

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЁВА  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

*М.И. ГЕРАСЬКИН, Л.С. КЛЕНТАК*

## ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программам высшего образования по специальности 080116.65 Математические методы в экономике

САМАРА  
Издательство СГАУ  
2014

УДК 519.852(075)  
ББК 22.18я7  
Г371

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. В. Г. З а с к а н о в  
д-р техн. наук, проф. И. Н. Х а й м о в и ч

*Гераськин М.И.*

Г371 **Линейное программирование:** учеб. пособие / *М.И. Гераськин, Л.С. Клентак;*  
под общ. ред. *Л.С. Клентак.* – Самара: Изд-во СГАУ, 2014. – 104 с.

**ISBN 978-5-7883-0979-8**

В пособии приводятся краткие сведения из теории линейного программирования, необходимые при выполнении заданий на практических занятиях, рассматриваются методы решения задач линейного программирования, элементы теории двойственности, обеспечивающие специалистам экономического профиля навыки построения математических моделей.

Приводится достаточное количество примеров экономического содержания с анализом полученных результатов.

Работа подготовлена на кафедре математических методов в экономике для студентов, обучающихся на экономических специальностях.

УДК 519.851(075)5  
ББК 22.18я7

---

Учебное издание

*Гераськин Михаил Иванович,  
Клентак Людмила Стефановна*

## **ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ**

*Учебное пособие*

Редактор Н.С. Куприянова  
Доверстка А.В. Ярославцева

Подписано в печать 10.10.2014 г. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 6,75.

Тираж 100 экз. Заказ . Арт. - 24/2014.

Самарский государственный аэрокосмический университет.  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного аэрокосмического университета.  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

---

**ISBN 978-5-7883-0979-8**

© Самарский государственный  
аэрокосмический университет, 2014

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
1 История развития линейного программирования как науки.....	8
2 Постановка общей задачи линейного программирования (ОЗЛП) с $n$ переменными.....	11
3 Практическое занятие № 1.....	16
4 Эквивалентные преобразования систем линейных уравнений и неравенств.....	20
5 Практическое занятие № 2.....	29
6 Примеры экономических задач линейного программирования.....	35
7 Свойства решений задач линейного программирования.....	38
8 Геометрическая интерпретация и графическое решение задач линейного программирования.....	40
9 Практическое занятие № 3.....	45
10 Симплексный метод решения задач линейного программирования.....	48
11 Метод искусственного базиса (М - метод) .....	57
12 Практическое занятие № 4.....	64
13 Двойственность в задачах линейного программирования.....	68
14 Практическое занятие № 5.....	79
15 Элементы дискретного программирования.....	83
16 Практическое занятие № 6.....	89
17 Транспортная задача.....	91
18 Практическое занятие № 7.....	98
Список литературы.....	104

## ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие составлено в соответствии с требованиями ФГОС подготовки бакалавра по направлению 080500 – Бизнес-информатика с квалификацией выпускника «Бакалавр».

Пособие содержит теоретическую часть и практические рекомендации по решению типовых задач дисциплины «Линейное программирование», которая входит в цикл общих математических и естественно-научных дисциплин и опирается на предшествующие ей дисциплины «Математический анализ» и «Линейная алгебра». В данном пособии изложены математические методы решения задач линейного программирования (ЗЛП) и оно предназначено для использования студентами при подготовке к практическим занятиям. Данное учебное пособие дополняет учебное издание «Линейное программирование. Выполнение расчетов в табличном процессоре Excel», в котором рассмотрены компьютерные методы оптимизации, необходимые для подготовки студентов к лабораторным работам.

Данная дисциплина является предшествующей для следующих дисциплин: «Теория вероятностей», «Эконометрика», «Математическая статистика», «Методы оптимальных решений», «Макроэкономика», «Микроэкономика». Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих общекультурных (ОК) и профессиональных компетенций (ПК): ОК-1, ОК-6, ОК-10, ОК-13, ОК-16, ПК-15, ПК-19, ПК-20, ПК-21.

Учебная дисциплина «Линейное программирование» позволяет:

- Развить системное мышление студентов путем детального анализа подходов к математическому моделированию и сравнительного анализа разных типов моделей;
- Ознакомить студентов с математическими свойствами моделей и методами решения задач линейного программирования, которые могут использоваться при анализе и решении широкого спектра экономических задач.

В результате изучения дисциплины студент должен:

**Иметь представление:** о проблематике и перспективах развития методов математического программирования как одного из важнейших направлений, связанных с созданием и внедрением новых информационных технологий.

**Знать:** основные принципы и математические методы решения задач линейного программирования (ЗЛП).

**Уметь:** строить экономико-математическую модель, выбирать рациональный метод решения ЗЛП с целью принятия управленческого решения.

**Владеть:** компьютерными технологиями подготовки и принятия решений с использованием инструментального средства моделирования – стандартной офисной программы Excel [1].

На учебную дисциплину в соответствии с учебным планом выделено 48 аудиторных часов. В том числе: 16 часов – лекционных занятий, 16 часов – практических занятий и 16 часов – лабораторных занятий. Помимо общего числа аудиторных занятий предусмотрены часы на самостоятельную работу студентов (СРС). Многоуровневое непрерывное образование следует воспринимать не только как средство для достижения целей государства и общества, а как цели самого человека, стремящегося к саморазвитию. Вне самостоятельной работы нельзя подготовить активную личность, специалиста, необходимого современному обществу и производству. К самостоятельной работе студентов по данной дисциплине относятся выполнение домашних заданий и формирование портфолио, или портфеля достижений. Портфолио в переводе с итальянского означает «папка с документами», «папка специалиста».

В основу нового подхода в обучении должна быть положена выработка потребностей и умений самостоятельного приобретения знаний, методов их пополнения и применения с использованием информационно-коммуникационных технологий. Формирование портфолио – это способ накопления индивидуальных образовательных, профессиональных, творческих и личных достижений студента, а также возможность каждому студенту увидеть все, на что он способен, создать для него стимул роста, совершенствования и развития, что, в свою очередь, обуславливает успешное формирование мотивационно - ценностных профессиональных ориентаций.

В одной папке (табл. 1) собирается история успеха, которая помогает проследить прогресс студента, понять, что у него получается лучше всего, а что нуждается в доработке и углублении. А это и есть мотивация и творческий рост. Накопление и обработка материалов – очень важный этап формирования самооценки личности студента, что соответствует компетентностному подходу в обучении.

Таблица 1. Перечень возможных индивидуальных достижений студента

Виды работы	февраль	март	апрель	май	июнь
1. Контрольная работа №1. "Графический метод решения ЗЛП"		*			
2. Контрольная работа №2. "Симплексный метод решения ЗЛП"			*		
3. Контрольная работа №3. "Решение транспортной задачи"				*	
4. Тест					*
5. Посещаемость лекций					*
6. Посещаемость практических занятий					*
7. Творческая работа				*	
8. Промежуточный рейтинг		*	*	*	
9. Семестровый рейтинг					*
10. Участие в конференции					*
11. Выступление с результатами творческой работы					*
12. Публикации					*
13. Грамоты					*
14. Промежуточная аттестация					*

Контроль знаний студентов включает формы текущего и итогового контроля. Текущий контроль осуществляется в виде контрольных работ (время выполнения каждой – 45 мин) и домашних заданий, выполненных с использованием вычислительной техники. Проводится лабораторный практикум, содержащий 8 лабораторных работ. Итоговый контроль осуществляется в виде зачета с учетом собранного портфолио.

### **Вопросы для оценки качества освоения дисциплины**

#### **Теоретические вопросы**

1. Сформулируйте задачу линейного программирования.
2. Приведите содержательные примеры задачи линейного программирования.
3. Что такое нормальная (стандартная) и каноническая формы задачи линейного программирования?
4. Какие свойства имеет допустимое множество задач линейного программирования?
5. Какие свойства имеет оптимальное решение в задаче линейного программирования?

6. Сформулируйте двойственную задачу линейного программирования.
7. Сформулируйте теоремы двойственности в задаче линейного программирования.
8. Дайте интерпретацию двойственных переменных в задаче линейного программирования.
9. Расскажите об анализе чувствительности в задаче линейного программирования.
10. Примените графический метод для решения конкретной задачи линейного программирования.
11. В чем состоят методы решения задач линейного программирования, основанные на направленном переборе вершин (симплекс-метод и др.)?
12. Что характеризует задачи целочисленного программирования?
13. Постановка транспортной задачи (ТЗ).
14. Закрытая и открытая модели ТЗ.
15. Построение исходного опорного плана.
16. Метод потенциалов.
17. Решение ТЗ.
18. Какие возможности предоставляет среда MS Excel для решения задач линейного программирования?
19. Назовите основные подходы к построению методов поиска решений.
20. В чем состоят градиентные методы решения задачи безусловной оптимизации?

### **Типовые задачи**

Фабрика по производству мороженого может выпускать пять сортов мороженого. При производстве мороженого используется два вида сырья: молоко и наполнители, запасы которых известны. Известны также удельные затраты сырья, а также цены продукции. Требуется построить план производства, который обеспечивает максимум дохода.

*Рекомендации по использованию информационных технологий:*

При выполнении домашнего задания, посвященного решению задачи линейного программирования, требуется использовать компьютерную программу, которая позволяет проводить анализ чувствительности. В частности, рекомендуется использовать оптимизатор MS Excel.

# 1. ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ КАК НАУКИ

Основой реализации любой задачи управления является принятие конкретным лицом оптимального решения. Оптимальным считается такое решение, которое обеспечивает достижение цели в рассматриваемых условиях с максимальным эффектом.

Назрела объективная необходимость повышения научного уровня экономических решений, которые отыскиваются посредством математических методов количественного анализа вариантов, который позволяет исключить субъективные, волевые факторы, тем самым ставит планирование и управление на научную основу.

Математические исследования конкретных экономических проблем с целью установления экономических зависимостей и закономерностей относятся к концу XIX и началу XX столетия.

Классическое применение математических методов для формализованного описания дано К. Марксом в его знаменитой модели расширенного воспроизводства. Эта модель была, по-видимому, первой макроэкономической моделью, позволяющей вскрыть целый ряд важных особенностей производства.

Основатель математической школы в буржуазной политэкономии Л. Вальрас в 1874 г. создал общую статистическую экономико-математическую модель хозяйства в целом, известную под названием системы общего экономического равновесия.

Рациональные элементы модели Вальраса заключаются в постановке экстремальной задачи для хозяйства в целом (достижение максимального эффекта при минимальных затратах) и подходе к ценам как составному элементу нахождения общего оптимума.

Далее, в 1897 г., известный буржуазный экономист-математик Парето на основании статистического материала установил закономерность распределения доходов населения в капиталистических странах в форме гиперболы («кривая Парето»).

Затем в 1904 г. русским экономистом-математиком В.К. Дмитриевым были созданы уравнения связи затрат и выпуска продукции, которые в дальнейшем (в 30-х годах) были использованы американским экономистом В.Леонтьевым для построения балансов «затраты – выпуск».

Указанные работы можно считать первыми построениями экономико-математических моделей (Э.-М.М). Они наметили два направления экономико - математического анализа статистических данных: применение математических методов, во-первых, для описания экономических явлений, во-



вторых, для установления зависимости между ними. Оба типа исследований относятся к области математической статистики; они и получили дальнейшее развитие в последующие два десятилетия.

В 1939 г. в издании Ленинградского государственного университета появилась небольшая книга известного математика – профессора того же университета Л.В.Канторовича «Математические методы организации и планирования производства».

Только примерно через 10 лет метод линейного программирования в другой форме был переоткрыт в США. Первые статьи по линейному программированию были опубликованы в США лишь в 1949 г. В них американский ученый Дж.Б.Данциг выступил тогда с изложением своего симплексного метода. Симплексный метод Дж.Б. Данцига имеет очень много общего с методом последовательного улучшения плана, применявшимся в дальнейшем (после 1939 г.) Л.В. Канторовичем и его сотрудниками для решения ряда практических задач, представляющих конкретную реализацию метода разрешающих множителей. Однако есть и отличия их в некоторых существенных частях.

Еще до Л.В. Канторовича в нашей стране были опубликованы работы, которые можно считать зародышами линейного программирования. Так, в 1930 г. советские экономисты-транспортники (А.Н. Толстой и др.) для построения оптимального плана перевозок составили транспортную задачу в сетевой форме и решили ее без математического обоснования, применяя метод последовательного улучшения плана. В 1941 году Хичкок поставил транспортную задачу.

Расцвет работ по линейному программированию падает на 50-е годы XX столетия. В эти годы были детально разработаны основные методы решения, создано много разных алгоритмов, началось практическое применение новых методов, появилась обширная литература.

В 1949 г. Л.В. Канторовичем и М.К. Гавуриным в совместной статье был изложен метод потенциалов (в сетевой постановке) для решения транспортных задач.

Несколько позднее (в 1951г.) Дж.Б.Данцигом был разработан аналогичный метод, получивший название модифицированного распределительного метода. Это название является общим и относится по существу к целой группе близких друг другу методов, включающей как частные виды симплексный метод Дж.Б. Данцига, метод разрешающих слагаемых А.Л. Лурье и др.

В 1958 г. советский ученый А.Л. Лурье разработал метод разрешающих слагаемых для решения транспортных задач.

В 50-е годы кроме различных методов и их модификаций для решения задач линейного программирования появляется целый ряд работ, в которых

излагаются методы нелинейного и динамического программирования. Так, в 1951 г. американские ученые Х. Кун и А. Таккер опубликовали работу по решению нелинейных задач. В 1954 г. А. Чарнс и Лемке разработали и опубликовали метод решения задач с сепарабельной выпуклой целевой функцией и линейными ограничениями. В этом же году появляются работы по методам целочисленного линейного программирования. К ним относится и метод Гомори, опубликованный в США в 1958 г.

Также в 50-е годы американским математиком Р. Беллманом разрабатываются методы динамического программирования, появляется ряд работ, посвященных квадратичному программированию, например работы Е. Баранкина, Р. Дорфмана, Е. Била и др.

Внедрение экономико-математических методов и ПК создаёт реальную научную базу совершенствования планирования.

На основе сочетания трех фундаментальных наук математики, экономики и кибернетики учеными разработан значительный арсенал экономико-математических методов, которые можно объединить под одним названием – методы разработки оптимальных решений (или исследования операций), которые, в то же время, по праву могут рассматриваться как самостоятельные науки:

- Теория управления запасами.
- Теория массового обслуживания.
- Теория игр.
- Теория статистических решений.
- Сетевые методы планирования и управления.
- Математическое программирование.

Таким образом, математическое, или оптимальное, программирование включает в себя: линейное, нелинейное, целочисленное, динамическое, дискретное и выпуклое программирование.

## 2. ПОСТАНОВКА ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С $n$ ПЕРЕМЕННЫМИ

Среди множества оптимизационных задач существуют особые задачи, которые называют задачами линейного программирования. Задачам линейного программирования присущи следующие специфические черты.

Целый ряд задач из разных областей практики может быть сформулирован как задачи линейного программирования. Все они характеризуются некоторыми общими чертами. В каждой из них элементы решения представляют собой ряд неотрицательных переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Требуется так выбрать значения этих переменных, чтобы:

- 1) выполнялись некоторые ограничения, имеющие вид линейных неравенств или равенств относительно переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ;
- 2) некоторая линейная функция  $f$  тех же переменных обращалась в максимум (минимум).

**Общей задачей линейного программирования** (ОЗЛП) называют задачу, в которой функция цели, которую надо оптимизировать, представляет собой линейную комбинацию известных коэффициентов  $c_j$  ( $i = \overline{1, n}$ ) и неизвестных переменных  $x_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) вида:

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j, \quad (2.1)$$

Функцию  $f$  называют также целевой функцией или критерием эффективности задачи. Неизвестные неотрицательные переменные  $x_j$  называются управляющими переменными.

Ограничения, накладываемые на область возможных решений, имеют вид линейных неравенств или равенств:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, & i = \overline{1, m_1} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, & i = \overline{m_1 + 1, m_2} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, & i = \overline{m_2 + 1, m} \end{cases} \quad (2.2)$$

где  $a_{ij}, b_i$  – известные величины, причем величины  $a_{ij}, x_j, b_i$  ( $j = \overline{1, n}, i = \overline{1, m}$ ) положительные.

**Решить задачу линейного программирования** – это значит найти значения управляющих переменных  $x_j$ , удовлетворяющих ограничениям (2.2), при которых целевая функция (2.1) принимает минимальное или максимальное значение.

**Допустимым решением** задачи линейного программирования будем называть любую совокупность неотрицательных переменных, удовлетворяющих условиям (2.2):

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1, n}). \quad (2.3)$$

Условие (2.3) принято называть условиями неотрицательности.

**Оптимальным решением**  $\vec{X}_{opt} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  будем называть то из допустимых решений, для которого линейная функция  $f$  (2.1) обращается в максимум (минимум).

В **классической постановке** математическая модель задачи ЛП представляет собой группу соотношений: целевую функцию (2.1), которую надо либо максимизировать, либо минимизировать, все ограничения, заданные неравенствами со знаком  $\leq$  (2.4), при заданных условиях всех неотрицательных переменных (2.3).

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1, m}. \quad (2.4)$$

Существуют *симметричные* формы записи ЗЛП:

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1, m}, \quad (2.5)$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1, n})$$

или:

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, i = \overline{1, m}, \quad (2.6)$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1, n}).$$

При **канонической форме** целевая функция стремится к максимуму, ограничения представлены уравнением (2.7) и заданы условия неотрицательности переменных (2.3).

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1, m}. \quad (2.7)$$

Форма записи ЗЛП может быть **матричной**:

$$F = CX \rightarrow \max, AX = A_0, X \geq 0, \quad (2.8)$$

где  $A$  – матрица коэффициентов системы уравнений;  $X$  – матрица-столбец переменных задачи;  $A_0$  – матрица-столбец правых частей системы ограничений.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ называется матрицей условий, технологической}$$

матрицей или матрицей норм расхода в зависимости от того, какой смысл вложен в совокупность ее элементов.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ – вектор переменных, } A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ – вектор ограничений, } C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$$

– вектор весовых коэффициентов.  $CX$  – скалярное произведение векторов  $c$  и  $x$ .

Такое разнообразие форм записи условий задач затрудняет создание и использование общих методов и вычислительных алгоритмов их решения. Рассмотрим метод и алгоритм решения канонической задачи линейного программирования и способы сведения любой задачи линейного программирования к канонической форме.

Если по условиям задачи требуется отыскать минимум функции  $f$ :

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min. \quad (2.9)$$

то задачу можно свести к задаче максимизации функции  $f'$ , связанной с функцией  $f$  следующим образом:

$$f' = -f = -c_1 x_1 - c_2 x_2 - \dots - c_n x_n = -\sum_{j=1}^n c_j x_j. \quad (2.10)$$

Максимум функции (2.10) и минимум функции (2.9) будут достигаться при одном и том же наборе переменных  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , удовлетворяющих условиям неотрицательности переменных и уравнениям, задающим область допустимых решений.

Если в ограничениях (2.2) задачи стоят неравенства вида

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i = \overline{1, m_1}, \quad (2.11)$$

то преобразовать их в уравнения можно следующим образом: прибавить в левой части неравенств новые переменные  $x_j$ , ( $j = \overline{n+1, n+m_1}$ ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \dots \\ a_{m_1 1}x_1 + a_{m_1 2}x_2 + \dots + a_{m_1 n}x_n + x_{n+m_1} = b_{m_1}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Если в ограничениях задачи стоят неравенства вида

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, i = \overline{m_1+1, m_2}, \quad (2.13)$$

то преобразовать их в уравнения можно следующим образом: вычесть в левой части неравенств новые переменные  $x_j$ , ( $j = \overline{n+m_1+1, n+m_2}$ ):

$$\begin{cases} a_{(m_1+1)1}x_1 + a_{(m_1+1)2}x_2 + \dots + a_{(m_1+1)n}x_n - x_{n+(m_1+1)} = b_{(m_1+1)}, \\ a_{(m_1+2)1}x_1 + a_{(m_1+2)2}x_2 + \dots + a_{(m_1+2)n}x_n - x_{n+(m_1+2)} = b_{(m_1+2)}, \\ \dots \\ a_{m_2 1}x_1 + a_{m_2 2}x_2 + \dots + a_{m_2 n}x_n - x_{n+m_2} = b_{m_2}. \end{cases} \quad (2.14)$$

В результате подобных преобразований задача линейного программирования будет приведена к канонической форме записи.

**Пример 1.** Записать в канонической форме задачу

$$f = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 10, \\ x_1 - 8x_2 - 2x_3 \leq 7, \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 20. \end{cases}$$

Сначала заменим целевую функцию  $f$  на функцию  $f'$ , полученную следующим образом:

$$f' = -f = -5x_1 - 2x_2 + 3x_3,$$

тогда

$$f' = -5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max.$$

Теперь перейдем к ограничениям. Первое ограничение имеет знак неравенства « $\geq$ », значит в его правой части надо вычесть переменную  $x_4$ :

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 10.$$

Второе ограничение имеет знак неравенства « $\leq$ », значит в левой части данного неравенства надо прибавить переменную  $x_5$ :

$$x_1 - 8x_2 - 2x_3 + x_5 = 7.$$

Третье ограничение имеет форму уравнения, значит оно в преобразованиях не нуждается.

Таким образом, получим каноническую форму записи:

$$f' = -5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 & = 10, \\ x_1 - 8x_2 - 2x_3 & + x_5 = 7, \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 & = 20. \end{cases}$$

### 3. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1

#### Построение математических моделей простейших экономических задач

##### 1. Цель занятия:

**Образовательная** – познакомиться с разделом математики – математическое программирование и его составными частями: линейное, нелинейное и динамическое программирование – как главным инструментом оценки эффективности управленческих решений.

**Развивающая** – способствовать развитию компетенций:

##### **Общекультурных:**

ОК - 1 – владеет культурой мышления, способен к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения;

ОК - 6 – способен логически верно, аргументированно и ясно строить устную и письменную речь;

ОК - 17 – способен к организованному подходу к освоению и приобретению новых навыков и компетенций.

##### **Профессиональных:**

ПК - 19 – использовать методы ЛП в профессиональной деятельности для теоретического и экспериментального исследования, т.е. уяснить роль математического программирования как главного инструмента оценки эффективности управленческих решений;

ПК - 20 – использовать соответствующий математический аппарат и инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования.

##### 2. Основные теоретические сведения:

- этапы решения экстремальных экономических задач;
- построение математических моделей простейших прикладных задач;
- различные формы записи задач линейного программирования.

**Пример 1.** Записать в канонической форме исходную задачу линейного программирования.

Найти максимум функции:  $F_{\max} = 4x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$  при условиях:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \leq 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \leq 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 \geq 8. \end{cases} \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

*Решение:*

В соответствии с условием задачи необходимо найти  $F_{\max}$ . Чтобы записать имеющуюся систему неравенств в форме основной задачи, следует перей-



ти от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам. В результате для ограничений-равенств получаем новую систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 = 8. \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0$$

функции  $F_{\max} = 4x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$ .

**Пример 2.** Записать в канонической форме задачу, состоящую в минимизации функции  $F_{\min} = -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4$ , при условиях :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \geq 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15. \end{cases} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

В данной задаче требуется найти минимум целевой функции, а система ограничений содержит три неравенства. Следовательно вместо нахождения  $F_{\min}$  найдем  $F_{\max} = -F_{\min}$ . Чтобы записать имеющуюся систему неравенств в форме основной задачи, следует перейти от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам. В результате для ограничений-равенств получаем новую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_6 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_7 = 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15. \end{cases} \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

функции  $F_{\max} = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4$ .

### 3. Вопросы и упражнения для самоконтроля

1. Дайте определение линейного программирования.
2. Что называется математической моделью экономической задачи и как она строится?
3. Какие виды ограничений могут содержаться в задаче линейного программирования?
4. Как перейти от неравенств к уравнениям?
5. Какие переменные называются дополнительными и какой коэффициент соответствует им в линейной функции задачи линейного программирования?

6. Записать в канонической форме задачи линейного программирования:

6.1. Найти максимум функции:  $F_{\max} = x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$  при условиях:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \leq 4, \\ 2x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 3, \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 \geq 7. \end{cases} \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

6.2. Найти максимум функции:  $F_{\max} = x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$  при условиях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 3, \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 6, \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_5 = 7. \end{cases} \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

7. Построить математические модели следующих задач и в полученных системах ограничений от неравенств перейти к уравнениям.

7.1. Для изготовления трех видов изделий  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  используют четыре вида материалов:  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$ . Запасы материалов, технологические нормы расходов материалов на каждое изделие и цена единицы изделия приведены в табл. 1.1. Составить план выпуска изделий, обеспечивающий их максимальный выпуск по стоимости.

Таблица 1.1

Вид материалов	Запас материала, кг	Норма расхода материалов на одно изделие, кг		
		$P_1$	$P_2$	$P_3$
$S_1$	150 000	4	2	1
$S_2$	170 000	6	0	2
$S_3$	100 000	0	2	4
$S_4$	200 000	8	7	0
Цена одного изделия, руб.		100	1509	200

7.2. Чтобы при откорме животных весом 30-40 кг получить средний привес 300 - 400 г, по нормам в дневном рационе должны содержаться питательные вещества в следующем количестве: кормовых единиц – не менее 1,6 кг; перевариваемого протеина – не менее 200 г., каротина – не менее 10 мг. При откорме используют ячмень, бобы и сенную муку. Содержание питательных веществ в одном килограмме этих кормов и стоимость 1 кг корма приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ, содержащихся в 1 кг корма		
	ячмень	бобы	сенная мука
Кормовые единицы, кг	1,2	1,4	0,8
Перевариваемый протеин, г	80	280	240
Каротин, мг	5	5	100
Цена 1 кг корма, руб.	3	4	5

Необходимо составить дневной рацион нужной питательности, причём затраты на него должны быть минимальными.



Вспомним теорему Кронекера – Капелли (условие совместности системы).

Система совместна (имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы:

$$\text{Rg}A = \text{Rg}A^*.$$

Очевидно, что система (4.1) может быть записана в виде:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

*Доказательство.*

1) Если решение существует, то столбец свободных членов есть линейная комбинация столбцов матрицы  $A$ , а значит добавление этого столбца в матрицу, т.е. переход  $A \rightarrow A^*$ , не изменяет ранга.

2) Если  $\text{Rg}A = \text{Rg}A^*$ , то это означает, что они имеют один и тот же базисный минор. Столбец свободных членов – линейная комбинация столбцов базисного минора, т. е. верна запись, приведенная выше.

**Пример 1.** Определить совместность системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}. \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 6 = 5 \neq 0 \quad \text{Rg}A = 2.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{Rg}A^* = 3.$$

Система несовместна.



**Пример 3.** Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2. \end{cases}, \text{ откуда получаем: } x_3 = 2; x_2 = 5; x_1 = 1.$$

Ответ: (1, 5, 2).

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Ответ: (1, 2, 3, 4).

Можно решать систему линейных уравнений, записав ее в жорданову таблицу и проделав возможное число шагов жордановых исключений, вычеркивая после каждого шага разрешающий столбец и строки, если они целиком состоят из нулевых элементов. Если в ходе исключений появится строка, все элементы которой, кроме свободного члена, равны нулю, то данная система несовместна. В противном случае система совместна. При этом она имеет бесчисленное множество решений, если в верхней заглавной строке последней жордановой таблицы останется хотя бы одна переменная, и единственное решение, если все переменные окажутся в левом заглавном столбце.

Один шаг обыкновенного жорданова исключения с разрешающим элементом  $a_{ij}$  переводит жорданову таблицу в новую по схеме, состоящей из следующих четырех правил:

1) *разрешающий элемент заменяется обратной величиной;*

2) остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент и меняют знаки;

3) остальные элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент;

4) прочие элементы вычисляются по правилу воображаемого прямоугольника.

Диагональ этого прямоугольника, на которой расположены разрешающий и преобразуемый элементы, назовем *главной*, а другую диагональ – *побочной*. Тогда преобразованный элемент равен разности произведений элементов, расположенных на главной и побочной диагоналях, деленной на разрешающий элемент.

Сформулированного правила следует придерживаться независимо от того, в какой вершине прямоугольника расположен разрешающий элемент.

Если в разрешающей строке некоторый элемент равен 0, то элементы столбца, в котором расположен нулевой элемент разрешающей строки, остаются после шага жорданова исключения без изменения.

Аналогично: если в разрешающем столбце есть нулевой элемент, то соответствующая ему строка остается на данном шаге неизменной.

**Пример 4.** Найти решение системы.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 6x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

*Решение.* Запишем систему в виде жордановой таблицы и сделаем два шага жордановых исключений (табл. 4.1 – 4.3). При этом за разрешающие можно принимать любые отличные от нуля элементы основной части таблицы (кроме элементов столбца свободных членов).

Таблица 4.1

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
0=	-3	1	2	1	-6
0=	0	1	1	1	-4
0=	3	1	0	1	-2

Таблица 4.2

	1	$-x_1$	$-x_3$	$-x_4$
0=	-3	-1	-1	2
$x_2=$	0	1	1	-4
0=	3	1	1	-2



Таблица 4.3

	1	$-x_3$	$-x_4$
0=	0	0	0
$x_2=$	-3	0	-2
$x_1=$	3	1	-2

Из табл. 4.3 выпишем общее решение данной системы, где  $x_3$  и  $x_4$  могут принимать любые значения:

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 + 2x_4 + 3, \\ x_2 = 2x_4 - 3. \end{cases}$$

**Пример 5.** Найти решение системы

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_4 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

*Решение.* Записав систему в виде табл. 4.4 и подвергнув ее четырем шагам жордановых исключений (табл. 4.4 — 4.8), видим, что система имеет единственное решение:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$ ,  $x_4 = 4$ .

Таблица 4.4

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
0=	5	1	4	0	-1
0=	3	2	-3	1	1
0=	3	1	0	2	-1
0=	3	0	2	-3	2

Таблица 4.5

	1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
0=	2	4	-2	0
0=	-3	-3	-3	3
$x_1=$	3	0	2	-1
0=	3	2	-3	2

Таблица 4.6

	1	$-x_3$	$-x_4$
0=	-2	-6	4
$x_2=$	1	1	-1
$x_1=$	3	2	-1
0=	1	-5	4

Таблица 4.7

	1	$-x_3$
0=	-3	-1
$x_2=$	5/4	-1/4
$x_1=$	3/4	13/4
$x_4=$	1/4	-5/4

Таблица 4.8

	1
$x_3=$	3
$x_2=$	2
$x_1=$	1
$x_4=$	4

При решении задач математического программирования иногда приходится графически изображать множество решений системы неравенств. Напомним, что решением линейного неравенства с двумя неизвестными

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq a \quad (4.3)$$

является бесконечное множество пар значений этих неизвестных, удовлетворяющих неравенству (4.3).

В системе координат  $x_1$   $Ox_2$  неравенство (4.3) определяет полуплоскость с граничной прямой (рис. 4.1):

$$a_1x_1 + a_2x_2 = a.$$

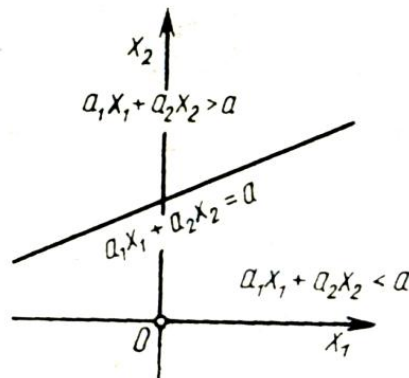


Рис. 4.1

Чтобы найти эту полуплоскость, нужно сначала построить граничную прямую, а затем взять какую-нибудь точку, лежащую по ту или другую сто-

рону от граничной прямой, и определить, какому из неравенств ( $a_1x_1 + a_2x_2 < a$  или  $a_1x_1 + a_2x_2 > a$ ) удовлетворяют ее координаты. Если они удовлетворяют первому, то искомой будет полуплоскость, в которой находится взятая точка, если второму, то искомой будет полуплоскость, которой взятая точка не принадлежит.

**Пример 6.** Построить на плоскости  $x_1Ox_2$  область допустимых решений, выделить область неотрицательных решений и найти координаты вершин этой области для системы линейных неравенств:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 \geq -10, \\ x_1 \leq 3, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + 2x_2 \geq -2. \end{cases}$$

*Решение.*

Для построения области допустимых решений строим соответствующие данным неравенствам граничные прямые (рис. 4.2):

$L_1$  (1.13):  $2x_1 - 5x_2 = -10$ , разделим на  $-10$ :

$$\frac{x_1}{-5} + \frac{x_2}{2} = 1. \quad (4.3)$$

$L_2$  (1.14):  $x_1 = 3$ , разделим на 3:

$$\frac{x_1}{3} = 1. \quad (4.4)$$

$L_3$  (1.15):  $3x_1 + 2x_2 = 12$ , разделим на 12:

$$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{6} = 1. \quad (4.5)$$

$L_4$  (1.16):  $x_1 + 2x_2 = -2$ , разделим на  $-2$ :

$$\frac{x_1}{-2} + \frac{x_2}{-1} = 1. \quad (4.6)$$

При такой записи уравнений сразу определяются величины отрезков, отсекаемых прямыми на осях координат

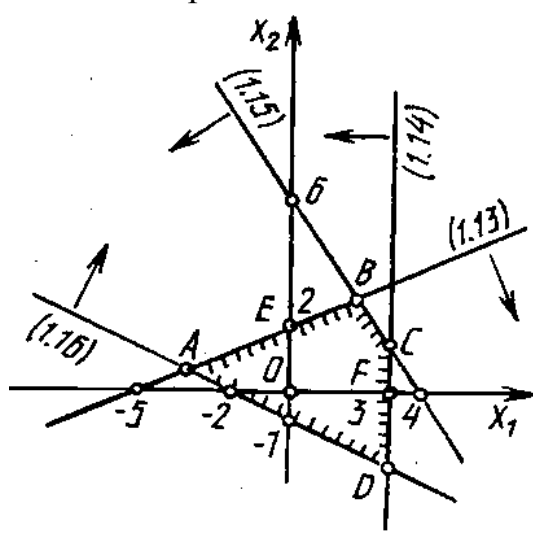


Рис. 4.2

Далее находим полуплоскости, в которых выполняются данные в условии неравенства. Так, неравенство  $2x_1 - 5x_2 \geq -10$  определяет полуплоскость с граничной прямой (4.3), в которой расположена точка  $O(0; 0)$  ( $2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 0 > -10$ , т. е. это неравенство удовлетворяется координатами точки  $O$ ).

Область допустимых решений определяется как общая часть четырех полуплоскостей, соответствующих данным неравенствам. Она представляет собой многоугольник  $ABCD$ .

Область неотрицательных решений расположена в первой четверти и является общей частью шести полуплоскостей, определяемых четырьмя данными неравенствами и неравенствами  $x_1 \geq 0$  (правая координатная полуплоскость) и  $x_2 \geq 0$  (верхняя координатная полуплоскость), выражающими условия неотрицательности переменных. Это многоугольник  $OEBCF$ .

Чтобы найти координаты вершин области неотрицательных решений, надо решить совместно уравнения прямых, пересекающихся в этих вершинах. Так, координаты точки  $B$  определим в результате совместного решения уравнений (4.3) и (4.5).

Получим:  $x_1 = 40/19$ ,  $x_2 = 54/19$ , т.е.  $B(40/19; 54/19)$ .

Другие вершины имеют координаты:  $O(0; 0)$ ,  $E(0; 2)$ ,  $C(3; 3/2)$ ,  $F(3; 0)$ .

## 5. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2

### Эквивалентные преобразования систем линейных уравнений

#### 1. Цель занятия:

**Образовательная** – повторить понятия обыкновенных жордановых исключений, базисные решения систем линейных уравнений, методы решения систем линейных уравнений и неравенств, отработать метод Жордана-Гаусса. Показать полученные знания и умения по составлению экономико-математических моделей ЗЛП.

**Развивающая** – способствовать развитию компетенций:

#### **Общекультурных:**

ОК - 1 – владеет культурой мышления, способен к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения;

ОК - 6 – способен логически верно, аргументированно и ясно строить устную и письменную речь.

#### **Профессиональных:**

ПК - 19 – использовать методы линейной алгебры, в частности метод Жордана - Гаусса, в профессиональной деятельности для теоретического и экспериментального исследования.

#### 2. Основные теоретические сведения:

- жордановы исключения;
- эквивалентные преобразования систем линейных уравнений;
- различные способы построения прямых и полуплоскостей;
- решение систем методом Гаусса.

#### 3. Вопросы и упражнения для самоконтроля

1. Что такое матрица? Как определяется ее размер?
2. В элементе  $a_{ij}$  матрицы что определяют индексы?
3. Какая матрица называется прямоугольной? квадратной? нулевой? единичной? треугольной? диагональной?
4. Какие элементы образуют главную диагональ матрицы?
5. Что такое транспонированная матрица? симметричная матрица?
6. Что собой представляет определитель матрицы? Правила вычисления.
7. Какие преобразования называются элементарными по отношению к матрицам?
8. Опишите последовательность решения систем уравнений методом Гаусса.

9. Как формируется расширенная матрица систем уравнений? К какому виду она приводится в итоге преобразования по методу Гаусса?

10. Сформулируйте теорему Кронекера–Капелли: для общего вида систем уравнений; для однородных систем.

11. Предприятие производит продукцию трех видов и использует сырье двух типов. Нормы затрат сырья на единицу продукции каждого вида заданы матрицей  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Стоимость единицы сырья каждого типа задана матрицей  $B = \begin{pmatrix} 10 & 15 \end{pmatrix}$ . Каковы общие затраты предприятия на производство 100 единиц продукции первого вида, 200 единиц продукции второго вида и 150 единиц продукции третьего вида?

12. Вычислите матрицу  $D = (AB)^T - C^2$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

13. Вычислите определители:  $A = (4)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

14. Определить, имеет ли матрица  $A$  обратную, и если имеет, то вычислить ее:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

15. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

16. Решить систему уравнений методом обратной матрицы и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$$

17. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

18. Решить матричные уравнения:

$$18.1. \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$18.2. X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

19. Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} 4x_1 - 17x_2 - 6x_3 - 5x_4 = -17, \\ 43x_1 + 24x_2 - x_3 + 3x_4 = 28, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 9, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

20. Построить на плоскости  $x_1 O x_2$  область допустимых решений, выделить область неотрицательных решений и найти координаты вершин этой области для системы линейных неравенств:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \geq -6, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq -3. \end{cases}$$

### 21. Задание контрольной работы.

Требуется составить оптимальный план выпуска продукции, дающий возможность предприятию получать максимальную прибыль.

Для выпуска четырех видов продукции  $A_j, j = \overline{1,4}$  на предприятии используется три вида сырья, запасы которых определяются величинами  $b_i, i = \overline{1,3}$ . Нормы расхода  $i$ -го сырья на изготовление единицы  $j$ -той продукции  $a_{ij}$ , а прибыль от единицы выпускаемой продукции составляет  $c_j$  ден. ед. Исходные данные представляются в виде табл. 5.1.

Таблица 5.1

Запасы сырья	Вид продукции			
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
$b_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{14}$
$b_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$a_{24}$
$b_3$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$a_{34}$
Прибыль	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$

Ниже приведены варианты заданий с конкретными значениями коэффициентов (последние четыре строки) (данные первой строки будут использованы для решения транспортной задачи на с. 91).

1.

Запасы сырья	125	75	200	380
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
220	11	5	4	13
300	8	6	14	7
260	2	8	9	10
Прибыль	10	18	16	12

2.

Запасы сырья	300	160	355	185
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
350	4	9	21	8
400	15	11	7	5
250	4	8	6	12
Прибыль	8	5	9	6

3.

Запасы сырья	500	120	180	200
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
490	7	8	12	6
310	8	10	4	15
200	15	7	6	11
Прибыль	12	8	15	10

4.

Запасы сырья	300	250	300	150
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
390	5	8	12	9
300	7	10	21	6
310	14	7	25	15
Прибыль	12	15	9	11

5.

Запасы сырья	430	115	250	205
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
420	10	8	13	5
480	9	21	6	12
100	8	9	7	11
Прибыль	7	5	10	8

6.

Запасы сырья	290	380	150	180
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
410	11	7	9	10
190	5	7	8	21
400	12	10	12	6
Прибыль	11	16	20	10

7.

Запасы сырья	350	220	130	300
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
300	7	11	9	14
400	16	20	8	9
300	12	7	21	8
Прибыль	6	8	12	9

8.

Запасы сырья	235	185	400	180
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
350	12	20	7	9
415	8	11	4	21
235	5	7	2	6
Прибыль	18	15	12	14

9.

Запасы сырья	200	200	450	150
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
200	21	14	11	4
450	7	8	13	10
350	10	23	18	9
Прибыль	21	18	15	1

10.

Запасы сырья	125	75	200	380
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
220	7	11	8	16
300	25	23	11	22
260	13	9	5	15
Прибыль	9	15	22	18



11.

Запасы сырья	185	415	300	100
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
325	15	13	11	10
200	5	12	6	7
475	8	9	11	8
Прибыль	20	12	10	18

12.

Запасы сырья	500	120	180	200
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
490	9	13	20	11
310	23	5	9	18
200	18	9	12	13
Прибыль	11	7	9	14

13.

Запасы сырья	430	150	250	205
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
420	21	20	7	6
480	13	14	5	8
100	9	10	12	15
Прибыль	12	8	16	10

14.

Запасы сырья	290	380	150	180
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
410	5	8	10	21
190	6	4	8	15
400	19	11	7	9
Прибыль	7	15	12	17

15.

Запасы сырья	350	220	130	300
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
300	14	9	13	9
400	9	12	8	11
300	18	7	15	7
Прибыль	11	18	5	12

16.

Запасы сырья	235	185	400	180
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
350	5	21	8	9
415	10	5	14	7
235	7	22	13	8
Прибыль	14	9	16	10

17.

Запасы сырья	200	200	450	150
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
200	5	22	7	3
450	15	9	11	14
350	8	21	6	5
Прибыль	7	17	14	10

18.

Запасы сырья	125	75	200	380
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
220	12	10	5	8
300	7	21	6	20
260	9	12	13	11
Прибыль	15	21	9	18

19.

Запасы сырья	185	475	300	100
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
325	8	9	10	6
200	17	15	22	13
475	21	7	18	11
Прибыль	11	7	19	15

20.

Запасы сырья	500	120	180	200
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
490	4	25	10	5
310	9	7	8	16
200	13	11	7	4
Прибыль	5	11	19	15

21.

Запасы сырья	300	160	355	185
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
350	7	15	20	9
400	16	9	8	12
250	4	21	5	11
Прибыль	17	7	16	9

22.

Запасы сырья	430	115	250	205
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
420	14	19	11	8
480	8	9	6	11
100	10	7	22	13
Прибыль	10	15	19	11

23.

Запасы сырья	300	250	300	150
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
390	7	5	12	6
300	14	9	16	10
310	8	22	9	7
Прибыль	19	7	12	14

24.

Запасы сырья	350	220	130	300
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
300	10	15	9	8
400	7	12	17	13
300	9	5	4	16
Прибыль	12	10	5	11

## 6. ПРИМЕРЫ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

К задачам линейного программирования относятся задачи об *оптимальном использовании ресурсов, задачи о выборе оптимальных технологий, задачи о получении наибольшей прибыли, транспортная задача* и другие.

Рассмотрим некоторые из них.

### **Задача использования ресурсов.**

Для изготовления нескольких видов продукции  $P_1, P_2, \dots, P_n$  используют  $m$  видов ресурсов  $S_1, S_2, \dots, S_m$  – это могут быть различные материалы, электроэнергия, полуфабрикаты. Объём каждого из видов ресурсов ограничен и известен  $b_1, b_2, \dots, b_m$ ,  $a_{ij}$  – количество единиц  $i$ -го сырья, идущего на изготовление единицы  $j$ -й продукции

Предприятие может обеспечить выпуск каждого вида продукта в количестве не более  $d_j$  единиц, где  $j = \overline{1, n}$ . При реализации единиц  $j$  продукции прибыль составляет  $c_j$  единиц. Необходимо составить план выпуска продукции, который обеспечивал бы получение максимальной прибыли при реализации, выпускаемой продукции.

Составим математическую модель задачи линейного программирования.

Пусть  $x_j$ ,  $j = \overline{1, n}$  – количество единиц  $j$ -й продукции, которое необходимо выпустить. Тогда целевая функция имеет вид:

$$Z(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \max .$$

Максимизируем её, составив ограничения:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m. \end{cases}$$

Решая экономическую задачу, вспомним об условиях неотрицательности  $0 \leq x_j \leq d_j$ , где  $j = \overline{1, n}$ .

### **Задача использования сырья при конкретных данных**

Для изготовления двух видов продукции  $P_1, P_2$  используют три вида сырья  $S_1, S_2, S_3$ . Запасы сырья, количество единиц сырья затрачиваемых на

изготовление единицы продукции, а также величина прибыли от реализации единицы продукции приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Вид сырья	Запас сырья	Количество единиц сырья, идущих на изготовление единиц продукции	
		$P_1$	$P_2$
$S_1$	20	2	5
$S_2$	40	8	5
$S_3$	30	5	6
Прибыль от единицы продукции, ден. ед.		50	40

Пусть  $x_1$  – количество единиц продукции  $P_1$ ;  $x_2$  – количество единиц продукции  $P_2$ . Тогда реализация  $x_1$  – единиц продукции вида  $P_1$  и  $x_2$  – единиц продукции вида  $P_2$  даёт соответственно  $50x_1$  ден. ед.,  $40x_2$  ден. ед. прибыли. Суммарная прибыль составляет  $Z=50x_1+40x_2$  (ден. ед.).

Составим систему ограничений, учитывая количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, и учитывая также запасы сырья.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 20, \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 40, \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30. \end{cases}$$

Введём условие неотрицательности: если продукция  $P_1$  не выпускается, то  $x_1 = 0$ , в противоположном случае  $x_1 > 0$ . То же самое получаем для продукции  $P_2$ , тогда имеем  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ .

*Замечание:* условиями не оговорена неделимость единицы продукции, поэтому  $x_1$ ,  $x_2$  (план выпуска продукции) могут быть и дробными числами.

### **Задача составления рациона**

Рассмотрим частный пример задачи составления рациона.

При откорме каждое животное ежедневно должно получать не менее 9 единиц вещества  $S_1$ , 8 единиц вещества  $S_2$  и не менее 12 единиц вещества  $S_3$ . Для составления рациона используют два вида корма. Содержание коли-

чества единиц питательных веществ в одном килограмме каждого вида корма и стоимость каждого вида корма приведены в табл. 6.2.

Таблица 6.2

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ в 1 кг. корма	
	Корм 1	Корм 2
$S_1$	3	1
$S_2$	1	2
$S_3$	1	6
Стоимость 1 кг корма, ден. ед.	4	6

Необходимо составить дневной рацион нужной питательности, причём затраты на него должны быть минимальными.

Составим математическую модель.

Пусть  $x_1$  – количество единиц питательных веществ корма 1, а  $x_2$  – количество единиц питательных веществ корма 2. Тогда содержание питательных веществ в одном килограмме вещества  $x_1$  единиц корма 1,  $x_2$  – единиц корма 2 даёт соответствие  $4x_1$  ден. ед. и  $6x_2$  ден. ед. стоимости. Суммарная стоимость составляет  $Z = 4x_1 + 6x_2$  (ден. ед.)  $\rightarrow \min$ .

Составим систему ограничений.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12. \end{cases}$$

Введём условие неотрицательности:  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ .

## 7. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

**Теорема 1.** Множество всех планов задачи линейного программирования выпукло.

**Теорема 2.** Линейная функция задачи линейного программирования достигает своего минимального значения в угловой точке многогранника решений. Если линейная функция принимает минимальное значение более чем в одной угловой точке, то она достигает того же значения в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих точек.

*Замечание.* Если многогранник решений – неограниченная область, то не каждую точку области можно представить выпуклой линейной комбинацией угловых точек области. В этом случае задачу линейного программирования с многогранником решений, представляющим собой неограниченную область, можно привести к задаче с ограниченной областью, вводя в систему дополнительное ограничение  $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq Q$ , где  $Q$  – достаточно большое число. Введение этого ограничения равносильно отсечению гиперплоскостью  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = Q$  (рис. 7.1) от многогранной неограниченной области ограниченного многогранника, для точек которого теорема 2 уже выполняется.

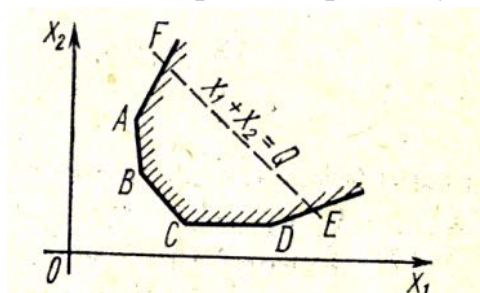


Рис. 7.1

Очевидно, что координаты угловых точек  $E$  и  $F$ , появившихся в результате введения нового ограничения, зависят от  $Q$ . Если в одной из них линейная функция принимает минимальное значение, то оно зависит от  $Q$ ; изменяя  $Q$ , значение линейной функции можно сделать сколь угодно малым, а это означает, что линейная функция не ограничена на многограннике решений.

**Теорема 3.** Если известно, что система векторов  $A_1, A_2, \dots, A_k$  ( $k \leq n$ ) линейно независима и такова, что  $A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_k x_k = A_0$ , где все  $x_j \geq 0$ , то точка  $X = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$  является угловой точкой многогранника решений.

**Теорема 4.** Если  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – угловая точка многогранника решений, то векторы в разложении  $A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = A_0$ ,  $x_j \geq 0$ , соответствующие положительным  $x_i$ , являются линейно независимыми.

*Следствие 1.* Так как векторы  $A_1, A_2, \dots, A_n$  имеют размерность  $m$ , то угловая точка многогранника решений имеет не более чем  $m$  положительных компонент  $x_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

*Следствие 2.* Каждой угловой точке многогранника решений соответствует  $k \leq m$  линейно независимых векторов системы  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

Итак, если линейная функция задачи линейного программирования ограничена на многограннике решений, то: 1) существует такая угловая точка многогранника решений, в которой линейная функция задачи линейного программирования достигает своего оптимума; 2) каждый опорный план соответствует угловой точке многогранника решений. Поэтому для решения задачи линейного программирования необходимо исследовать только угловые точки многогранника решений, т. е. только опорные планы.

## 8. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ И ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

### Алгоритм геометрического решения ЗЛП

1. Записать уравнения прямых, соответствующих ограничениям, и построить их на плоскости  $x_1Ox_2$ .
2. Определить области, в которых выполняются ограничения задачи.
3. Определить область допустимых решений задачи как область пересечения  $m$  полуплоскостей, соответствующих  $m$  ограничениям задачи.
4. Определить направление возрастания (убывания) целевой функции  $f$ . Это можно сделать двумя способами.

*Способ 1.* Построить вектор-нормаль  $\vec{n} = (c_1, c_2)$ , его направление показывает направление возрастания целевой функции  $f$ , в противоположном направлении функция  $f$  убывает.

*Способ 2.* Построить две линии уровня функции  $f$ :  $f=C_1$  и  $f=C_2$  ( $C_1, C_2$  – произвольные константы) и по их расположению на плоскости  $x_1Ox_2$  определить направление возрастания (убывания) функции.

5. Определить граничную точку или точки области допустимых решений, в которых целевая функция принимает максимальное (минимальное) значение. Для этого передвигаем нашу линию уровня  $f = C$  в направлении вектора  $\vec{n}$  (или в направлении возрастания целевой функции  $f$ ) параллельно самой себе до тех пор, пока хотя бы одна ее точка будет принадлежать области допустимых решений.

6. Определить координаты найденной точки, решая систему уравнений, состоящую из уравнений прямых, на пересечении которых находится эта точка, или выявляя уравнение граничной прямой области допустимых решений, с которой совпадает линия уровня целевой функции.

### Задача с двумя переменными

Для объяснения ряда моментов в процессе решения нам будет удобно использовать экономическую интерпретацию коэффициентов и состояний этой задачи.

Пусть требуется найти максимальное значение функции:  $F = 2x_1 + 3x_2$ .

Задана система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ 2x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 3 \end{cases}$$

и  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$  — условия неотрицательности.

Будем считать, что данная задача описывает кирпичное производство:  $x_1$  – количество кирпичей первого вида,  $x_2$  – количество кирпичей второго ви-



да, выпускаемые по плану. За единицу измерения неизвестных выберем одну тысячу штук кирпича. Первым ресурсом пусть будет глина, её запас 10 т, второй ресурс – песок, запас – 6 т, третий ресурс – обжиговая печь, мощность нашего предприятия оценивается в 3 единицы (одна единица равна  $100 \text{ м}^3$  обжиговой печи).

Рассмотрим экономический смысл остальных коэффициентов задачи: на производство одной тысячи кирпичей первого вида идёт 2 т глины, 2 т песка и  $100 \text{ м}^3$  – обжиговой печи; на производство одной тысячи кирпичей второго вида идёт 5 т глины, 1 т песка,  $100 \text{ м}^3$  обжиговой печи. Коэффициенты целевой функции показывают прибыль от реализации единицы произведённого продукта. В задаче мы имеем прибыль в две тыс. денежных единиц (пусть будет 20 тыс. руб.) от реализации 1000 кирпичей первого вида, а от реализации 1000 кирпичей второго вида наша прибыль равна 30 тыс. руб. (за денежную единицу взяли 10 тыс. руб.).

Построим область допустимых решений задачи (рис. 8.1).

Рассмотрим уравнения прямых и воспользуемся для их построения формулой «Уравнение прямой в отрезках»:  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ .

$$L_1: 2x_1 + 5x_2 = 10. \text{ Разделим уравнение на } 10. \text{ Получим: } \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{2} = 1.$$

$$L_2: 2x_1 + x_2 = 6. \text{ Разделим уравнение на } 6. \text{ Получим: } \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{6} = 1.$$

$$L_3: x_1 + x_2 = 3. \text{ Разделим уравнение на } 3. \text{ Получим: } \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3} = 1.$$

Решением данной системы неравенств является заштрихованная область ОДР (область допустимых решений) – четырёхугольник  $OABC$ .

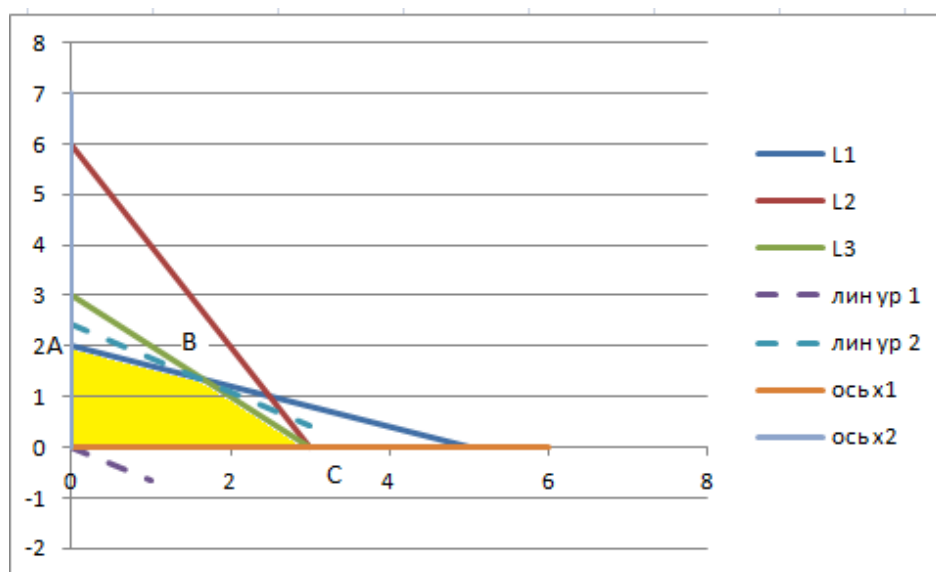


Рис. 8.1

Теперь надо выбрать из всех возможных допустимых планов.

Для этого построим прямую, соответствующую целевой функции, и назовём её **линией уровня 1**:  $2x_1 + 3x_2 = 0$ . Осталось выяснить, в какой точке найденной области функция достигает своего максимального значения.

Чтобы найти оптимальный план, достаточно «переходить» с одной линии уровня на другую в направлении возрастания целевой функции. Точка  $B$  окажется в данном случае критической точкой, через неё проходит прямая из семейства рассматриваемых параллельных прямых; всякая точка любой прямой из того же семейства, проходящей «выше» точки  $B$ , доставляет целевой функции большее значение, однако всякая такая прямая не будет с ОДР иметь общих точек. А прямая, проходящая «ниже», в точке  $B$  пересекает область допустимых решений, но значения функции  $F$  будет на всех этих точках прямой меньше, чем значения  $F$  в точке  $B$ . Вследствие этого точка  $B$  и есть оптимальный план, приносящий нам наибольшую прибыль.

Определим координаты точки  $B$ , то есть план, доставляющий максимальную прибыль, оптимальный план. Поскольку эта точка есть пересечение первой и третьей прямых, то её координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых:  $2x_1 + 5x_2 = 10$ ,  $x_1 + x_2 = 3$  и находятся как решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 10, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$
$$x_2 = \frac{4}{3}, x_1 = \frac{5}{3}.$$

Имеем  $B \left( \frac{5}{3}, \frac{4}{3} \right)$ .

Оптимальный план  $X^0 = \left( \frac{5}{3}, \frac{4}{3} \right)$ .

Таким образом, вычисление значения максимальной прибыли:

$$F_{\max} = 2 \cdot \frac{5}{3} + 3 \cdot \frac{4}{3} = \frac{22}{3},$$

то есть выпуская кирпичи первого и второго видов, мы получим максимальную прибыль.

Ответ: 7,3 ден. ед., или 73 тыс. руб.

**Различные случаи решения (единственный оптимальный план, оптимальных планов бесконечное множество, оптимального плана нет)**

В зависимости от вида ОДР и целевой функции  $F$  (рис. 8.2) задача может иметь бесконечное множество 1), 2), одно решение 3), 4), не иметь ни одного оптимального решения 5), 6).

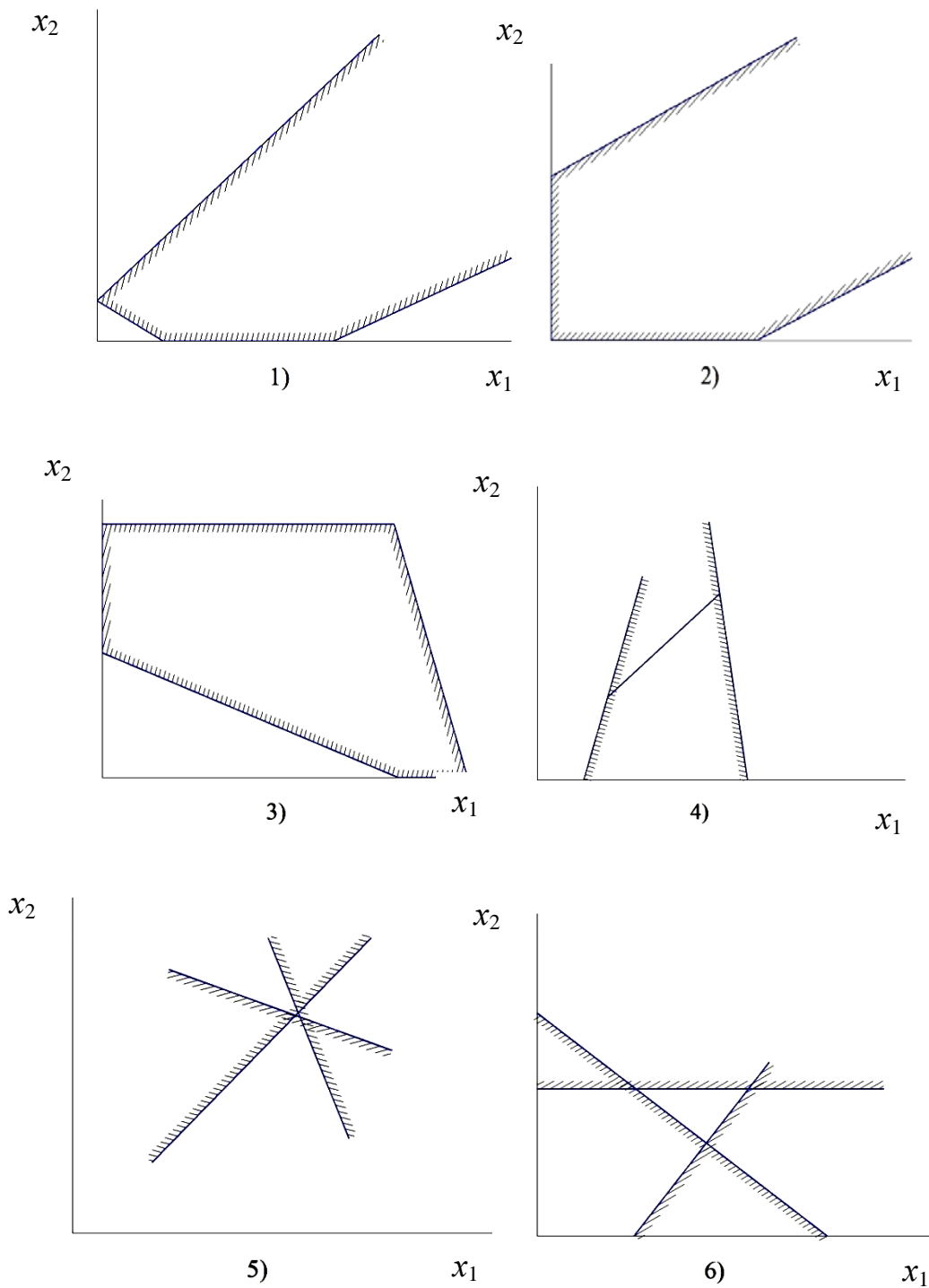


Рис. 8.2

**Решение задачи.**

Вернемся к примеру задачи составления рациона, предложенного в табл. 6.2. Была составлена математическая модель.

Целевая функция:  $F = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min$ .

Система ограничений имеет вид:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12. \end{cases}$$

Заданы условия неотрицательности:  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ .

Решим задачу графическим методом. Для этого воспользуемся рассмотренным алгоритмом.

Построим ОДР.

$L_1: 3x_1 + x_2 = 9$ , разделим на 9:

$$\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{9} = 1.$$

$L_2: x_1 + 2x_2 = 8$ , разделим на 8:

$$\frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{4} = 1.$$

$L_3: x_1 + 6x_2 = 12$ , разделим на 12:

$$\frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{2} = 1.$$

Заштрихованная неограниченная на рис. 8.5 область  $ABCD$  — есть ОДР задачи, в точке  $B$  достигается минимум целевой функции.

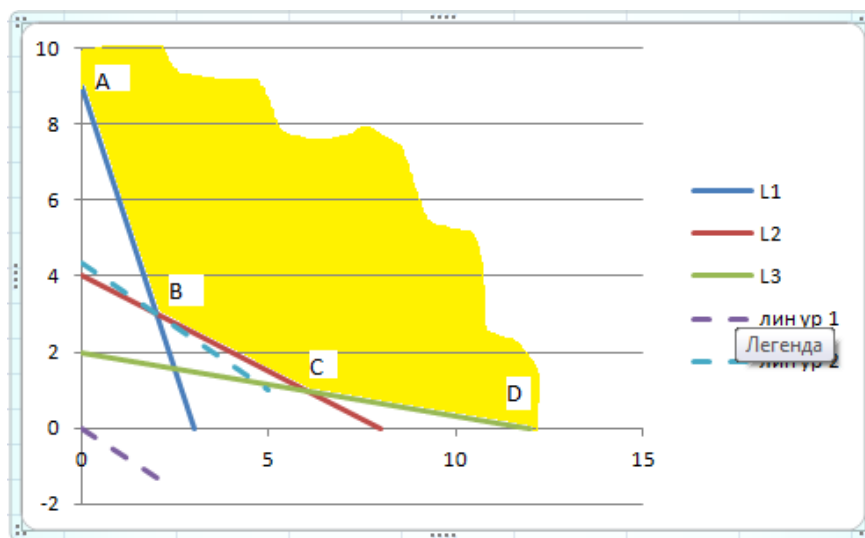


Рис. 8.5

Перемещаем линию уровня  $4x_1 + 6x_2 = 0$  параллельно самой себе, она впервые коснется многогранника решений и станет опорной по отношению к нему в условной точке  $B$ . Если прямую перемещать далее в направлении вектора  $n$ , то значение целевой функции на ОДР значит, в точке  $B$  функция принимает минимальное значение. Точка  $B$  лежит на пересечении прямых, для определения её координат решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9, \\ x_1 + 2x_2 = 8. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

$$F_{\min} = 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 26.$$

Таким образом, составлен дневной рацион нужной питательности: 2 ед. — количество питательных веществ корма 1, а 3 ед. — количество питательных веществ корма 2. Затраты на него составили 26 ден. ед.

Ответ: 26 ден. ед.

## 9. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3

### Графический метод решения задач линейного программирования

#### 1. Цель занятия:

**Образовательная** – закрепить графический метод решения задач линейного программирования и выполнить проверку знаний, умений и навыков по данной теме.

**Развивающая** – способствовать развитию компетенций:

#### **Общекультурных:**

ОК -1 – владеет культурой мышления, способен к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения;

ОК - 6 – способен логически верно, аргументированно и ясно строить устную и письменную речь, а именно для качественного выполнения контрольной работы необходимо помимо ее верного решения грамотно оформить работу, правильно используя символику и терминологию.

#### **Профессиональных:**

ПК -19 – использовать методы аналитической геометрии, в частности методы построения прямых и плоскостей, в профессиональной деятельности для теоретического и экспериментального исследования.

#### 2. Основные теоретические сведения:

- графический метод решения задач линейного программирования;
- последовательность решения задач линейного программирования графическим методом;
- различные случаи решения (единственный оптимальный план, оптимальных планов бесконечное множество, оптимального плана нет).

#### 3. Вопросы и упражнения для самоконтроля

1. Дайте геометрическое истолкование задачи линейного программирования.
2. В какой точке многогранника решений линейная функция задачи линейного программирования достигает своего оптимального значения?
3. Какие планы необходимо исследовать, чтобы найти оптимальное значение линейной функции?
4. На чем основан графический метод решения задачи линейного программирования?
5. Как определить по рисунку, имеет ли задача линейного программирования решение или ее оптимум находится в  $\pm \infty$  ?
6. Какие задачи линейного программирования можно решать графическим методом?

7. Найти графическим методом оптимальный план задачи линейного программирования:

$$7.1. F_{\min} = -2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \text{ при} \\ \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14, \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30, \\ 3x_1 + 8x_2 \geq 24. \end{cases} \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

$$7.2. F_{\max} = 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \text{ при} \\ \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 28. \end{cases} \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

$$7.3. F_{\min} = 2 \cdot x_1 - 10 \cdot x_2 \text{ при} \\ \begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 - 5x_2 \geq -5. \end{cases} \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

$$7.4. F_{\min} = x_1 - 10 \cdot x_2 \text{ при} \\ \begin{cases} x_1 - 1/2x_2 \geq 0, \\ x_1 - 5x_2 \geq -5. \end{cases} \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

$$7.5. F_{\min} = 2 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2 \text{ при} \\ \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 24. \end{cases} \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

$$7.6. F_{\min} = 2 \cdot x_1 - 10 \cdot x_2 \text{ при} \\ \begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 - 5x_2 \geq -5. \end{cases} \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

8. Собственные средства банка вместе с депозитами составляют 100 млн ден. ед. Не менее 35 млн ден. ед. этих средств должно быть размещено в кредитах, доходность которых составляет 15%. Кредиты являются неликвидными активами банка, так как в случае непредвиденной потребности в наличности обратить их в деньги без существенных потерь невозможно. Другое дело ценные бумаги, особенно государственные. Их можно в любой момент продать, получив некоторую прибыль или во всяком случае без большого убытка. Поэтому существует правило, согласно которому коммерческие банки должны покупать в определенной пропорции ликвидные активы – ценные бумаги, чтобы компенсировать неликвидность кредитов. Пусть в данном случае ценные бумаги должны составлять не менее 30% средств, размещенных в кредитах и ценных бумагах, а их доходность составляет 10%. Требуется сформировать оптимальный пакет активов, максимизирующий прибыль банка.

## 9. Задание контрольной работы

1. Дана математическая модель задачи ЛП:  $F = \frac{2}{k} x_1 + k x_2 \rightarrow \min$ ;

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 - kx_2 \geq 1, \\ kx_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Здесь  $k = 1 + \frac{N}{n+1}$ ;

$N$  – последняя цифра номера группы, в которой учится студент.

$n$  – порядковый номер студента в списке группы.

Найти решение задачи графическим методом.

2. Ответьте на вопросы:

1. Сформулируйте общую задачу линейного программирования.
2. Напишите в различных формах (векторной, матричной, с помощью сумм) математическую модель общей задачи линейного программирования.
3. Дайте определение плана, невырожденного и вырожденного опорного плана, оптимального плана.
4. Какое множество называется выпуклым? Приведите примеры выпуклых множеств.
5. Какая точка выпуклого множества называется угловой?
6. Какими свойствами обладает выпуклое множество?
7. Что называется многогранником решений?
8. Дайте геометрическое истолкование задачи линейного программирования.
9. В какой точке многогранника решений линейная функция задачи линейного программирования достигает своего оптимального значения?
10. Какой вид имеет угловая точка многогранника решений и какому плану она соответствует?
11. Какие планы необходимо исследовать, чтобы найти оптимальное значение линейной функции?

## 10. СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Симплексный метод применим к решению любой задачи линейного программирования. Из геометрического смысла задачи линейного программирования следует, что для ее решения необходимо вычислить координаты всех вершин многогранника ограничений и значения целевой функции в них. Решить задачу линейного программирования можно методом перебора. Действительно, перебором всех вершин можно найти такую вершину, где функция  $f$  приобретает экстремальное значение, однако при этом возможны две трудности:

1) если число неизвестных  $n$  больше числа ограничений  $m$  ( $n > m$ ), система ограничений линейно зависима, то для построения многоугольника решений необходимо выделение всех линейно независимых систем уравнений и их решение;

2) число вершин многогранника резко возрастает с увеличением числа неизвестных  $n$  ( $n > m$ ), и такой метод перебора всех вершин может оказаться слишком трудоемким.

Симплексный метод обеспечивает более рациональное решение задачи, чем метод перебора. Суть его состоит в том, что, отправляясь из некоторой произвольной вершины многогранника ограничений, переходят к вычислению только такой вершины, в которой значение линейной функции будет больше, чем в предыдущей. Остальные варианты не вычисляются. Тогда при конечном сравнительно малом числе шагов может быть найден оптимальный план. Таким образом, производится упорядоченный перебор вершин, при котором происходит постоянное увеличение линейной функции. Поэтому *симплексный метод* называется также *методом последовательного улучшения плана*.

Решение задачи симплексным методом включает в себя два этапа. Первый состоит в нахождении одной произвольной вершины многогранника ограничений, координаты которого определяют начальный опорный план  $\vec{X}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ . Второй этап состоит в последовательном упорядоченном переходе от одной вершины многогранника к другой, смежной данной. Так как прилегающих вершин много, то каждый раз выбирается такая вершина, при переходе к которой обеспечивается наибольшее возрастание целевой функции. На каждом шаге процесса улучшения плана производится проверка на оптимальность. Очевидно, что план будет оптимальным, если среди вершин, прилегающих к данной, нет такой, при переходе к которой происходит возрастание целевой функции.



## Алгоритм симплексного метода

*Шаг 1.* Получение начального решения.

Выбираются  $m$  переменных, называемых *базисными* и обладающих следующим свойством: они входят с коэффициентом 1 только в одно уравнение и с коэффициентом 0 – в остальные уравнения системы.

Остальные  $n - m$  переменных называются свободными.

Все свободные переменные полагаются равными 0, а базисные переменные – равные правым частям соответствующих ограничений системы.

Пусть  $m$  базисных переменных – это переменные  $x_1, x_2, \dots, x_m$  (в противном случае переменные всегда можно перенумеровать). Тогда начальное решение  $X_0$  имеет вид:

$$X_0 = \{x_1=b_1, x_2=b_2, \dots, x_m=b_m, x_{m+1}=0, \dots, x_n=0\}. \quad (10.1)$$

Если все  $b_i \geq 0, i = \overline{1, m}$ , то начальное решение является допустимым. Переходят к шагу 2. В противном случае используют алгоритм нахождения начального решения.

*Шаг 2.* Выражение функции  $f$  только через свободные переменные.

$$f = \sum_{j=m+1}^n c_j x_j. \quad (10.2)$$

Переход к шагу 3.

*Шаг 3.* Проверка решения на оптимальность.

**Пример 1.** Максимизировать линейную целевую функцию:

$$Z_{\max} = -x_4 + x_5 \quad (10.3)$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \end{cases} \quad (10.4)$$

и условиях неотрицательности:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \quad (10.5)$$

*Решение:*

Данная система уравнений – ограничений совместна, так как ранги матрицы системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

и расширенной матрицы системы:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

совпадают и равны 3. Следовательно, система уравнений совместна и три базисных переменных можно выразить через две свободных переменных. Выразим, например,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  через  $x_4$  и  $x_5$ , т.е. приведем систему к единичному базису:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_4 + 2x_5, \\ x_2 = 2 + x_4 - x_5, \\ x_3 = 3 - 3x_4 - x_5. \end{cases} \quad (10.6)$$

Линейную функцию  $Z_{\max} = -x_4 + x_5$  выразим через свободные переменные  $x_4$  и  $x_5$  (в данном примере уже выражена). Теперь при  $x_4 = 0$ ,  $x_5 = 0$  базисные переменные окажутся равными:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$ . Таким образом, первое допустимое решение системы уравнений есть  $(1, 2, 3, 0, 0)$ . При найденном допустимом решении линейная функция  $Z$  имеет значение 0, т.е.  $Z_1 = 0$ .

Теперь попытаемся увеличить значение  $Z_1$ : увеличение  $x_4$  уменьшит  $Z_1$ , так как перед  $x_4$  стоит отрицательный коэффициент, а увеличение  $x_5$  даст увеличение и  $Z_1$ . Поэтому увеличиваем  $x_5$ , так чтобы  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  не стали отрицательными, оставив  $x_4 = 0$ . Из второго уравнения системы (10.4) видим, что  $x_5$  можно увеличивать до 2. Тогда значения переменных будут:  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$ ,  $x_4 = 0$ ,  $x_5 = 2$  или  $(5, 0, 1, 0, 2)$ .

Значение линейной функции  $Z$  при втором допустимом решении равно  $Z_2 = 2$ . Величина на втором шаге увеличилась.

Далее примем за свободные переменные  $x_2$  и  $x_4$ , т.е. именно те, которые в новом решении имеют нулевые значения. С этой целью выразим из второго уравнения системы  $x_5$  через  $x_2$  и  $x_4$ . Получим, что

$$x_5 = 2 - x_2 + x_4.$$

Тогда

$$\begin{cases} x_1 = 5 - 2x_2 + 3x_4, \\ x_3 = 1 + x_2 - 5x_4, \\ x_5 = 2 - x_2 + 2x_4. \end{cases} \quad (10.7)$$

$$Z = 2 - x_2 + x_4.$$

Снова попытаемся увеличить значение  $Z$ : увеличение  $x_4$  дает увеличение и  $Z$ , так как перед  $x_4$  стоит положительный коэффициент. Поэтому увеличиваем  $x_4$ , так чтобы  $x_1, x_3, x_5$  не стали отрицательными, оставив  $x_2 = 0$ . Из второго уравнения системы (10.7) видим, что для неотрицательности  $x_3$  значение  $x_4$  можно увеличивать до

$$1 - 5x_4 \geq 0,$$

$$1 \geq 5x_4,$$

$$x_4 \leq \frac{1}{5}.$$

Т.е. возьмем  $x_4 = \frac{1}{5}$ .

При этом условии новое решение будет:  $x_1 = \frac{28}{5}, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = \frac{1}{5}, x_5 = \frac{12}{5}$  или  $(\frac{28}{5}, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{12}{5})$ .

Значение линейной функции  $Z$  при третьем допустимом решении равно  $Z_3 = \frac{11}{5}$ . Величина на третьем шаге увеличилась.

Выразим теперь  $x_1, x_3, x_5$  через свободные  $x_2, x_3$ :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{28}{5} - \frac{5}{3}x_3 - \frac{7}{5}x_2, \\ x_4 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_2, \\ x_5 = \frac{11}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_2 \end{cases} \quad (10.8)$$

$$Z = \frac{11}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{4}{5}x_2.$$

Так как в последней линейной функции обе свободные переменные входят с отрицательными коэффициентами, то наибольшее значение  $Z$  достигается при  $x_2 = 0, x_3 = 0$ .

Это означает, что решение  $(\frac{28}{5}, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{12}{5})$  является оптимальным и

$$Z_{\max} = \frac{11}{5}.$$

### Симплексная таблица

Для удобства перехода от одного опорного решения системы условий задачи линейного программирования, имеющей предпочтительный вид, к другому, на котором целевая функция принимает значение не меньшее, чем на предыдущем, составляют так называемую симплекс-таблицу.

Она имеет следующий вид:  $(n + 3)$  столбцов, где  $n$  – число переменных в предпочтительном виде,  $(m + 2)$  строк, где  $m$  – число ограничений равенств. Сверху записывают строку коэффициентов целевой функции, снизу находится индексная строка. В столбце БП записываются базисные переменные. Столбец  $C_B$  содержит коэффициенты целевой функции, стоящие при базисных переменных. Столбец  $A_0$  – столбец свободных членов системы ограничений. Основное поле таблицы занимают коэффициенты  $a_{ij}$  системы ограничений.

Максимизировать целевую функцию

$$Z_{\max} = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 + c_4 \cdot x_4$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1, \\ x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \end{cases}$$

и условиях неотрицательности переменных:  $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ .

Предположим, что  $b_1 \geq 0$  и  $b_2 \geq 0$ , т.е. система уравнений приведена к опорному решению  $(b_1, b_2, 0, 0)$ . Значение целевой функции на этом решении равно

$$Z_{\max} = c_1 \cdot b_1 + c_2 \cdot b_2.$$

Заполним симплекс-таблицу 10.1.

Таблица 10.1

№ итерации	БП	$C_B$	$A_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	Симплексные отношения
				$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	
0	$x_1$	$c_1$	$b_1$	1	0	$a_{13}$	$a_{14}$	$b_i / a_{ij}$
	$x_2$	$c_2$	$b_2$	0	1	$a_{23}$	$a_{24}$	
	$Z_j - c_j$		$\Delta_0$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$\Delta_4$	

Остановимся подробнее на заполнении индексной строки  $Z_j - c_j$ . Здесь расположены значение функции цели для начального опорного плана  $x_0$ , т.е.  $Z(x_0) = \Delta_0 = C_B \cdot A_0$  и оценки индексной строки  $\Delta_j = C_B \cdot A_j - c_j$ .

По симплексной таблице четко видны результаты исследования, проведенные на предыдущей итерации:

1. *Критерий оптимальности.* Если индексная строка симплексной таблицы не содержит отрицательных элементов, то достигнутое опорное решение является оптимальным.

2. *Критерий неразрешимости.* Если индексная строка симплексной таблицы содержит отрицательный элемент, например  $\Delta_j < 0$ , и в соответствующем этому элементу столбце нет положительных элементов  $a_{1j} < 0$  и  $a_{2j} < 0$ , то задача линейного программирования не имеет решения:  $Z \rightarrow \infty$ .

3. *Критерий улучшения решения.* Если индексная строка симплексной таблицы содержит отрицательный элемент, например  $\Delta_j < 0$ , и в соответствующем этому элементу столбце есть положительные элементы, то, совершив с помощью симплексных преобразований переход к новому базису (при соответствующем  $\Delta_j$  разрешающем столбце), получим другое опорное решение, на котором целевая функция  $Z$  примет значение, не меньшее, чем на предыдущем опорном решении.

*Примечание 1.* Так как число опорных решений системы конечно, конечным будет и процесс решения задачи линейного программирования.

*Примечание 2.* Если в задаче линейного программирования необходимо найти минимум целевой функции  $Z$ , то вводится функция  $F = -Z$ . Вследствие равенства  $Z + F = 0$ ,  $Z_{\min} = -F_{\max}$ , а поэтому, решая задачу максимизации  $F$ , мы одновременно решаем задачу минимизации  $Z$ .

**Пример 2.** Максимизировать линейную целевую функцию:  
 $Z_{\max} = 7x_1 + 5x_2$  при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 19, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 13, \\ 3x_2 + x_5 = 15, \\ 3x_1 + x_6 = 18 \end{cases}$$

и условиях неотрицательности:  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$ .

*Решение:*

Запишем систему в наглядном виде:

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 19, \\ 2x_1 + x_2 + \quad \quad x_4 = 13, \\ \quad \quad 3x_2 + \quad \quad \quad x_5 = 15, \\ 3x_1 + \quad \quad \quad \quad \quad x_6 = 18. \end{array} \right\}$$

Так как задача имеет предпочтительный вид, занесем ее условия в симплексную таблицу.

Заполним симплекс-таблицу 10.2.

Таблица 10.2

№ итер.	БП	$C_B$	$A_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Симплексные отношения
				7	5	0	0	0	0	
0	$x_3$	0	19	2	3	1	0	0	0	$\frac{19}{3}$
	$x_4$	0	13	2	1	0	1	0	0	$\frac{13}{1}$
	$x_5$	0	15	0	3	0	0	1	0	$\frac{15}{3}; \min$
	$x_6$	0	18	3	0	0	0	0	1	-
	$Z_j - c_j$	$Z_0 = 0$		-7	-5	0	0	0	0	

$$\Delta_0 = 0 \cdot 19 + 0 \cdot 13 + 0 \cdot 15 + 0 \cdot 18 = 0,$$

$$\Delta_1 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3 - 7 = -7,$$

$$\Delta_2 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0 - 5 = -5,$$

$$\Delta_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0,$$

Аналогично  $\Delta_4 = \Delta_5 = \Delta_6 = 0$ .

Рассмотрим строку оценок. Здесь есть две отрицательные оценки:  $-7$  и  $-5$ . Выбираем больший. То есть в качестве разрешающего столбца выбираем  $x_2$ . Вычислим симплексные отношения:  $\frac{b_i}{a_{2j}}$ . Получим:  $\frac{19}{3}, \frac{13}{1}, \frac{15}{3}$ . Если придется делить на 0, ставим прочерк. Наименьшее из них есть  $\frac{15}{3}$ , значит разрешающим элементом является элемент 3, стоящий на пересечении строк для  $x_5$  и столбца для  $x_2$  (выделены в таблице).

Следовательно, элемент  $a_{32} = 3$  – разрешающий. Переменную  $x_5$  выведем из базиса, а  $x_2$  введем в базис. Разрешающую строку делим на разрешающий элемент. Элементы разрешающего столбца заполняем нулями, кроме  $a_{32}' = 1$ , а все остальные элементы таблицы пересчитываем по правилу треугольника (прямоугольника).

**Правило прямоугольника:** чтобы получить элемент  $a_{ij}$  новой симплексной таблицы, нужно из произведения угловых элементов главной диагонали вычесть произведение угловых элементов побочной диагонали и полученное число разделить на разрешающий элемент.

**Правило треугольника:** для получения любого элемента новой симплексной таблицы нужно из соответствующего элемента прежней таблицы вычесть произведение элемента разрешающей строки на элемент разрешающего столбца, разделенное на разрешающий элемент.

Таким образом новый базис будет состоять из  $x_3, x_4, x_2, x_6$ . Для перехода к новой таблице делим выделенную строку на 3 (чтобы получить на месте разрешающего элемента 1) и записываем ее на месте прежней строки в новой таблице 10.3.

Таблица 10.3

№ итер.	БП	$C_B$	$A_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Симплексные отношения
				7	5	0	0	0	0	
1	$x_3$	0	4	2	0	1	0	-1	0	4/2=2; min
	$x_4$	0	8	2	0	0	1	-1/3	0	8/2=4
	$x_2$	5	5	0	1	0	0	1/3	0	-
	$x_6$	0	18	3	0	0	0	0	1	18/3=6
	$Z_j - c_j$	$Z_1 = 25$		-7	0	0	0	0	0	0

Для получения нулей в столбце  $x_2$  проводим преобразования. Так, например, умножим выделенную строку, деленную на 3, на 3 и вычтем из первой строки, вычтем из второй строки третью.

Заполняя таблицы, необходимо после каждой итерации делать контрольные проверки, используя правило треугольника или правило прямоугольника. Для итерации 1, например, пересчитаем значение

$$\Delta_0 = Z_1 = 0 \cdot 4 + 0 \cdot 8 + 5 \cdot 5 + 0 \cdot 18 = 25.$$

Пересчитаем все оценки:

$$\Delta_1 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 0 \cdot 3 - 7 = -7,$$

$$\Delta_2 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 18 \cdot 0 - 5 = 0,$$

$$\Delta_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0,$$

$$\Delta_4 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0,$$

$$\Delta_5 = 0 \cdot (-1) + 0 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 5 \cdot 1/3 + 0 \cdot 0 - 0 = 5/3,$$

$$\Delta_6 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0.$$

Повторяем все рассуждения для табл. 10.3. Выбираем разрешающий столбец – столбец для  $x_1$ . Разрешающая строка – это строка для  $x_3$ . Разрешающий элемент находится на пересечении первой строки и первого столбца. Делим первую строку на 2 и заполняем табл. 10.4.

Таблица 10.4

№ итер.	БП	$C_B$	$A_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Симплексные отношения
				7	5	0	0	0	0	
2	$x_1$	7	2	1	0	1/2	0	-1/2	0	-
	$x_4$	0	4	0	0	-1	1	2/3	0	4/(2/3) = 6; <i>min</i>
	$x_2$	5	5	0	1	0	0	1/3	0	5/(1/3) = 15
	$x_6$	0	12	0	0	-3/2	0	3/2	1	12/(3/2) = 8
	$Z_j - c_j$	$Z_2 = 39$		0	0	7/2	0	-11/6	0	

Разрешающий элемент табл.10.4 есть 2/3. Таким образом столбец для  $x_5$  и строка для  $x_4$ . Переходим к табл. 10.5.

Таблица 10.5

№ итер.	БП	$C_B$	$A_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Симплексные отношения
				7	5	0	0	0	0	
3	$x_1$	7	5	1	0	-1/4	3/4	0	0	
	$x_5$	0	6	0	0	-3/2	3/2	1	0	
	$x_2$	5	3	0	1	1/2	-1/2	0	0	
	$x_6$	0	3	0	0	3/4	-9/4	0	1	
	$Z_j - c_j$	$Z_3 = 50$		0	0	3/4	11/4	0	0	

Так как среди оценок нет отрицательных, то мы получили оптимальный план:

$$x_1 = 5, x_2 = 3, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 6, x_6 = 3 \text{ или } (5, 3, 0, 0, 6, 3).$$

Максимальное значение целевой функции  $Z_{\max} = 50$ .



## 11. МЕТОД ИСКУССТВЕННОГО БАЗИСА (М-МЕТОД)

Пусть задача линейного программирования имеет следующий вид:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min) \quad (11.1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i = \overline{1, k}, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, i = \overline{k+1, m}. \end{cases} \quad (11.2)$$

После приведения задачи к каноническому виду система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, i = \overline{1, k}, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i, i = \overline{k+1, m}. \end{cases} \quad (11.3)$$

Говорят, что система ограничений имеет *непредпочтительный вид*, так как перед свободными членами правой части и коэффициентами при фиктивных переменных в левой части стоят противоположные знаки.

Для решения задач линейного программирования с ограничениями, имеющими непредпочтительный вид, применяют метод искусственного базиса, или М-метод.

Смысл М-метода заключается в том, что в качестве исходного опорного решения задачи выбирается точка в области допустимых решений, заведомо удаленная за пределы данной области в определенную сторону. В сторону положительного направления вектора нормали (указывающего направление возрастания целевой функции) – при минимизации целевой функции и в сторону отрицательного направления вектора нормали – в случае максимизации целевой функции.

Прибавим к левым частям ограничений (11.3) положительные переменные  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-k}$ .

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, i = \overline{1, k}, \quad (11.4)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - x_{n+i} + \omega_{i-k} = b_i, i = \overline{k+1, m}. \quad (11.5)$$

Таким образом, переменные  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-k}$  представляют базис исходного опорного решения в виде единичной матрицы.

Переменные  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-k}$  добавляются к целевой функции с коэффициентами  $\pm M$ . Причем « $+M$ » – при отыскании минимума, а « $-M$ » – при отыскании максимума целевой функции.

$$f' = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + M(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{m-k}) \rightarrow \min, \quad (11.6)$$

$$f' = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n - M(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{m-k}) \rightarrow \max. \quad (11.7)$$

Множитель  $M$  считается достаточно большой постоянной величиной, настолько большой, что если хотя бы одна из переменных  $\omega_i \neq 0$  ( $i = \overline{1, m-k}$ ), то

в целевой функции можно пренебречь слагаемыми  $\sum_{j=1}^n c_j x_j$ .

Отсюда следует, что приемлемое решение задачи имеет место только в случае, когда переменные  $\omega_i = 0$  ( $i = \overline{1, m-k}$ ).

Оптимальность можно получить, добиваясь следующих условий:

$$F = M(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{m-k}) \rightarrow \min \quad (11.8)$$

или

$$F = -M(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{m-k}) \rightarrow \max. \quad (11.9)$$

Далее полученная задача (11.8), (11.4), (11.5) или (11.9), (11.4), (11.5) решаются обычным симплекс-методом, описанным выше.

**Пример 1.** Найти решение задачи линейного программирования

$$f = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Приведем задачу к каноническому виду. Для этого вычтем из левой части неравенств фиктивные переменные  $x_3$  и  $x_4$ :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Полученные в результате преобразования ограничения имеют непродолжительный вид. Воспользуемся М-методом. Прибавим к левым частям уравнений ограничений переменные  $\omega_1$  и  $\omega_2$ :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + \omega_1 = 6, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 + \omega_2 = 12, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1, 4}; \omega_i \geq 0, i = 1, 2. \end{cases}$$

Целевая функция примет вид:

$$F = M(\omega_1 + \omega_2) \rightarrow \min.$$

Приведем целевую функцию к каноническому виду:

$$F' = -M(\omega_1 + \omega_2) \rightarrow \max,$$

то есть

$$F' = -M\omega_1 - M\omega_2 \rightarrow \max.$$

Таким образом, приведенная к каноническому виду задача имеет следующий вид:

$$F' = -M\omega_1 - M\omega_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + \omega_1 = 6, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 + \omega_2 = 12, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4}; \omega_i \geq 0, i = 1,2. \end{cases}$$

Решим полученную задачу симплекс-методом.

Составим симплекс-таблицу 11.1.

Таблица 11.1

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		0	0	0	0	-M	-M	
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\omega_1$	$\omega_2$	
-M	$\omega_1$	1	1	-1	0	1	0	6
-M	$\omega_2$	1	3	0	-1	0	1	12
<i>d</i>		-2M	-4M	M	M	0	0	$F' = -18M$

Начальное решение  $X_0 = \{x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=0, \omega_1=6, \omega_2=12\}$  не является оптимальным, так как среди оценок в *d*-строке есть отрицательные, значит решение  $X_0$  можно улучшить.

Определим переменную, которая войдет в список базисных. Для этого найдем максимальную по абсолютному значению *d*-оценку среди отрицательных:

$$\max\{|-2M|, |-4M|\} = 4M.$$

Значит, разрешающим будет второй столбец, а в базис войдет переменная  $x_2$  (табл. 11.2).

Таблица 11.2

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		0	0	0	0	-M	-M	
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\omega_1$	$\omega_2$	
-M	$\omega_1$	1	1	-1	0	1	0	6
-M	$\omega_2$	1	3	0	-1	0	1	12
<i>d</i>		-2M	-4M	M	M	0	0	$F' = -18M$

Теперь определим переменную, которая выйдет из базиса, для чего вычислим отношения элементов столбца свободных членов к соответствующим элементам разрешающего столбца и среди полученных отношений найдем минимальное:

$$\min\left\{\frac{6}{1}, \frac{12}{3}\right\} = \min\{6, 4\} = 4.$$

Значит разрешающей строкой будет вторая, из базиса выйдет переменная  $\omega_2$  и разрешающий элемент  $a_{22}=3$  (табл. 11.3).

Таблица 11.3

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		0	0	0	0	$-M$	$-M$	
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\omega_1$	$\omega_2$	
$-M$	$\omega_1$	1	1	-1	0	1	0	6
$-M$	$\omega_2$	1	3	0	-1	0	1	12
$d$		$-2M$	$-4M$	$M$	$M$	0	0	$F' = -18M$

Перейдем к новой симплекс-таблице. Разрешающий элемент при пересчете должен стать единицей, а остальные элементы в разрешающем столбце – стать нулями.

Для этого элементы разрешающей строки поделим на разрешающий элемент 3 (табл. 11.4).

Таблица 11.4

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		0	0	0	0	$-M$	$-M$	
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\omega_1$	$\omega_2$	
$-M$	$\omega_1$	1	1	-1	0	1	0	6
$-M$	$\omega_2$	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	4
$d$		$-2M$	$-4M$	$M$	$M$	0	0	$F' = -18M$

Для того чтобы элемент, стоящий в разрешающем столбце в первой строке, стал нулем, умножим разрешающую строку на  $-1$  и прибавим ее к первой строке (табл. 11.5).

Таблица 11.5

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		0	0	0	0	$-M$	$-M$	
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\omega_1$	$\omega_2$	
$-M$	$\omega_1$	$\frac{2}{3}$	0	-1	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	2
$-M$	$\omega_2$	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	4
$d$		$-2M$	$-4M$	$M$	$M$	0	0	$F' = -18M$

Теперь в базисе вместо переменной  $\omega_2$  переменная  $x_2$  и  $d$ -оценки надо пересчитать.

Таблица 11.6

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		0	0	0	0	$-M$	$-M$	
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\omega_1$	$\omega_2$	
$-M$	$\omega_1$	$\frac{2}{3}$	0	-1	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	2
0	$x_2$	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	4
$d$		$-\frac{2M}{3}$	0	$M$	$-\frac{M}{3}$	0	$\frac{M}{3}$	$F' = -2M$

Полученное решение  $X_1 = \{x_1=0, x_2=4, x_3=0, x_4=0, \omega_1=2, \omega_2=0\}$  не является оптимальным, так как среди оценок в  $d$ -строке есть отрицательные, значит решение  $X_1$  можно улучшить.

Определим переменную, которая войдет в список базисных. Для этого найдем максимальную по абсолютному значению  $d$ -оценку среди отрицательных:

$$\max \left\{ \left| \frac{-2M}{3} \right|, \left| \frac{-M}{3} \right| \right\} = \frac{2M}{3}.$$

Значит, разрешающим будет первый столбец, а в базис войдет переменная  $x_1$  (табл. 11.7).

Таблица 11.7

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		0	0	0	0	$-M$	$-M$	
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\omega_1$	$\omega_2$	
$-M$	$\omega_1$	$\frac{2}{3}$	0	-1	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	2
0	$x_2$	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	4
$d$		$-\frac{2M}{3}$	0	$M$	$-\frac{M}{3}$	0	$\frac{4M}{3}$	$F' = -2M$

Теперь определим переменную, которая выйдет из базиса, для чего вычислим отношения элементов столбца свободных членов к соответствующим элементам разрешающего столбца и среди полученных отношений найдем минимальное:

$$\min \left\{ \frac{2}{\frac{2}{3}}, \frac{4}{\frac{1}{3}} \right\} = \min \{3, 12\} = 3.$$

Значит разрешающей строкой будет первая, из базиса выйдет переменная  $\omega_1$  и разрешающий элемент  $a_{11} = \frac{2}{3}$  (табл. 11.8).

Таблица 11.8

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		0	0	0	0	-M	-M	
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\omega_1$	$\omega_2$	
-M	$\omega_1$	$\frac{2}{3}$	0	-1	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	2
0	$x_2$	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	4
$d$		$-\frac{2M}{3}$	0	M	$-\frac{M}{3}$	0	$\frac{M}{3}$	$F' = -2M$

Перейдем к новой симплекс-таблице. Разрешающий элемент при пересчете должен стать единицей, а остальные элементы в разрешающем столбце – стать нулями.

Для этого элементы разрешающей строки поделим на разрешающий элемент  $\frac{2}{3}$  (табл. 11.9).

Таблица 11.9

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		0	0	0	0	-M	-M	
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\omega_1$	$\omega_2$	
-M	$\omega_1$	1	0	-1,5	0,5	1,5	-0,5	3
0	$x_2$	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	4
$d$		$-\frac{2M}{3}$	0	M	$-\frac{M}{3}$	0	$\frac{M}{3}$	$F' = -2M$

Далее умножим элементы разрешающей строки на  $-\frac{1}{3}$  и прибавим к соответствующим элементам второй строки, таким образом получим в разрешающем столбце во второй строке ноль (табл. 11.10).

Таблица 11.10

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		0	0	0	0	-M	-M	
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\omega_1$	$\omega_2$	
-M	$\omega_1$	1	0	-1,5	0,5	1,5	-0,5	3
0	$x_2$	0	1	0,5	-0,5	-0,5	0,5	2
$d$		$-\frac{2M}{3}$	0	M	$-\frac{M}{3}$	0	$\frac{M}{3}$	$F' = -2M$

В списке базисных переменных вместо  $\omega_1$  теперь  $x_1$  и  $d$ -оценки также изменятся.

Таблица 11.11

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		0	0	0	0	$-M$	$-M$	
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\omega_1$	$\omega_2$	
0	$x_1$	1	0	$-1,5$	$0,5$	$1,5$	$-0,5$	3
0	$x_2$	0	1	$0,5$	$-0,5$	$-0,5$	$0,5$	2
$d$		0	0	0	0	$M$	$M$	$F' = 0$

Полученное решение  $X_2 = \{x_1=3, x_2=2, x_3=0, x_4=0, \omega_1=0, \omega_2=0\}$  оптимально, так как среди оценок в  $d$ -строке нет отрицательных.

Подставим полученные значения переменных в изначальную целевую функцию  $f$ :

$$f = 2 \cdot 3 + 2 = 8.$$

Минимальное значение целевой функции  $f=8$  достигается при  $x_1=3$ ,  $x_2=2$ .

## 12. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4

**Симплекс - метод для решения задач линейного программирования.**

### **М-метод решения ЗЛП**

#### **1. Цель занятия:**

**Образовательная** – освоить симплекс-метод и М-метод решения задач линейного программирования.

**Развивающая** – способствовать развитию компетенций:

#### ***Общекультурных:***

ОК -1 – владеет культурой мышления, способен к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения;

ОК - 6 – способен логически верно, аргументированно и ясно строить устную и письменную речь применительно к особенностям и последовательному применению симплексного метода.

#### ***Профессиональных:***

ПК -19 – использовать методы ЛП, в частности симплекс-метод и М-метод, в профессиональной деятельности для теоретического и экспериментального исследования.

#### **2. Основные теоретические сведения:**

- особенности применения симплекс-метода для решения задач линейного программирования;
- последовательность применения симплекс-метода для решения задач линейного программирования;
- использование симплекс-таблицы;
- использование М-метода.

#### **3. Вопросы и упражнения для самоконтроля**

1. Как построить первоначальный опорный план задачи линейного программирования?
2. Перечислите условия оптимальности опорного плана.
3. Как определяется вектор для включения в базис, если первоначальный план неоптимальный?
4. Когда линейная функция не ограничена на многограннике решений?
5. Как определить вектор, подлежащий исключению из базиса? Какой элемент называется разрешающим?
6. Какой метод решения систем линейных уравнений лежит в основе симплексного метода?



7. Какую простейшую геометрическую интерпретацию можно дать симплексному методу?

8. Максимизировать линейную целевую функцию

$F_{\max} = x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 6x_4$  при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \leq 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 \leq 3, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 2 \end{cases}$$

и условиях неотрицательности:  $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ .

9. Решить симплекс - методом и дать геометрическую иллюстрацию процесса решения.

$$F_{\max} = 8x_1 + 6x_2$$

при ограничениях:

$$\left. \begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 &= 13, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 5, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_4 - 2x_5 &= 18 \end{aligned} \right\}$$

и условиях неотрицательности:  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$ .

10. Решить методом искусственного базиса задачу:

$$F = -2x_1 - 6x_2 + 5x_3 - x_4 - 4x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 9x_5 = 3, \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 6, \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,5}$$

11. Решить методом искусственного базиса задачу:

На месторождениях А и Б может добываться сырье для двух заводов, расположенных в разных пунктах. Себестоимость добычи единицы сырья на месторождении А и доставки его на оба завода одинакова и равна 200 ден. ед., себестоимость добычи и доставки сырья месторождения Б составляет 300 ден. ед. для завода № 1 и 400 ден. ед. для завода № 2. При перевозке сырья с месторождения А к любому заводу и при перевозке с месторождения Б на завод № 2 приходится использовать участок железнодорожной сети с ограниченной пропускной способностью: количество перевозимого через этот участок сырья не должно превышать за планируемый период (например, за год) 150 ед. Для обеспечения добычи сырья на месторождении А требуется 2 тыс. ден. ед. капиталовложений на каждую единицу сырья; удельные капиталовложения на единицу сырья на месторождении Б составляют 3 тыс. ден. ед. Общая сумма капиталовложений в организацию добычи сырья не должна превышать 600 тыс. ден. ед. Завод № 1 изготавливает 400 ед. продукции за планируемый период, завод № 2 — 500. При этом из единицы сырья с месторождения А можно изготовить 3 ед. продукции как на заводе № 1, так и на заводе № 2. Качество сырья с месторождения Б несколько выше: из единицы

этого сырья можно изготовить 4 ед. продукции на заводе № 1 или 5 ед. – на заводе № 2. Требуется определить, сколько сырья следует добывать на каждом месторождении для каждого из заводов, чтобы полностью обеспечить их потребности и свести при этом к минимуму сумму издержек на добычу и доставку сырья.

12. Решить симплекс-методом:

Цех выпускает три вида изделий. Суточный плановый выпуск: 90 ед. изделия I, 70 ед. изделия II и 60 ед. изделия III. Суточные ресурсы: 780 ед. производственного оборудования (станки, машины и т.п.), 850 ед. сырья (металл и т. п.) и 790 ед. электроэнергии. Их расход на одно изделие указан в табл. 12.1. Стоимость изделия I – 8 ден. ед., изделия II – 7 ден. ед., изделия III – 6 ден. ед. Сколько надо производить изделий каждого вида, чтобы стоимость продукции, выпущенной сверх плана, была максимальной?

Таблица 12.1

Ресурсы	Расход ресурсов на изделие		
	I	II	III
Оборудование	2	3	4
Сырье	1	4	5
Электроэнергия	3	4	2

13. Решить симплекс - методом:

Для грузовых перевозок создается автоколонна. На приобретение автомашин выделено 600 тыс. ден. ед. Можно заказать машины трех марок – А, Б и В, характеризующиеся данными, приведенными в табл. 12.2. Количество машин не должно превышать 30, а общее число водителей в автоколонне должно быть не более 144 человек. Сколько автомашин каждой марки следует заказать, чтобы автоколонна имела максимально возможную производительность (т/км) в расчете на одни сутки? Считать, что каждая машина будет использоваться в течение всех трех смен, а водители будут работать по одной смене в сутки.

Таблица 12.2

Марка автомашины	Стоимость машины, тыс. ден. ед.	Количество водителей, обслуживающих машину за смену	Число рабочих смен в сутки	Производительность машины за смену, т/ км
А	10	1	3	2100
Б	20	2	3	3600
В	23	2	3	3780

14. Найти оптимальное сочетание посевов трех культур: пшеницы, гречихи и картофеля. Эффективность возделывания названных культур (в расчете на 1 га) характеризуется показателями, значения которых приведены в табл. 12.3. Производственные ресурсы: 6000 га пашни, 5000 чел. - дней

труда механизаторов, 9000 чел. - дней ручного труда. Критерий оптимальности – максимум прибыли.

Таблица 12.3

Показатель	Пшеница	Гречиха	Картофель
Урожайность, ц	20	10	100
Затраты труда механизаторов, чел.-дней	0,5	1	5
Затраты ручного труда, чел.-дней	0,5	0,5	20
Прибыль от реализации 1 ц продукции, ден. ед.	4	10	3

### 13. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая линейная задача, называемая двойственной; первоначальная задача называется исходной, или прямой.

Понятие двойственности рассмотрим на примере задачи оптимального использования сырья. Допустим, предприятие располагает сырьем вида  $S_1, S_2, S_3, S_4$  в количестве 19, 13, 15 и 18 соответственно. Это сырье используется для производства двух видов продукции  $P_1$  и  $P_2$ , продаваемой по цене 7 и 5 ден. ед. соответственно. Для производства одной единицы продукции  $P_1$  требуется 2 единицы сырья  $S_1$ , 2 ед. –  $S_2$  и 3 ед. –  $S_4$ . Для производства одной единицы продукции  $P_2$  требуется 3 единицы сырья  $S_1$ , 1 ед. –  $S_2$  и 1 ед. –  $S_3$ . Составить такой план производства, при котором выручка от реализации произведенной продукции будет максимальной.

Пусть  $x_1$  – количество производимой продукции  $P_1$  и  $x_2$  – количество производимой продукции  $P_2$ . Тогда функция цели имеет вид:

$$f=7x_1+5x_2 \rightarrow \max \quad (13.1)$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 19, \\ 2x_1 + x_2 \leq 13, \\ x_2 \leq 15, \\ 3x_1 \leq 18 \end{cases} \quad (13.2)$$

и условиях неотрицательности:

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,2}. \quad (13.3)$$

Предположим, что некоторая организация желает приобрести не продукцию, а сырье, которым располагает предприятие. По какой цене эта организация стала бы покупать указанное сырье? Обозначим соответственно через  $y_1, y_2, y_3, y_4$ , цену единицы сырья вида  $S_1, S_2, S_3, S_4$ .

Выручка от продажи всего сырья, расходуемого на единицу продукции вида  $P_1$  по ценам  $y_i$ , составит  $2y_1+2y_2+0y_3+3y_4$ , для единицы продукции  $P_2$  –  $3y_1+y_2+y_3+0y_4$ . Предприятие продаст сырье, если его стоимость будет превышать цену единицы продукции, получаемой с использованием этого сырья:

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 3y_4 \geq 7, \\ 3y_1 + 1y_2 + 3y_3 + 0y_4 \geq 5. \end{cases} \quad (13.4)$$

С другой стороны, общая стоимость всех запасов приобретаемого сырья составит:

$$Z(y) = 19y_1 + 13y_2 + 15y_3 + 18y_4. \quad (13.5)$$

Ясно, что организация стремится приобрести сырье по возможности дешевле, то есть минимизирует функцию (13.5). Таким образом, математическая запись задачи будет иметь вид:

$$G(y) = 19y_1 + 13y_2 + 15y_3 + 18y_4 \rightarrow \min \quad (13.6)$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 3y_4 \geq 7, \\ 3y_1 + 1y_2 + 3y_3 + 0y_4 \geq 5 \end{cases} \quad (13.7)$$

и при условиях неотрицательности:

$$y_i \geq 0; \quad i = \overline{1,4}. \quad (13.8)$$

Таким образом, двойственная задача (13.6) - (13.8) соответствует следующей экономической проблеме: по каким минимальным ценам следует продавать ресурсы, чтобы прибыль от их реализации была больше прибыли, полученной от реализации продукции, изготавливаемой с использованием этих ресурсов?

Две задачи линейного программирования (13.1) - (13.3), (13.6) - (13.8), связанные подобного рода особенностями, называются **взаимно двойственными**, или **сопряженными**.

Рассмотрим задачу линейного программирования следующего вида:

$$f_{\max} = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 + \dots + c_n \cdot x_n \quad (13.9)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{cases} \quad (13.10)$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0. \quad (13.11)$$

Двойственная к данной задаче будет иметь вид:

$$g_{\min} = b_1 \cdot y_1 + b_2 \cdot y_2 + b_3 \cdot y_3 + \dots + b_m \cdot y_m \quad (13.12)$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \dots \\ a_{1m}y_1 + a_{2m}y_2 + \dots + a_{mm}y_m \geq c_n. \end{cases} \quad (13.13)$$

$$y_1, y_2, \dots, y_m \geq 0. \quad (13.14)$$

Задачи (13.9) – (13.11) и (13.12) – (13.14) называют парой взаимно двойственных задач линейного программирования. Переменные двойственной

задачи  $u_i$  называют объективно обусловленными оценками, или двойственными оценками, или «ценами» ресурсов, или теневыми ценами.

### Особенности пары двойственных задач

Двойственная задача по отношению к исходной составляется согласно следующим правилам:

1. Целевая функция исходной задачи формулируется на максимум, а целевая функция двойственной задачи – на минимум, при этом в задаче на максимум все неравенства в функциональных ограничениях имеют вид  $\leq$ , в задаче на минимум – вид  $\geq$ .

2. Матрица  $A$ , составленная из коэффициентов при неизвестных в системе ограничений исходной задачи, и аналогичная матрица  $A^T$  в двойственной задаче получают друг из друга транспонированием.

3. Число переменных в двойственной задаче равно числу функциональных ограничений исходной задачи, а число ограничений в системе двойственной задачи – числу переменных в исходной задаче.

4. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены в системе ограничений исходной задачи, а правыми частями в ограничениях двойственной задачи – коэффициенты при неизвестных в целевой функции исходной задачи.

5. Каждому ограничению одной задачи соответствует переменная другой задачи: номер переменной совпадает с номером ограничения; при этом ограничению, записанному в виде неравенства  $\leq$ , соответствует переменная, связанная с условием неотрицательности. Если функциональное ограничение исходной задачи является равенством, то соответствующая переменная двойственной задачи может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Математические модели пары двойственных задач могут быть симметричными и несимметричными. В несимметричных двойственных задачах система ограничений исходной задачи задается в виде равенств, а двойственной – в виде неравенств, причем в последней переменные могут быть и отрицательными. В симметричных задачах система ограничений как исходной, так и двойственной задачи задается неравенствами, причем на двойственные переменные налагается условие неотрицательности.

Две приведенные задачи образуют пару симметричных двойственных задач.

Связь исходной и двойственной задач заключается, в частности, в том, что решение одной из них может быть получено непосредственно из решения другой.

Каждая из задач двойственной пары фактически является самостоятельной задачей линейного программирования и может быть решена независимо от другой.

Основные утверждения о взаимно двойственных задачах содержатся в двух следующих теоремах.

### **Первая теорема двойственности**

Для взаимно двойственных симметричных задач имеет место один из взаимоисключающих случаев:

1. В прямой и двойственной задачах имеются оптимальные решения, при этом значения целевых функций совпадают:  $f(x) = g(y)$ .
2. В прямой задаче допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена сверху. При этом у двойственной задачи будет пустое допустимое множество.
3. В двойственной задаче допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена снизу. При этом у прямой задачи допустимое множество оказывается пустым.
4. Обе из рассматриваемых задач имеют пустые допустимые множества.

Экономический смысл 1-й теоремы двойственности следующий. План производства  $X$  и набор оценок ресурсов  $Y$  оказываются оптимальными тогда и только тогда, когда общая стоимость продукции, определенная при известных заранее ценах продукции, равна затратам на ресурсы по «внутренним» (определяемым только из решения задачи) ценам ресурсов  $y_i$ . Для всех же других планов  $X$  и  $Y$  обеих задач прибыль от продукции всегда меньше (или равна) стоимости затраченных ресурсов:  $f(X) < g(Y)$ , т.е. ценность всей выпущенной продукции не превосходит суммарной оценки имеющихся ресурсов. Значит, величина  $g(Y) - f(X)$  характеризует производственные потери в зависимости от рассматриваемой производственной программы и выбранных оценок ресурсов.

Из 1-й теоремы двойственности следует, что при оптимальной производственной программе и векторе оценок ресурсов производственные потери равны нулю.

Экономический смысл 1-й теоремы двойственности можно интерпретировать и так: предприятию безразлично, производить ли продукцию по оптимальному плану  $X$  и получить максимальную прибыль либо продать ресурсы по оптимальным ценам  $Y$  и возместить от продажи равные ей минимальные затраты на ресурсы.

## Вторая теорема двойственности (теорема о дополняющей нежесткости)

Пусть  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – допустимое решение прямой задачи (13.9) - (13.11), а  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  – допустимое решение двойственной задачи (13.12) – (13.14). Для того, чтобы они стали оптимальными решениями соответственно задач (13.9) – (13.11) и (13.12) – (13.14), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$Y_i \cdot (\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j - b_i) = 0, \quad (13.15)$$

$$X_j \cdot (\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot y_i - c_j) = 0. \quad (13.16)$$

Данные условия позволяют, зная оптимальное решение одной из взаимно двойственных задач, найти оптимальное решение другой задачи.

Из 2-й теоремы двойственности следуют требования на оптимальную производственную программу  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и оптимальный вектор оценок  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ :

если  $Y_i > 0$ , то  $\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i, i = 1, 2, \dots, m;$   
 $\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j < b_i$ , то  $Y_i = 0, i = 1, 2, \dots, m;$  (13.17)

$X_j > 0$ , то  $\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot y_i = c_j, j = 1, 2, \dots, n;$   
 $\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot y_i > c_j$ , то  $X_j = 0, j = 1, 2, \dots, n.$  (13.18)

Условия (13.17) можно интерпретировать так: если оценка  $Y_i$  единицы ресурса  $i$ -го вида положительна, то при оптимальной производственной программе этот ресурс используется полностью, если же ресурс используется не полностью, то его оценка равна нулю. Из условия (13.18) следует, что если  $j$ -й вид продукции вошел в оптимальный план, то он в оптимальных оценках неубыточен, если же  $j$ -й вид продукции убыточен, то он не войдет в план, не будет выпускаться.

## Теорема об оценках

Значения переменных  $Y_i$  в оптимальном решении двойственной задачи представляют собой оценки влияния свободных членов  $b_i$  системы ограничений-неравенств прямой задачи на величину

$$\Delta f(x) = \Delta b_i \cdot y_i. \quad (13.19)$$

## Двойственный симплекс-метод

Рассмотрим задачу вида (13.12) - (13.14).

Приведем задачу к каноническому виду. Коэффициенты целевой функции умножим на  $(-1)$  и тогда новая целевая функция  $g'$  устремится к максимуму. В каждом неравенстве системы ограничений умножим обе части на  $(-1)$  и изменим знак неравенства на противоположный:

$$g'_{\max} = -b_1 \cdot y_1 - b_2 \cdot y_2 - b_3 \cdot y_3 - \dots - b_m \cdot y_m \quad (13.20)$$



$$\begin{cases} -a_{11}y_1 - a_{12}y_2 - \dots - a_{1m}y_m \leq -c_1, \\ -a_{21}y_1 - a_{22}y_2 - \dots - a_{2m}y_m \leq -c_2, \\ \dots \\ -a_{n1}y_1 - a_{n2}y_2 - \dots - a_{nm}y_m \leq -c_n, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_m \geq 0. \end{cases} \quad (13.21)$$

Далее, поскольку неравенства имеют знак “ $\leq$ ”, прибавим в левой части каждого неравенства новую переменную  $y_i$ ,  $i = \overline{m+1, m+n}$ .

$$\begin{cases} -a_{11}y_1 - a_{12}y_2 - \dots - a_{1m}y_m + y_{m+1} = -c_1, \\ -a_{21}y_1 - a_{22}y_2 - \dots - a_{2m}y_m + y_{m+2} = -c_2, \\ \dots \\ -a_{n1}y_1 - a_{n2}y_2 - \dots - a_{nm}y_m + y_{m+n} = -c_n, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_m \geq 0, y_{m+1} \geq 0, \dots, y_{m+n} \geq 0. \end{cases} \quad (13.22)$$

Полученную задачу решим с помощью двойственного симплекс-метода.

**Пример.** Составим двойственную задачу к исходной:

$$\begin{aligned} f = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max & & g = 15y_1 + 7y_2 + 20y_3 \rightarrow \min. \\ \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 15, \\ x_1 + 3x_3 \leq 7, \\ -2x_1 + 8x_2 \leq 20. \end{cases} & & \begin{cases} 3y_1 + y_2 - 2y_3 \geq 5, \\ 3y_1 + 0y_2 + 8y_3 \geq -2, \\ -1y_1 + 3y_2 + 0y_3 \geq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Приведем задачу к каноническому виду.

Коэффициенты целевой функции умножим на  $-1$ , чтобы целевая функция максимизировалась.

$$g' = -15y_1 - 7y_2 - 20y_3 \rightarrow \max.$$

В системе ограничений произведем такие же преобразования:

$$\begin{cases} -3y_1 - y_2 + 2y_3 \leq -5, \\ -3y_1 - 0y_2 - 8y_3 \leq 2, \\ y_1 - 3y_2 - 0y_3 \leq -3. \end{cases}$$

Прибавим в правой части неравенств новые переменные для того, чтобы в системе ограничений получились равенства:

$$\begin{cases} -3y_1 - y_2 + 2y_3 + y_4 = -5, \\ -3y_1 - 8y_3 + y_5 = 2, \\ y_1 - 3y_2 + y_6 = -3. \end{cases}$$

Теперь, когда задача приведена к каноническому виду, составим симплекс таблицу 13.1.

Таблица 13.1

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		-15	-7	-20	0	0	0	
		$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	
0	$y_4$	-3	-1	2	1	0	0	-5
0	$y_5$	-3	0	-8	0	1	0	2
0	$y_6$	1	-3	0	0	0	1	-3
<i>d</i> -строка		15	7	20	0	0	0	$g'=0$

Базисные переменные:  $y_4, y_5, y_6$ .

Свободные переменные:  $y_1, y_2, y_3$ .

Начальное решение:  $Y_0 = \{y_1=0, y_2=0, y_3=0, y_4=-5, y_5=2, y_6=-3\}$ .

Проверим решение на оптимальность.

Среди свободных членов есть отрицательные числа, значит решение не оптимально. Выбираем максимальное по абсолютной величине отрицательное число из столбца свободных членов:

$$\max\{|-5|, |-3|\} = 5.$$

Выбранная цифра 5 принадлежит первой строке, значит первая строка становится разрешающей и элемент  $y_4$  выйдет из базиса.

Таблица 13.2

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		-15	-7	-20	0	0	0	
		$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	
0	$y_4$	-3	-1	2	1	0	0	-5
0	$y_5$	-3	0	-8	0	1	0	2
0	$y_6$	1	-3	0	0	0	1	-3
<i>d</i> -строка		15	7	20	0	0	0	$g'=0$

Вычислим отношения чисел *d*-строки к соответствующим элементам разрешающей строки и выберем среди них минимальное по абсолютной величине:

$$\min\left\{\left|\frac{15}{-3}\right|, \left|\frac{7}{-1}\right|, \frac{20}{2}, \frac{0}{1}, \frac{0}{0}, \frac{0}{0}\right\} = \min\{|-5|, |-7|, \infty, \infty, \infty, \infty\} = 5.$$

Данное число стоит в первом столбце, который теперь будет разрешающим и, значит, в базис будет вводиться переменная  $y_1$ , стоящая в первом столбце.

Таблица 13.3

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		-15	-7	-20	0	0	0	
		$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	
0	$y_4$	-3	-1	2	1	0	0	-5
0	$y_5$	-3	0	-8	0	1	0	2
0	$y_6$	1	-3	0	0	0	1	-3
<i>d</i> -строка		15	7	20	0	0	0	$g'=0$

Разрешающей будет переменная, стоящая на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца, т.е. элемент  $a_{11} = -3$ .

Перейдем к новой симплекс-таблице, организовав пересчет таким образом, чтобы разрешающий элемент стал единицей, а остальные элементы в разрешающем столбце стали нулями.

Для этого разрешающую строку разделим на разрешающий элемент  $a_{11} = -3$ .

Таблица 13.4

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		-15	-7	-20	0	0	0	
		$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	
0	$y_4$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{5}{3}$
0	$y_5$	-3	0	-8	0	1	0	2
0	$y_6$	1	-3	0	0	0	1	-3
<i>d</i> -строка		15	7	20	0	0	0	$g'=0$

Далее во второй и третьей строке разрешающего столбца вместо  $-3$  и  $1$  делаем нули. Для этого новую разрешающую строку умножим на  $3$  и прибавим ко второй строке.

Таблица 13.5

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		-15	-7	-20	0	0	0	
		$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	
0	$y_4$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{5}{3}$
0	$y_5$	0	1	-10	-1	1	0	7
0	$y_6$	1	-3	0	0	0	1	-3
<i>d</i> -строка		15	7	20	0	0	0	$g'=0$

Затем умножим новую разрешающую строку на  $-1$  и прибавим к третьей. При этом разрешающая строка больше свой вид на данном этапе не меняет.

Таблица 13.6

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		-15	-7	-20	0	0	0	
		$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	
0	$y_4$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{5}{3}$
0	$y_5$	0	1	-10	-1	1	0	7
0	$y_6$	0	$-\frac{10}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{14}{3}$
<i>d</i> -строка		15	7	20	0	0	0	$g'=0$

Теперь в списке базисных переменных вместо  $y_4$  появляется  $y_1$  и меняются числа в последней строке.

Таблица 13.7

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		-15	-7	-20	0	0	0	
		$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	
-15	$y_1$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{5}{3}$
0	$y_5$	0	1	-10	-1	1	0	7
0	$y_6$	0	$-\frac{10}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{14}{3}$
<i>d</i> -строка		0	2	30	5	0	0	$g'=-25$

Проверяем полученное решение  $Y_1 = \{y_1 = \frac{5}{3}, y_2 = 0, y_3 = 0, y_4 = 0, y_5 = 7, y_6 = -\frac{14}{3}\}$  на оптимальность. В столбце свободных членов есть отрицательное число  $-\frac{14}{3}$ , значит найденное решение не оптимально и его можно улучшить.

Определяем среди отрицательных элементов столбца свободных членов максимальный по абсолютной величине. Отрицательное число одно, значит третья строка, которой оно принадлежит, и станет разрешающей. Из базиса выйдет переменная  $y_6$ , находящаяся в этой строке.

Таблица 13.8

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		-15	-7	-20	0	0	0	
		$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	
-15	$y_1$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{5}{3}$
0	$y_5$	0	1	-10	-1	1	0	7
0	$y_6$	0	$-\frac{10}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{14}{3}$
<i>d</i> -строка		0	2	30	5	0	0	$g'=-25$

Теперь для того, чтобы определить разрешающий столбец и элемент, который войдет в список базисных переменных, вычислим отношения чисел, стоящих в  $d$ -строке, к соответствующим элементам, стоящим в разрешающей строке, и выберем среди отношений минимальное по абсолютной величине:

$$\min \left\{ \frac{0}{0}, \left| \frac{2}{-10/3} \right|, \frac{30}{2/3}, \frac{5}{1/3}, \frac{0}{0}, \frac{0}{1} \right\} = \left\{ \infty, \frac{3}{5}, \infty, \infty, \infty, \infty \right\} = 0,6.$$

Искомое отношение принадлежит второму столбцу, значит именно этот столбец становится разрешающим и в список базисных переменных войдет  $y_2$ , принадлежащая этому столбцу.

Таблица 13.9

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		-15	-7	-20	0	0	0	
		$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	
-15	$y_1$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{5}{3}$
0	$y_5$	0	1	-10	-1	1	0	7
0	$y_6$	0	$-\frac{10}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{14}{3}$
$d$ -строка		0	2	30	5	0	0	$g' = -25$

Разрешающий элемент  $-\frac{10}{3}$ , стоящий на пересечении разрешающих столбца и строки.

Перейдем к новой симплекс-таблице. Для этого организуем пересчет таким образом, чтобы разрешающий элемент стал единицей, а остальные элементы в разрешающем столбце стали нулями.

Для этого разрешающую строку разделим на разрешающий элемент  $-\frac{10}{3}$ .

Таблица 13.10

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		-15	-7	-20	0	0	0	
		$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	
-15	$y_1$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{5}{3}$
0	$y_5$	0	1	-10	-1	1	0	7
0	$y_6$	0	1	-0,2	-0,1	0	-0,3	1,4
$d$ -строка		0	2	30	5	0	0	$g' = -25$

Далее умножим разрешающую строку на  $-1$  и прибавим ко второй строке для того, чтобы элемент второй строки, стоящий в разрешающем столбце, стал нулем.

Таблица 13.11

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		-15	-7	-20	0	0	0	
		$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	
-15	$y_1$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{5}{3}$
0	$y_5$	0	0	-9,8	-0,9	1	0,3	5,6
0	$y_6$	0	1	-0,2	-0,1	0	-0,3	1,4
<i>d</i> -строка		0	2	30	5	0	0	$g' = -25$

Затем умножим разрешающую строку на  $-\frac{1}{3}$  и прибавим к первой строке, в результате чего элемент разрешающего столбца, стоящий в первой строке, станет нулем.

Таблица 13.12

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		-15	-7	-20	0	0	0	
		$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	
-15	$y_1$	1	0	-0,6	-0,3	0	0,1	1,2
0	$y_5$	0	0	-9,8	-0,9	1	0,3	5,6
0	$y_6$	0	1	-0,2	-0,1	0	-0,3	1,4
<i>d</i> -строка		0	2	30	5	0	0	$g' = -25$

Теперь в список базисных переменных вошла  $y_2$  вместо  $y_6$  и изменились оценки *d*-строки.

Таблица 13.13

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		-15	-7	-20	0	0	0	
		$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	
-15	$y_1$	1	0	-0,6	-0,3	0	0,1	1,2
0	$y_5$	0	0	-9,8	-0,9	1	0,3	5,6
-7	$y_2$	0	1	-0,2	-0,1	0	-0,3	1,4
<i>d</i> -строка		0	0	30,4	5,2	0	0,6	$g' = -27,8$

Полученное решение  $Y_2 = \{y_1=1,2; y_2=1,4; y_3=0; y_4=0; y_5=5,6; y_6=0\}$  оптимально, так как в столбце свободных членов нет отрицательных чисел.

Задача решена.

Таким образом, целевая функция  $g$  достигает минимального значения 27,8 при следующих значениях переменных:  $y_1=1,2; y_2=1,4; y_3=0$ .

Обратите внимание, что экстремальные значения целевых функций прямой и двойственной задачи равны.

## 14. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5

### Двойственность в задачах линейного программирования

#### 1. Цель занятия:

**Образовательная** – научиться строить экономико-математическую модель двойственной задачи.

**Развивающая** – способствовать развитию компетенций:

#### **Общекультурных:**

ОК -1 – владеет культурой мышления, способен к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения;

ОК - 6 – способен логически верно, аргументированно и ясно строить устную и письменную речь.

#### **Профессиональных:**

ПК -19 – использовать методы ЛП, в частности двойственный симплекс-метод, в профессиональной деятельности для теоретического и экспериментального исследования.

#### 2. Основные теоретические сведения:

- построение экономико-математических моделей двойственных задач;
- анализ полученного оптимального решения исходной задачи с помощью двойственных оценок;
- интерпретация двойственной задачи.

**Задача 1.** Фабрика имеет в своем распоряжении определенное количество ресурсов: рабочую силу, деньги, сырье, оборудование, производственные площади и т.п. Допустим, например, ресурсы трех видов: рабочая сила, сырье и оборудование – имеются в количестве соответственно 80 (чел./дней), 480 (кг) и 130 (станков/ч). Фабрика может выпускать ковры четырех видов. Информация о количестве единиц каждого ресурса, необходимых для производства одного ковра каждого вида, и доходах, получаемых предприятием от единицы каждого вида товаров, приведена в табл. 14.1.

Требуется найти такой план выпуска продукции, при котором будет максимальной общая стоимость продукции.

Таблица 14.1

Ресурсы	Нормы расхода ресурсов на единицу изделия				Наличие ресурсов
	ковёр «Лужайка»	ковёр «Силуэт»	ковёр «Детский»	ковёр «Дымка»	
Труд	7	2	2	6	80
Сырье	5	8	4	3	480
Оборудование	2	4	1	8	130
Цена (тыс.руб.)	3	4	3	1	

Обозначим через  $x_1, x_2, x_3, x_4$  – количество ковров каждого типа.

*Экономико-математическая модель задачи.*

*Целевая функция* - это выражение, которое необходимо максимизировать:

$$f_{\max} = 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4. \quad (14.1)$$

*Ограничения по ресурсам:*

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 80, \\ 5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 480, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 8x_4 \leq 130 \end{cases} \quad (14.2)$$

$$\text{и } x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \quad (14.3)$$

Сформулируем *экономико-математическую модель двойственной задачи* к задаче **1**.

Количество неизвестных в двойственной задаче равно числу функциональных ограничений в исходной задаче. В исходной задаче три ограничения: по труду, сырью и оборудованию. Следовательно, в двойственной задаче – три неизвестных:

$y_1$  – двойственная оценка ресурса «труд», или «цена» труда;

$y_2$  – двойственная оценка ресурса «сырье», или «цена» сырья;

$y_3$  -- двойственная оценка ресурса «оборудование», или «цена» оборудования.

*Целевая функция* двойственной задачи формулируется на минимум. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены в системе ограничений исходной задачи:

$$g_{\min} = 80 \cdot y_1 + 480 \cdot y_2 + 130 \cdot y_3. \quad (14.4)$$

Необходимо найти такие «цены» на ресурсы  $Y_i$ , чтобы общая стоимость используемых ресурсов была минимальной.

*Ограничения.* Число ограничений в системе двойственной задачи равно числу переменных в исходной задаче. В исходной задаче – четыре переменных, следовательно в двойственной задаче – четыре ограничения. Правыми частями в ограничениях двойственной задачи являются коэффициенты при неизвестных в целевой функции исходной задачи. Левая часть ограничения определяет стоимость ресурсов, затраченных на производство единицы продукции. Каждое ограничение соответствует определенному виду продукции.



$$\begin{cases} 7y_1 + 5y_2 + 2y_3 \geq 3, \\ 2y_1 + 8y_2 + 4y_3 \geq 4, \\ 2y_1 + 4y_2 + 1y_3 \geq 3, \\ 6y_1 + 3y_2 + 8y_3 \geq 1 \end{cases} \quad (14.5)$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0. \quad (14.6)$$

Решение двойственной задачи можно найти в отчете *Поиска решений* - отчете по устойчивости. Теневые цены ресурсов труд, сырье и оборудование соответственно равны  $4/3$ ,  $0$ ,  $1/3$ , или в десятичных дробях:  $1,3333$ ;  $0$ ;  $0,3333$ .

Проведем анализ полученного оптимального решения исходной задачи с помощью двойственных оценок.

1. Анализ использования ресурсов в оптимальном плане выполняется с помощью соотношений 2-й теоремы двойственности:

если  $Y_i > 0$ , то  $\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;

если  $\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j < b_i$ , то  $Y_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Ресурсы «труд» и «оборудование» имеют отличные от нуля оценки  $4/3$  и  $1/3$  – эти ресурсы полностью используются в оптимальном плане, являются дефицитными, сдерживающими рост целевой функции. Правые части этих ограничений равны левым частям:

$$7x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 80,$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 8x_4 \leq 130.$$

$$7 \cdot 0 + 2 \cdot 30 + 2 \cdot 10 + 6 \cdot 0 = \mathbf{80} = \mathbf{80},$$

$$2 \cdot 0 + 4 \cdot 30 + 1 \cdot 10 + 8 \cdot 0 = \mathbf{130} = \mathbf{130}.$$

Ресурс «сырье» используется не полностью ( $280 < 480$ ), поэтому имеет нулевую двойственную оценку  $Y_2 = 0$ .

$$5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 480,$$

$$5 \cdot 0 + 8 \cdot 30 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 0 = \mathbf{280} < \mathbf{480}.$$

Этот ресурс не влияет на план выпуска продукции. Общая стоимость используемых ресурсов при выпуске 30 ковров второго вида и 10 ковров третьего вида составит 150 тыс. руб.

$$g_{\min} = 80 \cdot y_1 + 480 \cdot y_2 + 130 \cdot y_3 = 80 \cdot \frac{4}{3} + 480 \cdot 0 + 130 \cdot \frac{1}{3} =$$

$$= 150 \text{ тыс. руб.}$$

Экономическое истолкование оценок есть интерпретация их общих экономико-математических свойств применительно к конкретному содержанию задачи. По условию не использованный полностью в оптимальном плане ресурс получает нулевую оценку. Нулевая оценка ресурса свидетельствует о его недефицитности. Ресурс недефицитен не из-за его неограниченных запа-

сов (они ограничены величиной  $b_i$ ), а из-за невозможности его полного использования в оптимальном плане. Так как суммарный расход недефицитного ресурса меньше его общего количества, то план производства им не лимитируется. Данный ресурс не препятствует и дальше максимизировать целевую функцию  $f$ .

### 3. Вопросы и упражнения для самоконтроля

1. Сформулируйте правило составления двойственной задачи ЛП по отношению к исходной.

2. Как связаны между собой экстремальные значения целевых функций двойственной и исходной задач?

3. Рассмотрим экономическую интерпретацию двойственной задачи на примере задачи оптимального использования ресурсов.

### 4. Задание контрольной работы

Дана математическая модель задачи ЛП:  $F = \frac{2}{k} x_1 + k x_2 \rightarrow \min$  ;

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 - kx_2 \geq 1, \\ kx_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Здесь  $k = 1 + \frac{N}{n+1}$ ;

$N$  – последняя цифра номера группы, в которой учится студент.

$n$  – порядковый номер студента в списке группы.

Найти решение задачи симплексным методом.

Свести исходную задачу к двойственной и решить двойственную задачу симплекс-методом. Сравнить результаты и сделать выводы.

## 15. ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

### Целочисленное линейное программирование

Математическая модель задачи целочисленного (задачи связанные с неделимыми объектами) линейного программирования имеет вид:

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max (\min) \quad (15.1)$$

$$\left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = \overline{1, m} \right. \quad (15.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1, n} \quad (15.3)$$

$$x_j \in Z \quad j = \overline{1, n} \quad (15.4)$$

Здесь  $Z$  – множество целых чисел. В отличие от общей задачи линейного программирования оптимальный план не обязательно будет в вершине многогранника (многоугольной области) планов.

Задачи целочисленного линейного программирования решаются при помощи различных методов.

Рассмотрим метод Гомори (метод отсечений) и метод ветвей и границ.

#### Метод Гомори (метод отсечений)

Общая идея его состоит в следующем. Вначале симплекс-методом решается задача (15.1) — (15.3), т.е. без условия целочисленности переменных. Если полученный оптимальный план выражается целыми числами, то он и будет решением всей задачи (15.1) — (15.4). Если же среди координат найденного оптимального плана имеются нецелые числа, то к ограничениям задачи присоединяется дополнительное линейное ограничение, формируемое по специальному правилу, которому не удовлетворяет найденный нецелочисленный оптимальный план, но удовлетворяет любой целочисленный план. Говорят, что такое дополнительное ограничение отсекает найденный нецелочисленный оптимальный план. Это дополнительное ограничение называют *правильным отсечением*. Полученную расширенную задачу вновь решают симплекс-методом. Если новый оптимальный план выражается целыми числами, то задача (15.1) — (15.4) решена. В противном случае строится следующая расширенная задача и т. д.

Геометрически каждому дополнительному ограничению соответствует гиперплоскость, отсекающая от многогранника планов некоторую его часть вместе с нецелочисленной оптимальной вершиной. Через конечное число отсечений искомая целочисленная точка окажется сначала на грани, а затем станет вершиной неоднократно усеченного многогранника планов. На рис. 15.1 приводится геометрическая иллюстрация для случая  $n = 2$ . На нем изображена область планов исходной задачи и отмечена оптимальная нецелочисленная вершина  $\bar{x}_{\text{нц}}^1$ . Ближайшая к ней точка области планов с целыми

координатами обозначена  $\bar{x}_c^*$ . На рисунке показаны три прямые  $l_1, l_2$  и  $l_3$ , соответствующие трем дополнительным линейным ограничениям. Каждая из этих прямых отсекает часть многоугольника планов вместе с нецелочисленной вершиной. Так, после отсечения прямой  $l_1$  части многоугольника планов в усеченной области оптимальной становится вершина  $\bar{x}_{нц}^2$ , после второго отсечения прямой  $l_2$  оптимальной будет вершина  $\bar{x}_{нц}^3$  и, наконец, после третьего отсечения прямой  $l_3$  находится оптимальная целочисленная точка  $\bar{x}_c^*$ .

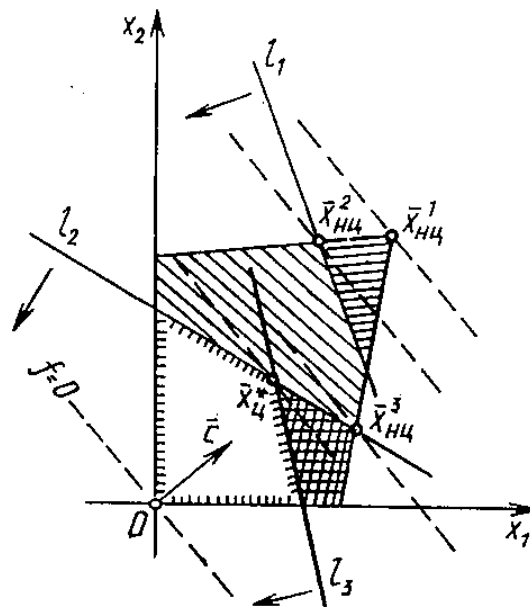


Рис. 15.1 Алгоритм метода Гомори

1. Симплекс-методом находят оптимальный план задачи (15.1) – (15.3).

$$X = \{x_1 = b_1, x_2 = b_2, \dots, x_i = b_i, \dots, x_m = b_m, x_{m+1} = 0, \dots, x_n = 0\}.$$

Если все  $b_i$  целые, то план является оптимальным и для исходной задачи (15.1) – (15.4). Если задача (15.1) – (15.3) неразрешима, то и задача (15.1) – (15.4) неразрешима. Если среди  $b_i$  есть нецелые, то переходят к п. 2 алгоритма.

2. Среди нецелых  $b_i$  выбирают, например, тот, который имеет наибольшую дробную часть.

Дробной частью  $\{a\}$  числа  $a$  называют разность между этим числом и его целой частью  $[a]$ , т.е. наибольшим целым, не превосходящим  $a$ . Например,

$$\text{если } a = 3\frac{2}{5}, \text{ то } \{3\frac{2}{5}\} = 3\frac{2}{5} - [3\frac{2}{5}] = 3\frac{2}{5} - 3 = \frac{2}{5};$$

$$\text{если } a = -5,7, \text{ то } \{-5,7\} = -5,7 - [-5,7] = -5,7 - (-6) = 0,3.$$

В примере с отрицательным числом целая часть равна  $-6$ , так как целая часть – это ближайшее меньшее целое число, т.е. происходит округление до целого в меньшую сторону.

Новое ограничение (сечение) составляется на основе строки, которой соответствует дробное число  $b_i$ , и будет иметь вид:

$$\sum_{i=m+1}^n \alpha_{ij} x_j \geq \beta_i. \quad (15.5)$$

Здесь  $\alpha_{ij}$  – это дробная часть коэффициентов  $a_{ij}$ :  $\alpha_{ij} = \{a_{ij}\}$ ,  $j = \overline{m+1, n}$ ;  
 $\beta_i$  – это дробная часть числа  $b_i$ :  $\beta_i = \{b_i\}$ .

Для того, чтобы привести вновь составленную систему ограничений к каноническому виду, требуется преобразовать неравенство в равенство. Введем фиктивную переменную  $x_{n+1}$ :

$$\alpha_{i m+1} x_{m+1} + \alpha_{i m+2} x_{m+2} + \dots + \alpha_{i n} x_n - x_{n+1} = \beta_i,$$

$$x_{n+1} \geq 0.$$

3. Составленную расширенную задачу вновь решают симплекс-методом. Если оптимальный план будет целочисленным, то он и станет решением исходной задачи (15.1) — (15.4). В противном случае возвращаются к п. 2 алгоритма.

Если задача разрешима в целых числах, то через конечное число итераций оптимальный целочисленный план будет найден.

**Пример 1.**

Решить задачу:

$$f = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$$

После выполнения этапа 1 при решении задачи симплекс-методом получилась таблица 15.1.

Таблица 15.1

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных				Свободные члены
		3	2	0	0	
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
0	$x_3$	5	2	1	0	20
0	$x_4$	1	1	0	1	5
$d$		-3	-2	0	0	$f=0$
3	$x_1$	1	0,4	0,2	0	4
0	$x_4$	0	0,6	-0,2	1	1
$d$		0	-0,8	0,6	0	$f=12$
3	$x_1$	1	0	$1/3$	$-2/3$	$10/3$
2	$x_2$	0	1	$-1/3$	$5/3$	$5/3$
$d$		0	0	$1/3$	$4/3$	$f=40/3$

В результате решения получился следующий ответ:  $x_1 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ ,  $x_2 = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$ ,  $f = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$ . Как видно, в ответе присутствуют два дробных числа:  $3\frac{1}{3}$  и  $1\frac{2}{3}$ . Применим метод Гомори для получения целочисленного решения.

Во-первых, выберем число с максимальной дробной частью:

$$\{3\frac{1}{3}\} = \frac{1}{3} \text{ и } \{1\frac{2}{3}\} = \{\frac{2}{3}\}, \max\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\} = \frac{2}{3}.$$

Это означает, что сечение будет составлено на основе строки, соответствующей числу  $1\frac{2}{3}$ .

Во-вторых, составим ограничение. Для этого выпишем линейную комбинацию чисел из строки, соответствующей числу  $1\frac{2}{3}$ , и переменных  $x_1, x_2, x_3$  и  $x_4$ :

$$0x_1 + 1x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4 = \frac{5}{3}.$$

Воспользуемся формулой (10.5) и получим:

$$\frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 \geq \frac{2}{3}.$$

Упростим полученное отсечение, сократив на множитель  $\frac{2}{3}$ :

$$x_3 + x_4 \geq 1.$$

Приведем новое ограничение к каноническому виду:

$$-x_3 - x_4 \leq -1,$$

$$-x_3 - x_4 + x_5 = -1, x_5 \geq 0.$$

Добавим новое сечение к системе ограничений задачи:

$$f = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 20, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 5, \\ -x_3 - x_4 + x_5 = -1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$$

Решив новую задачу симплекс-методом, получим целочисленное решение:  $x_1=3; x_2=2; f=13$ .

### Метод «ветвей и границ»

Метод «ветвей и границ» – это метод направленного перебора множества вариантов решений задачи.

## Алгоритм метода «ветвей и границ»

1. Строятся вершины первого уровня. Для каждой вершины подсчитывается оценка нижней (верхней) границы. Ветвится вершина, которой соответствует лучшая (минимальная или максимальная) оценка.

2. Для всех вершин  $i$ -го уровня ( $i \geq 2$ ) подсчитывается оценка. Ветвится та из висячих вершин уровня  $i, i-1, i-2, \dots, 1$ , которой соответствует лучшая (минимальная или максимальная) оценка.

3. Действие п.2 повторяется до тех пор, пока не будет получено точное решение на последнем уровне, дающее значение целевой функции  $f^*$ .

Если это значение  $f^*$  не хуже оценок оставшихся висячих вершин, то найдено оптимальное решение. Если это значение  $f^*$  строго лучше, то оптимальное решение единственно.

Если значение целевой функции  $f^*$  для последнего уровня не лучше значения оценок оставшихся висячих вершин, то переходят к п.2.

Рассмотрим задачу целочисленного линейного программирования (15.1) – (15.4). Пусть в результате решения задачи получили ответ

$$X = \{x_1=b_1, x_2=b_2, \dots, x_i=b_i, \dots, x_m=b_m, x_{m+1}=0, \dots, x_n=0\},$$

где  $b_i$  – дробное число.

Введем два дополнительных условия:

$$x_i \leq z_i \text{ и } x_i \geq z_i + 1, \text{ где } [x_i] = z_i.$$

Два последних неравенства разбивают область допустимых решений для переменной  $x_i$  на две подобласти. При этом из рассмотрения исключается та подобласть, в которой не содержатся целочисленные значения координаты  $x_i$ .



Рис 15.2. Схематическое изображение решения метода «ветвей и границ»

### **Пример 2.**

Рассмотрим задачу из предыдущего примера, решенную методом Гомори:

$$f = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$$

В результате решения получился следующий ответ:  $x_1 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ ,  $x_2 = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$ ,  $f = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$ . Как и в методе Гомори, требуется выбрать число с максимальной дробной частью. Ранее было показано, что это  $x_2$ . Значит ветвление будет осуществляться по переменной  $x_2$ . Для этого определим целую часть числа  $\frac{5}{3}$ :  $\left[ \frac{5}{3} \right] = \left[ 1\frac{2}{3} \right] = 1$ . Тогда

$$x_2 \leq 1 \text{ и } x_2 \geq 2.$$

На основе ветвления получим две новые задачи:

Задача 1

$$\begin{aligned} f &= 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, \\ 0 \leq x_2 \leq 1, \\ x_1, x_2 \in Z. \end{cases} \end{aligned}$$

Задача 2

$$\begin{aligned} f &= 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 2, \\ x_1, x_2 \in Z. \end{cases} \end{aligned}$$

В результате решения задач 1 и 2 получим следующие ответы:

Задача 1

$$x_1 = 3,6, x_2 = 1, f_1 = 12,8.$$

Задача 2

$$x_1 = 3, x_2 = 2, f_2 = 13.$$

Изобразим схематически ветвление в решенной задаче.



Рис 15.3. Ветвление задачи

Таким образом, с помощью двух различных методов получили одно решение задачи целочисленного программирования.



## 16. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №6

### Решение задач целочисленного линейного программирования

#### **1. Цель занятия:**

**Образовательная** – освоить метод Гомори и метод «ветвей и границ» решения задач целочисленного линейного программирования.

**Развивающая** – способствовать развитию компетенций:

#### **Общекультурных:**

ОК -1 – владеет культурой мышления, способен к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения;

ОК - 6 – способен логически верно, аргументированно и ясно строить устную и письменную речь.

#### **Профессиональных:**

ПК -19 – использовать методы ЛП, в частности метод Гомори и «ветвей и границ», в профессиональной деятельности для теоретического и экспериментального исследования.

#### **2. Основные теоретические сведения:**

- особенности применения методов Гомори и «ветвей и границ» для решения задач целочисленного линейного программирования;
- алгоритмы данных методов для решения задач целочисленного линейного программирования.

#### **3. Вопросы и упражнения для самопроверки**

1. Какие экономические задачи относятся к задачам целочисленного программирования?
2. Сформулируйте задачу целочисленного программирования.
3. В чем состоит метод Гомори?
4. Как составить дополнительное ограничение, если компоненты оптимального плана задачи являются дробными?
5. В каком случае поставленная задача не имеет целочисленного решения?
6. Какой геометрический смысл имеет введение дополнительного ограничения?
7. Сформулируйте задачу оптимального раскроя материалов и составьте ее математическую модель.
8. Упражнения:
  - 8.1. Найти оптимальное целочисленное решение задачи

$$f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 25, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 15, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad x_1, x_2, x_3 \in Z. \end{cases}$$

8.2. В обработку поступила партия из 150 досок длиной 7,5 м каждая для изготовления комплектов из четырех деталей. Комплект состоит из одной детали длиной 3 м, двух деталей размером по 2 м и одной детали размером 1,5 м. Как распилить все доски, чтобы получить возможно большее число комплектов?

*Указание.* Сначала составить таблицу возможных способов распила одной доски на детали заданных размеров.

## 17. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

### Постановка транспортной задачи. Транспортная таблица

Рассмотрим следующую задачу, называемую *транспортной задачей*. Имеется  $m$  поставщиков  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , у которых сосредоточены запасы одного и того же груза в количестве  $a_1, a_2, \dots, a_m$  единиц соответственно. Этот груз нужно доставить  $n$  потребителям  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , заказавшим  $b_1, b_2, \dots, b_n$  единиц этого груза соответственно. Известны также все *тарифы перевозок* груза  $c_{ij}$  (стоимость перевозок единицы груза) от поставщика  $A_i$  к потребителю  $B_j$ . Требуется составить такой план перевозок, при котором общая стоимость всех перевозок была бы минимальной.

Условие транспортной задачи удобно записать в виде следующей транспортной таблицы 17.1.

Таблица 17.1

Заказы \ Запасы		$B_1$	$B_2$	...	$B_n$
		$b_1$	$b_2$	...	$b_n$
$A_1$	$a_1$	$c_{11}$	$c_{12}$	...	$c_{1n}$
$A_2$	$a_2$	$c_{21}$	$c_{22}$	...	$c_{2n}$
...	...	...	...	...	...
$A_m$	$a_m$	$c_{m1}$	$c_{m2}$	...	$c_{mn}$

Обозначим суммарный запас груза у всех поставщиков символом  $a$ , а суммарную потребность в грузе у всех потребителей – символом  $b$ . Тогда

$$a = \sum_{i=1}^m a_i, \tag{17.1}$$

$$b = \sum_{j=1}^n b_j. \tag{17.2}$$

- Транспортная задача называется *закрытой*, если  $a = b$ .

Если же  $a \neq b$ , то транспортная задача называется *открытой*.

Далее будет показано, что в случае *закрытой задачи* от поставщиков будут вывезены все запасы груза и все заявки потребителей будут удовлетворены.

В случае *открытой задачи* при  $a < b$  весь груз будет вывезен, однако будут недопоставки груза экономически невыгодным потребителям.

При  $a > b$ , наоборот, будут удовлетворены все потребители, но часть груза останется на складах экономически невыгодных поставщиков.

- Пусть  $x_{ij}$  ( $x_{ij} \geq 0$ ) — количество груза, отправляемого поставщиком  $A_i$  потребителю  $B_j$ . Тогда суммарные затраты  $z$  на перевозки будут вычисляться по формуле

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}. \quad (17.3)$$

- Матрица  $X$  с неотрицательными элементами  $x_{ij}$  называется *планом перевозок*.

- Функция  $z$  называется *целевой функцией*.

Математическая формулировка транспортной задачи заключается в нахождении плана перевозок  $X = \{x_{ij}\}$ , который удовлетворяет *системе ограничений*

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (17.4)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (17.5)$$

и доставляет минимум целевой функции  $z$ .

- План перевозок, реализующий минимум целевой функции  $z$ , называется *оптимальным*.

Смысл первой группы равенств в системе ограничений (17.4) состоит в том, что суммарное количество груза, отправленное всем потребителям каждым поставщиком, равно запасу груза у этого поставщика. Вторая группа равенств в системе ограничений (17.5) показывает, что суммарное количество груза, полученное каждым потребителем от всех поставщиков, равно заказу этого потребителя.

### **Сведение открытой транспортной задачи к закрытой**

Решение транспортной задачи начинается с выяснения вопроса о том, является ли задача открытой или закрытой.

Если задача является открытой, то необходимо провести *процедуру закрытия задачи*. С этой целью при  $a < b$  добавляем *фиктивного поставщика*  $A'_{m+1}$  с запасом груза  $a'_{m+1} = b - a$ . Если же  $a > b$ , то добавляем *фиктивного потребителя*  $B'_{n+1}$  с заказом груза  $b'_{n+1} = a - b$ .

В обоих случаях соответствующие фиктивным объектам тарифы перевозок  $c'_{ij}$  полагаем равными нулю. В результате суммарная стоимость перевозок  $z$  не изменяется.

## Первоначальный план перевозок

Транспортная задача относится к задачам линейного программирования, и ее можно было бы решить симплекс-методом. Но поскольку система ограничений транспортной задачи проще, чем система ограничений ОЗЛП, то это дает возможность вместо использования объемных симплекс-таблиц применить более удобный метод, который состоит из следующих этапов:

1. Составление первоначального плана перевозок;
2. Последовательные улучшения плана перевозок (перераспределение поставок) до тех пор, пока план перевозок не станет оптимальным.

Решение ОЗЛП начинается с нахождения опорного плана. Для транспортной задачи такой план всегда существует. Опишем два метода составления *опорного плана (первоначального плана перевозок)*. При этом ненулевые элементы  $x_{ij}$  плана перевозок будем записывать в соответствующие пустые клетки транспортной таблицы с исходными данными задачи, а символом  $(i, j)$  будем обозначать клетку таблицы, содержащую информацию о перевозках груза от поставщика  $A_i$  к потребителю  $B_j$ .

### Составление первоначального плана перевозок с помощью метода северо-западного угла

#### *Задача 1.*

Четыре предприятия данного экономического района для производства продукции используют три вида сырья. Потребности в сырье каждого из предприятий соответственно равны  $b_j$ ,  $j=1, 2, 3, 4$ . Сырье сосредоточено в трех местах его получения, а запасы соответственно равны  $a_i$ ,  $i=1, 2, 3$ . На каждое из предприятий сырье может завозиться из любого пункта его получения. Тарифы перевозок представлены в таблице. Составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Составление первоначального плана перевозок начнем с перевозки запасов поставщика  $A_1$ . Будем за счет его запасов максимально возможно удовлетворять заказы сначала потребителя  $B_1$ , затем  $B_2$  и так далее. Таким образом, мы будем заполнять таблицу, начиная с клетки  $(1,1)$ , и двигаться вправо по строке до тех пор, пока остаток запасов поставщика  $A_1$  не окажется меньше заказа очередного потребителя. Для выполнения этого заказа используем остатки запаса первого поставщика, а недостающую часть добавим из запасов поставщика  $A_2$ , то есть переместимся на следующую строку таблицы по столбцу, соответствующему указанному потребителю. Далее аналогичным образом распределим запасы поставщика  $A_2$ , затем  $A_3$  и так далее.

Проиллюстрируем это на следующем примере (табл. 17.2).

Таблица 17.2

Заказы \ Запасы		В <sub>1</sub>	В <sub>2</sub>	В <sub>3</sub>	В <sub>4</sub>
		100	40	80	60
А <sub>1</sub>	160	4 100	8 40	10 20	5 5
А <sub>2</sub>	30	4	6	2 30	3
А <sub>3</sub>	90	4	4	6 30	5 60

Распределяя запасы поставщика  $A_1$  сначала потребителю  $B_1$ , а затем  $B_2$ , получаем:  $x_{11} = 100$ ,  $x_{12} = 40$ . После этого у поставщика  $A_1$  остается еще 20 единиц груза, а потребителю  $B_3$  нужно 80 единиц. Удовлетворим спрос потребителя  $B_3$ , отправив ему 20 единиц груза, оставшихся у поставщика  $A_1$ , 30 единиц груза от поставщика  $A_2$  и 30 единиц груза от  $A_3$ . Следовательно

$$x_{13} = 20, x_{23} = 30 \text{ и } x_{33} = 30,$$

причем у поставщика  $A_3$  остается 60 последних единиц груза. Этот груз и отправим потребителю  $B_4$ . Таким образом,  $x_{34} = 60$ , все запасы груза вывезены и все потребители удовлетворены.

Теперь мы можем подсчитать общую стоимость всех перевозок по данному плану:

$$Z = 4 \cdot 100 + 8 \cdot 40 + 10 \cdot 20 + 2 \cdot 30 + 6 \cdot 30 + 5 \cdot 60 = 1460.$$

Изложенный метод северо-западного угла прост в реализации, однако трудно надеяться, что он даст экономичный первоначальный план, поскольку при распределении перевозок мы совершенно не учитывали их стоимость.

### Составление первоначального плана перевозок с помощью метода наименьшей стоимости

Построение плана начнем с клетки с наименьшим тарифом перевозок.

При наличии нескольких клеток с одинаковыми тарифами выберем любую из них. Пусть это будет клетка  $(i, j)$ . Запишем в эту клетку элемент  $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$ .

Если  $a_i < b_j$ , то запасы поставщика  $A_i$  исчерпаны, а потребителю  $B_j$  требуется еще  $b_j'' = b_j - a_i$  единиц груза. Поэтому, не принимая более во внимание  $i$ -ю строку, снова ищем клетку с наименьшей стоимостью перевозок и заполняем ее с учетом изменившихся потребностей.

В случае  $a_i > b_j$  из рассмотрения исключается  $j$ -й столбец, а запасы  $A_i$  полагаются равными  $a_i'' = a_i - b_j$ . Продолжаем этот процесс до тех пор, пока все запасы не будут исчерпаны, а все потребности удовлетворены.

Необходимо отметить, что при наличии в таблице клеток с одинаковыми тарифами планы, полученные с помощью этого метода, могут быть разными, однако они, несомненно, ближе к оптимальному плану, чем план, составленный по методу северо-западного угла.

Сформируем теперь первоначальный план по методу наименьшей стоимости и сравним результаты (табл. 17.3).

Поскольку наименьший тариф (число 2) стоит в клетке (2,3), то запишем в эту клетку элемент  $x_{23} = 30$ . Тогда  $b'_3 = 50$ , а 2-ю строку таблицы можно больше не учитывать.

Среди оставшихся клеток имеются три клетки с наименьшим тарифом перевозок, равным 4: (1,1); (3,1) и (3,2).

Выберем, например, клетку (1,1) и запишем в нее число  $x_{11} = 100$ . Получаем, что  $a''_1 = 60$ , а 1-й столбец таблицы больше не рассматриваем. Теперь наименьший тариф, равный 4, проставлен в клетке (3,2), поэтому  $x_{32} = 40$ ,  $b'_3 = 50$  и 2-й столбец больше не нужен.

Далее выбираем клетку (1,4) с тарифом 5 и пишем в нее  $x_{14} = 60$ . Исключив из рассмотрения сразу 1-ю строку и 4-й столбец (поскольку  $a''_1 = b_4 = 60$ ), переходим к последней клетке (3,3), в которую записываем перевозку  $x_{33} = 50$ .

Таблица 17.3

Заказы \ Запасы		В <sub>1</sub>	В <sub>2</sub>	В <sub>3</sub>	В <sub>4</sub>
		100	40	80	60
A <sub>1</sub>	160	4 100	8	10	5 60
A <sub>2</sub>	30	4	6	2 30	3
A <sub>3</sub>	90	4	4 40	6 50	5

## Проверка оптимальности плана и перераспределение поставок с помощью метода потенциалов

Для анализа полученных планов и их последующего улучшения удобно ввести дополнительные характеристики пунктов отправления и назначения, называемые *потенциалами*.

Покажем как нужно пользоваться методом потенциалов на примере первоначального плана, полученного выше по методу северо-западного угла.

Вначале проверим, не является ли этот план вырожденным.

Так как  $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$  и число базисных клеток в плане также равно 6, то план в пополнении не нуждается.

Найдем потенциалы по базисным клеткам таблицы с помощью формул  $u_i + v_j = c_{ij}$ , где  $i = 1, 2, 3, \dots, m$  и  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ , положив  $u_1 = 0$ ,

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4, \\ u_1 + v_2 = 8, \\ u_1 + v_3 = 10, \\ u_2 + v_3 = 2, \\ u_3 + v_3 = 6, \\ u_3 + v_4 = 5, \\ u_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0, \\ u_2 = -8, \\ u_3 = -4, \\ v_1 = 4, \\ v_2 = 8, \\ v_3 = 10, \\ v_4 = 9 \end{cases}$$

и занесем полученные значения в таблицу. Вычислим теперь разности  $\Delta c_{ij}$  для свободных клеток и также проставим эти данные в левых нижних углах соответствующих клеток. В итоге получим таблицу 17.4.

Таблица 17.4

Заказы \ Запасы		Заказы				$u$
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
		100	40	80	60	
$A_1$	160	4 100	8 40	10 20 ⊖	5 5 ⊕	$u_1 = 0$
$A_2$	30	4 8	6 6	2 30	3 2	$u_2 = -8$
$A_3$	90	4 4	4 0	6 30 ⊕	5 60 ⊖	$u_3 = -4$
	$v$	$v_1 = 4$	$v_2 = 8$	$v_3 = 10$	$v_4 = 9$	

Поскольку  $\Delta c_{14} = -4 < 0$ , то этот план не является оптимальным. Перераспределим груз по циклу, обозначенному в таблице 17.4 пунктиром, на величину  $\Delta x = \min(20, 60) = 20$ . Для этого в клетках со знаком «плюс»



увеличим поставки на 20 единиц, а клетках со знаком «минус» – на столько же их уменьшим. Для сохранения количества базисных клеток число 0 в клетке (1,3) не записываем, и она становится свободной.

Вычислив потенциалы и разности  $\Delta c_{ij}$  для нового плана, видим (табл. 17.5), что снова есть отрицательная разность  $\Delta c_{32} = -4$ .

Таблица 17.5.

Заказы \ Запасы		Заказы				$u$
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
		100	40	80	60	
$A_1$	160	100	40	10	5	$u_1=0$
		4	8	4	5	
		4	6	2	3	$u_2=-4$
$A_2$	30	4	2	30	2	
		4	4	6	5	$u_3=0$
$A_3$	90	0	40	50	40	
		4	4	6	5	
	$v$	$v_1=4$	$v_2=8$	$v_3=6$	$v_4=5$	

Поэтому придется еще раз улучшать план. С этой целью перераспределим груз по циклу, отмеченному в таблице 17.5 пунктиром, на величину  $\Delta x = \min(40,40) = 40$ . Так как в результате в цикле получаются две клетки с нулевыми перевозками: (1,2) и (3,4), то сделаем свободной клетку (1,2), поскольку ее тариф перевозок больше. После перераспределения груза по циклу вычислим все необходимые разности  $\Delta c_{ij}$ . Как видим, все  $\Delta c_{ij}$  неотрицательны, значит план оптимален (табл. 17.6).

Таблица 17.6

Заказы \ Запасы		Заказы				$u$
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
		100	40	80	60	
$A_1$	160	100	40	10	5	$u_1=0$
		4	8	4	5	
$A_2$	30	4	6	2	3	$u_2=-4$
		4	6	30	2	
$A_3$	90	0	40	50	5	$u_3=0$
		4	4	6	5	
	$v$	$v_1=4$	$v_2=4$	$v_3=6$	$v_4=5$	

## 18. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №7

### Решение задач целочисленного линейного программирования

#### **1. Цели занятия:**

**Образовательная** – формирование навыков решения ТЗ методом потенциалов на практическом занятии и с использованием табличного процессора MS Excel на лабораторной работе.

**Развивающая** – способствовать развитию компетенций:

#### ***Общекультурных:***

ОК -1 – владеет культурой мышления, способен к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения;

ОК - 6 – способен логически верно, аргументированно и ясно строить устную и письменную речь.

#### ***Профессиональных:***

ПК -19 – использовать методы ЛП, в частности метод потенциалов, в профессиональной деятельности для теоретического и экспериментального исследования.

#### **2. Основные теоретические сведения:**

- построение математической модели ТЗ, составление распределительной (транспортной) таблицы;
- построение первоначального плана перевозок с помощью метода северо-западного угла;
- построение первоначального плана перевозок с помощью метода наименьшей стоимости;
- использование метода потенциалов как одного из методов решения ТЗ;
- технология решения ТЗ в табличном процессоре Excel.

*Пример 1.* Транспортная задача задана следующей транспортной таблицей 18.1:

выяснить, является задача открытой или закрытой; составить первоначальный план перевозок с помощью метода северо-западного угла; составить первоначальный план перевозок с помощью метода наименьшей стоимости; с помощью метода потенциалов найти оптимальный план перевозок, обеспечивающий их минимальную стоимость; найти минимальную стоимость перевозок.

Таблица 18.1

Запасы \ Заказы		B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>
		20	25	30
A <sub>1</sub>	24	6	4	2
A <sub>2</sub>	28	3	5	4
A <sub>3</sub>	23	3	6	3

1. Выяснить, является задача открытой или закрытой:  
 $24+28+23=75$ .  $20+25+30=75$ . Модель закрытая.
2. Составить первоначальный план перевозок с помощью метода северо-западного угла (табл. 18.2).

Таблица 18.2

Запасы \ Заказы		B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>
		20	25	30
A <sub>1</sub>	24	6 20	4 4	2
A <sub>2</sub>	28	3	5 21	4 7
A <sub>3</sub>	23	3	6	3 23

$$z = 20 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 21,5 + 7 \cdot 4 + 23 \cdot 3 = 338.$$

3. Составить первоначальный план перевозок с помощью метода наименьшей стоимости (табл.18.3).

Таблица 18.3

Запасы \ Заказы		B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>
		20	25	30
A <sub>1</sub>	24	6	4	2 24
A <sub>2</sub>	28	3	5 25	4 3
A <sub>3</sub>	23	3 20	6	3 3

$$z = 24 \cdot 2 + 25 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 20 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 254.$$

4. С помощью метода потенциалов найти оптимальный план перевозок, обеспечивающий их минимальную стоимость (первоначальный план составлен по методу минимального элемента).

Таблица 18.4

Запасы \ Заказы		B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	
		20	25	30	<i>u</i>
A <sub>1</sub>	24	6 4	4 1	2 24	0
A <sub>2</sub>	28	3 *** -1 ⊕	5 25	4 3 ⊖	2
A <sub>3</sub>	23	3 20 ⊖	6 2	3 3 ⊕	1
	<i>v</i>	2	3	2	

Таблица 18.5

Запасы \ Заказы		B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	
		20	25	30	<i>u</i>
A <sub>1</sub>	24	6 4	4 0	2 24	0
A <sub>2</sub>	28	3 3	5 25	4 1	2
A <sub>3</sub>	23	3 17	6 1	3 6	1
	<i>v</i>	2	3	2	

Оптимальный  $z = 24 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 25 \cdot 5 + 17 \cdot 3 + 6 \cdot 3 = 251$ .

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 24 \\ 3 & 25 & 0 \\ 17 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

5. С помощью метода потенциалов найти оптимальный план перевозок, обеспечивающий их минимальную стоимость (первоначальный план по методу северо-западного угла).

Таблица 18.6

Заказы \ Запасы		Заказы			<i>и</i>
		B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	
		20	25	30	
A <sub>1</sub>	24	6 20 ⊖	4 4 ⊕	2 -1	0
A <sub>2</sub>	28	3 -4 ⊕	5 21 ⊖	4 7	1
A <sub>3</sub>	23	3 -3	6 2	3 23	0
<i>v</i>		6	4	3	

Таблица 18.7

Заказы \ Запасы		Заказы			<i>и</i>
		B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	
		20	25	30	
A <sub>1</sub>	24	6 4	4 24 ⊖	2 -1 ⊕	0
A <sub>2</sub>	28	3 20	5 1 ⊕	4 7 ⊖	1
A <sub>3</sub>	23	3 1	6 2	3 23	0
<i>v</i>		2	4	3	

Таблица 18.8

Заказы \ Запасы		Заказы			<i>и</i>
		B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	
		20	25	30	
A <sub>1</sub>	24	6 4	4 17	2 7	0
A <sub>2</sub>	28	3 20	5 8	4 1	1
A <sub>3</sub>	23	3 0	6 1	3 23	1
<i>v</i>		2	4	2	

Оптимальный  $z = 17 \cdot 4 + 7 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 8 \cdot 5 + 23 \cdot 3 = 251$ .

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 17 & 7 \\ 20 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 23 \end{pmatrix}$$

### 3. Вопросы и упражнения для самоконтроля

1. Что называется транспортной задачей?
2. Что называется тарифом перевозки в транспортной задаче?
3. Какая транспортная задача называется закрытой?
4. Какая транспортная задача называется открытой?
5. В чем состоит процедура закрытия открытой транспортной задачи?
6. Что называется фиктивным поставщиком?
7. Что называется фиктивным потребителем?
8. Что называется потенциалом в транспортной задаче?
9. В чем состоит схема решения транспортной задачи с помощью метода потенциалов?
10. Как строится первоначальный план перевозок с помощью метода северо-западного угла?
11. Как строится первоначальный план перевозок с помощью метода наименьшей стоимости?
12. Что называется циклом в транспортной таблице?
13. Какие клетки транспортной таблицы называются базисными?
14. Какие клетки транспортной таблицы называются свободными?
15. Какой план перевозок называется вырожденным?
16. Какой план называется ациклическим?
17. В чем состоит схема пополнения вырожденного плана перевозок?
18. В чем состоит критерий оптимальности плана при решении транспортной задачи методом потенциалов?
19. Подготовить выступления по темам:
  - 1) составление опорного плана способом Фогеля;
  - 2) решение ТЗ распределительным методом и модифицированным распределительным методом;
  - 3) решение ТЗ дельта-методом.
20. Методом потенциалов найти оптимальные планы следующих транспортных задач (в верхней строке таблиц указаны потребности в грузе пунктов  $B_j$ , в левом столбце – запасы груза в пунктах  $A_i$ , в остальных клетках тарифы  $c_{ij}$ ):

20.1.

$B_j$	30	60	45	25
$A_i$				
30	4	7	1	3
70	5	9	6	2
60	8	2	9	11

20.2.

$B_j$	110	120	80	50	70
$A_i$					
150	7	2	11	5	9
170	8	4	3	6	1
110	3	5	10	7	8

20.3.

$B_j$	8	5	15	18	12	14	6	10
$A_i$								
50	2	1	3	6	5	7	9	8
38	10	11	5	7	4	2	3	1

20.4.

$B_j$	75	125	64	65	60
$A_i$					
85	7	1	4	5	2
112	13	4	7	6	3
72	3	8	0	18	12
130	9	5	3	4	7

## 21. Задания контрольной работы.

Ранее на стр. 32 приведены варианты заданий для решения транспортной задачи, где требуется методом потенциалов найти оптимальные планы следующих транспортных задач (в верхней строке таблиц указаны потребности в грузе пунктов  $B_j$ , в левом столбце – запасы груза в пунктах  $A_i$ , в остальных клетках тарифы  $c_{ij}$ ).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гераськин, М.И. Линейное программирование. Выполнение расчетов в табличном процессоре Excel: учеб. пособие / М.И. Гераскин, Л.С. Клентак. – Самара: Изд-во СГАУ, 2012. – 148 с.
2. Коробов, П.Н. Математическое программирование и моделирование экономических процессов: учеб. для студентов лесотехнических вузов / П.Н. Коробова. – СПб.: ЛТА, 2002. – 364 с.
3. Ростова, Е.П. Методы и модели в экономике: учеб. пособие / Е.П. Ростова. – Самара: Изд-во СГАУ, 2009. – 112 с.
4. Горлач, Б.А. Исследование операций: учеб. комплекс / Б.А. Горлач. – Самара: Аэропринт, 2008. – 448 с.
5. Кузнецов, Ю.Н. Математическое программирование: учеб. пособие / Ю.Н. Кузнецов, В.И. Кузубов, А.Б. Волошенко. – М.: Высш. школа, 1980. – 300 с.
6. Кузнецов, А.В. Высшая математика. Математическое программирование: учеб. / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод. – Минск: Высш. школа, 2001. – 351 с.
7. Кузнецов, А.В. Руководство к решению задач по математическому программированию: учеб. пособие / А.В. Кузнецов, Н.И. Холод, Л.С. Костевич. – Минск: Высш. школа, 2001. – 448 с.
8. Самаров, К.Л. Математика. Транспортная задача: учеб. пособие / К.Л. Самаров. – М.: ООО Резольвента, 2009. – 23 с.