500}(190)=\frac{0{,}26369}{11}=0{,}02397.$$

в) *Задано*: n = 500, p = 0,4, a = 190, b = 240.

Найти: $P_{500}(180<k<240)$.

Находим:

$$\sqrt{n\,p\,q} = \sqrt{500 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = \sqrt{120} \approx 11;$$

$$x_1 = \frac{180 - 500 \cdot 0{,}4}{11} = -1{,}82; \quad x_2 = \frac{240 - 500 \cdot 0{,}4}{11} = 3{,}64;$$

$$P_{500}(180 < k < 240) = \Phi(3{,}64) - \Phi(-1{,}82) = 0{,}96548.$$

г) *Задано*: $n = 500$, $p = 0{,}4$, $a = 0$, $b = 235$.

Найти: $P_{500}(k < 235)$.

Имеем:

$$\sqrt{n\,p\,q} = \sqrt{500 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = \sqrt{120} \approx 11;$$

$$x_1 = \frac{0 - 500 \cdot 0{,}4}{11} = -18; \quad x_2 = \frac{235 - 500 \cdot 0{,}4}{11} = 3{,}18;$$

$$P_{500}(k < 235) = P_{500}(0 < k < 235) = \Phi(3{,}18) - \Phi(-18) = 0{,}99926.$$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий по курсу

«Теория вероятностей и математическая статистика»

Тема: «Схема повторных независимых испытаний (схема Бернулли). Формула Бернулли. Наиболее вероятное число успехов. Приближенные формулы Лапласа и Пуассона»

Дидактическая цель. Изучить методы вычисления вероятностей событий с помощью формул Бернулли, а также вычисления этих вероятностей с помощью асимптотических формул.

Воспитательная цель. Сформировать у студентов такой метод научного познания как обобщение**.**

1. Теоретическая часть:

По данной теме необходимо изучить теоретический материал, изложенный в [1, ч. 1, гл.5. §1 – 4].

2. Методические рекомендации

Изучив основные теоретические сведения, ответьте на контрольные вопросы, только затем приступите к решению задач.

Вопросы для самопроверки

1. В каких опытах для определения вероятности используют формулу Бернулли? Поясните смысл формулы и смысл входящих в нее величин.

2. Выпишите формулы Муавра-Лапласа и Пуассона. Поясните их смысл и смысл входящих в них величин.

3. В чем отличие в использовании формул Бернулли, Муавра-Лапласа и Пуассона для решения задач теории вероятностей и в чем сходство?

3. Решение задач:

1. Совместно со студентами обсуждаются задачи № 106, 108, 110, 119, 125 из [2].

2. Решение задач из задачника [4, гл.4. №4.1].

106. Батарея из трех орудий произвела залп, причем два снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что первое орудие дало попадание, если вероятности попадания в цель первым, вторым и третьим орудиями соответственно равны $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,3$, $p_3 = 0,5$.

108. Два из трех независимо работающих элементов вычислительного устройства отказали. Найти вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,2; 0,4 и 0,3.

110. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?

119. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

125. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна $p = 0,8$. Найти вероятность того, что событие появится :

а) не менее 75 раз и не более 90 раз;

б) не менее 75 раз;

в) не более 74 раз.

4.1. Прибор состоит из 10 узлов. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени t) для каждого узла равна p. Узлы выходят из строя независимо один от другого. Найти вероятность того, что за время t :

а) откажет хотя бы один узел;

б) откажет ровно один узел;
в) откажут ровно два узла;
г) откажет не менее двух узлов.

4. Подведение итогов занятия.

5. Домашнее задание

1. Из учебного пособия В.Е. Гмурмана «Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике» решить задачи: № 50, 60, 65, 91, 98, 107, 111, 121, 126.

2. Решить и оформить задачу 1,3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7 к РГР 1.

№50. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

№60. Сколько надо бросить игральных костей, чтобы с вероятностью, меньшей 0,3, можно было ожидать, что ни на одной из выпавших граней не появится шесть очков?

№65. Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранные билета окажутся выигрышными.

№91. В вычислительной лаборатории имеются шесть клавишных автоматов и четыре полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения некоторого расчета автомат не выйдет из строя, равна 0,95; для полуавтомата эта вероятность равна 0,8. Студент производит расчет на наудачу выбранной машине. Найти вероятность того, что до окончания расчета машина не выйдет из строя.

№98. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

№107. Три стрелка произвели залп, причем две пули поразили мишень. Найти вероятность того, что третий стрелок поразил мишень, если вероятности попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелками соответственно равны 0,6, 0,5 и 0,4.

№111. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее: а) выиграть одну партию из двух или две партии из четырех? б) выиграть не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти? Ничьи во внимание не принимаются.

№121. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

№126. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 1470 и не более 1500 раз; б) не менее 1470 раз; в) не более 1469 раз.

Примечание: предложить студентам для домашней проработки те из задач аудиторной работы, которые еще остались.

1.6. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ, РЯД РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Одним из важнейших понятий в теории вероятностей является понятие *случайной величины.*

Величина X называется *случайной***,** если в результате опыта она может принимать любые заранее неизвестные значения.

Случайные величины делятся на *дискретные и непрерывные*.

Величина X называется *дискретной***,** если она может принимать определенные, фиксированные значения. Например, число ежедневно продаваемых в магазине холодильников является дискретной случайной величиной.

Случайная величина называется ***непрерывной*****,** если она может принимать значения, сколь угодно мало отличающиеся друг от друга. Примером непрерывной случайной величины является время заправки автомашины на автозаправочной станции.

Функция распределения дискретной и непрерывной случайной величины. Для дискретной случайной величины, так же как и для непрерывной, вводится понятие *функции распределения,* которая представляет собой вероятность события $X < x$, где x – задаваемые непрерывно изменяющиеся значения, т. е.

$$F(x) = P(X < x). \tag{1.6.1}$$

Функция распределения $F(x)$ – неубывающая, непрерывная слева функция, определенная на всей числовой оси, при этом $F(-\infty) = 0$ и $F(\infty) = 1$.

Закон распределения дискретной случайной величины X можно определить с помощью ряда распределения, заданного в следующем виде:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

В первой строке указаны все значения x_i дискретной случайной величины X, а во второй – вероятности p_i принятия случайной величиной соответствующих значений x_i. Сумма всех вероятностей равна единице.

Если дискретные значения случайной величины x_1, x_2, ..., x_n расположены в порядке возрастания, то каждому значению x_i этих величин ставится в соответствие сумма вероятностей всех предыдущих значений и вероятности p_i:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i . \tag{1.6.2}$$

Так как до значения x_1 случайная величина X не встречалась, то и вероятность события $X < x_1$ равна нулю. Для всех значений $x_1 < x \le x_2$ вероятность события $X < x$ совпадает с вероятностью значения x_1, т. е. p_1. Но при $x > x_2$ случайная величина уже может принимать два возможных значения x_1 и x_2, поэтому вероятность события $X < x$ для $x_2 < x \le x_3$ будет равна сумме вероятностей p_1 и p_2 и т. д. Нанося на график возможные дискретные значения случайной величины x и соответствующие суммы вероятностей, получаем ступенчатую фигуру, которая и является графиком функции распределения вероятностей дискретной случайной величины (рис. 1.6.1).

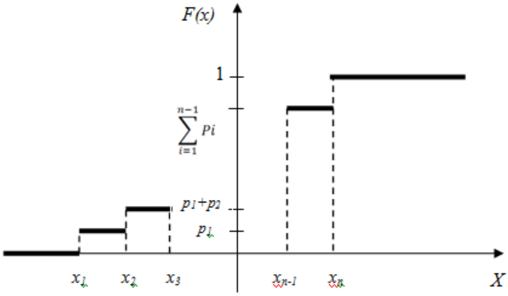

Рис. 1.6.1. График функции распределения *F(x)*
дискретной случайной величины *X*

Формулу (1.6.2) можно записать в следующем виде, наглядно иллюстрирующем непрерывность слева функции распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le x_1\,, \\ p_1, & x_1 < x < x_2\,, \\ p_1+p_2, & x_2 < x \le x_3\,, \\ \ldots\ldots & \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} p_i\,, & x_{n-1} < x \le x_n\,, \\ 1, & x > x_n\,. \end{cases} \qquad (1.6.3)$$

Закон распределения непрерывной случайной величины задается или *функцией распределения,* или *функцией плотности вероятности.*

Функция распределения непрерывной случайной величины *X* представляется в виде интеграла

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \qquad (1.6.4)$$

где $f(t) > 0$ – функция плотности вероятности. График этой функции (рис. 1.6.2) всегда охватывает фигуру, площадь которой равна единице. Это следует из свойства функции распределения: $F(\infty) = 1$, так как

$$F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1. \qquad (1.6.5)$$

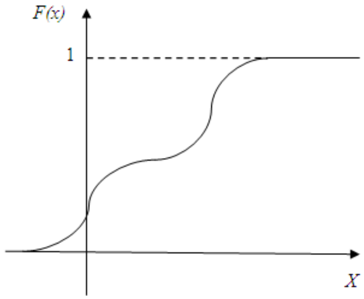

Рис. 1.6.2. График функции распределения *F(x)* непрерывной случайной величины *X*

Итак, из формулы (1.6.4) плотностью распределения вероятностей *f(x)* непрерывной случайной величины *X* называется производная от ее функции распределения вероятностей

$$f(x) = F'(x). \qquad (1.6.6)$$

Если заданы два значения x_1 и x_2 непрерывной случайной величины $X(x_1<x_2)$, то вероятность того, что *X* принимает значение в интервале $[x_1, x_2]$, равна:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Числовые характеристики случайной величины

Математическое ожидание и его свойства. *Математическим ожиданием* дискретной случайной величины *X* называется сумма произведений всех ее значений на соответствующие вероятности:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i\,. \qquad (1.6.7)$$

Пример 1. В магазин ежедневно поступает не более пяти радиоприемников. Известны вероятности их поступления

$p_0 = 0{,}1$, $p_1, = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}1$, $p_3 = 0{,}15$, $p_4, = 0{,}2$, $P_5 = 0{,}25$.

Найти математическое ожидание числа поступлений радиоприемников.

Решение. Математическое ожидание:

$M_x = 0 \cdot 0{,}1 + 1{\cdot}0{,}2 + 2{\cdot}0{,}1 + 3 \cdot 0{,}15 + 4 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}25 = 2{,}9.$

Математическое ожидание случайной величины – это постоянная величина, которая показывает, какое значение случайной величины можно ожидать в среднем при проведении серии опытов.

Существует ряд *свойств* математического ожидания, которые формулируются в виде теорем.

Теорема 1. Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной: $M(C) = C$.

Теорема 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(kX) = k\,M(X)$.

Теорема 3. Математическое ожидание суммы конечного числа случайных величин равно сумме их математических ожиданий.

$M(X + Y) = M(X) + M(Y)$.

Следствие. Математическое ожидание *отклонения случайной величины X* от ее математического ожидания равно нулю. Действительно,

$M\,(X - M_x) = M_x - M_x = 0.$

Теорема 4. Математическое ожидание произведения конечного числа независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий: $M(X\,Y) = M(X)\,M(Y)$.

Пример 2. Рассмотрим две дискретные случайные величины *X и Y*. Первая принимает значения –1 и 1 с вероятностями 0,5. Вторая принимает значения –5 и 5 с теми же вероятностями 0,5. Математические ожидания этих величин одинаковы и равны нулю:

$$M(X) = -1 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}5 = 0,$$

$$M(Y) = -5 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}5 = 0.$$

Однако очевидно, что вторая величина сильнее отклоняется от своего математического ожидания в конкретных реализациях, чем первая. Чтобы учесть и оценить эти отклонения, можно в *качестве меры разброса* взять математическое ожидание квадрата отклонений случайной величины от ее математического ожидания.

Дисперсия и ее свойства. *Дисперсией* случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения ее от математического ожидания самой величины:

$$D(X) = M(X - M_x)^2. \qquad (1.6.8)$$

В рассмотренном выше случае (пример 2):

$D_x = (-1)^2 \cdot 0,5 + 1^2 \cdot 0,5 = 1,$

$D_y = (-5)^2 \cdot 0,5 + 5^2 \cdot 0,5 = 25.$

Для непрерывных случайных величин, так же как и для дискретных, используются понятия математического ожидания и дисперсии.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется значение интеграла

$$M(x) = M_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx, \text{ где } f(x) \text{ – плотность вероятности.} \qquad (1.6.9)$$

Дисперсией непрерывной случайной величины X называется значение интеграла

$$D(x) = D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_x)^2 f(x)\,dx. \qquad (1.6.10)$$

Средним квадратичным отклонением случайной величины X называется арифметическое значение корня квадратного из ее дисперсии:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}\,. \qquad (1.6.11)$$

Так же как и для математического ожидания, свойства дисперсий обычно формулируются в виде теорем.

Теорема 5. Дисперсия постоянной величины равна нулю: $D(C) = 0$.

*Теорема 6***.** Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его при этом в квадрат:

$D(kX) = k^2 D(X).$

Теорема 7. Дисперсия случайной величины равна разности математического ожидания ее квадрата и квадрата математического ожидания самой величины:

$$D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2.$$

Теорема 8. Дисперсия суммы конечного числа независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$

Основные свойства математического ожидания и дисперсии для непрерывных случайных величин остаются такими же, как и для дискретных случайных величин.

Математическое ожидание и дисперсия числа появлений события в независимых испытаниях. Если вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания являются *независимыми.* Пусть эти вероятности одинаковы и равны p. Тогда вероятность ненаступления события A в испытании $q = 1 - p$.

Теорема 9. Математическое ожидание числа появлений события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события A в каждом испытании.

$M(X) = np.$

Теорема 10. Дисперсия числа появлений события A в n независимых испытаниях равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в одном испытании:

$D_x = npq.$

Пример 3. В пяти торговых точках проверяется годовой баланс. Вероятность правильного оформления баланса в каждой точке равна 0,7. Найти математическое ожидание и дисперсию правильно оформленных балансов.

Решение. Дано: $n = 5$, $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$.

Тогда $M_x = 5 \cdot 0{,}7 = 3{,}5$, $D_x = 5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 1{,}05$.

Начальные и центральные моменты. Кроме математического ожидания и дисперсии для оценки случайной величины используются и другие числовые характеристики. Все эти числовые характеристики носят общее название моментов случайной величины. Различают *начальные и центральные моменты.*

Начальным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины X^k:

$$\upsilon_k = M(X^k).$$

Центральным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины $(X - M_x)^k$:

$\mu_k = M((X - M_x)^k)$.

Начальный момент первого порядка представляет математическое ожидание самой случайной величины *X:* $\upsilon_1 = M(X)$.

Центральный момент первого порядка равен нулю:

$\mu_1 = M(X - M_x) = 0$.

Центральный момент второго порядка представляет собой дисперсию случайной величины:

$\mu_2 = M(X - M_x)^2 = D_x$.

Для дискретных случайных величин:

$$\upsilon_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\ k} p_i ; \quad \mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M_x)^k p_i . \qquad (1.6.12)$$

Начальные и центральные моменты для непрерывной случайной величины находятся по формулам:

$$\upsilon_k = M(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx, \qquad (1.6.13)$$

$$\mu_k = M(X - M_x)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_x)^k f(x) dx. \qquad (1.6.14)$$

Мода и медиана. *Модой (Мо)* называется значение случайной величины, которое встречается чаше всего, т.е. имеет максимальную вероятность (для дискретной случайной величины) или максимум функции плотности вероятности в данной точке (для непрерывной случайной величины).

Одна и та же случайная величина может иметь одну или несколько мод. Однако возможно, что случайная величина и не имеет моды (если все ее значения имеют одинаковую вероятность (равномерное распределение)).

Определим сначала понятие *квантиля непрерывной случайной величины.* Корень уравнения $F(x) = p$, где $F(x)$ – функция распределения и $0 < p < 1$ называется p-квантилем x_p (рис. 1.6.3): 1/2-квантиль называется *медианой* (Me).

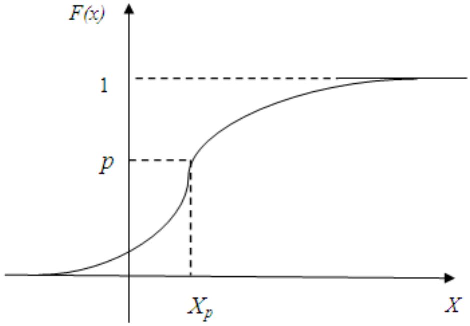

Рис. 1.6.3. p-квантиль

Учитывая определение функции распределения $F(x)$ (формулу (1.6.4)), получаем $P(X < Me) = 1/2$ и отсюда $P(X>Me) = 1/2$. Таким образом, медиана делит область значений случайной величины на две равные по вероятности части.

Медианой Me непрерывной случайной величины X называется такое ее значение, которое определяется равенством

$$P(X< Me(X)) = P(X> Me(X)).$$

Пример 4. Случайная величина X задана рядом распределения

3	5	7	11
0,14	0,20	0,49	0,17

Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X и построить ее график. Вычислить для X ее среднее значение $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и моду Mo.

Функцию распределения находим по формулам для дискретных случайных величин (1.6.2) и (1.6.3):

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3,\\ 0{,}14, & 3<x\le 5,\\ 0{,}34, & 5<x\le 7,\\ 0{,}83, & 7<x\le 11\\ 1, & x>11.\end{cases}$$

Построим график функции распределения $F(x)$ (рис. 1.6.4).

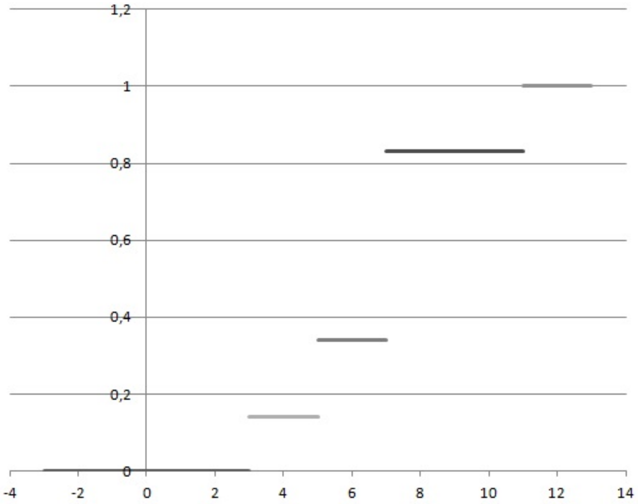

Рис. 1.6.4. График функции распределения

Среднее значение $M(X)$ вычисляем по формуле $M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$:

$M(X) = 3 \cdot 0{,}14 + 5 \cdot 0{,}2 + 7 \cdot 0{,}49 + 11 \cdot 0{,}17 = 6{,}72$.
Для нахождения дисперсии воспользуемся формулами

$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$ и $D(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \cdot p_i -$

$-(M(X))^2$: $M(X^2) = 3^2 \cdot 0{,}14 + 5^2 \cdot 0{,}2 + 7^2 \cdot 0{,}49 + 11^2 \cdot 0{,}17 =$
$= 50{,}84$,

$D(X) = 50{,}84 - 6{,}72^2 = 5{,}6816$.

Моду Mo найдем по максимальной вероятности $Mo = 7$.

Пример 5. Случайная величина *X* задана функцией плотности вероятности.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x/2, & 0 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения *F(x)* случайной величины *X*. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$. Вычислить для *X* ее среднее значение *M(X),* дисперсию *D(X),* моду *Mo* и медиану *Me*.

Функцию распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины находим по формуле:

$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$, где $f(x) > 0$ − функция плотности вероятности.

$$F(x) = \int\limits_0^x \frac{t}{2}dt = \left.\frac{t^2}{4}\right|_0^x = \frac{x^2}{4}, \quad 0 \le x \le 2.$$

Поэтому

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^2/4, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Построим графики функций $f(x)$ (рис. 1.6.5) и $F(x)$ (рис. 1.6.6).

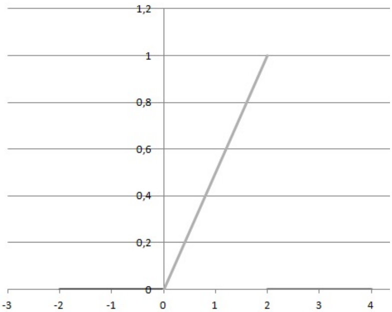

Рис. 1.6.5 График функции плотности вероятности $f(x)$

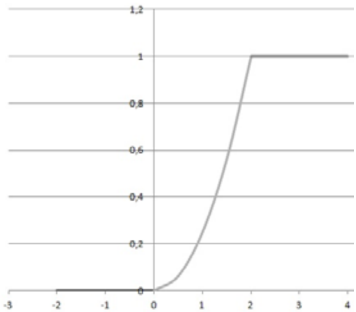

Рис. 1.6.6 График функции распределения $F(x)$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий по курсу
«Теория вероятностей и математическая статистика»

Тема: «Случайные величины. Закон распределения вероятностей. Функция распределения случайной величины. Ряд распределения. Плотность распределения. Числовые характеристики случайной величины».

Дидактическая цель. Приобретение навыков распознавания дискретной и непрерывной случайной величин, знакомство с законом распределения дискретной случайной величины (ДСВ), плотностью распределения непрерывной случайной величины (НСВ), а также умение строить их функции распределения и вычислять числовые характеристики.

Воспитательная цель. Формирование научного подхода студентов к научному познанию окружающей действительности, выявление объективных закономерностей в случайных явлениях, которые носят статистический характер.

1. Теоретическая часть

По данной теме необходимо изучить теоретический материал, изложенный в [1, ч.2, гл.6, §1-3; гл.7, §1 – 5.; гл.8, §1 – 10; гл.10, §1 - 3, гл.11, §1 – 5].

2. Методические рекомендации

Изучив основные теоретические сведения, ответьте на контрольные вопросы, только затем приступите к решению задач.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое СВ? Какие СВ называют дискретными? непрерывными?
2. Представьте графическое изображение закона распределения дискретной СВ.
3. Что представляет собой функция распределения СВ? Укажите возможные пределы изменения функции распределения. Чем отличаются функции распределения для дискретных и непрерывных СВ?
4. Как с помощью функции распределения найти вероятность попадания СВ в заданный интервал?

5. Что называется плотностью вероятностей СВ? Запишите формулу для ее определения. Как найти функцию распределения по заданной плотности вероятностей?

6. Поясните на графиках связь между функцией распределения и плотностью вероятностей.

7. Что представляет собой математическое ожидание? В чем разница в определении этой характеристики для дискретных и непрерывных СВ? Перечислите основные свойства математического ожидания.

8. Что такое дисперсия? Как дисперсия связана со средним квадратичным отклонением? Перечислите основные свойства дисперсии.

3. Решение задач

Совместно со студентами обсуждается решение следующих задач из [2]: № 164, 170, 188 (а), 208, 210, 228, 230, 252, 256, 260, 262, 275, 295, 305.

164. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	3	6	8
p	0,2	0,1	0,4	0,3

Построить многоугольник распределения.

170. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Замечание. Рассматриваемый закон называют *гипергеометрическим.*

188. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

а)

X	4	6	10
p	0,2	0,3	0,5

б)

X	0,21	0,54	0,61
p	0,1	0,5	0,4

208. Случайные величины X и Y независимы. Найти дисперсию случайной величины $Z = 3X + 2Y$, если известно, что $D(X) = 5$, $D(Y) = 6$.

210. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины *X,* заданной законом распределения:

X	-5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

228. Дискретная случайная величина *X* задана законом распределения:

X	1	3
p	0,4	0,6

Найти начальные моменты первого, второго и третьего порядков.

230. Дискретная случайная величина *X* задана законом распределения:

X	2	3	5
p	0,1	0,3	0,6

Найти центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

252. Случайная величина *X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le -1,\\ \dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4} & \text{при} \quad -1<x\le \dfrac{1}{3},\\ 1 & \text{при} \quad x>\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина *X* примет значение, заключенное в интервале (0, 1/3).

256. Случайная величина *X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 2,\\ 0{,}5x & \text{при} \quad 2<x\le 4,\\ 1 & \text{при} \quad x>4. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение: а) меньшее 0,2; б) меньшее трех; в) не меньшее трех; г) не меньшее пяти.

260. Дискретная случайная величина *X* задана законом распределения:

X	2	4	7
p	0,5	0,2	0,3

Найти функцию распределения *F (x)* и начертить ее график.

262. Дана функция распределения непрерывной случайной величины *X:*

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \sin x & \text{при} \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при} \quad x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$.

275. Случайная величина *X* задана плотностью распределения $f(x) = 2x$ в интервале (0, 1); вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание величины *X*.

295. Случайная величина *X* в интервале $(0, \pi)$ задана плотностью распределения $f(x) = (1/2)\sin x$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти дисперсию *X*.

305. Случайная величина *X* задана плотностью распределения $f(x) = 0{,}5x$ в интервале (0, 2); вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти начальные и центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

4. Подведение итогов занятия.

5. Домашнее задание

1. Из учебного пособия [2] решить задачи: № 165, 171, 188 (б), 209, 211, 229, 231, 253, 257, 261, 263, 276, 296, 306.
2. Решить и оформить задачи 1.7, 1.8 к РГР 1.

165. Дискретная случайная величина *X* задана законом распределения:

а)

X	2	4	5	6
p	0,3	0,1	0,2	0,4

б)

X	10	15	20
p	0,1	0,7	0,2

Построить многоугольник распределения.

171. В партии из шести деталей имеется четыре стандартных. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины *X* – числа стандартных деталей среди отобранных.

209. Случайные величины *X* и *Y* независимы. Найти дисперсию случайной величины $Z = 2X+3Y$, если известно, что $D(X) = 4$, $D(Y) = 5$.

211. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

а)

X	4,3	5,1	10,6
p	0,2	0,3	0,5

б)

X	131	140	160	180
p	0,05	0,10	0,25	0,60

229. Дискретная случайная величина *X* задана законом распределения:

X	2	3	5
p	0,1	0,4	0,5

Найти начальные моменты первого, второго и третьего порядков.

231. Дискретная случайная величина *X* задана законом распределения

X	3	5
p	0,2	0,8

Найти центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

Указание. Найти предварительно начальные моменты и выразить через них центральные моменты.

253. Случайная величина *X* задана на всей оси *Ox* функцией распределения $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{\pi}$. Найти вероятность того, что в результате испытания величина *X* примет значение, заключенное в интервале (0, 1).

257. Случайная величина *X* задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} & x \le 0, \\ x^2 \quad \text{при} & 0 < x \le 1, \\ 1 \quad \text{при} & x > 1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний величина *X* ровно три раза примет значение, принадлежащее интервалу (0,25, 0,75).

261. Дискретная случайная величина задана законом распределения

X	3	4	7	10
p	0,2	0,1	0,4	0,3

Найти функцию распределения и построить ее график.

263. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \sin 2x & \text{при} \quad 0 < x \le \pi/4, \\ 1 & \text{при} \quad x > \pi/4. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$.

276. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = \frac{1}{2}x$ в интервале (0; 2); вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание величины X.

296. Случайная величина X в интервале (0, 5) задана плотностью распределения $f(x) = \frac{2}{25}x$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти дисперсию X.

306. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = 2x$ в интервале (0, 1); вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти начальные и центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

1.7. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Для практики очень важно знание условий, при выполнении которых совокупное действие очень многих случайных причин приводит к результату, почти не зависящему от случая, так как позволяет предвидеть ход явлений. Эти условия и указываются в теоремах, носящих общее название закона больших чисел.

Понятие о законе больших чисел. В первой половине XIX в. в связи с задачами теории стрельбы С. Пуассон обобщил теорему Бернулли. Более широкое обобщение было сделано русским математиком П. Л. Чебышевым. Теорема Чебышева показывает глубокие закономерности мира случайных событий. Дальнейшие уточнения закона больших чисел были сделаны в работах русских и советских математиков А. А. Маркова, А. А. Ляпунова, С. Н. Бернштейна (1880— 1968), А. Я. Хинчина, А. Н. Колмогорова, что несомненно показывает приоритет русской науки.

Простейшим законом больших чисел является теорема Бернулли. Она устанавливает связь между частотой события и его вероятностью. Теорема Бернулли утверждает, что при большом количестве испытаний частота события A оказывается близкой к его вероятности. Эта теорема широко используется для приближенной оценки неизвестных вероятностей.

Теорема Чебышева является наиболее общим законом больших чисел, теорема Бернулли – простейшим. Для доказательства этих теорем используется неравенство Чебышева.

Неравенство Чебышева. Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше, чем $1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$:

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon) \geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (1.7.1)$$

Теорема Чебышева. Если $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ — попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышают постоянного числа С), то как бы мало ни было положительное число ε, вероятность неравенства

$$\left|\frac{X_1+...+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+...+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon \qquad (1.7.2)$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Другими словами, в условиях теоремы

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+...+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+...+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)=1 \qquad (1.7.3)$$

Таким образом, теорема Чебышева утверждает, что если рассматривается достаточно большое число независимых случайных величин, имеющих ограниченные дисперсии, то почти достоверным можно считать событие, состоящее в том, что отклонение среднего арифметического случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий будет по абсолютной величине сколь угодно малым.

Частный случай теоремы Чебышева. Если $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ – попарно независимые случайные величины, имеющие одно и то же математическое ожидание a, и если дисперсии этих величин равномерно ограничены, то, как бы мало ни было число $\varepsilon > 0$, вероятность неравенства

$$\left| \frac{X_1 + ... + X_n}{n} - a \right| < \varepsilon \qquad (1.7.4)$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Другими словами, в условиях теоремы

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left| \frac{X_1 + ... + X_n}{n} - a \right| < \varepsilon \right) = 1 \qquad (1.7.5)$$

Сущность теоремы Чебышева. Сущность доказанной теоремы такова: отдельные случайные величины могут иметь значительный разброс, а их среднее арифметическое рассеянно мало.

Таким образом, нельзя уверенно предсказать, какое возможное значение примет каждая из случайных величин, но можно предвидеть, какое значение примет их среднее арифметическое.

Итак, *среднее арифметическое достаточно большого числа независимых случайных величин (дисперсии которых равномерно ограничены) утрачивает характер случайной величины*.

Значение теоремы Чебышева для практики. Приведем примеры применения теоремы Чебышева к решению практических задач.

На теореме Чебышева основан широко применяемый в статистике выборочный метод, суть которого состоит в том, что по сравнительно небольшой случайной выборке судят о всей совокупности (генеральной совокупности) исследуемых объектов. Например, о качестве кипы хлопка заключают по небольшому пучку, состоящему из волокон, наудачу отобранных из разных мест кипы. Хотя число волокон в пучке значительно меньше, чем в кипе, сам пучок содержит достаточно большое количество волокон, исчисляемое сотнями.

В качестве другого примера можно указать на определение качества зерна по небольшой его пробе. И в этом случае число наудачу отобранных зерен мало сравнительно со всей массой зерна, но само по себе оно достаточно велико.

Уже из приведенных примеров можно заключить, что для практики теорема Чебышева имеет неоценимое значение.

Теорема Бернулли. Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события А постоянна, то как угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико.

Другими словами, если ε – сколь угодно малое положительное число, то при соблюдении условий теоремы имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1. \qquad (1.7.6)$$

Для изучения частот выпадения герба при бросании монеты были проведены эксперименты (табл. 1.7.1).

Таблица 1.7.1

Экспериментатор	Число бросаний	Число выпадения герба	Частота
Ж. Бюффон	4040	2048	0,5069
К. Пирсон	12000	6019	0,5016
К. Пирсон	24000	12012	0,5016

Эксперимент показывает, что при увеличении числа испытаний частота события имеет тенденцию приближаться к числу 0,5.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практического занятия по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика»

Тема: «Закон больших чисел»

Дидактическая цель. Дать понятие о законе больших чисел.

Воспитательная цель: Формировать статистическое мышление студентов, рассмотрев закон больших чисел. Прививать интерес к изучению математики, используя исторические материалы.

1. Теоретическая часть

По данной теме необходимо изучить теоретический материал, изложенный в [1, ч.2, гл.9, §1 – 6; гл.12, §8].

2. Методические рекомендации

Изучив основные теоретические сведения, ответьте на контрольные вопросы, только затем приступите к решению задач.

Вопросы для самопроверки:

1.Дать понятие о законе больших чисел.

2.Записать неравенство Чебышева.

3.Сформулировать теорему Чебышева.

4.Сформулировать теорему Бернулли.

3. Письменный опрос по доказательству теорем в три варианта:

1. Неравенство Чебышева.
2. Теорема Чебышева.
3. Теорема Бернулли.

4. Решение задач

Совместно со студентами обсуждается решение следующих задач из [2]: № 241, 243, 245, 247.

241. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,05. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время T окажется:

а) меньше двух; б) не меньше двух.

243. Вероятность появления события A в каждом испытании равна 1/2. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число X появлений события A заключено в пределах от 40 до 60, если будет произведено 100 независимых испытаний.

245. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	0,3	0,6
p	0,2	0,8

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что

$$|X - M(X)| < 0{,}2.$$

247. Последовательность независимых случайных величин X_1, $X_2, \dots$, X_n , ... задана законом распределения

X	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
p	$\frac{1}{2n^2}$	$1 - \frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

Применима ли к заданной последовательности теорема Чебышева?

4. Подведение итогов занятия.

5. Домашнее задание

Из [2] решить задачи: № 242, 244, 246, 248.

242. В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вероятность того, что за время *T* лампа будет включена, равна 0,8. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и средним числом (математическим ожиданием) включенных ламп за время *T* окажется: а) меньше трех; б) не меньше трех.

244. Вероятность появления события в каждом испытании равна 1/4. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число *X* появлений события заключено в пределах от 150 до 250, если будет произведено 800 испытаний.

246. Дискретная случайная величина *X* задана законом распределения:

X	0,1	0,4	0,6
p	0,2	0,3	0,5

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| < \sqrt{0{,}4}$.

248. Последовательность независимых случайных величин X_1, $X_2, \dots$, X_n , ... задана законом распределения

X_n	a	$-a$
p	$\frac{n}{2n+1}$	$\frac{n+1}{2n+1}$

Применима ли к заданной последовательности теорема Чебышева?

1.8. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Биномиальное распределение. Случайная величина, имеющая биномиальное распределение, получается при повторных независимых испытаниях. Значениями случайной величины *X* значений являются частоты события *A* при независимых испытаниях, т. е. целые числа в интервале [0, n]. Это означает, что случайная величина с биномиальным распределением *дискретна.*

Вероятность каждого значения вычисляется по формуле Бернулли (1.5.1).

Согласно формуле (1.6.2) можно записать *функцию распределения биномиальной случайной величины:*

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0\\ \sum_{k<n} C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}, & 0<x\le n\\ 1, & x>n \end{cases} \qquad (1.8.1)$$

Параметрами биномиального распределения являются *n* и *p.* Утверждение, что случайная величина *X* имеет биномиальное распределение с параметрами *n* и *p,* можно более кратко записывать в виде $X\in B(n,p)$. *Среднее значение* биномиального распределения *M(X) = np* и *дисперсия D(X)= npq.* Модой является наивероятнейшая частота.

Пример 1. Монета брошена 2 раза. Написать в виде таблицы закон распределения случайной величины *X* – числа выпадений «герба».

Решение. Вероятность появления «герба» в каждом бросании монеты *p*=1/2, следовательно вероятность непоявления «герба» равна *q*=1 – 1/2=1/2.

При двух бросаниях монеты «герб» может появиться либо 2 раза, либо 1 раз, либо совсем не появиться. Таким образом, возможные значения *X* таковы: $x_1=2$, $x_2=1, x_3=0$. Найдем вероятности этих возможных значений по формуле Бернулли:

$P_2(2)=C_2^2\cdot p^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

$P_2(1)=C_2^1\cdot p\cdot q=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

$P_2(0)=C_2^0\cdot q^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

Таким образом искомый закон распределения имеет вид:

X	2	1	0
P	0,25	0,5	0,25

Распределение Пуассона (экспоненциальное распределение). Величина срока службы различных устройств и времени безотказной работы отдельных элементов этих устройств при выполнении определенных условий обычно подчиняется показательному распределению. Другими словами, величина промежутка времени между появлениями двух последовательных редких событий подчиняется зачастую показательному распределению.

Случайная величина, имеющая распределение Пуассона, принимает значения 0, 1, 2, ..., n, причем вероятность p_k того, что она принимает значения $k \geq 0$, вычисляется по формуле Пуассона (1.5.6).

Ее *функция распределения* определяется соотношением:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sum_{k<n} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, & 0 < x \leq n \\ 1, & x > n, \end{cases} \qquad (1.8.2)$$

где $\lambda = const$, $\lambda > 0$.

Параметром распределения Пуассона является величина λ.

Математическое ожидание случайной величины, имеющей экспоненциальное распределение: $M_x = \dfrac{1}{\lambda}$. Дисперсия для экспоненциального распределения: $D_x = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Пример 2. Время безотказной работы устройства распределено по закону $f(t) = 0.02e^{-0,02t}$; $t \geq 0$. Найти среднее время безотказной работы устройства, вероятность того, что устройство не откажет за среднее время безотказной работы. Найти вероятность отказа за время t = 100 часов.

Решение: Выясним смысл числовых характеристик и параметра распределения.

Математическое ожидание – это среднее время между двумя ближайшими отказами устройства, а величина, обратная математическому ожиданию (параметр распределения), – интенсивность отказов, т.е. количество отказов в единицу времени.

По условию интенсивность отказов λ =0,02. Тогда среднее время между двумя отказами, т.е. математическое ожидание $M(X) = 1/0{,}02 = 50$ часов. Вероятность безотказной работы за этот промежуток времени вычислим по функции надежности $R(t)$: $R(t) =$ $= P(T > t) = 1 - F(t)$.

Функция распределения $F(t) = P(T<t) = 1 - e^{-\lambda t}$ определяет вероятность отказа устройства за время t.

$$R(50) = e^{-0{,}02\cdot 50} = e^{-1} \approx 0{,}37.$$

По функции $F(t)$ вычислим вероятность отказа за время t =100 часов:

$$F(100) = 1 - e^{-0{,}02\cdot 100} = 1 - e^{-2} \approx 0{,}86.$$

Равномерное распределение. На практике встречаются случайные величины, о которых заранее известно, что они могут принять какое-либо значение в строго определенных границах, причем в этих границах все значения случайной величины имеют одинаковую вероятность (обладают одной и той же плотностью вероятностей). Например, при поломке часов остановившаяся минутная стрелка будет с одинаковой вероятностью (плотностью вероятности) показывать время, прошедшее от начала данного часа до поломки часов. Это время является случайной величиной, принимающей с одинаковой плотностью вероятности значения, которые не выходят за границы, определенные продолжительностью одного часа. К подобным случайным величинам относится также и погрешность округления. Про такие величины говорят, что они распределены равномерно, т.е. имеют равномерное распределение.

Случайная величина X, имеющая равномерное распределение, принимает значения в интервале $[a, b]$, ее функция плотности вероятности $f(x)$ в этом интервале постоянна. По условию (1.6.5) можно определить эту константу и записать функцию плотности вероятности равномерного распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \frac{1}{b-a}, & a < x \le b \\ 0, & x > b. \end{cases} \qquad (1.8.3)$$

Функцию распределения можно найти по формуле:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \frac{x-a}{x-b}, & a < x \le b \\ 1, & x > b. \end{cases} \qquad (1.8.4)$$

Математическое ожидание случайной величины, имеющей равномерное распределение: $M(X) = \frac{a+b}{2}$.

Дисперсия может быть вычислена следующим образом: $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Откуда сразу же следует, что среднее квадратическое отклонение равно: $\sigma_x = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Равномерное распределение не имеет моды, а медиана совпадает со средним значением.

Найдем теперь вероятность попадания значения случайной величины, имеющей равномерное распределение, на интервал (α,β), принадлежащий целиком отрезку [*a, b*]:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{b-a} = \frac{\beta-\alpha}{b-a}. \qquad (1.8.5)$$

Числа a и b называются *параметрами распределения и* однозначно определяют равномерное распределение.

Пример 3. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 минут.

Решение: Время ожидания автобуса имеет равномерное распределение. Тогда искомая вероятность будет равна:

$$P(0 < X < 3) = \frac{3-0}{5-0} = 0{,}6.$$

Нормальное распределение. Для примера рассмотрим изготовление некоторой детали на станке-автомате. Размеры изготовленных деталей несколько отличаются от требуемых. Это отклонение размеров от стандарта вызывается различными причинами, которые более или менее независимы друг от друга. К ним могут относиться: неравномерный режим обработки детали; неоднородность обрабатываемого материала; неточность установки заготовки в станке; износ режущего инструмента и деталей станков; упругие деформации узлов станка; состояние микроклимата в цехе; колебание напряжения в электросети и т. д. Каждая из перечисленных и подобных им причин влияет на отклонение размера изготовляемой детали от стандарта. Таким образом, общее отклонение размера, фиксируемое измерительным прибором, является суммой большего числа отклонений, обусловленных различными причинами. Если ни одна из этих причин не является доминирующей, то суммарное отклонение является случайной величиной, имеющей нормальный закон распределения.

Нормальное распределение является самым распространенным распределением в природе, экономике и т. д. Случайная величина с нормальным распределением может принимать любые значения в интервале $(-\infty, +\infty)$ и имеет *функцию плотности вероятности*:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1.8.6)$$

где σ и μ – параметры нормального распределения, причем $\sigma > 0$.

На основании формул (1.6.4) и (1.8.6) получаем *функцию распределения F(x)* нормального распределения:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt. \quad (1.8.7)$$

По параметрам нормального распределения вычисляют и все числовые характеристики нормального распределения, а именно $M(X)=\mu$, $D(X)=\sigma^2$, σ является средним квадратичным отклонением: $Mo = Me = \mu$. Утверждение «случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами μ и σ» кратко записывается так: $X \in N(\mu,\sigma)$.

Особое значение среди нормальных распределений имеет *нормированное нормальное распределение* с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma=1$: $X \in N(0,1)$. Если эти параметры подставить в формулу (1.8.6) и (1.8.7), то получим знакомые (1.5.5) и (1.5.9) формулы для $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$, для которых составлены таблицы (приложение1 и 2).

Интеграл вида:

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}dt \tag{1.8.8}$$

носит название *нормированной функции Лапласа* или просто *функции Лапласа.*

Вероятность того, что случайная величина $X \in N(\mu, \sigma)$ принимает значение в интервале $[a, b]$, находится по формуле:

$$P\left(a \le X \le b\right)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right). \tag{1.8.9}$$

Пример 4. Задана случайная величина $X \in N(0,\ 2)$. Найти вероятность того, что эта случайная величина принимает значение:

а) в интервале [–1, 2];

б) меньше – 1;

в) большее 2;

г) отличающееся от своего среднего значения по абсолютной величине не больше чем на 1.

В первых трех случаях можно воспользоваться формулой (1.8.9), где $\Phi(x)$ − функция распределения, а в четвертом − формулой $P\left(\left|X-\mu\right| \le \varepsilon\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)-1$.

а) *Задано:* $\mu=0, \quad \sigma=2, \quad a=-1, \quad b=2$.

Найти: $P\left(-1 \le X \le 2\right)$.

Имеем:

$$P\left(-1 \le X \le 2\right)=\Phi\left(\frac{2-0}{2}\right)-\Phi\left(\frac{-1-0}{2}\right)=$$

$$=\Phi(1)-\Phi(-0{,}5)=\Phi(1)-1+\Phi(0{,}5)=$$

$$=0{,}84134-1+0{,}69146=0{,}53280.$$

б) *Задано:* $\mu=0, \quad \sigma=2, \quad a=-\infty, \quad b=-1$.

Найти: $P\left(X \le -1\right)$.

Получаем

$$P\left(X \le -1\right)=P\left(-\infty < X \le -1\right)=\Phi\left(\frac{-1-0}{2}\right)-\Phi\left(\frac{-\infty-0}{2}\right)=$$

$$=\Phi(-0{,}5)-\Phi(-\infty)=1-\Phi(0{,}5)-0=0{,}30854.$$

в) *Задано:* $\mu = 0, \quad \sigma = 2, \quad a = 2, \quad b = \infty$.

Найти: $P(X \geq 2)$.

Получаем

$$P(X \geq 2) = P(2 \leq X < \infty) = \Phi\left(\frac{\infty - 0}{2}\right) - \Phi\left(\frac{2-0}{2}\right) =$$

$$= \Phi(\infty) - \Phi(1) = 1 - 0{,}84134 = 0{,}15866.$$

г) *Задано:* $\mu = 0, \quad \sigma = 2, \quad \varepsilon = 1$.

Найти: $P(|X - 0| \leq 1)$.

Получаем:

$$P(|X - 0| \leq 1) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 2 \cdot 0{,}69146 - 1 = 0{,}38292.$$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к проведению практических занятий по курсу
«Теория вероятностей и математическая статистика»

Тема: «Случайные величины и законы их распределения»

Дидактическая цель. Изучить наиболее часто встречающиеся законы распределения случайных величин.

Воспитательная цель. Формировать статистическое мышление студентов, изучая законы распределения случайных величин.

1. Теоретическая часть

По данной теме необходимо изучить теоретический материал, изложенный в [1, ч.2, гл.6, §4-8; гл.11, §6; гл.12, §2; гл.13, §2 -7, 9; гл.13. §1 – 6].

2. Методические рекомендации

Изучив основные теоретические сведения, ответьте на контрольные вопросы, только затем приступите к решению задач.

Вопросы для самопроверки:

1.Сформулировать равномерный закон распределения. Записать дифференциальную и интегральную функции.

2.Сформулировать биномиальный закон распределения. Записать интегральную функцию.

3.Сформулировать закон распределения Пуассона. Записать дифференциальную и интегральную функции.

4.Записать формулы для вычисления числовых характеристик биномиально распределенной случайной величины.

5.Записать формулы для вычисления числовых характеристик равномерно распределенной случайной величины.

6.Записать формулы для вычисления числовых характеристик случайной величины, распределенной по закону Пуассона.

7.Сформулировать нормальный закон распределения. Записать дифференциальную и интегральную функции.

8.Записать формулу для вычисления вероятности отклонения нормально распределенной СВ от математического ожидания.

9.Сформулировать правило трех сигм и пояснить его суть.

10. Вероятность какого события определяет функция надежности?

3. Решение задач:

Совместно со студентами обсуждается решение следующих задач из [2]: № 183, 185, 196, 308, 313,315, 321, 328, 331, 337, 344, 346, 350, 353.

183. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету $p = 0{,}01$. Сколько нужно купить билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них с вероятностью P, не меньшей, чем 0,95?

185. Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно трем. Найти вероятность того, что за 2 мин поступит:

а) четыре вызова;

б) менее четырех вызовов;

в) не менее четырех вызовов.

196. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X – числа таких бросаний пяти игральных костей, в каждом из которых на двух костях появится по одному очку, если общее число бросаний равно двадцати.

308. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания амперметра округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что ври отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02 А.

313. Найти математическое ожидание случайной величины *X*, равномерно распределенной в интервале (a, b).

315. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*, распределенной равномерно в интервале (a, b).

321. Случайные величины *X* и *Y* независимы и распределены равномерно: *X* – в интервале (a, b), *Y* – в интервале (c, d). Найти дисперсию произведения *XY*.

328. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины *X* соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение, заключенное в интервале (12, 14).

331. Производится измерение диаметра вала без систематических (одного знака) ошибок. Случайные ошибки измерения *X* подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением σ = 10мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

337. Случайная величина *X* распределена нормально с математическим ожиданием $a = 10$. Вероятность попадания *X* в интервал (10, 20) равна 0,3. Чему равна вероятность попадания *X* в интервал (0, 10)?

344. Нормально распределенная случайная величина *X* задана плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Найти моду и медиану *X*.

346. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 5$.

350. Непрерывная случайная величина *X* распределена по показательному закону, заданному плотностью вероятности $f(x) = 3 \cdot e^{-3x}$ при $x \geq 0$; при $x < 0$ $f(x) = 0$. Найти вероятность того, что в результате испытания *X* попадает в интервал (0,13, 0,7).

353. Найти математическое ожидание показательного распределения

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x \geq 0)$; $f(x) = 0$ $(x < 0)$.

4. Подведение итогов занятия.

5. Домашнее задание: из учебного пособия В.Е. Гмурмана «Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике» решить задачи: № 186, 309, 314, 316, 329, 332, 338, 347, 351, 354.

2. Решить и оформить задачи 1.7, 1.8, 1.9, 1.10 к РГР 1.

Сдать РГР 1 на следующем практическом занятии.

186. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно двум. Найти вероятность того, что за 4 мин поступит:

а) три вызова; б) менее трех вызовов; в) не менее трех вызовов. Поток вызовов предполагается простейшим.

309. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка:

а) меньшая 0,04; б) большая 0,05.

314. Найти математическое ожидание случайной величины X, распределенной равномерно в интервале (2, 8).

316. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной равномерно в интервале (2, 8).

329. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (15, 25).

332. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением σ = 20 г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 г.

338. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием a = 25. Вероятность попадания X в интервал (10, 15) равна 0,2. Чему равна вероятность попадания X в интервал (35, 40)?

347. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр λ = 6.

351. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному при $x \geq 0$ плотностью распределения $f(x) = 0{,}04 \cdot e^{-\,0{,}04x}$; при $x < 0$ функции $f(x) = 0$. Нашли вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал (1, 2).

354. Найти математическое ожидание показательного распределения, заданного при $x \geq 0$:

а) плотностью $f(x) = 5 \cdot e^{-5x}$;

б) функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-0,1x}$.

1.9. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Часто результат опыта описывается не одной случайной величиной X, а несколькими случайными величинами: $X_1, X_2, \ldots, X_n$. В этом случае принято говорить, что указанные случайные величины образуют систему $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Систему двух случайных величин (X, Y) можно изобразить случайной точкой на плоскости.

Событие, состоящее в попадании случайной точки (X, Y) в область *D,* принято обозначать в виде $(X, Y) \in D$.

Закон распределения системы двух дискретных случайных величин может быть задан с помощью табл. 1.9.1, где $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$; p_{ij} – вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении равенств $X = x_i, Y = y_j$. При этом

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$$

Таблица 1.9.1

Y \ X	y_1	y_2	…	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2n}
…	…	…	…	…
x_m	p_{m1}	p_{m2}	…	p_{mn}

Таблица может содержать бесконечное множество строк и столбцов.

Закон распределения системы непрерывных случайных величин (X, Y) будем задавать с помощью функции плотности вероятности $f(x, y)$.

Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область D определяется равенством

$$P[(X, Y) \in D] = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Функция плотности вероятности обладает следующими свойствами:

1. $f(x, y) \geq 0$.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx dy = 1$.

Если все случайные точки (X, Y) принадлежат конечной области D, то последнее условие принимает вид

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 1.$$

Математические ожидания дискретных случайных величин X и Y, входящих в систему, определяются по формулам:

$$m_x = M(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i p_{ij},$$

$$m_y = M(Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_j p_{ij},$$

а математические ожидания непрерывных случайных величин – по формулам

$$m_x = M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y)\, dx dy,$$

$$m_y = M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y)\, dx dy.$$

Точка (m_x, m_y) *называется центром рассеивания* системы случайных величин (X, Y).

Дисперсии дискретных случайных величин X и Y определяются по формулам:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij\ (x_i - m_x)^2},$$

$$D(Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_{ij\,(y_j-m_y)^2}.$$

Дисперсии же непрерывных случайных величин X и Y, входящих в систему, находятся по формулам:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)^2 f(x,y)\,dxdy,$$

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(y-m_y\right)^2 f(x,y)\,dxdy.$$

Средние квадратичные отклонения случайных величин X и Y определяются по формулам:

$$\sigma_x=\sqrt{D(X)};\qquad \sigma_y=\sqrt{D(Y)}.$$

Для вычисления дисперсий могут быть применены формулы

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2,$$

$$D(Y)=M(Y^2)-[M(Y)]^2.$$

Важную роль в теории систем случайных величин играет так называемый *корреляционный момент (ковариация)*

$$\mu_{xy}=M\left[(X-m_x)\cdot\left(Y-m_y\right)\right].$$

Для дискретных случайных величин корреляционный момент находится по формуле

$$\mu_{xy}=\sum_{m}\sum_{n}(x_n-m_x)\cdot\left(y_m-m_y\right)\cdot p_{nm},$$

а для непрерывных – по формуле

$$\mu_{xy}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)\left(y-m_y\right)f(x,y)\,dxdy.$$

Корреляционный момент можно также найти по формуле

$$\mu_{xy}=M(XY)-M(X)M(Y).$$

Случайные величины X и Y называются *независимыми,* если вероятность одной из них – принять значение, лежащее в любом промежутке области ее значений, – не зависит от того, какое значение приняла другая величина. В этом случае

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

Следовательно $\mu_{xy} = 0$.

Для характеристики связи между величинами X и Y рассматривается так называемый *коэффициент корреляции*, являющийся безразмерной величиной.

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}.$$

Если случайные величины X и Y независимы, то $r_{xy} = 0$. Если же случайные величины X и Y связаны точной линейной зависимостью $Y = aX + b,$ то $r_{xy} = sgn\ a,$

т. е. $r_{xy} = 1$ при $a > 0$ и $r_{xy} = -1$ при $a < 0$.

Вообще же коэффициент корреляции удовлетворяет условию

$$-1 \leq r_{xy} \leq 1.$$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий по курсу

«Теория вероятностей и математическая статистика»

Тема: «Системы случайных величин»

Дидактическая цель. Изучить случайные величины, возможные значения которых определяются двумя, тремя, ..., *n* числами, т.е. *n* – мерные случайные величины и законы распределения двумерной случайной величины.

Воспитательная цель. Формировать приемы правильного оформления таблицы закона распределения системы двух дискретных случайных величин. Обращать внимание на правильный анализ условия задачи. Развивать продуктивное мышление и навыки самоконтроля.

1. Теоретическая часть

По данной теме необходимо изучить теоретический материал, изложенный в учебном пособии В.Е. Гмурмана «Теория вероятностей и математическая статистика» [1, ч. 2, гл.14, §1-21].

2. Методические рекомендации

Изучив основные теоретические сведения, ответьте на контрольные вопросы, только затем приступите к решению задач.

Вопросы для самопроверки:

1. Что рассматривается как система n случайных величин?
2. Что называется законом распределения дискретной двумерной случайной величины?
3. Чему равна вероятность того, что случайная величина X примет значение x_1?
4. Чему равна вероятность того, что случайная величина Y примет значение y_1?
5. Что называется функцией распределения двумерной случайной величины?
6. Перечислите свойства функции распределения двумерной случайной величины?

3. Решение задач

Совместно со студентами обсуждается решение следующих задач из задачника [2]: № 408, 410, 412, 421, 430, 438.

408. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины:

Y	X		
	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Найти законы распределения составляющих X и Y.

410. Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x,y)=\begin{cases}\sin x\cdot\sin y & \text{при} \quad 0\le x\le\frac{\pi}{2}, 0\le y\le\frac{\pi}{2},\\ 0 & \text{при} \quad x<0 \text{ или } y<0.\end{cases}$$

Найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $x=\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{\pi}{6}$, $y=\frac{\pi}{3}$.

412. Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x,y)=\begin{cases}1-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y} & \text{при} \quad x\geq 0, \quad y\geq 0,\\ 0 & \text{при} \quad x<0 \text{ или } y<0.\end{cases}$$

Найти двумерную плотность вероятности системы.

421. Задана дискретная двумерная случайная величина (*X*, *Y*):

Y	*X*		
	$x_1=2$	$x_2=5$	$x_3=8$
$y_1=0{,}4$	0,15	0,30	0,35
$y_2=0{,}8$	0,05	0,12	0,03

Найти: а) безусловные законы распределения составляющих; б) условный закон распределения составляющей *X* при условии, что составляющая *Y* приняла значение $y_1=0{,}4$; в) условный закон распределения *Y* при условии, что $X=x_2=5$.

430. Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (*X, Y*):

$$f(x,y)=\begin{cases}4xye^{-x^2-y^2} & \text{при} \quad (x>0, y>0),\\ 0 & \text{при} \quad (x<0 \text{ или } y<0).\end{cases}$$

Найти: а) математические ожидания; б) дисперсии составляющих *X* и Y.

438. Доказать, что если *X* и *Y* связаны линейной зависимостью *Y = aX+b,* то абсолютная величина коэффициента корреляции равна единице.

3. Подведение итогов занятия.

4. Домашнее задание: из учебного пособия В.Е. Гмурмана «Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике» решить задачи: № 409, 411, 422, 431.

409. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины:

Y	*X*			
	$x_1=20$	$x_2=30$	$x_3=41$	$x_4=50$
$y_1=2{,}3$	0,05	0,12	0,08	0,04
$y_2=2{,}7$	0,09	0,30	0,11	0,21

Найти законы распределения составляющих.

411. Найти вероятность попадания случайной точки *(X, Y)* в прямоугольник, ограниченный прямыми *x=1, x=2, y = 3, y = 5,* если известна функция распределения

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y} & \text{при} \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

422. Задана дискретная двумерная случайная величина (*X*, *Y*):

Y	X	
	$x_1 = 3$	$x_2 = 6$
$y_1 = 10$	0,25	0,10
$y_2 = 14$	0,15	0,05
$y_2 = 18$	0,32	0,13

Найти:

а) условный закон распределения *X* при условии, что *Y* = 10;

б) условный закон распределения *Y* при условии, что *X* = 6.

431. Задана плотность совместного распределения двумерной случайной величины *(X, Y):*

$$f(x,y) = \begin{cases} 36xye^{-3(x^2+y^2)} & \text{при} \quad (x > 0, y > 0), \\ 0 & \text{при} \quad (x < 0 \text{ или } y < 0). \end{cases}$$

Найти математические ожидания и дисперсии составляющих.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

2.1 ПРЕДМЕТ И ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ. ГРУППИРОВКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Математическая статистика – это раздел математики, который имеет своим предметом изучения методы сбора, систематизации, обработки и использования статистических данных для получения научно обоснованных выводов и принятия решений.

При этом под *статистическими данными* понимается совокупность чисел, которые представляют количественные характеристики интересующих нас признаков изучаемых объектов. Статистические данные получаются в результате специально поставленных опытов, наблюдения.

Статистические данные по своей сущности зависят от многих случайных факторов, поэтому математическая статистика тесно связана с теорией вероятностей, которая является ее теоретической основой.

Среди основных задач математической статистики могут быть отмечены следующие: оценка неизвестной вероятности случайного события; оценка неизвестного закона распределения случайной величины или ее числовых характеристик (математического ожидания, дисперсии); проверка гипотез (предположений), сделанных относительно некоторых случайных событий, случайных величин (о вероятности события, законе распределения случайной величины и т. д.).

Познакомимся с понятиями генеральной и выборочной совокупности.

Определение. ***Генеральной совокупностью*** называется множество числовых значений некоторого признака всех объектов рассматриваемой совокупности.

Определение. ***Выборочной совокупностью*** или просто *выборкой* называется множество числовых значений некоторого признака всех объектов, случайным образом отобранных из всей совокупности рассматриваемых объектов.

С помощью выборки оценивают генеральную совокупность по вероятностным свойствам. Чтобы оценки были достоверными, выборка должна быть *представительной,* т.е. ее вероятностные свойства должны совпадать или быть близкими к свойствам генеральной совокупности.

Определение. Выборка является *репрезентативной*, если относительные частоты вариант выборки близки к соответствующим относительным частотам вариант генеральной совокупности (по всем вариантам генеральной совокупности).

Случайно выбранный объект после проверки нужного признака можно возвратить (возвратная или повторная выборка) или не возвратить *(безвозвратная* или *бесповторная выборка)* обратно в генеральную совокупность. В первом случае получаем более независимую и представительную выборку.

Рассмотрим обработку одномерных выборок.

Вариационный ряд. Выбор объекта из генеральной совокупности и измерение значения признака называется статистическим наблюдением. Результаты наблюдений фиксируют в протоколе или дневнике наблюдений в порядке их появления.

Выборка будет намного наглядней, если все ее элементы упорядочить по возрастанию или по убыванию. Но в выборке одно значение (варианта) может встречаться несколько раз и поэтому целесообразно результаты записать в виде таблицы, в первом столбце которой находятся всевозможные значения (варианты) x_i генеральной совокупности (или случайной величины) X, а во втором – числа n_i, т. е. частоты появления i-го значения. Такую таблицу называют *вариационной таблицей,* или *вариационным рядом,* который может быть составлен либо по значениям, либо по интервалам. Чтобы решить этот вопрос, нужно вычислить размах выборки.

$$R = x_{\max} - x_{\min} \tag{2.1.1}$$

Если размах мал, то составляется вариационный ряд по значениям, если велик или если количество вариантов m слишком велико или близко к объему выборки, то целесообразно составить *вариационный ряд по интервалам значений генеральной совокупности.* По интервалам составляют вариационный ряд и из выборки непрерывной генеральной совокупности.

Графики вариационного ряда. Используют два вида графиков вариационных рядов: *полигон* и *гистограмму.*

Определение. Ломаная линия, отрезки которой соединяют точки (x_i ; n_i), называется *полигоном частот*.

Определение. Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, построенных на частичных интервалах с длиной d и высотой, равной отношению n_i /d (плотность частоты на данном интервале).

Если вариационный ряд составлен по значениям, то полигон строят из отрезков, соединяющих точки, координатами которых являются значения x_i и соответствующие частости n_i /n. При построении гистограммы над каждым значением x_i строят прямоугольник, высота которого пропорциональна соответствующей частости n_i /n.

При большом числе наблюдений и большом числе вариант варианты удобно группировать по отдельным интервалам их значений. Для этого шкала интересующего нас признака разделяется на некоторое число интервалов и вместо отдельных вариант рассматриваются группы значений вариант, попавших в последовательно расположенные интервалы. Ширина интервалов Δx определяется путем деления размаха выборки $x_k - x_1$ на количество интервалов:

$$\Delta x = \frac{x_k - x_1}{m}. \tag{2.1.2}$$

В таких случаях составляется статистическое распределение выборки по частотам интервалов (интервальное статистическое распределение выборки). При этом частота интервала равна сумме частот вариант, попавших в данный интервал.

Если вариационный ряд составлен по интервалам, то в качестве значений x_i следует рассматривать середины интервалов.

Эмпирическая функция распределения. Каждая генеральная совокупность имеет функцию распределения $F(x) = P(X < x)$, которая обычно неизвестна. По выборке можно найти эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$, где на основании закона больших чисел по теореме Бернулли вместо вероятностей p_i берутся относительные частоты n_i /n. Процесс нахождения эмпирической функции распределения $F^*(x)$ аналогичен процессу нахождения функции распределения $F(x)$ дискретной случайной величины.

$$F^*(x) = \sum_{x_i < x} \frac{n_i}{n} \tag{2.1.3}$$

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1, \\ \dfrac{n_1}{n}, & x_1 < x \le x_2, \\ \dfrac{n_1 + n_2}{n}, & x_2 < x \le x_3, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \sum\limits_{i=1}^{m-1} \dfrac{n_i}{n}, & x_{m-1} < x < x_m, \\ 1, & x > x_m. \end{cases} \tag{2.1.4}$$

Значениями эмпирической функции распределения *F*(x)* являются так называемые *накопленные частости*. График эмпирической функции распределения строят так же, как и график функции распределения *F(x)* случайной дискретной величины.

Числовые характеристики выборки. Среднее арифметическое. Выборочной средней называют среднее арифметическое значение выборки. *Среднее арифметическое x* определяется по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{2.1.5}$$

где x_i – элементы выборки; n – ее объем.

С помощью формулы (2.1.5) среднее арифметическое вычисляют непосредственно по протоколу наблюдений. Если составлен вариационный ряд, то следует использовать формулу:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} x_i\, n_i, \tag{2.1.6}$$

где x_i – варианты случайной величины, n_i – соответствующие частоты, m – количество вариантов, n – объем выборки.

Если вариационный ряд составлен по интервалам значений, то в роли x_i в формулах (2.1.5) и (2.1.6) используют середины интервалов.

Дисперсия выборки. Выборочной дисперсией называется среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений от выборочного среднего. Дисперсию выборки обозначим через $\overline{S}^2$. Для вычисления выборочной дисперсии $\overline{S}^2$ приведем такие же формулы, что и для нахождения среднего арифметического:

$$\overline{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \quad \text{или} \quad \overline{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2 , \qquad (2.1.7)$$

$$\overline{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} (x_i - \overline{x})^2 n_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_i - \overline{x}^2. \qquad (2.1.8)$$

Стандартное отклонение. *Стандартное,* или *среднеквадратичное,* отклонение определяется как квадратный корень из дисперсии

$$\overline{S} = \sqrt{\overline{S}^2} . \qquad (2.1.9)$$

Мода. Если вариационный ряд составлен по значениям генеральной совокупности, то *модой выборки* является значение, имеющее максимальную частоту. Если вариационный ряд составлен по интервалам значений генеральной совокупности, то мода вычисляется по следующей приближенной формуле:

$$Mo = x_0 + k \cdot \frac{n_i - n_{i-1}}{(n_i - n_{i-1}) + (n_i - n_{i+1})}, \qquad (2.1.10)$$

где x_0 – начало модального интервала, т.е. интервала, имеющего максимальную частоту; k – длина модального интервала, n_i – частота модального интервала; n_{i-1} и n_{i+1} – частоты соответственно предшествующего и последующего за модальным интервалов.

Важность этого показателя состоит в том, что он характеризует существенную часть совокупности.

Медиана. *Медианой* выборки является значение серединного элемента вариационного ряда. Если вариационный ряд составлен по значениям генеральной совокупности, то при нечетном объеме выборки n медиана – это действительное значение серединного элемента, а при n четном – среднее арифметическое двух серединных элементов.

Если вариационный ряд составлен по интервалам значений, то медиана вычисляется по следующей приближенной формуле:

$$Me = x_0 + k \cdot \frac{n/2 - T_{i-1}}{n_i}, \qquad (2.1.11)$$

где x_0 – начало медианного интервала, т. е. интервала, в котором содержится серединный элемент; k – длина медианного интервала; n – объем выборки, T_{i-1} – сумма частот интервалов, предшествующих медианному; n_i – частота медианного интервала.

Медиана характеризует особое свойство изучаемого явления: сумма абсолютных отклонений чисел распределенного ряда от медианы есть величина наименьшая.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - Me) \to \min. \qquad (2.1.12)$$

Пример 1. На некотором ООО «ГАК» снизились продажи выпущенной продукции. Администрация этого малого предприятия решила провести статистический анализ работающих специалистов. Была сделана выборка личных дел в количестве 79. Полученные в отделе кадров данные о разрядах были зафиксированы, причем статус «Ученик» прибрел разряд 0, статус «Работник 6 разряда с многолетним стажем» – разряд 7. Протокол наблюдений представлен выборкой А (табл. 2.1.1), объем которой составил 79 элементов.

Таблица 2.1.1. **Выборка А**

2	4	2	4	3	3	3	2	0	6
1	2	3	2	2	4	3	3	5	1
0	2	4	3	2	2	3	3	1	3
3	3	1	1	2	3	1	4	3	1
7	4	3	4	2	3	2	3	3	1
4	3	1	4	5	3	4	2	4	5
3	6	4	1	3	2	4	1	3	1
0	0	4	6	4	7	4	1	3	

n = 79 – объем выборки.

Для составления вариационного ряда находим $x_{\min} = 0$ и $x_{\max} = 7$. Размах довольно мал (7 – 0 = 7), поэтому составим вариационный ряд по значениям (табл. 2.1.2).

Все относительные частоты вычисляем с одинаковой точностью, причем

$$n = \sum_{i=1}^{m} n_i, \qquad (2.1.13)$$

где m – количество вариантов в вариационном ряде. Сумма всех относительных частот должна быть равна единице:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n} = 1. \qquad (2.1.14)$$

Таблица 2.1.2

x_i	n_i	$\frac{n_i}{n}$	Накопленные частости
0	4	0,0506	0,0506
1	13	0,1646	0,2152
2	14	0,1772	0,3924
3	24	0,3038	0,6962
4	16	0,2025	0,8987
5	3	0,0380	0,9367
6	3	0,0380	0,9747
7	2	0,0253	1,0000
Σ	79	1,0000	–

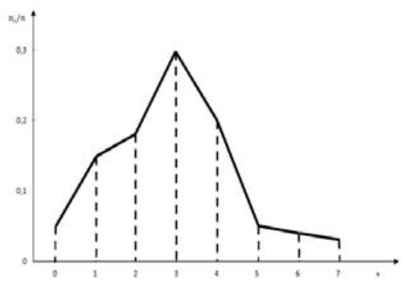

Рис. 2.1.1 Полигон вариационного ряда выборки *A*

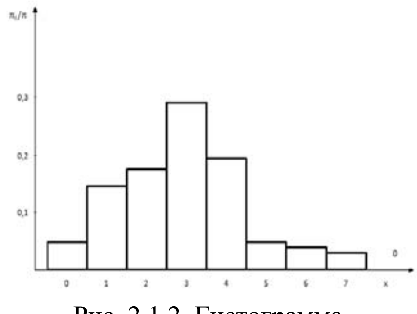

Рис. 2.1.2. Гистограмма вариационного ряда выборки *A*

При построении графиков изображаем на оси Оx значения x_i с 0 по 7 и на оси Оy значения $\dfrac{n_i}{n}$ − с 0 по 0,3 (рис. 2.1.1 и 2.1.2).

Эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$ находим, используя формулу (2.1.4) и накопленные частости из табл. 2.1.2.

Имеем:

$$F^*(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ 0,0506, & 0<x\le 1,\\ 0,2152, & 1<x\le 2,\\ 0,3924, & 2<x\le 3,\\ 0,6962, & 3<x\le 4,\\ 0,8987, & 4<x\le 5,\\ 0,9367, & 5<x\le 6,\\ 0,9747, & 6<x\le 7\\ 1, & x>7. \end{cases}$$

При построении графика $F^*(x)$ откладываем значения функции в интервале от 0 до 1 (рис. 2.1.3).

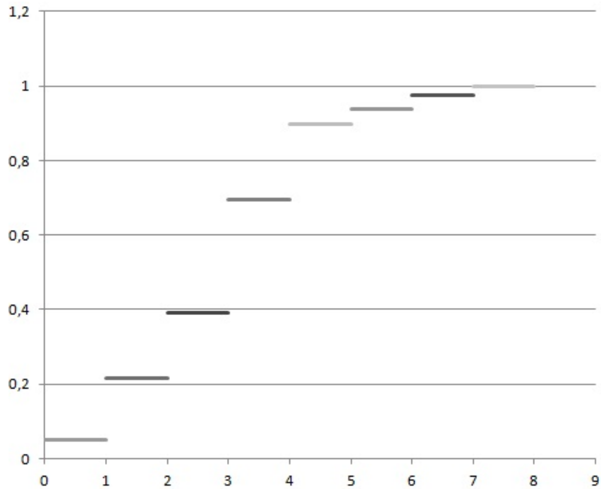

Рис. 2.1.3. График эмпирической функции распределения выборки А.

Вычисление *среднего арифметического* и *дисперсии* проводим по формулам (2.1.6) и (2.1.8):

$$\overline{x} = \frac{1}{79}(0 \cdot 4 + 1 \cdot 13 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 24 + 4 \cdot 16 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 2) =$$

$$= \frac{1}{79} \cdot (0 + 13 + 28 + 72 + 64 + 15 + 18 + 14) = 2{,}84,$$

$$\overline{S}^2 = \frac{1}{79}(0^2 \cdot 13 + 1^2 \cdot 13 + 2^2 \cdot 14 + 3^2 \cdot 24 + 4^2 \cdot 16 + 5^2 \cdot 3 +$$

$$+ 6^2 \cdot 3 + 7^2 \cdot 2) - 2{,}84^2 = 2{,}3668.$$

Стандартное отклонение вычислим по формуле (2.1.9):

$$\overline{S} = \sqrt{2{,}3668} = 1{,}54.$$

Модой Mo является значение с максимальной частотой, т.е. Mo = 3. Медианой Me служит серединное значение, т.е. 40-е значение вариационного ряда: Me = 3.

Пример 2. Решим задачу по выборке В.

Находим $x_{\min} = 60$ и $x_{\max} = 81$. Размах (81 – 60 = 21) достаточно большой, поэтому составим вариационный ряд по интервалам значений, используя при выборке заданные начало первого интервала и длину интервала (табл. 2.1.3).

Таблица 2.1.3. **Выборка В**

65	71	67	73	68	68	72	68	67	70	78	74	79	65	72
65	71	70	69	69	76	71	63	77	75	70	74	65	71	68
74	69	69	66	71	69	73	74	80	69	73	76	69	69	67
67	74	68	74	60	70	66	70	68	64	75	78	71	70	69
73	75	74	72	80	72	69	69	71	70	73	65	66	67	69
71	70	72	76	72	73	64	74	71	76	68	69	75	76	73
74	78	66	75	72	69	68	63	70	70	78	76	73	73	67
71	66	66	72	69	71	71	68	72	69	73	73	66	72	73
70	69	74	72	69	74	70	74	72	76	71	66	62	69	74
76	74	69	64	75	71	76	68	68	78	71	71	68	67	74
68	81	72	68	72	71	71	71	69	61	74	66	70	72	65
67	73	78	73	71	75	73	71	72	68	67	69	69	77	63
71	74	67	68	69	74	69	67	74	66	74	74	69	75	70
73	63	77	74	75										

N = 200. Начало первого интервала: 59 Длина интервала: 2.

Вариационный ряд представлен в табл. 2.1.4 Заполняя первый столбец таблицы, все интервалы выбраны одной длины, причем так что $x_{\min}$ вошло в первый, а $x_{\max}$ – в последний. Обычно начало интервала входит в интервал, а его конец не входит.

Таблица 2.1.4

Интервалы	n_i	$\dfrac{n_i}{n}$	Накопленные частости
59 − 61	1	0,005	0,005
61 − 63	2	0,010	0,015
63 − 65	7	0,035	0,050
65 − 67	16	0,080	0,130
67 − 69	27	0,135	0,265
69 − 71	40	0,200	0,465
71 − 73	38	0,190	0,655
73 − 75	38	0,190	0,845
75 − 77	18	0,090	0,935
77 − 79	9	0,045	0,980
79 − 81	3	0,015	0,995
81 − 83	1	0,005	1,000
$\sum$	200	1,000	–

Полигон и гистограмма частот строятся аналогично построенным по выборке А. Далее учитываем, что в качестве представителя каждого интервала взят его конец. Принимая за координаты точек концы и соединяя эти точки прямыми, построим график эмпирической функции распределения (рис.2.1.4).

Вычисление *среднего арифметического* и *дисперсии* проводим по формулам (2.1.6) и (2.1.8):

$$\overline{x} = \frac{1}{200}(60\cdot 1 + 62\cdot 2 + 64\cdot 7 + 68\cdot 27 + 70\cdot 40 +$$
$$+72\cdot 38 + 74\cdot 38 + 76\cdot 18 + 78\cdot 9 + 80\cdot 3 + 82\cdot 1) = 71{,}32,$$

$$\overline{S}^2 = \frac{1}{200}(60^2\cdot 1 + 62^2\cdot 2 + 64^2\cdot 7 + 68^2\cdot 27 + 70^2\cdot 40 + 72^2\cdot 38 +$$
$$+74^2\cdot 38 + 76^2\cdot 18 + 78^2\cdot 9 + 80^2\cdot 3 + 82^2\cdot 1) - 71{,}32^2 = 14{,}6176.$$

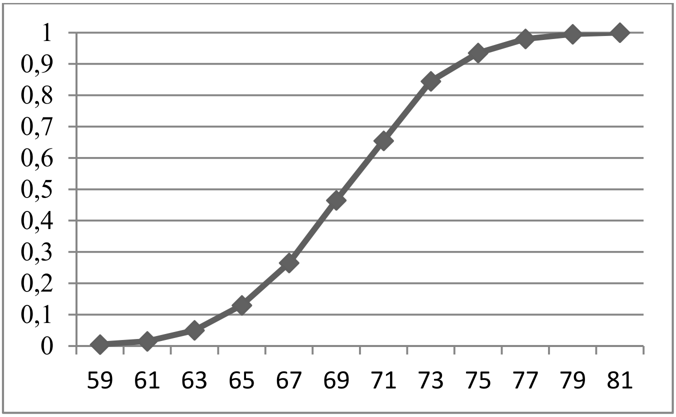

Рис. 2.1.4. График эмпирической функции распределения выборки В

Стандартное отклонение вычислим по формуле (2.1.9):

$$\overline{S} = \sqrt{14,6176} = 3,82.$$

Моду Mo находим по формуле (2.1.10), т.е.

$$Mo = 69 + 2 \cdot \frac{40-27}{(40-27)+(40-38)} = 69 + 2 \cdot \frac{13}{13+2} = 70,7.$$

Теория оценок. *Статистической оценкой* Θ^* неизвестного параметра Θ теоретического распределения называют функцию $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ от наблюдаемых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Точечной называют статистическую оценку, которая определяется одним числом $\Theta^* = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – результаты *n* наблюдений над количественным признаком *X* (выборка).

Несмещенной называют точечную оценку, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки.

Смещенной называют точечную оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Несмещенной оценкой генеральной средней (математического ожидания) служит выборочная средняя

$$\overline{x_B} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i}{n},$$

где x_i – варианта выборки, n_i – частота варианты x_i, $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ – объем выборки.

Замечание 1. Если первоначальные варианты x_i – большие числа, то для упрощения расчета целесообразно вычесть из каждой варианты одно и то же число *C,* т. е. перейти к условным вариантам $u_i = x_i - C$ (в качестве С выгодно принять число, близкое к выборочной средней; поскольку выборочная средняя неизвестна, число *C* выбирают «на глаз»). Тогда

$$\overline{x_{\text{В}}} = C + \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot u_i}{n}.$$

Смещенной оценкой генеральной дисперсии служит выборочная дисперсия

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot (x_i - \overline{x_B})^2}{n}.$$

Эта оценка является смещенной, так как

$$M[D_B] = \frac{n-1}{n} \cdot D_{\text{Г}}.$$

Более удобна формула

$$D_B = \overline{x^2} - (\overline{x})^2.$$

Несмещенной оценкой генеральной дисперсии служит исправленная выборочная дисперсия

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_{B.}$$

Таким образом, несмещенной оценкой математического ожидания является среднее арифметическое. Выборочная дисперсия является смещенной оценкой дисперсии, за несмещенную оценку дисперсии при малом объеме выборке используют исправленную дисперсию.

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \overline{S}^2. \qquad (2.1.15)$$

Пример 3. Вычислить несмещенные оценки параметров генеральной совокупности $\overline{x}$, S^2, S по выборке А, используя результаты, полученные в примере 1 парагр. 2.1.

Для выборки А при решении задачи была получена несмещенная оценка значения $\overline{x} = 2{,}84$, а также выборочная дисперсия $\overline{S}^2 = 2{,}3668,\ n = 79$.

По формуле (2.1.15) находим несмещенные оценки дисперсии и стандартного отклонения.

Таким образом, несмещенные оценки параметров генеральной совокупности имеют вид: $\overline{x} = 2{,}84$; $S^2 = \frac{79}{78} \cdot 2{,}3668 = 2{,}3971$; $S = \sqrt{2{,}3971} = 1{,}55$.

Следовательно, теперь мы можем сделать выводы в целом по малому предприятию ООО «ГАК». На предприятии работают специалисты в среднем с третьим разрядом. При этом половина сотрудников имеет даже меньший разряд. Как следует из статистического анализа, для повышения качества выпускаемой продукции необходимо организовать курсы повышения квалификации, используя, например, знания и умения людей с 6–7 разрядами, так как их мало и сами они не могут произвести много товара. По-видимому, нужно использовать фонд стимулирующих выплат для людей, согласившихся учить и учиться в нерабочее время.

Пример 4. Вычислить несмещенные оценки параметров генеральной совокупности $\overline{x}$, S^2, S по выборке В, используя результаты, полученные в примере 3 парагр. 2.1.

Для выборки В из парагр. 2.1 имеем

$\overline{x} = 71{,}32$, $\overline{S}^2 = 14{,}6176$, $n = 200$.

Таким образом, несмещенные оценки параметров генеральной совокупности имеют вид: $\overline{x} = 71{,}32$, $S^2 = \frac{200}{199} \cdot 14{,}6176 = 14{,}6910$, $S = \sqrt{14{,}6910} = 3{,}83$.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика»

Тема: «Предмет и основные задачи математической статистики. Группировка статистических данных и статистические оценки параметров распределения»

Дидактическая цель. Уяснить общие вопросы: программно-методологические и организационные вопросы статистических исследований, изучить основные понятия в статистических исследованиях, усвоить такие понятия математической статистики, как группировка статистических данных, ряды распределения, средние величины.

Воспитательная цель. Формирование статистического мышления студентов.

1. Теоретическая часть

По данной теме необходимо изучить теоретический материал, изложенный в [1, ч.3, гл.15, §1 – 8; гл.16, §1 – 13].

2. Методические рекомендации

Изучив основные теоретические сведения, ответьте на контрольные вопросы, только затем приступите к решению задач.

Вопросы для самопроверки:

1. Что изучает математическая статистика?
2. Что называется генеральной совокупностью?
3. Что называется выборочной совокупностью?
4. Перечислите и охарактеризуйте способы отбора.
5. Что называется вариационным рядом?
6. Особенности эмпирической функции распределения.
7. Перечислите и охарактеризуйте числовые характеристики выборки.
8. Охарактеризуйте среднюю арифметическую, среднюю гармоническую и среднюю геометрическую.
9. Что относится к структурным средним?
10. Дайте понятие точечной оценки.
11. Какая оценка называется несмещенной?
12. Какая оценка называется состоятельной?

3. Решение задач

Совместно со студентами обсуждается решение следующих задач из задачника [2]: № 439, 441, 443, 446, 455, 457, 535, 540, 548.

439. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	2	5	7
n_i	1	3	6

Найти распределение относительных частот.

441. Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

443. Построить полигон частот по данному распределению выборки:

x_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6

446. Построить гистограмму частот по данному в табл. 2.1.5 распределению выборки объема *n* = 100:

Таблица 2.1.5

Номер интервала, $\boldsymbol{i}$	**Частичный интервал,** $x_i - x_{i+1}$	**Сумма частот вариант интервала,** n_i	**Плотность частоты,** $\boldsymbol{\frac{n_i}{h}}$
1	1–5	10	2,5
2	5–9	20	5
3	9–13	50	12,5
4	13–17	12	3
5	17–21	8	2

455. По выборке объема *n* = 41 найдена смещенная оценка $D_{\text{В}} = 3$ генеральной дисперсии. Найти несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.

457. В итоге пяти измерений длины стержня одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 92; 94; 103; 105; 106. Найти:

а) выборочную среднюю длину стержня;

б) выборочную исправленную дисперсии ошибок прибора.

535. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии *Y* на *X* по данным, приведенным в корреляционной табл. 2.1.6.

Таблица 2.1.6

Y	X					n_y
	20	25	30	35	40	
16	4	6	–	–	–	10
26	–	8	10	–	–	18
36	–	–	32	3	9	44
46	–	–	4	12	6	22
56	–	–	–	1	5	6
n_x	4	14	46	16	20	$n=100$

540. Знания десяти студентов проверены по двум тестам: *A* и *B*. Оценки по стобалльной системе оказались следующими (в первой строке указано количество баллов по тесту *A*, а во второй – по тесту *B*):

95 90 86 84 75 70 62 60 57 50
92 93 83 80 55 60 45 72 62 70

Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена между оценками по двум тестам.

548. Знания 10 студентов проверены по двум тестам: *A* и *B*. Оценки по стобалльной системе оказались следующими (в первой строке указано количество баллов по тесту *A*, а во второй – по тесту *B*):

95 90 86 84 75 70 62 60 57 50
92 93 83 80 55 60 45 72 62 70

Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла между оценками по двум тестам.

4. Подведение итогов занятия.

5. Домашнее задание: из [2] решить задачи: № 440, 442, 444, 447, 451, 456, 458, 459, 536, 541, 549.

Решить и оформить задачи 2.1, 2.2 к РГР 2.

440. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	4	7	8	12
n_i	5	2	3	10

Найти распределение относительных частот.

442. Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

а)

x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4

б)

x_i	4	7	8
n_i	5	2	3

444. Построить полигон частот по данному распределению выборки:

а)

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

б)

x_i	15	20	25	30	35
n_i	10	15	30	20	25

447. Построить гистограмму частот по данному в табл. 2.1.7 и 2.1.8 распределению выборки:

а)

Таблица 2.1.7

Номер интервала, i	**Частичный интервал, $x_i - x_{i+1}$**	**Сумма частот вариант интервала, n_i**	**Плотность частоты, $\frac{n_i}{h}$**
1	2–7	5	
2	7–12	10	
3	12–17	25	
4	17–22	6	
5	22–27	4	

б)

Таблица 2.1.8

Номер интервала, i	**Частичный интервал, $x_i - x_{i+1}$**	**Сумма частот вариант интервала, n_i**	**Плотность частоты, $\frac{n_i}{h}$**
1	3–5	4	
2	5–7	6	
3	7–9	20	
4	9–11	40	
5	11–13	20	
6	13–15	4	
7	15–17	6	

Указание. Найти предварительно плотность частоты $\frac{n_i}{h}$ для каждого интервала и заполнить последний столбец таблицы.

451. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема n = 60:

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

Найти несмещенную оценку генеральной средней.

456. По выборке объема n = 51 найдена смещенная оценка D_B=5 генеральной дисперсии. Найти несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.

458. В итоге четырех измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты: 8; 9; 11; 12. Найти: а) выборочную среднюю результатов измерений; б) выборочную и исправленную дисперсии ошибок прибора.

459. Ниже приведены результаты измерения роста (в см) случайно отобранных 100 студентов.

Рост	154 - 158	158 – 162	162 – 166	166 - 170	170 – 174	174 – 178	178 - 182
Число студентов	10	14	26	28	12	8	2

Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию роста обследованных студентов.

Указание. Найти середины интервала и принять их в качестве вариант.

536. Найти выборочные уравнения прямых линий регрессии Y на X и X на Y по данным, приведенным в следующих корреляционных табл. 2.1.9, 2.1.10, 2.1.11:

а)

Таблица 2.1.9

Y	X								
	5	10	15	20	25	30	35	40	n_y
100	2	1	–	–	–	–	–	–	3
120	3	4	3	–	–	–	–	–	10
140	–	–	5	10	8	–	–	–	23
160	–	–	–	1	–	6	1	1	9
180	–	–	–	–	–	–	4	1	5
n_x	5	5	8	11	8	6	5	2	n=50

б)

Таблица 2.1.10

Y	X							
	18	23	28	33	38	43	48	n_y
125	–	1	–	–	–	–	–	1
150	1	2	5	–	–	–	–	8
175	–	3	2	12	–	–	–	17
200	–	–	1	8	7	–	–	16
225	–	–	–	–	3	3	–	6
250	–	–	–	–	–	1	1	2
n_x	1	6	8	20	10	4	1	$n=50$

в)

Таблица 2.1.11

Y	X							
	5	10	15	20	25	30	35	n_y
100	–	–	–	–	–	6	1	7
120	–	–	–	–	–	4	2	6
140	–	–	8	10	5	–	–	23
160	3	4	3	–	–	–	–	10
180	2	1	–	1	–	–	–	4
n_x	5	5	11	11	5	10	3	$n=50$

541. Два преподавателя оценили знания 12 учащихся по стобалльной системе и выставили им следующие оценки (в первой строке указано количество баллов, выставленных первым преподавателем, а во второй – вторым):

98	94	88	80	76	70	63	61	60	58	56	51
99	91	93	74	78	65	64	66	52	53	48	62

Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена между оценками двух преподавателей.

549. Два контролера расположили 10 деталей в порядке ухудшения их качества. В итоге были получены две последовательности рангов:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	1	2	4	3	6	5	7	10	9	8

Используя коэффициент ранговой корреляции Кендалла, определить, согласуются ли оценки контролеров.

2.2. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения или о параметрах известных распределений.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0.

Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

Различают гипотезы, которые содержат одно и более одного предположений.

Простой называют гипотезу, содержащую только одно предложение.

Сложной называют гипотезу, которая состоит из конечного и бесконечного числа простых гипотез.

В итоге проверки гипотезы могут быть допущены ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная нулевая гипотеза. Вероятность ошибки первого рода называют *уровнем значимости* и обозначают через α.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная нулевая гипотеза. Вероятность ошибки второго рода обозначают через β.

Статистическим критерием (или просто *критерием)* называют случайную величину K, которая служит для проверки гипотезы.

Наблюдаемым (эмпирическим) значением называют то значение критерия, которое вычислено по выборкам.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Областью принятия гипотезы (областью допустимых значений) называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу принимают.

Основной принцип проверки статистических гипотез: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области, нулевую гипотезу отвергают; если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы, то гипотезу принимают.

Критическими точками (границами) $k_{кр}$ называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Правосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K > k_{кр}$, где $k_{кр}$ – положительное число.

Левосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K < k_{кр}$, где $k_{кр}$ —отрицательное число.

Двусторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K < k_1$, $K > k_2$, где $k_2 > k_1$. В частности, если критические точки симметричны относительно нуля, то двусторонняя критическая область определяется неравенствами (в предположении, что $k_{кр} > 0$.

$K < -k_{кр}$, $K > k_{кр}$ или равносильным неравенством

$$|K| > k_{кр}. \tag{2.2.1}$$

Для отыскания критической области задаются уровнем значимости α и ищут критические точки, исходя из следующих соотношений:

а) для правосторонней критической области

$$P\left(K > k_{кр}\right) = \alpha; \quad (k_{кр} > 0); \tag{2.2.2}$$

б) для левосторонней критической области

$$P\left(K < k_{кр}\right) = \alpha; \quad (k_{кр} < 0); \tag{2.2.3}$$

в) для двусторонней симметричной области

$$P\left(K > k_{кр}\right) = \left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (k_{кр} > 0);$$

$$P\left(K < -k_{кр}\right) = \left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (k_{кр} > 0); \tag{2.2.4}$$

Мощностью критерия называют вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что справедлива конкурирующая гипотеза. Другими словами, мощность критерия есть вероятность того, что нулевая гипотеза будет отвергнута, если верна конкурирующая гипотеза.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий по курсу
«Теория вероятностей и математическая статистика»

Тема: «Статистическая проверка статистических гипотез»

Дидактическая цель. Познакомиться с понятием статистической гипотезы и основным принципом ее проверки, а также с критериями проверки.

Воспитательная цель. Формировать у студентов такой метод научного познания, как обобщение.

1. Теоретическая часть

По данной теме вначале изучите [1, ч.3, гл.19, §1 – 27].

2. Методические рекомендации

Изучив основные теоретические сведения, ответьте на контрольные вопросы, только затем приступите к решению задач.

Вопросы для самопроверки:

1.Что такое статистическая гипотеза?

2.Охарактеризуйте понятие альтернативной гипотезы.

3.Рассмотрите смысл ошибок первого и второго рода при проверке статистических гипотез.

4.Что представляет собой критическая область, критическая точка?

3. Решение задач

Совместно со студентами обсуждается решение следующих задач из [2]: № 554, 556, 560, 567, 570.

554. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_1 = 11$ и $n_2 = 14$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей *X* и *Y,* найдены исправленные выборочные дисперсии $s_x^2 = 0{,}76$ и $s_y^2 = 0{,}38$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу H_0: $D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе H_1: $D(X)>D(Y)$.

556. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_1 = 14$ и $n_2 = 10$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей *X* и *Y,* найдены исправленные выборочные дисперсии $s_x^2 = 0{,}84$ и $s_y^2 = 2{,}52$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ проверить нулевую гипотезу H_0: $D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе H_1: $D(X) \neq D(Y)$.

560. Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 21$ и по ней найдена исправленная выборочная дисперсия $s^2 = 16{,}2$. Требуется при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 15$, приняв в качестве конкурирующей гипотезы H_1: $\sigma_0^2 > 15$.

567. По двум независимым выборкам, объемы которых $n = 40$ и $m = 50$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены выборочные средние: $\overline{x} = 130$ и $\overline{y} = 140$. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 80$, $D(Y) = 100$. Требуется при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X) = M(Y)$ при конкурирующей гипотезе H_1: $M(X) \neq M(Y)$.

570. По двум независимым малым выборкам, объемы которых $n = 12$ и $m = 18$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние: $\overline{x} = 31{,}2$ и $\overline{y} = 29{,}2$ и исправленные дисперсии: $s_x^2 = 0{,}84$ и $s_y^2 = 0{,}40$. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X) = M(Y)$ при конкурирующей гипотезе H_1: $M(X) \neq M(Y)$.

4. Подведение итогов занятия.

5. ***Домашнее задание:*** из [2] решить задачи: № 555, 557, 561, 568.

555. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_1 = 9$ и $n_2 = 16$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены исправленные выборочные дисперсии $S_X^2 = 34{,}02$ и $S_Y^2 = 12{,}15$. При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу H_0: $D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе H_1: $D(X) > D(Y)$.

557. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_1 = 9$ и $n_2 = 6$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные дисперсии $D_B(X) = 14{,}4$ и $D_B(Y) = 20{,}5$. При уровне значимости 0,1 проверить нулевую гипотезу H_0: $D(X) = D(У)$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе H_1: $D(X) \neq D(Y)$.

Найти сначала исправленные дисперсии по формулам:

$$S_X^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1} \cdot D_B(X),$$

$$S_Y^2 = \frac{n_2}{n_2 - 1} \cdot D_B(Y).$$

561. Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема n = 17 и по ней найдена исправленная выборочная дисперсия $S_2 = 0{,}24$. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 0{,}18$, приняв в качестве конкурирующей гипотезы H_1: $\sigma^2 > 0{,}18$.

568. По выборке объема n = 30 найден средний вес $\overline{x} = 130$ г изделий, изготовленных на первом станке; по выборке объема m = 40 найден средний вес $\overline{y} = 125$ г изделий, изготовленных на втором станке. Генеральные дисперсии известны: $D(X)$ = 60 г^2, $D(Y)$ = 80 г^2. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X) = M(Y)$ при конкурирующей гипотезе $M(X) \neq M(Y)$. Предполагается, что случайные величины X и Y распределены нормально и выборки независимы.

2.3. ПРОВЕРКА НОРМАЛЬНОСТИ ВЫБОРОЧНЫХ ДАННЫХ РАЗЛИЧНЫМИ СПОСОБАМИ

Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности по критерию Пирсона

а). Пусть эмпирическое распределение задано в виде последовательности равноотстоящих вариант и соответствующих им частот:

x_i	x_1	x_2	...	x_N
n_i	n_1	n_2	...	n_N

Требуется, используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о том, что генеральная совокупность X распределена нормально.

Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, надо:

1. Вычислить непосредственно (при малом числе наблюдений) или упрощенным методом (при большом числе наблюдений), например методом произведений или сумм, выборочную среднюю $\overline{x_B}$ и выборочное среднее квадратическое отклонение σ_B.

2. Вычислить теоретические частоты

$$n_i' = \frac{nh}{\sigma_B} \cdot \varphi(u_i), \qquad (2.3.1)$$

где n – объем выборки (сумма всех частот); h – шаг (разность между двумя соседними вариантами).

$$u_i = \frac{x_i - \overline{x_B}}{\sigma_B},$$

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

3. Сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона. Для этого:

а) составляют расчетную таблицу, по которой находят наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}; \tag{2.3.2}$$

б) по таблице критических точек распределения χ^2, по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = s - 3$ (s – число групп выборки) находят критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k)$ правосторонней критической области.

Если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{КР}}$ – нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности. Другими словами, эмпирические и теоретические частоты различаются незначимо (случайно).

Если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{КР}}$ – гипотезу отвергают. Другими словами, эмпирические и теоретические частоты различаются значимо.

Замечание 1. Малочисленные частоты ($n_i < 5$) следует объединить; в этом случае и соответствующие им теоретические частоты также надо сложить. Если производилось объединение частот, то при определении числа степеней свободы по формуле $k = s - 3$ следует в качестве s принять число групп выборки, оставшихся после объединения частот.

б) Пусть эмпирическое распределение задано в виде последовательности интервалов одинаковой длины $(x_i,\ x_{i+1})$ и соответствующих им частот n_i (n_i – сумма частот, которые попали в i-й интервал):

$(x_1,\ x_2)$	$(x_2,\ x_3)$	…	$(x_s,\ x_{s+1})$
n_i	n_2	…	n_s

Требуется, используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о том, что генеральная совокупность *X* распределена нормально.

Правило 2. Для того чтобы при уровне значимости α проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, надо:

1. Вычислить, например методом произведений, выборочную среднюю $\overline{x}$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_В$, причем в качестве вариант x_i^* принимают среднее арифметическое концов интервала:

$$x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}. \qquad (2.3.3)$$

2. Пронормировать *X*, т. е. перейти к случайной величине

$$Z = \frac{X - \overline{x^*}}{\sigma^*} \qquad (2.3.4)$$

и вычислить концы интервалов: $z_i = \frac{x_i - \overline{x^*}}{\sigma^*}$ и $z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \overline{x^*}}{\sigma^*}$, причем наименьшее значение *Z*, т.е. z_1 полагают равным – ∞, а наибольшее, т. е. z_{s+1}, полагают равным + ∞.

3. Вычислить теоретические частоты

$$n_i' = n \cdot P_i \qquad (2.3.5)$$

где *n* – объем выборки (сумма всех частот);

$P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$ – вероятности попадания *X* в интервалы $(x_i,\ x_{i+1})$;

Ф (*Z*) – функция Лапласа.

4. Сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона. Для этого:

а) составляют расчетную таблицу, по которой находят наблюдаемое значение критерия Пирсона

$$\chi^2_{набл} = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'};$$

б) по таблице критических точек распределения χ^2, по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = s - 3$

(s – число интервалов выборки) находят критическую точку правосторонней критической области $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k)$.

Если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{КР}}$ – нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности. Если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{КР}}$ – гипотезу отвергают.

Замечание 2. Интервалы, содержащие малочисленные эмпирические частоты ($n_i < 5$), следует объединить, а частоты этих интервалов сложить. Если производилось объединение интервалов, то при определении числа степеней свободы по формуле $k = s - 3$ следует в качестве s принять число интервалов, оставшихся после объединения интервалов.

Графическая проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. Метод спрямленных диаграмм

а) Сгруппированные данные. Пусть эмпирическое распределение выборки из генеральной совокупности X задано в виде последовательности интервалов (x_0, x_1), (x_1, x_2),..., (x_{k-1}, x_k) и соответствующих им частот n_i (n_i – число вариант, попавших в i – й интервал). Требуется графически проверить гипотезу о нормальном распределении X.

Предварительно введем определение p-квантили случайной величины X. Если задана вероятность p, то *p-квантилью (квантилем) X* называют такое значение аргумента u_p функции распределения $F(x)$, для которого вероятность события $X < u_p$ равна заданному значению p. Например, если величина X распределена нормально и $p = 0{,}975$, то $u_p = u_{0{,}975} = 1{,}96$. Это означает, что $P(X < 1{,}96) =$ $= 0{,}975$.

Заметим, что поскольку функции распределения общего и нормированного нормальных распределений связаны равенством

$F(x) = F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$, то $F(x_p) = F_0\left(\frac{x_p-a}{\sigma}\right)$ и, следовательно, $u_p = \frac{x_p-a.}{\sigma}$

Правило 1. Для того чтобы графически проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности X по эмпирическому распределению, заданному в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот, надо:

1. Составить расчетную табл. 2.3.1. Квантили находят по таблице (см. приложение 5).

Таблица 2.3.1

1	2	3	4	5	6	7
Номер интервала	Правый конец интервала	Частота	Накопленная частота	Относительная накопленная частота	Относительная накопленная частота, %	Квантили
i	x_i	n_i	$\sum_{r=1}^{i} n_r$	$P_i = \frac{\sum n_r}{n}$	$P_i \cdot 100\%$	u_{p_i}

В столбце 6 табл.2.3.1 относительные накопленные частоты умножены на 100, так как в таблице приложения 5 эти частоты указаны в процентах.

2. Построить в прямоугольной системе координат *(x; u)* точки (x_1, u_1), (x_2, u_2),...(значок p при квантилях опущен для простоты записи). Если эти точки лежат вблизи некоторой прямой, то нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении *X*; если же построенные точки удалены от прямой, то гипотезу отвергают.

Замечание 1. Следует иметь в виду, что «начальные» и «конечные» точки (x_I, u_i) могут заметно отклоняться от прямой $u = \frac{x-a}{\sigma}$.

Замечание 2. Если построенные точки оказались вблизи прямой, то легко графически оценить параметры a и σ нормального распределения. В качестве оценки математического ожидания *a можно принять абсциссу точки* $L(x_L, 0)$ пересечения построенной прямой с осью *Ox*. В качестве оценки среднего квадратического отклонения σ можно принять разность абсцисс точки $L(x_L, 0)$ и точки $N(x_{\mathrm{N}}, -1)$ пересечения построенной линии с прямой $u = -1$: $\sigma^* = = x_L - x_N$.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий по курсу
«Теория вероятностей и математическая статистика»

Тема: «Проверка нормальности выборочных данных различными способами»

Дидактическая цель. Изучить критерий Пирсона и метод спрямленных диаграмм для проверки гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности.

Воспитательная цель. Продолжать формировать умение самоконтроля при решении задач.

1. Теоретическая часть

По данной теме вначале изучите [1, ч.3, гл.19, §23, 24].

2. Методические рекомендации

Изучив основные теоретические сведения, ответьте на контрольные вопросы, только затем приступите к решению задач.

Вопросы для самопроверки:

1.Сформулируйте критерий согласия Пирсона.

2.Как определить выборочную статистику χ^2 («хи-квадрат»)?

3.Как определяется число степеней свободы в критерии Пирсона?

4.Охарактеризуйте метод спрямленных диаграмм.

3. Решение задач

Совместно со студентами обсуждается решение следующих задач из [2]: № 634, 635, 637, 639, 642.

634. Почему при проверке с помощью критерия Пирсона гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности число степеней свободы находят по формуле $k = s - 3$?

635. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности *X с* эмпирическим распределением выборки объема *n* = 200.

x_i	*5*	*7*	*9*	*11*	*13*	*15*	17	*19*	*21*
n_i	*15*	*26*	*25*	*30*	*26*	*21*	24	*20*	*13*

637. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,01 установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими частотами n_i и теоретическими частотами n_i^1, которые вычислены, исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности *X*:

n_i	*8*	*16*	*40*	*72*	*36*	*18*	10
n_i^1	*6*	*18*	*36*	*76*	*39*	*18*	7

639. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности *X* с эмпирическим распределением выборки объема *n* = 100, приведенным в табл. 2.3.2.

Таблица 2.3.2

Номер интервала, i	Граница интервала		Частота, n_i
	x_i	x_{i+1}	
1	3	8	6
2	8	13	8
3	13	18	15
4	18	23	40
5	23	28	16
6	28	33	8
7	33	38	7
ИТОГО			*n*=100

642. Из генеральной совокупности *X* извлечена выборка объема *n* = 100, которая задана в виде последовательности интервалов одинаковой длины и соответствующих им частот n_i (n_i – число вариант, попавших в i-й интервал). Эмпирическое распределение приведено в табл. 2.3.3.

Таблица 2.3.3

Номер интервала, i	Граница интервала		Частота, n_i
	x_i	x_{i+1}	
1	1	3	2
2	3	5	4
3	5	7	6
4	7	9	10
5	9	11	18
6	11	13	20
7	13	15	16
8	15	17	11
9	17	19	7
10	19	21	5
11	21	23	1
ИТОГО			*n*=100

Требуется :

а) методом спрямленных диаграмм проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности *X;*

б) оценить графически математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение *X*.

4. Подведение итогов занятия.

5. ***Домашнее задание:*** из учебного пособия Гмурмана В.Е. «Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике» [2] решить задачи: № 636, 638, 643.

636. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности *X* с эмпирическим распределением выборки объема $n = 200$:

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3
n_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

638. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими частотами n_i и теоретическими частотами n_i', которые вычислены исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности *X:*

а)

n_i	5	10	20	8	7
n_i'	6	14	18	7	5

б)

n_i	6	8	13	15	20	16	10	7	5
n_i'	5	9	14	16	18	16	9	6	7

в)

n_i	14	18	32	70	20	36	10
n_i'	10	24	34	80	18	22	12

г)

n_i	5	7	15	14	21	16	9	7	6
n_i'	6	6	14	15	22	15	8	8	6

643. Из генеральной совокупности *X* извлечена выборка объема $n = 120$, которая задана в виде последовательности интервалов одинаковой длины и соответствующих им частот (табл. 2.3.4).

Таблица 2.3.4

Номер интервала, i	Граница интервала		Частота, n_i
	x_{i-1}	x_i	
1	5	10	7
2	10	15	8
3	15	20	15
4	20	25	18
5	25	30	23
6	30	35	19
7	35	40	14
8	40	45	10
9	45	50	6
ИТОГО			n=120

Требуется:

а) методом спрямленных диаграмм проверить гипотезу о нормальном распределении X;

б) оценить графически математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение X.

2.4. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПО БИНОМИАЛЬНОМУ ЗАКОНУ, О РАВНОМЕРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ, О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПО ЗАКОНУ ПУАССОНА ГЕНЕРАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ

Проверка гипотезы о распределении генеральной совокупности по биномиальному закону. Произведено n опытов. Каждый опыт состоит из N независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A одна и та же. Регистрируется число появлений события A в каждом опыте. В итоге получено следующее распределение дискретной случайной величины X – числа появлений события A (в первой строке указано число x_i, появлений события A в одном опыте; во второй строке – частота n_i, т.е. число опытов, в которых зарегистрировано x_i появлений события A):

x_i	0	1	2	...	N
n_i	0	1	2	...	n_N

Требуется, используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о распределении дискретной случайной величины X по биномиальному закону.

Правило. *Для того чтобы при уровне значимости α проверить гипотезу о том, что дискретная случайная величина X (число появлений события A) распределена по биномиальному закону, надо:*

1. Найти по формуле Бернулли вероятности P_i (появления ровно i событий A в N испытаниях (i = 0, 1, 2, ..., s, где s – максимальное число наблюдавшихся появлений события A в одном опыте, т.е. $s \leq N$).

2. Найти теоретические частоты

$n'_i = n \cdot P_i$, где n – число опытов.

3. Сравнить эмпирические и теоретические частоты по критерию Пирсона, приняв число степеней свободы k = s – 1 (при этом предполагается, что вероятность p появления события A задана, т. е. не оценивалось по выборке и не производилось объединение малочисленных частот).

Если же вероятность p была оценена по выборке, то k = s – 2. Если, кроме того, было произведено объединение малочисленных частот, то s – число групп выборки, оставшихся после объединения частот.

Проверка гипотезы о равномерном распределении генеральной совокупности. Задано эмпирическое распределение непрерывной случайной величины X в виде последовательности интервалов (x_{i-1}, x_i) и соответствующих им частот n_i, причем $\sum n_i = n$ (объем выборки). Требуется, используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о том, что случайная величина X распределена равномерно.

Правило. Для того чтобы проверить гипотезу о равномерном распределении X, т. е. по закону

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{в} \quad \text{интервале } (a,b) \\ 0 & \text{вне} \quad \text{интервала } (a,b) \end{cases}$$

надо:

1. Оценить параметры a и b – концы интервала, в котором наблюдались возможные значения X, по формулам (через a^* и b^* обозначены оценки параметров):

$$a^* = \overline{x_В} - \sqrt{3} \cdot \sigma_В,$$

$$b^* = \overline{x_В} + \sqrt{3} \cdot \sigma_В.$$

2. Найти плотность вероятности предполагаемого распределения

$$f(x) = \frac{1}{b^* - a^*}.$$

3. Найти теоретические частоты:

$$n_1' = n \cdot P_1 = n[f(x) \cdot (x_1 - a^*)] = n\frac{1}{b^* - a^*}(x_1 - a^*);$$

$$n_2' = n_3' = \cdots = n_{s-1} = n\frac{1}{b^* - a^*}(x_i - x_{i-1}),$$

где $i = 2, 3, \dots, s - 1$.

$$n_s' = n\frac{1}{b^* - a^*}(b^* - x_{s-1}).$$

4. Сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона, приняв число степеней свободы $k = s - 3$, где s – число интервалов, на которые разбита выборка.

Проверка гипотезы о распределении генеральной совокупности по закону Пуассона. Задано эмпирическое распределение дискретной случайной величины X. Требуется, используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о распределении генеральной совокупности по закону Пуассона.

Правило. Для того чтобы при уровне значимости α проверить гипотезу о том, что случайная величина X распределена по закону Пуассона, надо:

1. Найти по заданному эмпирическому распределению выборочную среднюю $\overline{x_B}$.

2. Принять в качестве оценки параметра λ распределения Пуассона выборочную среднюю $\lambda = \overline{x_B}$.

3. Найти по формуле Пуассона (или по готовым таблицам) вероятности P_i появления ровно i событий в n испытаниях ($i = 0, 1, 2, \dots, r$), где r – максимальное число наблюдавшихся событий; n – объем выборки.

4. Найти теоретические частоты по формуле $n_i' = n \cdot P_i$.

5. Сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона, приняв число степеней свободы $k = s - 2$, где s – число различных групп выборки (если производилось объединение малочисленных частот в одну группу, то s – число оставшихся групп выборки после объединения частот).

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий по курсу
«Теория вероятностей и математическая статистика»

Тема: «Проверка гипотезы о распределении по биномиальному закону и о равномерном распределении, о распределении по закону Пуассона генеральной совокупности»

Дидактическая цель. Отработать критерий Пирсона для проверки гипотезы о распределении генеральной совокупности по биномиальному закону, по равномерному распределению и по закону Пуассона.

Воспитательная цель. Продолжать формировать умение самоконтроля при решении задач.

1. Теоретическая часть

По данной теме вначале изучите учеб. пособие В.Е. Гмурман «Теория вероятностей и математическая статистика» Ч. третья, гл. 13, §19, 20, 21.

2. Методические рекомендации

Изучив основные теоретические сведения, ответьте на контрольные вопросы и только затем приступите к решению задач.

Вопросы для самопроверки:

1. Как определяется уровень значимости критерия согласия?
2. Сформулируйте правило проверки гипотезы о распределении дискретной случайной величины X по биномиальному закону.
3. Сформулируйте правило проверки гипотезы о равномерном распределении генеральной совокупности.
4. Сформулируйте правило проверки гипотезы о распределении генеральной совокупности по закону Пуассона.

3. Решение задач

Совместно со студентами обсуждается решение следующих задач из учеб. пособия В.Е. Гмурман «Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике»: № 652, 635, 637, 639, 641, 642.

652. Произведено n = 100 опытов. Каждый опыт состоял из N = 10 испытаний, в каждом из которых вероятность p появления события A равна 0,3. В итоге получено следующее эмпирическое распределение (в первой строке указано число x_i появлений события A в одном опыте; во второй строке – частота n, т.е. число опытов, в которых наблюдалось x_i появлений события A):

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	2	10	27	32	23	6

656. Почему параметры a и b равномерно распределенной случайной величины X оцениваются по формулам

$a^* = \overline{x_{\text{B}}} - \sqrt{3} \cdot \sigma_{\text{B}}$ и $b^* = \overline{x_{\text{B}}} + \sqrt{3} \cdot \sigma_{\text{B}}$?

658. Произведено n = 200 испытаний, в результате каждого из которых событие A появлялось в различные моменты времени. В итоге было получено эмпирическое распределение, приведенное в табл. 2.4.1 (в первом столбце указаны интервалы времени в минутах, во втором столбце – соответствующие частоты, т.е. число появлений события A в интервале). Требуется при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что время появления событий распределено равномерно.

Таблица 2.4.1

Интервал $(x_{i-1},\ x_i)$	Частота, n_i
2 – 4	21
4 – 6	16
6 – 8	15
8 – 10	26
10 – 12	22
12 – 14	14
14 – 16	21
16 – 18	22
18 – 20	18
20 – 22	25

662. Отдел технического контроля проверил n = 200 партий одинаковых изделий и получил следующее эмпирическое распределение (в первой строке указано количество x_i нестандартных изделий в одной партии; во второй строке – частота n_i, т. е. количество партий, содержащих x_i нестандартных изделий);

x_i	0	1	2	3	4
n_i	116	56	22	4	2

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что число нестандартных изделий X распределено по закону Пуассона.

4. Подведение итогов занятия.

5. Домашнее задание: из учебного пособия В.Е. Гмурман «Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике» [2] решить задачи № 653, 659, 663.

653. Опыт, состоящий в одновременном подбрасывании четырех монет, повторили 100 раз. Эмпирическое распределение дискретной случайной величины X – числа появившихся «гербов» — оказалось следующим (в первой строке указано число x_i выпавших «гербов» в одном бросании монет; во второй строке – частота n, т.е. число бросаний, при которых выпало $x_($ «гербов»):

x_i	0	1	2	3	4
n_i	8	20	42	22	8

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина X распределена по биномиальному закону.

Указание. Принять вероятность выпадения «герба» $p = 0{,}5$.

659. В результате взвешивания 800 стальных шариков получено эмпирическое распределение, приведенное в табл. 2.4.2 (в первом столбце указан интервал веса в граммах, во втором – частота, т. е. количество шариков, вес которых принадлежит этому интервалу).

Таблица 2.4.2

Интервал $(x_{i-1},\ x_i)$	Частота n_i
20,0 – 20,5	91
20,5 – 21,0	76
21,0 – 21,5	75
21,5 – 22,0	74
22,0 – 22,5	92
22,5 – 23,0	83
23,0 – 23,5	79

Окончание табл. 2.4.2

23,5 – 24,0	73
24,0 – 24,5	80
24,5 – 25,0	77
ИТОГО	n = 800

Требуется при уровне значимости 0,01 проверить гипотезу о том, что вес шариков X распределен равномерно.

663. В итоге проверки на нестандартность 200 ящиков консервов получено следующее эмпирическое распределение (в первой строке указано количество x_i нестандартных коробок консервов в одном ящике; во второй строке – частота n_i, т.е. число ящиков, содержащих x_i коробок нестандартных консервов):

x_i	0	1	2	3	4
n_i	132	43	20	3	2

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина X – число нестандартных коробок – распределена по закону Пуассона.

Указание. Объединить малочисленные частоты двух последних групп.

РГР 1. Часть № 1

Варианты заданий для расчетной работы определяются по порядковому номеру студента в списке группы (*буквой V обозначен номер варианта)*.

Задание к задачам № 1.1 -1.5

1. Переписать текст задачи, заменяя все параметры их значениями для решаемого варианта.

2. Определить испытания и элементарные события.

3. Определить исследуемое событие А и другие события.

4. Установить, какие формулы следует использовать для вычислений и выполнить последние.

Задача 1.1. Бросают *две монеты*. Найти вероятность того, что:

1) на обеих монетах появится «герб»;

2) хотя бы на одной монете появится «герб»;

3) ни на одной монете не появится «герб».

Бросают *три монеты*. Найти вероятность того, что:

4) на всех монетах появится «герб»;

5) хотя бы на одной монете появится «герб»;

6) только на двух монетах появится «герб»;

7) только на одной монете появится «герб»;

8) ни на одной монете не появится «герб».

Бросают *четыре монеты*. Найти вероятность того, что:

9) на всех монетах появится «герб»;

10) хотя бы на одной монете появится «герб»;

11) только на одной монете появится «герб»;

12) только на двух монетах появится «герб»;

13) только на трех монетах появится «герб»;

14) ни на одной монете не появится «герб».

Бросают игральную кость. Найти вероятность того, что на верхней грани появится:

15) четное число очков;

16) «1» или «6».

Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что на верхних гранях появятся следующие числа очков:

17) только четные;

18) одно четное, другое нечетное;

19) сумма которых четна;

20) сумма которых нечетна;

21) сумма которых больше, чем их произведение;

22) сумма которых меньше шести;

23) сумма которых больше восьми.

Бросают три игральные кости. Найти вероятность того, что на верхних гранях появятся следующие числа очков:

24) только четные;

25) одно четное, остальные нечетные;

26) сумма которых четна;

27) сумма которых нечетна;

28) которые все одинаковы;

29) которые все различны.

Задача 1.2. В урне содержится К черных и Н белых шаров. Случайным образом вынимают М шаров. Найти вероятность того, что среди них имеется:

а) Р белых шаров;

б) меньше, чем Р, белых шаров;

в) хотя бы один белый шар.

Значения параметров К, Н, М и Р по вариантам приведены в табл. 1.

Таблица 1

№	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
К	5	5	6	6	7	4	8	6	4	5	7	8	6	4	8	5
Н	6	6	5	5	4	5	6	7	7	6	4	6	5	6	6	6
М	4	5	4	5	4	4	5	4	4	5	4	4	4	4	5	5
Р	2	3	2	3	2	2	3	4	2	3	2	3	3	3	2	4
№	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	
К	7	5	6	5	6	6	6	8	6	5	6	5	6	6	4	
Н	4	7	5	7	7	8	5	6	7	7	7	7	8	7	7	
М	5	4	5	5	5	5	5	5	4	4	6	5	5	5	4	
Р	3	3	2	4	3	4	4	3	3	2	3	3	3	2	2	

Задача 1.3. Устройство состоит из трех независимых элементов, работающих в течение времени T безотказно соответственно с вероятностями p_1, p_2 и p_3. Найти вероятность того, что за время T выйдет из строя:

а) только один элемент;

б) хотя бы один элемент.

Значения параметров вычислить по следующим формулам:

$$k = \frac{|14{,}9 - V|}{100}; \; p_1 = 1 - k, \quad p_2 = 0{,}9 - k, \quad p_3 = 0{,}85 - k.$$

Задача 1.4. В пирамиде стоят R винтовок, из них L – с оптическим прицелом. Стрелок, стреляя из винтовки с оптическим прицелом, может поразить мишень с вероятностью p_1, а стреляя из винтовки без оптического прицела, – с вероятностью p_2. Найти вероятность того, что стрелок поразит мишень, стреляя из случайно взятой винтовки.

Значения параметров вычислить по следующим формулам:

$$k = |14 - V|, \quad p_1 = 0{,}95 - k/100, \quad p_2 = 0{,}6 - k/100;$$

$$R = 5 + k, \quad L = \begin{cases} 3, & V \le 14, \\ 4, & V > 14. \end{cases}$$

Задача 1.5. В монтажном цехе к устройству присоединяется электродвигатель. Электродвигатели поставляются тремя заводами-изготовителями. На складе имеются электродвигатели этих заводов соответственно в количестве M_1, M_2, M_3 штук, которые могут безотказно работать до конца гарантийного срока с вероятностями соответственно p_1 , p_2 и p_3 . Рабочий берет случайно один электродвигатель и монтирует его к устройству. Найти вероятности того, что смонтированный и работающий безотказно до конца гарантийного срока электродвигатель поставлен соответственно первым, вторым или третьим заводом-изготовителем.

Значения параметров вычислить по следующим формулам:

$$k = |14 - V|, \quad p_1 = 0{,}99 - k/100, \quad p_2 = 0{,}9 - k/100$$

$$p_1 = 0{,}85 - k/100,$$

$$M_1 = 5 + k, M_2 = 20 - k, M_3 = 25 - k.$$

Задание к задачам 1.6 – 1.10.

1) Переписать текст задачи, заменяя все параметры их значениями для решаемого варианта.

2) Определить исходные данные и результаты.

3) Определить подходящие формулы вычисления и выполнить вычисления при помощи микрокалькулятора и таблиц.

4) Построить требуемые графики.

Задача 1.6. В каждом из n независимых испытаний событие А происходит с постоянной вероятностью p. Вычислить все вероятности p_k , $k = 0, 1, 2, ..., n$, где k – частота события А.

Построить график вероятностей p_k . Найти наивероятнейшую частоту.

Значения параметров n и p вычислить по следующим формулам:

$$n = \begin{cases} 11, & V \le 10, \\ 10, & 10 < V \le 20, \\ 9, & V > 20. \end{cases} \quad p = 0{,}3 + V/100,$$

Задача 1.7. В каждом из n независимых испытаний событие А происходит с постоянной вероятностью p. Найти вероятность того, что событие А происходит:

а) точно G раз;

б) точно L раз;

в) меньше чем M и больше чем F раз;

г) меньше чем R раз.

Значения параметров n, p, G , L , M, F и R вычислить по следующим формулам:

$$n = 500 + V \cdot 10, \quad p = 0{,}4 + V/100, \quad G = 220 + V \cdot 10,$$

$$L = G - 30, \quad M = G + 20 + V, \quad F = G - 40 + V, \quad R = G + 15.$$

Задача 1.8. Случайная величина X задана рядом распределения (табл.2).

Таблица 2

X	x_1	x_2	x_3	x_4
P	p_1	p_2	p_3	p_4

Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X и построить ее график. Вычислить для X ее среднее значение $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и моду Mo.

Значения параметров x_1, x_2, x_3, x_4, p_1, p_2, p_3, p_4 вычислить по следующим формулам:

R = остаток (V/4) + 2;

$x_1 = V+3,\ x_2 = x_1 + R,\ x_3 = x_2 + R,\ x_4 = x_3 + 2R$;

$$p_1 = \frac{1}{R+5},\quad p_2 = \frac{1}{R+3},\ p_3 = \frac{41+33R+R^2-R^3}{(R+3)(R+5)(8-R)},\ p_4 = \frac{1}{8-R}.$$

Задача 1.9. Случайная величина X задана функцией плотности вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x/K, & 0 < x \le R, \\ 0, & x > R. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$. Вычислить для X ее среднее значение $M(X)$, дисперсию $D(X)$, моду Mo и медиану Me.

Значения параметров K и R вычислить по следующим формулам:

K=2 + V, R^2 = 2·K.

Задача 1.10. Задана случайная величина $X \in N(\mu, \sigma)$. Найти вероятность того, что эта случайная величина принимает значение:

а) в интервале $[a, b]$;

б) меньше K;

в) большее L;

г) отличающееся от своего среднего значения по абсолютной величине не больше чем на ε.

Значения параметров $\mu, \sigma, a, b, K, L, \varepsilon$ вычислить по следующим формулам:

$\mu = V$, σ = остаток (V/8) + 2, S = остаток (V/5) + 1,

$a = V -$ S, b = V + 2S, $K = V -$ S,

$L = V$ + 2S, $\varepsilon = S$.

РГР 1. ЧАСТЬ № 2

Варианты заданий для расчетной работы определяются по порядковому номеру студента в списке группы (*буквой V обозначен номер варианта).*

Задание к задачам № 2.1 -2.2

В следующих задачах использовать выборки из приложения 4. Вычисления по возможности выполнить максимально в таблицах.

Задача 2.1. По выборкам А составить вариационный ряд по значениям и по выборке В – по интервалам значений, затем решить следующие подзадачи:

- вычислить относительные частоты (частости) и накопленные частоты;
- построить графики вариационного ряда (полигон и гистограмму);
- составить эмпирическую функцию распределения;
- построить график эмпирической функции распределения;
- вычислить числовые характеристики вариационного ряда:
- среднее арифметическое $\bar{x}$ *;*
- дисперсию $\bar{S}^2$;
- стандартное отклонение $\bar{S}$;
- моду *Mo;*
- медиану *Me.*

Задача 2.2. Вычислить несмещенные оценки параметров генеральной совокупности $\bar{x}$, S^2 , S по выборкам А и В, используя результаты, полученные в задаче 2.1.

Приложение 1

Таблица значений функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081

Окончание табл.

2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974

Окончание табл.

2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Приложение 3

Распределение Пуассона $P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	
k										
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	
λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k										
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005

Окончание табл.

2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14					0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18							0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19							0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20								0,0002	0,0006	0,0019
21								0,0001	0,0003	0,0009
22									0,0001	0,0004
23										0,0002
24										0,0001

Приложение 4

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0.05	0,95	0,975	0.99
1	6.6	5.0	3.8	0.0039	0.00098	0.00016
2	9.2	7.4	6.0	0.103	0.051	0.020
3	11.3	9.4	7.8	0.352	0.216	0.115
4	13.3	11.1	9.5	0.711	0.484	0.297
5	15.1	12.8	11.1	1.15	0.831	0.554
6	16.8	14.4	12.6	1.64	1.24	0.872
7	18.5	16.0	14.1	2.17	1.69	1.24
8	20.1	17.5	15.5	2.73	2.18	1.65
9	21.7	19.0	16.9	3.33	2.70	2.09
10	23.2	20.5	18.3	3.94	3.25	2.56
11	24.7	21.9	19.7	4.57	3.82	3.05
12	26.2	23.3	21 .0	5.23	4.40	3.57
13	27.7	24.7	22.4	5.89	5.01	4.11
14	29.1	26.1	23.7	6.57	5.63	4.66
15	30.6	27.5	25.0	7.26	6.26	5.23
16	32.0	28.8	26.3	7.96	6.91	5.81
17	33.4	30.2	27.6	8.67	7.56	6.41
18	34.8	31.5	28.9	9.39	8.23	7.01
19	36.2	32.9	30.1	10.1	8.91	7.63
20	37.6	34.2	31.4	10.9	9.59	8.26
21	38.9	35.5	32.7	11.6	10.3	8.90
22	40.3	36.8	33.9	12.3	11.0	9.54
23	41.6	38.1	35.2	13.1	11.7	10.2
24	43.0	39.4	36.4	13.8	12.4	10.9
25	44.3	40.6	37.7	14.6	13.1	11.5
26	45.6	41.9	38.9	15.4	13.8	12.2
27	47.0	43.2	40.1	16.2	14.6	12.9
28	48.3	44.5	41.3	16.9	15.3	13.6
29	49.6	45.7	42.6	17.7	16.0	14.3
30	50.9	47.0	43.8	18.5	16.8	15.0

Приложение 5

Квантили нормального распределения u_p

p	Квантиль порядка p	p	Квантиль порядка p
0,01	-2,326348	0,60	0,253347
0,025	-1,959964	0,70	0,524401
0,05	-1,644854	0,80	0,841621
0,10	-1,281552	0,90	1,281552
0,30	-0,524401	0,95	1,644854
0,40	-0,253347	0,975	1,959964
0,50	0,000000	0,99	2,326348

Приложение 6

ВАРИАНТ 1

Выборка А1

0	4	2	0	5	1	1	3	0	2
2	4	3	2	3	3	0	4	5	1
3	1	5	2	0	2	2	3	2	2
2	6	2	1	3	1	3	1	5	4
5	5	3	2	2	0	2	1	1	3
2	3	5	3	5	2	5	2	1	1
2	3	4	3	2	3	2	4	2	

N = 69. Начало первого интервала: 0. Длина интервала:1.

Выборка В1

135	133	124	132	104	152	134	130	129	120	122	124
117	123	123	129	121	122	125	131	147	124	137	112
126	128	111	129	115	147	131	132	137	119	125	120
129	125	123	127	132	118	133	132	132	134	131	120
135	132	125	132	108	114	121	133	133	135	131	125
114	115	122	131	125	132	120	126	115	117	118	118
132	134	127	127	124	135	128	127	115	144	129	120
137	127	125	116	132	120	117	127	118	109	127	122
120	135	116	118	133	136	125	126	119	126	129	127
129	124	127	132	126	131	127	130	126	124	135	127
124	123	123	130	132	143	122	139	120	134	108	132
121	111	123	140	137	120	125	131	118	120	120	136
129	127	116	138	128	133	122	131	128	140	138	134
120	126	109	137	111	115	117	130	113	126	115	124
125	118	115	128	123	129	128	120	115	134	118	135
134											

N = 181. Начало первого интервала:102. Длина интервала:4.

ВАРИАНТ 2

Выборка А2

3	7	4	6	1	4	2	4	6	5	3	2	9	0	5	6	7	7	3	1
5	5	4	2	6	2	1	5	3	3	1	5	6	4	4	3	4	1	5	5
3	4	3	7	4	5	6	7	5	2	4	6	6	7	7	3	5	4	4	3
5	5	7	6	6	1														

N = 66. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка В2

95	96	103	89	72	105	85	85	91	101	82	91
80	85	91	87	101	94	98	85	82	94	86	72
89	83	100	86	85	95	95	83	87	92	92	79
93	88	77	92	92	103	85	90	83	86	104	104
85	85	80	95	91	93	70	83	93	95	95	78
111	95	94	84	64	87	85	87	87	81	82	97
101	86	89	80	88	85	93	79	95	90	107	93
96	83	88	91	95	94	88	80	96	93	77	71
88	97	90	86	93	91	98	95	83	84	91	99
109	80	95	87	89	85	87	72	77	90	97	87
95	91	88	91	81	88	78	75	80	97	95	83
91	78	87	92	103	77	101	66	71	90	105	76
97	75	95	88	84	96	79	89	94	100	87	100
92	100	79	96	104	84	89	82	93	92	85	80
104	87	90	85	89	83	84	98	81	97	86	81
96	82	102	73	100	81	86	84	86	88	90	94
81	99	100	81	95	88	90	87	97	90	100	94
88	85	95	74	85	88	78	97	74			

N = 213. Начало первого интервала: 62 Длина интервала: 4.

ВАРИАНТ 3

Выборка А3

0	0	2	0	1	3	0	1	0	1	2	1	3	0	0	2	1	3	2	2
1	3	3	2	0	2	4	3	2	1	2	2	2	2	3	3	1	1	1	3
2	1	0	1	2	1	4	4	2	3	3	5	5	2	1	2	3	2	3	1
1	0	1	0	4	1	1	0	2	2	4	2	1	4	3	0	2	0	2	0
3	1																		

N = 82. Начало первого интервала:0. Длина интервала:1.

Выборка В3

-29	-22	-16	-20	-16	-18	-28	-20	-32	-22	-23	-26	-10	-25	-25
-29	-29	-19	-12	-26	-18	-20	-9	-24	-20	-19	-26	-23	-11	-26
-30	-23	-30	-18	-20	-13	-17	-24	-28	-26	-21	-21	-26	-24	-36
-23	-24	-25	-20	-23	-17	-11	-22	-19	-19	-25	-29	-23	-16	-25
-15	-18	-17	-19	-21	-12	-24	-30	-33	-22	-15	-18	-26	-22	-19
-25	-23	-21	-22	-22	-25	-16	-25	-19	-17	-30	-13	-25	-19	-24
-17	-24	-16	-23	-15	-22	-22	-19	-20	-19	-33	-14	-17	-21	-16
-24	-13	-20	-19	-17	-13	-27	-25	-25	-19	-22	-22	-22	-23	-9
-11	-22	-24	-18	-19	-18	-31	-16	-18	-24	-14	-23	-26	-25	-19
-23	-24	-21	-26	-25	-18	-16	-30	-16	-24	-13	-14	-18	-22	-22
-28	-18	-21	-27	-31	-23	-23	-27	-21	-21	-22	-34	-24	-20	-24
-21	-32	-16	-18	-15	-22	-15	-15	-22	-18					

N = 175. Начало первого интервала: –37. Длина интервала: 2.

ВАРИАНТ 4

Выборка А4

3	3	1	0	0	3	3	5	3	0	0	4	1	5	1	6	5	4	7	4
5	3	3	0	2	3	1	4	1	2	4	3	4	5	4	0	5	6	6	3
5	4	1	3	3	6	3	1	1	5	2	3	5	3	3	4	1	5	6	1
3	3	3	5	6	1	2	1	3	4										

N = 70. Начало первого интервала: 0. Длина интервала:1.

Выборка В4

58	78	84	62	63	100	55	90	102	70	66	89
71	92	71	93	83	42	110	110	56	96	95	87
88	102	104	88	64	96	92	67	78	95	71	105
50	66	73	76	100	72	86	46	102	95	98	84
82	46	60	94	109	93	79	74	62	97	94	91
81	71	89	78	85	80	93	64	65	109	89	55
103	98	108	68	65	71	82	70	84	73	65	79
99	81	92	76	82	95	75	45	94	81	84	68
77	90	103	119	57	102	100	83	68	69	68	81
83	69	90	99	69	85	84	70	80	117	76	104
78	114	79	70	56	62	73	71	77	98	86	82
54	62	82	103	91	61	93	68	109	96	67	110
84	82	56	78	80	88	66	78	65	50	88	72
94	92	89	109	69	58	75	72	101	92	75	77
85	76	85	84	68	74	78	87	69	75	61	53
70	106	68	81	61	64	100	73	74	57	63	102
96	80										

N = 194. Начало первого интервала: 39. Длина интервала: 6.

ВАРИАНТ 5

Выборка А5

0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	2	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	1	0	1
0																			

N = 81. Начало первого интервала: 0. Длина интервала:1.

Выборка В5

34	14	-14	10	9	29	27	-1	-4	17	23	13	18	-17	-22
1	8	-9	3	11	6	26	6	8	16	19	22	-8	23	-5
17	-21	-20	-17	16	3	6	25	0	4	5	6	-21	-2	8
-6	11	3	-2	17	13	8	27	11	9	12	12	-1	25	4
19	-8	29	0	-13	0	9	26	19	29	9	22	30	13	19
-1	-10	20	-7	21	10	8	-5	-2	9	-10	1	20	8	35
11	15	13	2	-5	-12	11	9	34	9	-2	-20	-4	-2	19
31	31	-11	-7	23	-20	-2	-2	-3	13	-7	15	8	-9	19
-8	-12	8	30	-22	18	-9	19	17	28	26	6	-7	0	-9
7	11	20	23	12	19	52	-10	32	29	33	3	-8	5	-4
9	18	-16	0	-8	25	32	26	-1	-5	6	-5	21	9	17
21	33	7	19	-2	6	14	8	14	27	16	-6	8	-2	-3
-16	-22	-7	13	20	18	1	4	-4	2	20	14	28	-9	-2
34	-16	-9	5	20	-8	25	7	19	5	12	-2	5	25	1
6	-7	4	-14	3	2	24	-5	4	24	30	21	7	27	12
36	13	-2	18											

N = 229. Начало первого интервала: –25. Длина интервала: 6.

ВАРИАНТ 6

Выборка А6

4	10	7	6	3	7	8	7	4	7	10	7	3	9	3
1	5	8	10	11	6	5	7	6	3	8	4	3	8	4
10	6	8	7	8	7	7	7	4	6	7	10	4	4	0
5	4	4	8	5	5	10	7	3	8	5	6	6	6	3
5	7	8	5	7	10	9	10	8	2	3	6	9		

N = 73. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка В6

324	296	313	323	312	321	322	301	337	322	329	307
301	328	312	318	327	315	319	317	309	334	323	340
326	322	314	335	313	322	319	325	312	300	323	335
339	326	298	298	337	322	303	314	315	310	316	321
312	315	331	322	321	336	328	315	338	318	327	323
325	314	297	303	322	314	317	330	318	320	312	333
332	319	325	319	307	305	316	330	318	335	327	321
332	288	322	334	295	318	329	305	310	304	326	319
317	316	316	307	309	309	328	317	317	322	316	304
303	350	309	327	345	329	338	311	316	324	310	306
308	302	315	314	343	320	304	310	345	312	330	324
308	326	313	320	328	309	306	306	308	324	312	309
324	321	313	330	330	315	320	313	302	295	337	346

Окончание табл.

327	320	307	305	323	331	345	315	318	331	322	315
304	324	317	322	312	314	308	303	333	321	312	323
317	288	317	327	292	316	322	319	313	328	313	309
329	313	334	314	320	301	329	319	332	316	300	300
304	306	314	323	318	337	325	321	322	288	313	314
307	329	302	300	316	321	315	323	331	318	334	316
328	294	288	312	312	315	321	332	319			

N = 237. Начало первого интервала: 285. Длина интервала: 7.

ВАРИАНТ 7

Выборка А7

2	2	1	3	4	2	1	1	3	3	4	3	2	4	2	1	4	3	1	4
0	4	2	3	4	3	7	1	3	3	3	4	3	2	1	2	3	3	1	5
3	0	2	1	2	3	0	0	3	6	2	4	3	4	2	4	1	2	0	3
1	0	0	2																

N = 64. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка В7

61	59	60	50	58	71	57	61	55	75	68	65	63	68	60
66	52	70	69	62	58	56	54	65	61	67	64	58	61	64
71	60	51	54	57	56	55	57	65	56	61	49	67	64	59
65	63	72	67	54	53	58	69	63	66	55	57	68	53	61
55	69	54	64	54	61	66	65	57	60	72	62	68	61	62
52	62	55	70	72	64	71	54	58	71	66	65	66	62	68
60	64	63	61	60	64	65	68	64	66	69	53	57	59	62
60	63	65	60	66	68	66	64	64	67	62	55	65	62	60
55	65	56	57	72	53	62	68	63	57	55	68	59	61	63
62	63	62	59	67	56	65	67	56	69	63	53	55	67	61
54	68	59	63	67	57	64	68	76	64	64				

N = 161. Начало первого интервала: 48 Длина интервала: 3.

ВАРИАНТ 8

Выборка А8

8	4	4	7	5	5	5	3	10	2	3	6	7	6	10
6	7	7	6	10	7	6	8	10	7	7	9	1	3	4
7	4	4	5	4	9	6	5	9	5	6	5	6	4	7
2	5	7	6	7	3	8	8	7	4	7	5	7	6	6
5	6	6	6	12	5	11	8	1	10	10	9	1	4	5

Окончание табл.

6	8	4	10	8												

N = 80. Начало первого интервала: 1. Длина интервала: 1.

Выборка B8

78	85	52	53	62	56	58	68	98	58	94	84	57	68	64
61	64	62	53	89	66	54	62	57	64	66	35	53	73	57
62	54	75	52	59	72	54	66	46	44	57	63	86	63	61
59	54	83	53	71	64	60	48	77	47	59	54	60	67	85
54	66	64	82	78	70	88	61	63	77	41	62	69	60	64
64	66	80	71	53	99	58	63	43	56	51	70	73	76	73
60	58	59	67	53	56	74	71	86	30	55	58	67	76	69
73	85	50	63	50	74	78	60	78	68	72	65	87	62	72
51	68	65	64	72	72	70	70	78	50	56	66	73	67	60
65	59	64	58	71	76	51	52	67	71	61	73	45	82	64
63	53	76	58	58	77	68	67	60	69	64	53	70	79	79
80	53	83	51	46	63	74	45	73	70	92	79	82	73	64
69	56	48	64	75	62	67	49	58	73	52	64	67	57	40
70	64	75	78	59	51	86	74	72	43	53	65	53	98	64
66	54	70	81	47	68	85	93	70	51	71	87	56	63	49
79	46	54	49	63	96	63	61	82	61					

N = 235. Начало первого интервала: 28. Длина интервала: 5.

ВАРИАНТ 9

Выборка A9

2	1	2	3	1	1	0	2	2	4	3	3	0	3	0	3	2	3	1	2
2	3	0	2	3	0	2	3	3	4	4	1	4	0	0	1	2	4	4	3
0	0	0	2	2	3	2	1	0	0	0	3	1	0	1	2	1	2	2	4
3	2	0	0	1	0	3	0	0	3	1	3	4	2	3	3	2	0	4	

N = 79. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка B9

56	76	65	66	76	62	89	48	62	50	47	80	67	87	78
55	67	51	73	75	61	88	46	57	65	60	72	28	75	51
69	68	65	34	77	63	57	61	42	85	49	41	62	63	80
62	65	75	56	66	92	60	43	52	80	68	70	76	62	55
42	87	81	67	65	81	90	38	58	60	79	79	50	64	70
58	77	73	54	58	77	86	52	61	42	70	93	54	65	51
53	64	65	76	88	59	62	67	62	90	88	69	61	81	65

Окончание табл.

72	58	68	94	54	58	58	81	57	70	71	78	52	93	89
57	68	70	58	72	57	62	63	87	61	91	57	57	66	68
40	63	86	48	75	66	83	64	55	75	65	67	54	70	44
51	86	67	58	73	71	46	86	68	79	50	58	66	69	61
64	78	78	60	46	71	71	74	79	65	61	62	84	53	67
83	43	64	67	50	60	83	61	83	67	67	58	46	73	58
47	76	81	72	66	83	73	71	70	60	68	52	51	63	63
75	61	80	51	63	62	46								

N = 217. Начало первого интервала: 26. Длина интервала: 5.

ВАРИАНТ 10

Выборка A10

3	5	6	8	4	5	4	7	2	7	7	3	7	4	4
5	4	4	5	2	4	8	8	4	6	5	9	4	0	4
4	4	9	3	3	2	1	5	2	5	5	3	4	4	7
8	9	11	4	5	2	5	7	6	1	2	5	6	3	1
2	6	7	3	3	2	5	4	8	2	6	5	9	5	5
2	8	3	6	4	6	6	8	7	3	3	7	3		

N = 88. Начало первого интервала: 0. Длина интервала:1.

Выборка B10

71	62	43	80	70	44	42	25	48	55	58	44	74	55	56
49	54	63	60	57	70	52	74	65	61	60	72	69	68	47
30	62	81	56	55	38	68	55	74	50	29	35	55	52	27
58	50	62	80	49	68	68	81	66	64	41	45	48	68	79
56	82	76	84	47	44	72	58	58	80	61	55	66	36	69
44	88	88	73	39	70	70	35	51	69	50	59	35	43	71
54	65	85	63	59	52	88	64	60	61	31	64	48	49	50
41	62	42	76	81	76	70	76	75	53	66	87	74	61	68
73	44	61	53	46	69	71	58	63	73	56	65	53	77	39
83	45	55	77	61	42	72	49	52	67	62	68	72	46	76
67	53	70	76	56	62	38	59	53	50	76	52	73	34	51
60	61													

N = 167. Начало первого интервала: 23. Длина интервала: 5.

ВАРИАНТ 11

Выборка A11

4	5	6	1	1	6	2	2	8	4	5	5	4	2	3	4	7	5	4	7
3	3	4	4	3	8	4	3	5	5	2	1	4	3	5	1	4	3	3	3
1	0	2	2	1	7	5	2	6	2	1	1	8	4	5	4	1	4	5	4
4	2	3	4	3	3	9	2	6	2	3	2	7	1	4	7	3	5	7	2
5	5	4	4	6	1														

N = 86. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка B11

127	141	121	131	145	139	141	131	139	137	128	132
129	134	140	143	140	127	132	136	134	133	121	133
136	126	138	144	138	138	137	137	127	139	140	141
125	136	136	129	136	135	142	132	129	128	134	139
130	137	132	140	125	127	129	133	134	135	124	132
127	133	140	135	140	130	130	130	131	133	133	131
129	127	138	128	122	137	136	137	140	138	117	114
132	137	126	137	136	130	148	130	140	132	127	125
134	136	116	120	125	136	124	144	133	132	123	136
131	130	130	134	132	131	125	138	130	146	132	131
138	135	133	126	134	137	141	136	126	125	135	139
150	130	136	132	127	131	122	125	133	133	123	136
131	135	130	123	133	123	140	133	138	124	129	129
128	126	128	138	127	120	144	135	126	126	144	125
123	132	138	155	139	137	133	129	124	140	131	128
130	130	124	142	124	129	131	143	129	127		

N = 190. Начало первого интервала: 112. Длина интервала: 5.

ВАРИАНТ 12

Выборка A12

11	6	7	8	7	3	7	3	3	12	7	9	12	5	10
4	7	2	7	7	4	5	11	5	5	6	4	5	8	9
8	12	5	6	7	10	11	9	13	9	3	8	11	9	7
12	6	6	14	11	9	8	14	6	4	10	8	4	6	8
3	6	6	7	7	6	10	11	3	11	8	5	8	11	11
6	11	7	8	7	12	5	5	9	5	7	10	5	7	

N = 89. Начало первого интервала: 2. Длина интервала: 1.

Выборка B12

103	120	129	105	131	138	113	87	117	109	109	113
162	139	101	98	114	116	94	125	108	119	130	127
116	124	137	140	151	102	115	127	121	110	131	106
112	96	112	112	120	100	118	104	106	123	112	134
106	107	115	130	140	104	127	125	117	109	106	109
112	90	111	138	112	97	124	128	105	122	118	126
84	138	123	119	121	116	120	101	118	102	102	120
145	117	110	138	107	127	119	127	128	90	95	92
105	131	118	127	105	139	92	122	116	111	111	101
99	98	103	123	114	126	132	123	142	92	103	109
138	115	94	116	138	125	91	132	98	111	154	129
146	123	96	112	104	111	108	89	128	111	140	143
131	102	116	105	135	96	102	106	99	116	99	129
128	125	97	97	96	114	148	133	126	98	107	130
93	123	112	117	87	98	79	97	136	121	100	127
113	116	117	115	97	108	110	110	103	128	86	126
98	121	119	99	134	114	157	133	109	120	129	129
147	110	120									

N = 207. Начало первого интервала: 76. Длина интервала: 6.

ВАРИАНТ 13

Выборка A13

1	0	1	1	1	2	0	2	1	0	0	0	1	0	3	2	1	1	1	0
0	0	1	1	0	2	0	3	1	2	1	3	2	1	0	0	1	0	1	1
0	2	3	1	0	3	1	1	1	2	1	1	0	0	1	1	3	0	2	3
2	1	1	0	4	2	2	1	1	2	0									

N = 71. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка B13

-71	-74	-51	-87	-37	-72	-64	-77	-63	-58	-50	-39	-71	-48	-39
-44	-62	-59	-50	-91	-51	-65	-54	-70	-50	-46	-66	-44	-71	-72
-58	-52	-58	-72	-62	-47	-58	-69	-58	-72	-42	-70	-84	-65	-65
-49	-45	-53	-50	-73	-47	-21	-40	-74	-35	-49	-58	-44	-50	-74
-53	-66	-67	-64	-62	-49	-67	-41	-67	-57	-56	-60	-71	-46	-79
-72	-48	-38	-51	-37	-60	-58	-52	-58	-55	-50	-64	-68	-53	-70
-59	-59	-90	-72	-61	-74	-36	-79	-65	-68	-39	-54	-86	-49	-48
-59	-44	-68	-52	-60	-42	-78	-29	-68	-79	-78	-68	-70	-66	-45
-62	-56	-36	-67	-64	-45	-63	-59	-59	-58	-67	-69	-44	-69	-69
-78	-58	-53	-58	-71	-52	-59	-27	-46	-56	-72	-50	-55	-30	-56
-62	-34	-35	-38	-64	-67	-59	-59	-58	-62	-88	-30	-41	-59	-54

Окончание табл.

-47	-55	-50	-79	-63	-50	-77	-23	-73	-63	-63	-67	-74	-59	-60
-46	-57	-74	-54	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

N = 184. Начало первого интервала: -95. Длина интервала: 8

ВАРИАНТ 14

Выборка А14

6	6	5	6	11	8	7	4	4	8	3	2	3	9	7
6	9	5	8	8	7	10	8	6	9	9	10	3	10	5
7	6	8	9	9	3	8	4	11	4	6	9	2	8	7
7	7	8	4	3	6	12	10	2	3	8	6	8	2	3
8	8	7	6	9	4	4	7	6	9	6				

N = 71. Начало первого интервала: 2. Длина интервала: 1.

Выборка В14

58	49	46	53	63	64	53	46	59	64	50	55	57	55	68
48	58	54	59	66	61	69	70	51	60	47	50	43	62	48
40	51	46	58	63	51	65	55	55	61	45	50	44	45	57
65	52	60	58	27	41	60	44	38	44	59	72	43	60	50
55	53	51	33	53	70	55	60	50	51	50	55	57	58	61
52	46	56	65	52	61	52	65	51	58	54	55	64	58	68
52	52	47	48	55	58	72	53	69	42	41	59	56	28	50
47	54	52	60	47	55	48	64	63	72	51	55	50	65	66
42	63	59	60	70	54	40	58	49	66	59	55	50	46	58
73	41	68	54	48	52	52	50	67	59	43	64	57	71	67
54	63	63	65	60	47	72	58	55	52	53	49	59	43	45
45	40	54	77	49	56	45	64	69	57	50	59	74	47	38
54	57	52	63	42	41	57	60	60	52	49	46	60	71	57
47	52	51	59	42	56	43	50	44	45	59	54	56	71	63
50	46	42	48	59	53	64	53	54	72	55				

N = 221. Начало первого интервала: 25. Длина интервала: 4.

ВАРИАНТ 15

Выборка А15

2	0	1	2	0	0	2	2	1	1	0	0	0	0	1	2	0	4	0	0
1	0	4	1	1	0	2	1	0	0	2	1	1	1	1	0	1	1	0	3
1	2	1	0	1	2	1	2	3	0	2	4	0	0	0	3	0	2	0	2
2	2	1	1																

N = 64. Начало первого интервала: 0. Длина интервала:1.

Выборка B15

174	166	157	161	165	162	161	164	172	158	161	163
160	154	171	160	168	171	161	162	168	164	166	159
172	154	154	154	153	159	160	173	150	166	157	177
165	168	152	168	164	158	153	164	174	179	159	165
167	169	164	168	151	174	166	169	170	159	162	153
175	178	157	170	174	169	159	154	165	167	161	168
157	182	175	170	155	164	174	167	170	159	160	153
151	169	155	143	163	155	173	166	164	186	161	158
150	159	167	163	166	155	149	157	164	166	171	172
154	161	169	164	173	164	162	171	156	155	160	156
165	149	175	150	162	179	154	167	158	155	147	161
161	173	166	156	171	158	164	168	173	166	148	174
179	173	167	162	166	167	164	158	160	163	161	154
151	156	150	157	163	168	170	165	174	149	161	162
155	164	156	157	170	173	165	160	166	166	160	165
159	157	162	173	173	151	151	169	167	145	166	168
161	169	170	172	159	161	162	151	165	161	151	156
167	148	167	170	149	162	169	157	167	169	174	163
164	169	161	164	172	160	154	156	166	170	164	160
161	149	158	168	176	155						

N = 234. Начало первого интервала: 141. Длина интервала: 5.

ВАРИАНТ 16

Выборка A16

5	4	4	4	5	0	3	7	2	2	3	0	5	6	3	4	6	1	2	5
3	2	3	6	6	2	3	1	7	2	3	2	2	5	2	0	2	2	6	1
3	6	7	7	2	0	4	6	1	1	6	7	1	3	4	6	6	3	2	1
7	2	5	4	2	3	4	5	6	6	5	3	2							

N = 73. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка B16

79	56	46	50	67	37	53	49	42	57	49	20	45	83	15
54	43	82	54	49	27	56	49	26	46	72	41	38	29	65
59	61	41	32	42	71	55	46	71	68	37	67	36	33	38
39	59	39	42	45	55	45	54	87	72	68	44	33	47	63
69	52	67	66	7	54	56	39	40	61	73	50	49	72	57
77	54	70	45	49	50	41	39	61	70	44	42	43	71	57

Окончание табл.

70	55	45	36	40	71	17	48	49	48	72	48	53	28	44
64	11	66	37	12	36	15	55	39	72	61	68	42	48	72
48	28	40	32	26	69	33	50	78	56	61	36	44	36	52
25	67	50	60	69	63	60	58	46	11	59	53	77	38	54
41	76	56	46	26	58	40	43	55	45	73	47	76	46	16
86	25	27	43	26	61	64	10	50	24	42	36	33	51	34
54	80	56	27	57	76	43	49	43	67	75	64	39	64	53
62	88	27	37	56	67	63	56	48	28	24	42	43	48	49

N = 210. Начало первого интервала: 3. Длина интервала: 9.

ВАРИАНТ 17

Выборка А17

4	8	4	11	7	7	5	8	9	6	7	1	6	5	8
4	7	4	8	4	6	5	7	4	8	7	4	3	2	8
7	5	0	4	7	6	3	5	7	2	6	6	5	8	1
3	8	6	6	8	8	9	6	8	7	5	12	5	3	9
5	7	7	8	3	7	9	6	5	4	4	4	7	7	4
7	5	9	5	9	3	4	4	8	5	1	10	6	1	7
6	8	6	7	9										

N = 95. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка В17

-21	-66	-28	-40	-37	-58	-44	-32	-60	-33	-47	-55	-47	-37	-31
-41	-45	-45	-41	-42	-27	-33	-33	-63	-51	-53	-46	-37	-23	-36
-43	-78	-38	-43	-46	-37	-46	-47	-48	-59	-30	-37	-60	-42	-49
-32	-61	-37	-54	-42	-26	-30	-60	-40	-65	-50	-63	-53	-47	-61
-47	-34	-30	-62	-44	-39	-25	-49	-48	-51	-43	-50	-44	-64	-45
-54	-21	-40	-25	-59	-40	-48	-54	-38	-42	-34	-46	-31	-30	-75
-70	-59	-45	-57	-45	-33	-51	-47	-58	-32	-36	-42	-37	-47	-32
-28	-69	-33	-45	-38	-42	-30	-29	-18	-57	-46	-45	-47	-37	-58
-72	-38	-50	-51	-49	-47	-63	-52	-34	-47	-63	-53	-65	-55	-39
-60	-50	-57	-46	-70	-42	-39	-43	-60	-52	-52	-46	-34	-33	-31
-39	-16	-54	-63	-63	-27	-48	-38	-34	-40	49	-43	-32	-54	-56
-38	-34	-39	-31	-46	-52	-80	-21	-54	-50	-50	-55	-47	-26	-34
-54	-36	-33	-46	-23	-56	-28	-36	-35	-52	-51	-58	-65	-36	-58
-53	-54	-44	-43	-37	-49	-63	-52	-50	-58	-51	-58	-40	-40	-19
-51	-81	-42	-52	-50	-20	-53	-49	-40	-55	-55	-48	-28	-49	-46
-65	-63	-37	-47	-43	-35	-81	-44	-18	-41	-53			-	

N = 236. Начало первого интервала: – 84. Длина интервала: 7.

ВАРИАНТ 18

Выборка А18

5	3	3	3	5	4	5	3	3	4	2	1	5	2	4	0	2	2	3	2
1	3	3	1	2	4	6	6	4	1	2	4	3	1	5	2	4	6	3	8
4	5	1	1	2	0	2	3	3	2	4	2	1	2	3	1	2	4	3	0
6	3	1	4	3	7	1	1	0	2	3	1	1							

N = 73. Начало первого интервала:0. Длина интервала: 1.

Выборка В18

52	40	47	54	40	54	41	74	45	45	51	76	58	37	40
42	53	54	65	46	65	61	55	38	66	42	56	54	40	60
43	49	77	64	53	64	58	54	56	53	43	35	56	34	59
58	66	49	49	57	48	42	46	52	59	50	62	50	55	55
46	53	51	50	60	30	48	56	29	74	52	60	44	62	23
54	40	33	20	55	42	61	54	41	45	75	59	41	51	45
54	52	62	69	65	49	48	63	52	46	44	55	60	54	39
82	67	68	34	56	51	56	48	53	47	59	51	59	66	48
61	42	54	33	39	47	46	47	73	63	34	44	51	46	40
43	30	60	61	53	47	42	56	70	48	45	65	48	48	51
40	57	56	33	44	43	45	35	35	56	59	66	56	52	44
53	49	55	25	53	48	73	38	58	72	57	46	54	55	59
38	53	48	68	36	53	41	55	51	50	45	50	29	60	39
50	59	33	56	49	31	70	56	56						

N = 204. Начало первого интервала: 17. Длина интервала: 7.

ВАРИАНТ 19

Выборка А19

2	2	0	1	3	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	4	1	0	0
0	2	0	1	1	0	1	2	1	2	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	2	1	0	0	1	1	1	0	0	2	0	0	1	1	0	0
0	0	0	2	1	1	1	1	3	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0

N = 80. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка В19

144	166	120	89	103	140	143	126	119	125	161	140
168	133	151	132	135	166	131	120	127	105	136	145
154	105	173	97	113	150	143	107	133	139	127	138
107	107	127	127	159	170	120	120	106	126	152	128
160	120	109	106	134	127	107	106	95	91	113	128
120	99	160	137	143	103	138	143	131	157	148	146
112	141	174	109	173	91	148	123	133	117	122	139
107	139	169	125	141	132	115	157	127	158	115	161
165	145	168	107	105	115	113	138	113	145	104	99
137	144	122	93	124	120	112	159	135	145	137	115
98	159	158	125	125	121	145	130	168	132	118	139
184	153	133	122	138	117	147	115	134	102	107	85
159	139	156	123	138	136	112	101	114	141	164	142
96	137	161	153	125	147	137	129	140	171	115	155
126	145	109	147	112	98	144	114	109	149	114	173
118	138	102	168	116	125	151	86	129	166	115	106
120	133	159	158	156	114	109	138	108	155	129	145
139	161	116	110	155	122	181	151	129	128	137	104
107	115	131	146	119	125	164	145				

N = 224. Начало первого интервала: 80. Длина интервала: 11.

ВАРИАНТ 20

Выборка А20

7	8	4	0	4	6	5	4	3	2	4	8	6	2	2
5	3	6	6	5	5	3	5	6	7	8	9	5	2	5
4	5	6	6	3	6	5	3	4	5	10	3	7	5	3
3	3	7	5	3	4	9	2	1	4	4	4	2	4	3
4	4	5	5	3	7	5	3	2	6	2	4	4	4	0
6	1	3	4	4	5	4	8	3	5	4	11	9	9	

N = 89. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка В20

107	78	93	81	80	92	126	93	67	50	104	110
120	91	101	91	120	88	69	74	102	65	48	71
103	67	95	112	112	86	99	99	103	122	112	102
92	69	105	106	124	46	72	75	126	73	106	75
80	92	68	112	127	88	93	74	131	51	117	145

Окончание табл.

96	76	71	138	104	120	67	92	130	99	94	92
97	105	84	78	100	98	114	113	94	108	76	88
91	78	96	81	116	75	120	75	62	113	109	111
127	63	87	86	66	100	75	84	95	121	103	95
70	98	67	148	95	92	105	114	98	102	41	76
114	90	97	111	93	110	79	63	109	69	108	71
111	100	136	92	84	123	84	125	102	96	72	102
90	136	87	132	137	100	102	88	65	75	114	79
122	63	115	90	78	86	122	119	87	115	96	137
106	105	88	75	100	84	71	123	121	94	114	94
93	118	94	102	109	86	45	97	93	43	48	114
85	79	124	89	104	108	108	100	106	102	105	119
71	86	115	82	101							

N = 209. Начало первого интервала: 36. Длина интервала: 11.

ВАРИАНТ 21

Выборка А21

4	5	3	4	5	2	3	3	3	4	4	5	3	1	4	1	4	5	5	1
2	5	5	5	3	4	3	5	5	4	0	2	6	7	1	3	2	2	4	2
3	3	6	0	6	2	4	3	6	1	5	4	4	4	5	2	4	5	3	5
5	6	2	2	3	2	2	5	2	5	5	0	7	1	0	0	0	5	3	2
7	6	3	5	3															

N = 85. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка В21

110	115	122	128	115	118	116	124	120	127	136	129
119	124	131	116	108	122	118	132	118	118	116	132
124	120	124	124	118	127	126	119	115	122	131	129
128	122	103	125	115	122	114	109	132	122	121	129
108	111	104	115	105	135	132	133	119	137	126	102
114	109	125	121	112	131	115	122	118	116	130	126
131	127	116	120	119	128	104	131	115	140	115	124
126	115	104	125	131	117	118	102	127	120	102	120
130	128	106	132	129	131	126	116	128	134	132	124
107	119	132	117	120	122	114	125	139	116	125	132
111	122	120	113	123	119	122	112	125	101	121	124
110	123	141	115	121	113	125	139	111	117	114	109

Окончание табл.

128	126	139	114	123	125	123	118	129	123	124	122
123	120	115	115	127	115	114	133	128	123	104	124
105	124	112	135	117	127	134	117	120	97	123	105
108	119	112	114	133	112	120	145	121	126	127	118
129											

N = 193. Начало первого интервала: 95. Длина интервала: 5.

ВАРИАНТ 22

Выборка A22

2	3	1	6	4	6	3	3	1	3	1	2	4	4	4	3	0	3	2	4
2	3	2	3	3	2	0	6	1	0	2	2	6	2	0	2	4	3	1	5
3	0	4	4	3	5	3	2	5	2	0	2	0	2	5	0	1	3	3	2
0	2	2	2	5															

N = 65. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка B22

184	181	201	178	190	188	181	180	186	180	176	186
185	184	187	176	189	194	196	190	193	180	186	195
197	189	197	190	176	200	196	188	203	191	180	181
188	185	188	173	184	180	189	178	190	175	193	184
177	179	177	203	185	182	191	183	183	211	189	177
195	196	175	188	189	187	193	185	184	193	181	185
214	177	196	195	193	172	190	200	176	179	185	182
175	180	179	170	206	181	197	197	180	193	192	200
175	196	174	171	160	187	185	206	187	182	175	172
191	179	191	199	197	177	175	170	174	194	188	182
179	186	190	183	196	183	185	174	195	179	197	182
183	184	185	172	193	175	172	179	179	184	190	183
178	192	186	157	172	185	180	193	177	174	200	195
184	186	185	206	192	189	189	184	183	182	179	186
184	169	189	180	183	192	186	200	176	191	186	182
202	184	192	179	204	197	194	182	172	185	175	187
182	184	186	201	197	188	188	194	184	193	178	191
203	193	190	185	181	187	181	196	204	177	178	167
178	194	188	182	182	199	180	181	187	187	178	181
180	182	160	183	193	189	193	191				

N = 236. Начало первого интервала: 154. Длина интервала: 6.

ВАРИАНТ 23

Выборка A23

1	4	3	3	1	0	4	0	4	3	2	0	2	2	3	3	1	0	3	3
3	2	3	3	3	2	5	6	3	2	5	2	3	4	2	3	2	2	6	2
0	1	2	3	6	2	1	4	3	3	1	5	4	3	2	1	1	1	6	3
2	0	2	2	2	3														

N = 66. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка B23

5	-25	13	29	28	24	- 8	40	24	- 7	42	-49	30	-31	- 7
-3	53	- 6	14	46	-16	3	2	19	31	-26	10	46	- 4	- 5
5	8	6	30	39	14	3	32	6	25	-13	-12	20	26	5
33	2	-20	5	29	5	39	36	24	38	- 2	30	53	52	7
20	-35	27	11	-12	23	1	-10	- 3	- 5	31	21	6	-15	- 2
17	-15	26	17	0	46	13	21	- 3	6	9	31	-15	43	4
19	- 8	9	37	43	- 3	20	20	24	17	3	43	-19	-36	19
-6	14	6	24	5	-50	4	-24	- 6	43	17	-22	37	19	28
9	3	-34	-7	19	18	-14	19	15	-26	- 6	52	5	26	29
28	- 4	8	-1	30	65	1	25	- 3	1	30	53	35	9	11
1	35	1	21	76	29	-15	6	-31	- 6	58	18	-10	3	60
17	23	3	3	27	- 2	9	88	6	- 1	21	- 6	30	12	1
24	28	7												

N = 183. Начало первого интервала: –57. Длина интервала: 14.

ВАРИАНТ 24

Выборка A24

7	11	5	5	5	5	9	4	5	3	8	5	3	8	3
11	3	9	6	8	3	3	6	2	7	4	4	3	5	7
4	6	5	2	9	5	8	6	1	1	7	7	4	4	9
7	4	3	1	6	6	4	5	4	5	5	7	8	6	8
4	10	2	7	7	5	9	6	11	2	7	7	9	2	6
8														

N = 76. Начало первого интервала: 1. Длина интервала: 1.

Выборка B24

-64	5	53	-29	-61	-49	-1	-22	-25	-38	-73	-20	-8	-37	-47
0	-37	-50	-46	-13	7	-13	-42	-1	-44	-27	-20	-33	-37	-30
-20	-73	-57	-40	-4	-40	-83	-33	-37	-26	-79	-16	-77	-5	-51
-28	-63	-24	-25	-24	-38	16	-38	-15	29	-11	-14	-34	-31	-23
-16	-58	-73	-43	-31	-65	-12	-4	-38	-25	-31	-7	-9	-60	-61
-47	-46	-33	-15	-79	-48	1	-62	-14	-49	-31	-25	-33	-38	-27
-51	-30	-43	-64	-24	-50	-22	-37	-6	-11	-78	-51	-1	-9	-34

Окончание табл.

1	-17	-33	11	-54	-31	-34	-38	-22	-2	-9	-15	-6	-87	-45
-22	-30	-15	-30	-18	-77	6	-47	-33	-21	-86	-31	-45	-43	-19
-36	-46	-69	-22	-59	-30	-22	5	-29	-42	-47	5	-17	-71	-36
6	-6	-7	-41	-37	-11	-11	-65	-36	-58	-36	-30	-46	-15	-49
-88	-12	-8	-83	-13	-30	-48	-66	-9	-31	-13	-32	-21	-47	-50
-25	-6	-31	-75	-48	-77	-13	-55	-26	-9	-32	-41	-68	-55	-53
25	-77	1	-65	-35	-51	-24	-42							

N = 203. Начало первого интервала: –94. Длина интервала: 12.

ВАРИАНТ 25

Выборка A25

2	0	2	6	2	3	5	3	8	3	6	4	5	2	6	6	5	5	8	8
3	5	3	2	4	5	2	1	6	9	7	6	7	4	5	6	5	6	8	3
6	5	5	1	7	6	4	1	5	6	4	7	2	8	8	2	8	2	1	6
5	2	3	6	3	3	5	3	3	7	5	6	6	3	4	6	7	4	6	2
7	7	1	2	3	6	6	3	2	6	4	2	4	8						

N = 94. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка B25

100	51	80	83	83	67	55	84	78	83	101	75
78	99	69	99	71	67	56	74	51	78	34	67
107	66	106	70	117	67	116	79	120	47	113	113
59	100	78	31	68	66	91	85	64	55	83	77
68	83	38	89	88	58	75	60	89	111	42	104
33	96	50	42	81	78	42	64	89	60	32	46
82	33	72	93	94	49	153	68	85	78	95	51
76	81	67	50	75	99	114	111	108	127	110	91
77	85	102	101	79	118	132	130	79	88	76	73
82	75	118	50	100	70	42	79	64	78	137	83
92	71	84	77	73	100	69	77	74	98	79	102
83	66	59	67	87	60	91	68	91	103	73	93
69	54	82	71	60	88	82	82	41	68	53	78
96	97	81	96	69	52	77	66	100	119	84	102
46	54	77	129	87	106	84	96	81			

N = 177. Начало первого интервала: 25. Длина интервала: 13.

ВАРИАНТ 26

Выборка A26

2	0	0	3	1	2	2	2	3	4	1	2	3	3	2	1	1	3	3	0
4	1	3	3	0	1	0	0	1	2	1	1	3	2	3	0	1	0	4	2
3	1	2	1	1	1	1	2	1	2	5	2	1	3	2	31	1	1	1	1
2	1	1	1	3	1	3	1	2	1	2	1	1	0	0	3	3	1	2	3

N = 80. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка B26

22	49	18	44	52	31	18	20	27	35	41	28	29	45	36
40	41	37	18	40	25	38	46	37	50	41	37	37	21	37
27	27	32	34	28	40	31	20	22	25	31	34	56	35	37
47	40	29	28	29	3	27	12	41	24	40	57	49	37	34
23	38	19	29	27	32	21	21	13	40	24	37	7	24	34
52	38	32	49	43	25	16	33	22	6	41	48	35	55	35
4	31	18	19	17	23	6	36	40	12	66	26	23	30	28
49	30	50	13	33	46	26	37	30	46	41	18	28	14	50
26	25	30	53	46	30	11	40	40	24	16	24	28	29	25
10	19	35	27	22	38	32	41	21	46	27	49	34	53	32
31	15	24	38	25	34	22	35	42	38	33				

N = 161. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 7.

ВАРИАНТ 27

Выборка A27

1	0	1	3	1	1	4	0	0	1	1	1	0	1	2	0	2	1	0	1
1	0	1	0	2	2	1	1	0	0	0	1	2	1	1	1	2	3	0	1
0	2	2	0	2	2	0	1	0	0	0	0	3	2	2	3	1	2	0	1
2	1	1	0	1	2	0	2	2	1	0	0	2	0	0	0	3	1	2	2
2	0	2	0	2	1	0	3	1	1	3									

N = 91. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка B27

187	193	199	197	196	184	200	193	198	191	193	188
193	195	197	199	202	193	190	197	195	182	201	202
184	197	205	178	191	200	223	188	192	188	194	183
207	183	195	184	175	195	212	197	194	184	175	198
189	194	185	213	192	200	194	173	206	163	204	174
183	199	203	185	199	196	196	188	169	196	190	205
189	189	190	175	190	193	209	190	183	191	193	191
190	192	191	185	202	176	184	176	199	182	186	189

Окончание табл.

193	185	168	192	193	205	171	193	191	206	187	193
192	189	191	190	182	194	194	197	207	198	180	175
193	191	188	187	191	191	192	192	214	171	208	185
195	190	214	193	183	193	193	187	198	203	181	173
189	195	180	180	205	194	179	191	201	195	195	189
185	199	194	187	173	211	190	165	182	182	194	168
176	192										

N = 170. Начало первого интервала: 160. Длина интервала: 7.

ВАРИАНТ 28

Выборка A28

0	0	0	1	0	0	1	3	1	1	1	0	3	0	2	0	0	0	0	1
1	1	1	3	2	0	0	1	4	1	0	0	0	2	0	1	2	1	2	0
1	2	1	0	0	1	0	1	1	0	2	1	1	2	0	1	0	0	0	2
1	2	0	1	1	1	2	0	0	2	2	1	2	2	0	0	0	2	0	0
0	1	0	0																

N = 84. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка B28

-50	-39	-48	-56	-49	-44	-39	-42	-56	-46	-39	-50	-52	-48	-55
-46	-37	-51	-52	-45	-46	-51	-43	-49	-35	-57	-48	-42	-42	-54
-33	-44	-56	-44	-43	-41	-47	-42	-47	-59	-54	-53	-55	-34	-53
-50	-36	-53	-53	-55	-54	-39	-53	-42	-49	-45	-48	-50	-48	-56
-52	-46	-53	-56	-57	-42	-53	-50	-44	-46	-59	-62	-57	-36	-43
-46	-59	-52	-52	-64	-46	-46	-49	-53	-44	-49	-62	-50	-42	-53
-41	-44	-49	-52	-62	-44	-53	-44	-50	-47	-48	-51	-55	-64	-52
-48	-50	-53	-30	-41	-48	-55	-35	-66	-37	-58	-59	-42	-51	-54
-47	-52	-44	-61	-39	-54	-60	-58	-45	-54	-38	-50	-61	-46	-31
-40	-49	-52	-36	-52	-41	-54	-50	-59	-44	-40	-47	-61	-41	-53
-47	-44	-43	-51	-48	-48	-43	-39	-45	-54	-41	-55	-42	-37	-45
-59	-47	-43	-56	-48	-43	-66	-60	-51	-44	-48	-46	-43	-51	-43
-43	-50	-48	-56	-54	-56	-61	-60	-42	-34	-40	-46	-45	-59	-47
-61	-41	-54	-45	-48	-52	-55	-49	-51	-52	-49	-48	-47	-62	-43
-55	-53	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

N = 212. Начало первого интервала: -68. Длина интервала: 4.

ВАРИАНТ 29

Выборка A29

4	1	9	6	11	11	6	5	10	4	10	10	12	10	9
6	6	8	4	10	2	5	6	8	6	7	2	2	6	12
2	8	8	11	9	6	7	4	5	9	7	9	5	9	10
5	8	6	10	8	8	6	9	10	8	6	1	3	10	4
8	6	10	9	10	3	6	11							

N = 68. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка B29

17	25	25	25	32	32	23	24	23	26	29	34	29	26	23
21	21	19	27	17	22	31	23	23	26	37	15	12	32	23
25	45	27	38	8	19	25	15	24	23	39	21	29	22	22
24	21	24	31	22	23	31	24	26	19	17	26	25	30	18
32	32	37	28	29	17	17	24	28	18	38	18	28	25	14
18	26	27	26	20	33	24	33	33	36	22	19	25	23	23
33	25	32	24	33	17	15	26	25	21	37	24	36	28	37
19	25	21	23	27	32	12	25	23	28	18	41	21	26	35
31	21	16	27	34	16	30	20	24	16	20	33	21	31	22
17	23	14	28	37	18	29	26	26	19	28	31	22	28	23
22	27	20	29	24	17	24	15	24	21	22	30	19	42	33
27	23	9	25	26	12	19	33	24	35	22	26			

N = 177. Начало первого интервала: 6. Длина интервала: 4.

ВАРИАНТ 30

Выборка A30

4	6	0	2	1	3	3	1	2	5	3	1	2	2	4	4	4	3	2	5
2	5	1	2	3	0	3	0	5	1	2	1	3	0	4	0	2	2	1	0
5	1	4	2	4	2	1	3	1	0	6	1	2	1	4	2	2	0	2	4
2	2	1	2	2															

N = 65. Начало первого интервала: 0. Длина интервала: 1.

Выборка B30

57	61	60	63	66	68	64	72	69	59	71	62	69	57	61
58	60	66	59	62	64	53	50	50	55	70	61	77	70	65
66	72	71	60	74	62	49	92	76	66	64	62	60	53	65
49	79	58	73	61	63	64	59	55	70	62	61	68	69	67
64	42	73	62	69	60	64	69	62	67	67	72	57	51	77
58	63	71	73	68	80	54	64	53	64	68	58	73	68	61
54	73	59	69	60	67	57	54	69	55	70	65	61	65	62
71	55	67	57	64	70	55	65	69	65	65	60	66	63	74
60	54	75	62	74	63	64	76	59	71	68	55	68	61	57
73	54	57	56	65	53	64	58	67	48	66	68	55	77	59
58	58	62	58	52	62	65	71	64	66	65	58	66	73	73
72	43	63	59	76	67	63	71	66	59	69	65	66	50	65
57														

N = 181. Начало первого интервала: 40. Длина интервала: 4.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – 11-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2005. – 479 с.
2. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для студентов вузов / В.Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2004. – 404 с.
3. Венцель, Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: учеб. пособие для студентов вузов / Е.С. Венцель, Л.А. Овчаров. 4-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2007. – 491 с.
4. Венцель, Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей: учеб. пособие для студентов вузов / Е.С. Венцель, Л.А. Овчаров. – 8 изд., стер. – М.: КНОРУС, 2010. – 496 с.
5. Колде, Я.К. Практикум по теории вероятностей и математической статистике / Я.К. Колде. − М.: Высш. шк., 1991. −157 с.
6. Клентак, Л.С. Элементы теории вероятностей и математической статистики: учеб. пособие / Л.С. Клентак. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2013. – 156 с.
7. Клентак, Л.С. Математика: методические указания и задания для расчетных работ. – Ч. 3. – Самара, МИР, 2008. – 51 с.

Учебное издание

Клентак Людмила Стефановна
Клентак Анна Сергеевна

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПЛАНИРОВАНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ (на примере дисциплины «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»)

Учебное пособие

Редактор Н.С. Куприянова
Компьютерная верстка Л.Р. Дмитриенко

Подписано в печать 06.04.2018. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 10,5.
Тираж 100 экз. Заказ . Арт. 1(Р1У)/2018

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени академика С.П. КОРОЛЕВА»
(Самарский университет)
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского университета. 443086 Самара, Московское шоссе, 34.