МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Линейная алгебра

Электронный курс
в системе дистанционного обучения Moodle

Работа выполнена по мероприятию блока 1 «Совершенствование
образовательной деятельности» Программы развития СГАУ
на 2009 – 2018 годы по проекту «Модернизация учебного процесса на
факультете экономики и управления на основе развития системы
электронного и дистанционного обучения»
Соглашение № 1/21 от 3.06.2013 г.

САМАРА
2013

ББК У9(2)212.86Я7
А313

Автор-составитель: **Горлач Борис Александрович, Горлач Анна Юрьевна**

Линейная алгебра [Электронный ресурс] : электрон. курс в системе дистанц. обучения Moodle / М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); авт.-сост. Б.А.Горлач, А.Ю.Горлач. - Электрон. текстовые и граф. дан.(6,97 Мбайт) - Самара, 2013. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

В состав электронного курса входят:
1. Учебный комплекс.
2. Конспект лекций.
3. Методические указания по решению задач.

Электронный курс предназначен для студентов очного отделения по направлениям подготовки бакалавров 080100.62 «Экономика», 080200.62 «Менеджмент», 080500.62 «Бизнес информатика» (ФГОС-3), изучающих дисциплину «Линейная алгебра» в 1 семестре, для студентов очного отделения по направлениям подготовки специалистов 080105.65 «Финансы и кредит», 080507.65 «Менеджмент организации», 080116.65 «Математические методы в экономике» (ГОС-2), изучающих дисциплину «Линейная алгебра» в 1 семестре, и для студентов заочного отделения по направлениям подготовки бакалавров 080100.62 «Экономика», 080200.62 «Менеджмент» (ФГОС-3), изучающих дисциплину «Линейная алгебра» в 1 семестре.

Модуль разработан на кафедре математических методов в экономике.

Б.А. Горлач

Л И Н Е Й Н А Я
А Л Г Е Б Р А

Учебный комплекс

Допущен Министерством образования и науки
Российской Федерации в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений, обучающихся
по техническим и экономическим специальностям

Л А Н Ь
Санкт-Петербург, 2012

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73-1

Горлач Борис Алексеевич
«Линейная алгебра», Учебный комплекс. / — СПб.: Издательство «Лань», 2012. — 391 с.

JSBN 5-238-01054-0

Учебный комплекс соответствует Государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования по программам математических дисциплин для студентов технических и экономических вузов, в частности, для специальностей с углубленной математической подготовкой. Методики решения типовых задач приведены в разработках семинарских занятий. Даны условия задач для самостоятельного решения и задания для выполнения расчетных работ. Приведены вопросы, в том числе в виде тестов, для самопроверки усвоения материала, а также типовые контрольные работы для проверки глубины усвоения теоретического материала и навыков решения задач.

Учебное пособие может быть использовано для самостоятельного овладения материалом. Методические разработки семинарских занятий будут полезны преподавателям математики.

ББК 22.1я73-1

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

История развития математики свидетельствует о том, что ее разделы появлялись и формировались под давлением потребностей развивающегося общества. Но построению математических моделей и методов непременно предшествовало установление закономерностей развития соответствующих направлений человеческой деятельности.

Серьезный анализ процессов физических и общественных явлений не может обойтись без знаний по многим разделам математики, в том числе без линейной алгебры. Конечно, обучить студентов всем существующим разделам математики на ее современном уровне невозможно — слишком глубоки и обширны математические дисциплины. Тем не менее изучение основ математики дает надежду на то, что обучаемые смогут в дальнейшем углубить свои математические знания при изучении предусмотренных учебными планами специальных дисциплин или самостоятельно.

При изучении математики не следует рассматривать эту науку только с точки зрения потребителя и пытаться изучать только те ее разделы, которые непосредственно решают прикладные задачи. Математика признана научным миром как самая могущественная из всех наук. Математике человечество обязано всеми величайшими открытиями, осуществленными человечеством за время своего сознательного существования.

Можно отметить три особенности математики, которые делают эту науку первой и важнейшей из всех наук.

1. Подходы, используемые математикой к построению моделей базируются на строгой аксиоматике с применением доказательств адекватности этих моделей описываемым явлениям. Математика представляет собой самостоятельную науку, которая может развиваться автономно, познавать свой собственный абстрактный мир. Удивительно то, что построенные математиками логически стройные абстрактные модели многомерного мира находят все более широкое приложение в реальном мире.

2. Методы реализации математических моделей (получение решений) позволяют проводить исследования различных процессов.

3. Язык математики, используемый в моделировании реальных процессов, универсален и позволяет выявить общие закономерности развития природы, естествознания, техники, экономики, общественных отношений.

Знание математики, освоение ее основных методов и моделей — признак образованного человека, приобщенного к культуре мировой цивилизации.

«Природа — открытая книга. Но только тот может прочесть эту книгу, кто изучит язык, на котором она написана. А написана она на языке математики». Эти мудрые слова адресовал Галилей своим ученикам еще в 17 столетии.

ПРЕДИСЛОВИЕ

При написании учебного пособия автор использовал многолетний опыт преподавания математики студентам вузов технической и экономической специальностей с различными требованиями к объему изучаемого материала и уровню владения им. Часть материала, вошедшего в пособие, опубликована в [2] и существенно переработана. В пособие включены четыре дополнительные главы: «Комплексные числа», «Преобразования матриц», «Алгебра тензоров» и «Линейное программирование».

В конце каждой из глав приведены вопросы и тесты для контроля усвоения материала, разработки семинарских занятий и даны задачи для самостоятельного решения.

После второй, четвертой, пятой и восьмой глав приведены типовые варианты контрольных работ по проверке глубины усвоения теоретического материала и навыков решения задач. Даны задания на расчетную работу (5 частей).

В конце пособия приведены ответы на вопросы для тестирования и на задачи для самостоятельного решения. Часть результатов решения задач, которые можно проверить непосредственной подстановкой исходных данных, в ответах не приведена.

Материал пособия изучается студентами технических и экономических специальностей в первом семестре. В пособие входят три основных раздела: «Линейная алгебра» (включая векторы, системы линейных уравнений, комплексные числа, алгебру матриц и тензоров), «Аналитическая геометрия» (состоит из линейных и квадратных уравнений на плоскости и в пространстве, в том числе n-мерном) и «Линейное программирование».

Второй раздел, по существу, является развитием курса линейной алгебры, но в него дополнительно включены элементы нелинейной алгебры в разделе «Кривые и поверхности».

Глава «Линейное программирование» предназначена в основном студентам экономических специальностей, за исключением специальностей с углубленной математической подготовкой (например, «Математические методы в экономике»). Для таких специальностей линейное программирование должно изучаться студентами в курсе «Исследование операций». Что касается разделов «Преобразования в линейных пространствах» и «Алгебра тензоров», то они предлагаются для изучения только студентам с углубленной математической подготовкой.

Глава «Алгебра тензоров» дает лишь поверхностные сведения из этого раздела математики и служит в основном развитию у студентов обобщенного взгляда на построение математических моделей. Здесь внимание студентов акцентируется на необходимости описания реальных явлений в операторной (инвариантной по отношению к выбору координат)форме.

Согласно программам курса математики студентам в первом семестре предстоит прослушать курс лекций (возможно самостоятельно или частично самостоятельно овладеть теоретическими основами линейной алгебры). В задачу обучения входит обучение студентов навыкам решения типовых задач и построению простейших математических моделей. Этой цели служат семинарские занятия, задания для самостоятельного решения задач и выполнения расчетных работ. В зависимости от выбранной специальности объем изучаемого материала может изменяться.

В часы проведения семинарских занятий предполагается проводить контрольные работы. Возможно включение в рабочую программу коллоквиума для промежуточной оценки знаний студентов. В коллоквиум можно включить материал первых четырех глав пособия.

Большой объем материала, необходимого специалистам для грамотного построения и анализа математических моделей, используемых в исследовании и управлении системами и процессами, и ограниченность часов на его освоение, не позволяют в лекциях (и в пособии) уделить достаточное внимание строгому доказательству многих теорем. Тем не менее достаточно большое количество разобранных примеров и пояснение смысла вводимых математических понятий и соотношений дадут возможность студентам получить знания по математике, достаточные для изучения специальных дисциплин, освоить некоторые методы построения математических моделей и анализа с их помощью реальных процессов.

Студентам рекомендуется тщательно изучать материал лекций перед каждым семинарским занятием и особенно перед контрольными работами и коллоквиумом. Важно усвоенный материал воспроизвести самостоятельно на бумаге, после чего решать задачи и выполнять расчетные работы.

После изучения материала курса и освоения навыков решения задач во время экзаменационной сессии студентам предстоит сдать экзамен. Окончательный балл оценки знаний может быть определен как полусумма экзаменационной оценки и оценки успеваемости студента в семестре — рейтинга. В рейтинг включаются оценки по всем контрольным и расчетным работам, нормированные к пятибалльной системе оценок.

Оценки коллоквиума вместе с контрольной и расчетной работами по первой части курса определяют успеваемость студента в первой половине семестра.

В семестровый рейтинг кроме оценок по обязательным контрольным и расчетным работам могут быть включены оценки за выполнение домашних задач, активность студента при проведении семинарских занятий. Пропуски занятий, несвоевременная сдача расчетных работ могут наказываться штрафными баллами.

Считаю своим долгом выразить благодарности студентам Д. Копылову, А. Мидзяевой, Н. Шигаевой, прорешавшим все приведенные в пособии примеры задач и выявившим ряд описок и неточностей.

Глава 1

Определители. Матрицы

1.1. Матрицы. Определение. Основные виды матриц

Матрицей размера $m \times n$ в математике называют прямоугольную таблицу выражений (чисел или других математических объектов), состоящую из m строк и n столбцов:

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}). \tag{1.1}$$

Здесь m — количество строк, n — количество столбцов; a_{ij} ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$) — *элементы матрицы*. Первый индекс (i) обозначает номер строки, на которой стоит элемент; второй (j) — номер столбца. Например, элемент a_{25} стоит на пересечении второй строки и пятого столбца матрицы.

Матрица (1.1) называется *прямоугольной* матрицей размера $m \times n$.

Если $m = n$, то матрица называется *квадратной*. Говорят, что квадратная матрица имеет порядок n (количество строк равно количеству столбцов и равно n).

Матрица, имеющая только одну строку, называется *матрицей-строкой*, или *вектором-строкой*; только один столбец — *матрицей-столбцом*, или *вектором-столбцом*. Элементы таких матриц называют *координатами вектора* (см. гл. 3).

Элементы квадратной матрицы, имеющие одинаковые индексы, образуют *главную диагональ* матрицы. Совокупность элементов, стоящих на линии, соединяющей элементы a_{1n} и a_{n1}, образуют *побочную диагональ* матрицы.

Квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные выше (ниже) главной диагонали, равны нулю, называется *нижней* (*верхней*) *треугольной* матрицей:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица, имеющая ненулевые элементы только на главной диагонали, называется *диагональной*:

$$\mathrm{diag}A = \lceil a_{11},\ a_{22}, \dots, a_{nn} \rfloor = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица, все элементы главной диагонали которой равны единицам, называется *единичной*:

$$\underset{n\times n}{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Прямоугольная (в общем случае) матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*:

$$\underset{m\times n}{\Theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица A^T, у которой по отношению к матрице A (1.1) элементы строк и столбцов поменялись местами, называется *транспонированной* по отношению к A:

$$\underset{m\times n}{A^T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \underset{n\times m}{A'}.$$

Очевидно соотношение

$$\left(A^T\right)^T = A.$$

Матрица, для которой справедливо равенство $A = A^T$, называется *симметричной.* Симметричной может быть только квадратная матрица.

Перечисленные выше основные виды матриц характеризуются определенными свойствами ее элементов.

Вводя в рассмотрение *символ Кронекера*:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases} \tag{1.2}$$

приведем эти свойства для квадратных матриц $A = (a_{ik})$ $(i, k = \overline{1, n})$.

Матрица A, у которой $\begin{cases} a_{ik} = 0 \text{ при } i > k, & \text{– верхняя треугольная;} \\ a_{ik} = 0 \text{ при } i < k, & \text{– нижняя треугольная;} \\ a_{ik} = a_i\delta_{ik}, & \text{– диагональная;} \\ a_{ik} = \delta_{ik}, & \text{– единичная;} \\ a_{ik} = 0, & \text{– нулевая;} \\ a_{ik} = a_{ki}, & \text{– симметричная.} \end{cases}$

Матрица-столбец $\underset{m\times 1}{A}$ для экономии места может быть представлена транспонированной матрицей-строкой $\underset{m\times 1}{A} = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1})^T$.

Часть элементов матрицы A размера $m \times n$, стоящая на пересечении k ее строк $(k \leq m)$ и l столбцов $(l \leq n)$ называется *подматрицей*. В частности, если столбцы матрицы размера $m \times n$ (1.1) рассматривать как m координат векторов A_j: $A_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^T$ $(j = \overline{1, n})$, то матрицу можно представить в виде вектора-строки, компонентами которой являются указанные векторы-столбцы A_j:

$$A = (A_1, A_2, \ldots, A_n).$$

Матрица характеризуется значениями ее элементов и размерностью. Еще одной характеристикой, относящейся только к квадратным матрицам, является ее определитель.

1.2. Определители

Определитель, (или *детерминант*), — это число, характеризующее квадратную матрицу.

Определителем матрицы первого порядка $A = (a_{11})$ является число, равное значению ее единственного элемента:

$$\Delta_A = \det A = |a_{11}| = a_{11}. \tag{1.3}$$

Было бы ошибкой принимать вертикальные линии, обрамляющие элементы определителя и являющиеся его признаком, за символ абсолютной величины. Определитель первого порядка $\det(a_{ij})$ сохраняет знак единственного элемента матрицы.

Определителем матрицы второго порядка называется число, равное разности произведений элементов ее главной и побочной диагоналей:

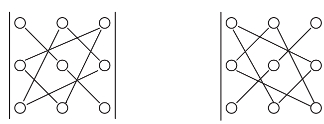
$$\Delta_A = \det\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.4}$$

Определителем матрицы третьего порядка называется число, определяемое выражением:

$$\Delta_A = \det\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} = \quad & a_{11}a_{22}a_{33} \quad + \quad a_{12}a_{23}a_{31} \quad + \quad a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - \quad & a_{13}a_{22}a_{31} \quad - \quad a_{12}a_{21}a_{33} \quad - \quad a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Существует простое правило составления записи (1.5), называемое *правилом треугольников*:



$\oplus$ $\ominus$

Примеры 1–3. Вычислить определители.

1. $\det(-3) = |-3| = -3$; 2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$;

3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1{\cdot}0{\cdot}4 - 2{\cdot}2{\cdot}2 - 1{\cdot}3{\cdot}1 - 1{\cdot}0{\cdot}2 - 2{\cdot}3{\cdot}4 - 1{\cdot}2{\cdot}1 = -37.$

Для вычисления определителей порядка, большего трех, существуют общие формулы, которые получаются в результате установления некоторых закономерностей при записи выражений типа (1.5). В частности:

— количество множителей в слагаемых формул для вычисления определителей равно порядку определителя;

— в каждое слагаемое входят множителями только по одному элементу из каждой строки и из каждого столбца;

— половина слагаемых входят в формулу со знаком плюс, половина — со знаком минус;

— если первые индексы у элементов определителя, входящих в множители, упорядочены (123...), то со знаком плюс в сумму входят произведения элементов определителя, у которых вторые индексы составляют четное количество *инверсий* (перестановок пары индексов) от чисел 123..., т.е 231..., 312.... С минусом в сумму входят произведения элементов, вторые индексы у которых составляют нечетное количество инверсий, т.е 321..., 213..., 132...

Последнее свойство будет справедливым и для случая, когда не первые, а вторые индексы элементов определителя во всех произведениях будут представлять собой упорядоченный натуральный ряд чисел. В этом случае по первым индексам будет определяться количество инверсий.

Учет отмеченных закономерностей позволяет записать общую формулу для вычисления определителя n-го порядка:

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{\pi} (-1)^{i(\pi)} a_{1k_1} a_{1k_2} \dots a_{1k_n}. \tag{1.6}$$

Здесь π — общее количество возможных перестановок (инверсий) n индексов по отношению к натуральному ряду чисел $123\dots$; $i(\pi)$ — количество инверсий пар индексов, приведшее к рассматриваемому (конкретному) произведению. Для определения знака слагаемого имеет только значение индекса i: четное или нечетное.

Отметим, что вычисление по формулам (1.6) при $n \geq 4$ достаточно громоздко, так как количество слагаемых в сумме равно $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Существуют другие, более эффективные способы вычисления определителей порядка выше трех, о которых будет сказано после рассмотрения свойств определителей.

1.3. Свойства определителей

Рассмотрим основные свойства определителя квадратной матрицы произвольного порядка $A = (a_{ij})$.

Совокупность n элементов i-й строки определителя $\det A = |a_{ij}|$ можно рассматривать как вектор-строку

$$\boldsymbol{A}_i = (a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{in}),$$

а совокупность n элементов j-го столбца — как вектор-столбец

$$\boldsymbol{B}_j = (a_{1j}\ a_{2j}\ \dots\ a_{nj})^T.$$

При введении таких обозначений определитель

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$|A_1\ \dots\ A_j\ \dots\ A_n|^T = |B_1\ \dots\ B_j\ \dots\ B_n|.$$

Перечислим основные свойства определителей. В их справедливости убедимся на примере определителя второго порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.7}$$

1. Определитель не изменится, если в нем строки и столбцы поменять местами. То есть определитель матрицы A равен определителю матрицы A^T, транспонированной по отношению к исходной:

$$\det A = \det A^T, \quad \text{или} \quad |A| = |A|^T.$$

В случае представления матриц в виде совокупности векторов-строк свойство представляется в виде

$$|A_1 \ \dots \ A_j \ \dots \ A_n|^T = \left|A_1^T \ \dots \ A_j^T \ \dots \ A_n^T\right|.$$

Для представления матрицы в виде совокупности векторов-столбцов

$$|B_1 \ \dots \ B_j \ \dots \ B_n| = \left|B_1^T \ \dots \ B_j^T \ \dots \ B_n^T\right|^T.$$

Убедимся в справедливости свойства на примере определителя второго порядка. Согласно определению транспонированный по отношению к (1.7) определитель

$$\Delta_1 = \Delta^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \Delta,$$

то есть равен определителю исходной матрицы.

Свойство указывает на равнозначность строк и столбцов в определителе. Поэтому свойства определителей, касающиеся действий со строками, распространяются и на их столбцы. В дальнейшем это свойство будет подразумеваться.

2. Если в определителе поменять местами две произвольные строки, то знак определителя сменится на противоположный:

$$|A_1 \ \dots \ A_j \ \dots \ A_k \ \dots \ A_n|^T = -\,|A_1 \ \dots \ A_k \ \dots \ A_j \ \dots \ A_n|^T.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -\Delta.$$

Свойство можно сформулировать в более общем виде: если в определителе поменять местами любые пары строк нечетное число раз, то знак определителя изменится на противоположный; четное число раз — знак не изменится.

3. Общий множитель всех элементов какой-либо строки можно вынести за знак определителя:

$$|A_1 \ \dots \ \lambda A_j \ \dots \ A_n|^T = \lambda \, |A_1 \ \dots \ A_j \ \dots \ A_n|^T.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{11}a_{22} - \lambda a_{12}a_{21} = \lambda\Delta.$$

Из свойства следует, что при умножении определителя на число элементы только одной из его строк (любой) умножаются на это число.

Обобщением свойства является соотношение

$$|\lambda_1 A_1 \ \dots \ \lambda_j A_j \ \dots \ \lambda_n A_n|^T = \lambda_1 \cdots \lambda_j \cdots \lambda_n \, |A_1 \ \dots \ A_j \ \dots \ A_n|^T.$$

4. Определитель равен нулю, если среди его строк имеются строки с пропорциональными элементами:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} \lambda a_{12} & \lambda a_{22} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{12}a_{22} - \lambda a_{22}a_{12} = 0.$$

Свойство является следствием свойств 2 и 3. Оно справедливо, в частности, при $\lambda = 1$ (две строки одинаковы) и при $\lambda = 0$ (имеется строка с нулевыми элементами).

5. Если элементы какой-либо строки определителя представить в виде суммы двух слагаемых, то определитель можно представить в виде суммы двух определителей следующим образом:

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} + b_{11})a_{22} - (a_{12} + b_{12})a_{21} =$$

$$=(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (b_{11}a_{22} - b_{12}a_{21}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

6. Определитель не изменится, если к элементам какой-либо его строки прибавить элементы другой строки, умноженные на произвольный множитель.

$$|A_1 \ \dots \ A_j \ \dots \ A_k \ \dots \ A_n|^T = |A_1 \ \dots \ A_j + \lambda A_k \ \dots \ A_k \ \dots \ A_n|^T.$$

С использованием свойств 4 и 5 осуществим преобразование определителя (1.7), к элементам первой строки которого прибавим соответствующие элементы второй строки, умноженные на λ:

$$\Delta_6 = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta.$$

Второй определитель в сумме по свойству 4 равен нулю.

7. Определитель треугольной (в частности, диагональной) матрицы равен произведению элементов ее главной диагонали:

$$\Delta_7 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot 0 = a_{11}a_{22}.$$

В частности, определитель единичной матрицы равен единице, нулевой квадратной матрицы — нулю.

1.4. Разложение определителей по элементам строк

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя Δ n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, получаемый из Δ вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя Δ n-го порядка называется произведение минора M_{ij} этого элемента на $(-1)^{i+j}$.

Пример 1. Вычислить алгебраические дополнения элементов a_{22} и a_{32} определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е.

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10; \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -4.$$

Теорема 1. *Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо из его строк на их алгебраические дополнения*:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (i = \overline{1, n}). \tag{1.8}$$

Аналогичное утверждение справедливо для столбцов определителя:

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (j = \overline{1, n}). \tag{1.9}$$

Убедимся в справедливости теоремы на примере определителя третьего порядка, разложив его, например, по элементам первой строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} +$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Выражение с точностью до порядка слагаемых совпадает с формулой (1.5) для определителя третьего порядка.

Теорема 2. *Сумма произведений элементов какой-либо строки (какого-либо столбца) определителя на алгебраические дополнения элементов другой его строки (другого столбца) равна нулю.*

Выражение, получаемое в результате такого разложения, равно определителю с двумя равными строками (столбцами). Читателю предлагается убедиться в этом на примере определителя третьего порядка.

По свойству 4, приведенному в § 1.3, такой определитель равен нулю.

Обобщая теоремы 1 и 2, можно записать соотношение:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}A_{jk} = \delta_{ik}\Delta = \begin{cases} \Delta & \text{при} \quad i = k; \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k. \end{cases} \tag{1.10}$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера (1.2).

Следствие. Если в определителе имеется строка только с одним ненулевым элементом, то определитель равен произведению этого элемента на его алгебраическое дополнение.

Утверждение следствия очевидно: в разложении такого определителя по элементам упомянутой строки все слагаемые разложения, кроме одного, обратятся в нуль, так как алгебраические дополнения нулевых элементов умножаются на нули.

Рассмотренные в § 1.3 свойства определителей и сформулированные теоремы позволяют понизить порядок $n \geq 4$ определителей до третьего и второго и затем по приведенным в § 1.2 формулам найти их значения.

Пример 2. Вычислить определитель Δ.

П о я с н е н и е. С правой стороны определителей напротив некоторых строк поставлены добавляемые к ним произведения чисел на номера (N) строк. Снизу — соответствующие произведения для столбцов.

Р е ш е н и е.

$$\Delta = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \scriptstyle \quad\;\; -3N1 \;\; -4N1 \quad \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & -7 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \scriptstyle -3N3 \\ \scriptstyle -2N3 \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -5 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 5(-4)(-1)^{2+1} \det(-1) = -20.$$

В этом примере определитель четвертого порядка последовательными преобразованиями и разложениями по элементам строк приведен к определителю первого порядка, хотя преобразования можно было закончить после получения определителей третьего или второго порядков, правила вычисления которых приведены в § 1.2.

1.5. Линейные операции над матрицами

Матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одной размерности $m \times n$ считаются *равными*, если равны их соответствующие элементы:

$$\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times n}{B} \quad \Longleftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij}.$$

Рассмотрим *линейные операции* над матрицами и перечислим их основные свойства.

Линейными операциями над математическими объектами называют две операции: сложение объектов и умножение их на число.

Суммой двух матриц A и B одной размерности $m \times n$ называется матрица C размерности $m \times n$, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B:

$$\underset{m\times n}{A} + \underset{m\times n}{B} = \underset{m\times n}{C} \quad \Longleftrightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Для суммы матриц справедливы следующие свойства.

Коммутативность (перестановочность):

$$A + B = B + A.$$

Ассоциативность (сочетательность):

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

Справедливость указанных свойств для матриц следует из справедливости этих свойств для чисел — элементов матриц:

$$a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}, \qquad a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}.$$

Произведением матрицы A размера $m \times n$ на число $\lambda \in \Re$ называется матрица B размера $m \times n$, элементы которой равны произведению соответствующих элементов матрицы A на λ:

$$\underset{m\times n}{B} = \underset{m\times n}{\lambda A} \quad \Longleftrightarrow \quad b_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Следует обратить внимание на принципиальное отличие произведения числа на матрицу от произведения числа на определитель. В первом случае **все** элементы матрицы умножаются на число; во втором — элементы лишь **одной** из строк (одного из столбцов) (свойство 3 § 1.3). По отношению к рассмотренному произведению и сумме матриц A и B $(\lambda, \mu \in \Re)$ справедливы свойства *дистрибутивности* (распределительности):

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B,$$

$$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A;$$

коммутативности и *ассоциативности*:

$$\lambda A = A\lambda;$$

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) = \lambda(A\mu).$$

1.6. Произведение матриц

Произведением матрицы A размера $m \times k$ на матрицу B размера $k \times n$ называется матрица C размера $m \times n$. Элементы c_{ij}, стоящие на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы C, равны сумме произведений элементов a_{is} i-й строки матрицы A на элементы b_{sj} j-го столбца матрицы B $(s = \overline{1,k})$:

$$\underset{m\times n}{C} = \underset{m\times k}{A} \cdot \underset{k\times n}{B} \quad \Longleftrightarrow \quad c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} b_{sj}. \tag{1.11}$$

Из определения вытекает, что произведение возможно только в случае, если число столбцов матрицы, стоящей в произведении первой (слева), равно числу строк второй матрицы. Число строк матрицы произведения равно числу строк первой из стоящих в произведении матриц, а число столбцов — числу столбцов второй из них.

Пример 1. Найти произведение матриц:

$$\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} 2\cdot 4 + 0\cdot 3 + (-1)\cdot 0 \\ 0\cdot 4 + (-2)\cdot 3 + 2\cdot 0 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}}.$$

Произведение матриц обладает следующими свойствами.

1. *Некоммутативность*:

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Справедливость свойства следует хотя бы из того, что в выражении (1.11) в общем случае $m \neq n$ и тогда при перестановке матриц в произведении они станут несовместимыми для произведения. Даже в случае, если

$m = n$, коммутативность произведения, как правило, не имеет места. Продемонстрируем сказанное на примере.

Пример 2.

$$\underset{2\times 1}{A} \cdot \underset{1\times 2}{B} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} (-2\ 1) = \begin{pmatrix} (-2)\cdot(-2) & (-2)\cdot 1 \\ 1\cdot(-2) & 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\underset{1\times 2}{B} \cdot \underset{2\times 1}{A} = (-2\ 1) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \big((-2)\cdot(-2) + 1\cdot 1\big) = (5).$$

Сравнение двух последних результатов говорит о том, что произведения одних и тех же, но расположенных в обратном порядке матриц не совпадают. Они отличаются в том числе размерами результирующих матриц.

Если произведение матриц не изменяется при их перестановке, то матрицы называются *коммутирующими*, или *перестановочными* по отношению к произведению. В частности, как нетрудно проверить, единичная матрица является коммутирующей по отношению к любой квадратной матрице, имеющей одинаковый с единичной матрицей порядок:

$$I \cdot A = A \cdot I = A. \tag{1.12}$$

2. *Ассоциативность*:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

3. *Дистрибутивность*:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

4. Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц:

$$\det\ (A \cdot B) = \det\ A \cdot \det\ B.$$

Свойство легко проверяется, в частности, на примере произведения квадратных матриц второго порядка.

Пример 3. Записать в координатной форме (в виде соотношений между элементами матриц) матричное уравнение $AX = B$, если

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \underset{m\times 1}{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad \underset{n\times 1}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Используя свойства произведений матриц и определение равных матриц, данное в § 1.5, получим

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Таким образом, заданное в условии задачи матричное уравнение равносильно системе линейных алгебраических уравнений.

Пример 4. Матрица $\underset{2\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ характеризует производство некоторого предприятия. Строки относятся к видам сырья (их два), идущего на производство трех видов продукции (столбцы матрицы). Например, $a_{13} = 5$ показывает, что на выпуск единицы продукции третьего вида предприятие затрачивает 5 единиц сырья первого вида. Стоимость единиц видов сырья задается матрицей-столбцом $P = (120;\, 300)^T$. План предприятия предусматривает выпуск трех видов продукции в количествах, характеризуемых матрицей $Q = (50; 80; 30)^T$. Требуется определить суммарную стоимость сырья, необходимого для производства всей запланированной к выпуску продукции.

Р е ш е н и е. Количество K двух видов сырья, необходимого для выпуска запланированной продукции, можно определить как произведение матрицы A слева на матрицу Q:

$$K = AQ = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 80 \\ 30 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4\cdot 50 + 1\cdot 80 + 5\cdot 30 \\ 3\cdot 50 + 0\cdot 80 + 4\cdot 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 430 \\ 270 \end{pmatrix}.$$

Стоимость C сырья, требуемого для выпуска продукции, определим как произведение матрицы стоимости единиц сырья P на матрицу K количеств сырья:

$$= P^T K = (120;300) \begin{pmatrix} 430 \\ 270 \end{pmatrix} = (120\cdot 430 + 300\cdot 270) = (132600).$$

Два осуществленных выше действия произведения матриц можно было объединить в одно на основе свойства ассоциативности матричных произведений:

$$C = P^T AQ = (P^T A)Q = P^T (AQ),$$

что приводит к полученному выше результату.

Произведение двух одинаковых квадратных матриц называется *квадратом матрицы.* Произведение квадрата матрицы на ту же матрицу приводит к кубу матрицы и т.д. *Матрица степени n*образуется из матрицы степени $(n-1)$ умножением ее на ту же матрицу в первой степени. То есть

$$A^2 = A \cdot A; \quad A^3 = A^2 \cdot A; \quad \ldots \quad A^n = A^{n-1} \cdot A.$$

Можно показать, что произведение одинаковых матриц разных степеней коммутативно, т.е.

$$A^m A^n = A^n A^m = A^{m+n}.$$

При транспонировании произведения матриц каждая из них транспонируется, а порядок матриц в произведении меняется:

$$(AB)^T = B^T A^T, \qquad (A_1 A_2 \ldots A_n)^T = A_n^T \ldots A_2^T A_1^T.$$

1.7. Обратная матрица

Обратной матрицей по отношению к квадратной матрице A порядка n называется квадратная матрица A^{-1} порядка n, удовлетворяющая условию:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I, \tag{1.13}$$

где I — единичная матрица порядка n.

Неособенная матрица, или *невырожденная матрица*, — это матрица, определитель которой не равен нулю. Неособенная матрица может быть только квадратной.

Теорема. *Для каждой неособенной матрицы существует, и при том единственная, обратная матрица.*

Докажем справедливость теоремы.

Пусть задана квадратная неособенная матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad \Delta = |A| \neq 0. \tag{1.14}$$

Присоединенной (союзной) матрицей A^c называется транспонированная матрица алгебраических дополнений A_{ij} элементов a_{ij} матрицы A. То есть

$$A^c = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{i1} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{i2} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1j} & A_{2j} & \ldots & A_{ij} & \ldots & A_{nj} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{in} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

Следует обратить внимание на то, что у элементов матрицы A^c первый индекс определяет, как и положено для транспонированной матрицы, номер столбца, а второй — номер строки исходной матрицы (1.14).

Рассмотрим и преобразуем произведение $A^c A$. При преобразовании воспользуемся равенством (1.10) и правилом произведения матрицы на числовой множитель (§ 1.5):

$$A^c A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} A_{k1} a_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} A_{k1} a_{k2} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} A_{k1} a_{kn} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} A_{k2} a_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} A_{k2} a_{k2} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} A_{k2} a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} A_{kn} a_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} A_{kn} A_{k2} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} A_{kn} a_{kn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \Delta I.$$

Приравняем левую и правую части записанных равенств и поделим полученное равенство на определитель (на число) Δ:

$$\frac{1}{\Delta} A^c A = I.$$

Сравнивая записанное соотношение с (1.13), получим формулу для вычисления обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} A^c. \tag{1.16}$$

Эту же формулу можно получить, рассматривая произведение AA^c. То есть матрицы A и A^c коммутативны по отношению к произведению, как коммутативны матрицы A и A^{-1}.

Последовательность вычисления обратной матрицы вытекает из описанной выше последовательности получения формулы (1.16).

Доказательство единственности обратной матрицы следует из совпадения результатов следующих двух путей преобразований.

Предположим противное, т.е. что матрица A имеет две обратные матрицы A_1^{-1} и A_2^{-1}. Тогда с учетом свойства ассоциативности произведения матриц и определения обратной матрицы (1.13) запишем:

$$A_1^{-1} A A_2^{-1} = \begin{cases} A_1^{-1}(AA_2^{-1}) = A_1^{-1} I = A_1^{-1} \\ (A_1^{-1} A) A_2^{-1} = I A_2^{-1} = A_2^{-1} \end{cases} \implies A_1^{-1} = A_2^{-1}.$$

Результат противоречит исходному предположению о существовании двух обратных матриц.

Пример. Найти матрицу, обратную $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. По формуле (1.5) найдем определитель матрицы A:

$$\Delta = (-1)\cdot(-2)\cdot(-1) + 2\cdot(-3)\cdot 1 + 0\cdot 3\cdot 0 -$$

$$-0\cdot(-2)\cdot 1 - 2\cdot 3\cdot(-1) - (-1)\cdot(-3)\cdot 0 = -2 \neq 0.$$

Найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -6;$$
$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3;$$
$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4.$$

Запишем выражение для обратной матрицы

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} A^c = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

В правильности определения обратной матрицы можно убедиться, умножая ее справа или слева на исходную матрицу. Это произведение, как нетрудно убедиться, равно единичной матрице третьего порядка.

Для обратной матрицы справедливы соотношения:

$$(A^{-1})^{-1} = A; \qquad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

Матрицы, удовлетворяющие условию

$$S^T = S^{-1},$$

называются *ортогональными* . Эти матрицы, в частности, используются при преобразовании поворота систем координат.

1.8. Нормы матриц

Неравенства

$$A \leq B \quad \text{или} \quad A \geq B \tag{1.17}$$

между матрицами одинакового размера $m \times n$ говорят о том, что между всеми соответствующими элементами этих матриц должны существовать неравенства

$$a_{ij} \leq b_{ij} \text{ или } a_{ij} \geq b_{ij} \quad (i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}). \tag{1.18}$$

В этом случае можно утверждать, что матрица A меньше или больше матрицы B. Если неравенства (1.18) не выполняются для всех элементов матриц, то сравнение матриц по этому признаку невозможно.

Прежде чем рассматривать нормы матриц, введем новое понятие.

Обозначим

$$|A| = (|a_{ij}|) \tag{1.19}$$

матрицу, состоящую из абсолютных величин элементов матрицы A.

Если A и B — матрицы, для которых имеют смысл операции сложения $A + B$ и умножения AB, то для абсолютных величин таких матриц справедливы соотношения (Θ – нулевая матрица, λ – число):

$$1.\ |A| \geq \Theta; \qquad 2.\ |\lambda A| = |\lambda||A|;$$

$$3.\ |A + B| \leq |A| + |B|; \qquad 4.\ |AB| \leq |A||B|. \tag{1.20}$$

Под *нормой матрицы* $A = (a_{ij})$ будем понимать число $||A||$ (не путать с модулем определителя матрицы A) удовлетворяющее условиям (аксиомам), повторяющим соотношения (1.20):

$$1.\ ||A|| \geq 0; \qquad 2.\ ||\lambda \cdot A|| = |\lambda| \cdot ||A||;$$

$$3.\ ||A + B|| \leq ||A|| + ||B||; \quad 4.\ ||A \cdot B|| \leq ||A|| \cdot ||B||. \tag{1.21}$$

Равенство в первом соотношении возможно только если $A = \Theta$.

Выполнение аксиом (1.21) не гарантирует единственности определения нормы матрицы. Для оценки матриц существуют различные нормы. Приведем некоторые из них.

1. $||A||_m = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

По этой норме, называемой *m-нормой*, выбирается максимальная из сумм абсолютных значений элементов строк (векторов-строк) матрицы.

2. $||A||_n = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}|$.

По этой норме, называемой *n-нормой*, выбирается максимальная из сумм абсолютных значений элементов столбцов (векторов-столбцов) матрицы.

3. $||A||_k = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} (a_{ij})^2}$.

Формулой определяется *k-норма* — *квадратичная* норма.

Отметим, что перечисленные нормы в равной степени можно считать нормами векторов, являющихся по существу частными случаями матриц.

Пример. Определить m-, n- и k-нормы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & -3 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е.

$||A||_m = \max\{2+3+|-4|+|-3|,\ 4+|-2|+|-1|+1,\ |-2|+1+5+8\} = \max\{12, 8, 16\} = 16;$

$||A||_n = \max\{2+4+|-2|,\ 3+|-2|+1,\ |-4|+|-1|+5, |-3|+1+8\} = \max\{8, 6, 10, 12\} = 12;$
$||A||_k = \sqrt{2^2+3^2+(-4)^2+(-3)^2+\ldots+(-2)^2+1^2+5^2+8^2} = \sqrt{154} \approx 12{,}4.$

Неудобство перечисленных норм матриц состоит в том, что при увеличении порядка матриц их значения возрастают. На практике чаще используются осредненные нормы. Для их получения нормы пунктов 1–3 делят на количества элементов, входящих в суммы. Например,

$$||\overline{A}||_m = \frac{1}{n}||A||_m.$$

$$||\overline{A}||_n = \frac{1}{m}||A||_n.$$

$$||\overline{A}||_k = \sqrt{\frac{1}{mn}}||A||_k.$$

Применение осредненных показателей норм для матрицы, рассматриваемой в примере, дают следующие значения:

$$||\overline{A}||_m = \frac{1}{4}||A||_m = 4; \quad ||\overline{A}||_n = \frac{1}{3}||A||_n = 4; \quad ||\overline{A}||_k = \frac{1}{\sqrt{12}}||A||_k \approx 3,6.$$

1.9. Элементарные преобразования матриц

К элементарным преобразованиям над матрицами относят:
— изменение порядка следования строк (столбцов) матрицы;
— умножение строк (столбцов) на отличные от нуля множители;
— добавление к элементам строк (столбцов) соответствующих элементов других строк (столбцов), умноженных на произвольные числа;
— удаление из матрицы строк (столбцов), пропорциональных другим строкам (столбцам). В частности строки (столбцы), состоящие только из нулевых элементов, пропорциональны любым другим строкам (столбцам);
— транспонирование матриц.

Путем элементарных преобразований любую матрицу можно привести к единичной матрице. Определитель такой матрицы равен единице, т.е отличен от нуля.

Покажем, что элементарные преобразования матрицы соответствуют произведению этой матрицы слева или справа на некоторую другую матрицу.

1. Для того чтобы в прямоугольной матрице A размера $m \times n$ поменять местами («рокировать») строки i и k достаточно A умножить слева на единичную матрицу m-го порядка, у которой поменять местами строки i и k.

Например, чтобы у матрицы 3×4 поменять местами строки 1 и 3 достаточно выполнить следующую операцию:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix}.$$

Для «рокировки» столбцов достаточно описанные действия осуществить, умножая матрицу справа на преобразованную соответствующим образом по столбцам единичную матрицу n-го порядка.

2. Для умножения i-й строки (j-го столбца) матрицы A на число λ достаточно умножить A слева (справа) на единичную матрицу, у которой на месте i-го (j-го) диагонального элемента стоит λ. Например,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

3. Операция прибавления умноженных на число элементов одной строки (столбца) к элементам другой строки (столбца) осуществляется для того, чтобы получить нули на месте некоторых элементов. В качестве примера рассмотрим матрицу $A = (a_{ij})$ порядка (3×4) примера пункта 2, на месте элементов a_{i2} $(i \neq 2)$ второго столбца которой требуется получить нули с помощью элемента a_{22}.

Пусть $\mu_{i2} = a_{i2}/a_{22}$. Тогда требуемое преобразование можно получить путем произведения:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\mu_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\mu_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & 0 & \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \tilde{a}_{31} & 0 & \tilde{a}_{33} & \tilde{a}_{34} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\tilde{a}_{ij} = a_{ij} - \mu_{i2}a_{2j}$ $(i = \overline{1,3};\ \ j = \overline{1,4})$.

1.10. Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную ненулевую матрицу A размера $m \times n$ (1.1).

Введем определения.

Минором k*-го порядка* матрицы A называется определитель, состоящий из элементов матрицы, стоящих на пересечении k любых его строк с k любыми его столбцами.

Минор матрицы, состоящий из элементов ее k первых строк и k первых столбцов, называется k*-м главным минором* матрицы.

Рангом матрицы называется наибольший порядок k отличного от нуля минора матрицы.

Порядок единичной матрицы будет, очевидно, равен рангу этой матрицы.

Можно утверждать, что к элементарным преобразованиям рассмотренным в предыдущем параграфе, относят преобразования матриц, не изменяющие их ранг.

Теорема 1. *Любую ненулевую матрицу можно с помощью элементарных преобразований привести к единичной матрице, порядок которой будет равен рангу исходной матрицы.*

Понятно, что ранг нулевой матрицы равен нулю.

Проведение преобразований, соответствующих условию теоремы, можно осуществить следующим образом.

Переставим строки и столбцы исходной матрицы (это не изменит ее ранг) таким образом, чтобы на месте элемента a_{11} оказался ненулевой элемент. Поделим элементы первой строки матрицы на a_{11}. Умножая первую строку полученной матрицы на значение элемента матрицы, стоящего на месте a_{21}, вычтем все ее полученные элементы из соответствующих элементов второй строки. В результате на месте элемента a_{21} появится нуль. Описанным способом можно получить нули во всех элементах первого столбца, кроме первого.

Аналогично образуем нули во всех, кроме первого, элементах первой строки.

Оставляя далее «в покое» элементы первой строки и первого столбца, описанную операцию проделаем с элементом a_{22}, получив на его месте единицу и обращая в нуль остальные элементы второго столбца и второй строки. Затем переходим к третьим столбцу и строке и т.д.

Если при преобразовании матрицы образуются нулевые строки или столбцы, их вычеркиваем. В итоге придем к единичной матрице, порядок которой определит ранг исходной матрицы.

Конечно, порядок преобразования матрицы к единичной может быть произвольным.

Пример. Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Вычтем из первой строки вторую для получения единицы на месте a_{11}:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Умножим первую строку на -2 и прибавим полученные значения ее элементов ко второй строке. Затем умножим первую строку на -5 и прибавим значения полученных элементов к третьей строке. В результате получим:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & 9 & -7 \end{pmatrix}.$$

Вычтем элементы первого столбца из соответствующих элементов второго, затем эти же элементы, умноженные на -2, из элементов третьего и, наконец, умноженные на 2, из элементов четвертого столбца:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & 9 & -7 \end{pmatrix}.$$

Вычтем элементы второго столбца, умноженные на 9, из соответствующих элементов третьего столбца и элементы этого же столбца, умноженные на -7, из элементов четвертого столбца:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Два последних столбца полученной матрицы состоят только из нулевых элементов. Эти столбцы вычеркиваем.

Вычитая элементы второй строки из элементов третьей строки и вычеркивая из полученной матрицы последнюю строку как состоящую только из нулевых элементов, приходим к единичной матрице:

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полученная единичная матрица имеет второй порядок. Это максимальный порядок матрицы, порожденной исходной матрицей, с определителем, отличным от нуля. Следовательно,

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A_5 = 2.$$

Отметим еще раз, что порядок проведения элементарных преобразований над матрицами для определения их ранга не имеет значения. Удобно начинать преобразование с тех строк (столбцов), которые уже содержат единичные и максимальное количество нулевых элементов.

1.11. Резюме

Матрицы имеют большое значение в математическом моделировании и решении технических и экономических задач. В частности, к матричной записи можно свести любую систему уравнений и неравенств, а затем использовать для ее решения подходящие методы.

Матрицу $A = (a_{ij})$ характеризуют ее элементы a_{ij}. При принятых обозначениях первый индекс (i) указывает номер строки, второй (j) — номер столбца, на пересечении которых стоит элемент в матрице.

Одной из числовых характеристик квадратной матрицы является определитель.

Линейные операции над матрицами (сложение и умножение на число) обладают теми же свойствами, что и линейные операции над числами: коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность. Что касается произведения матрицы A размера $m \times p$ на матрицу B размера $p \times n$, то оно может иметь место только для совместных матриц (количество столбцов первой матрицы равно числу p строк второй матрицы) и определяется равенством

$$AB = C = (c_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \right).$$

Умножение матриц некоммутативно: $AB \neq BA$.

Операции деления в матрицах не существует. Ее заменяет операция нахождения обратной матрицы, справедливая только для квадратных неособенных матриц. Обратной A^{-1} по отношению A матрицей называется матрица, удовлетворяющая равенству (I — единичная матрица):

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Обратная матрица определяется по формуле (Δ — определитель матрицы $A = (a_{ij})$, A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}):

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}(A_{ij})^T.$$

Важной характеристикой матрицы является ее ранг – наибольший порядок определителя, порожденного матрицей и отличного от нуля. От ранга матрицы коэффициентов зависит существование и единственность решения систем алгебраических уравнений (теорема Кронекера–Капелли, рассмотренная в следующей главе).

В главе рассмотрены основы матричной алгебры. Более глубокое и расширенное изложение этих разделов математики можно найти в [4, 5] и в главе 5.

1.12. Вопросы

1. Что такое матрица? Как определяется ее размер?
2. В элементе a_{ij} матрицы что определяют индексы?
3. Какая матрица называется прямоугольной? квадратной? нулевой? единичной? треугольной? диагональной?
4. Что такое матрица-строка? матрица-столбец?
5. Какие элементы образуют главную диагональ матрицы?
6. Что такое транспонированная матрица? симметричная матрица?
7. Что собой представляет определитель матрицы? Запишите формулы для вычисления определителей первого и второго порядков.
8. Перечислите основные свойства определителей.
9. Что такое алгебраическое дополнение элемента определителя? Запишите формулы разложения определителя по элементам строки и столбца.
10. Какие операции над математическими объектами называются линейными? Перечислите основные свойства линейных операций над матрицами.
11. Что называется произведением матриц? Запишите формулу для определения элементов матрицы произведения. Сформулируйте основные свойства произведений матриц.
12. Как представить систему уравнений в матричном виде?
13. Воспроизведите правило транспонирования произведения матриц.
14. Как возвести матрицу в степень?
15. Что такое обратная матрица? Опишите последовательность вычисления обратной матрицы.
16. Можно ли менять местами операции определения обратной матрицы и транспонирования?
17. Какие преобразования называются элементарными по отношению к матрицам?
18. Что такое ранг матрицы и как его определить методом элементарных преобразований?

Вопросы для тестирования

1. Перечислите характеристики определителя $\Delta = \det(a_{ij})$ и его элементов.

1. Δ — число; 2. $a_{ij} = 1$ при $i = j$; 3. $i \neq j$;
4. i — количество строк; 5. (a_{ij}) — квадратная матрица.

2. Перечислите свойства, характеризующие определитель.

1. Постоянный множитель всех элементов можно вынести за знак определителя.
2. Строки и столбцы равноценны.
3. Определитель не изменится, если элементы любой его строки умножить на числовой множитель.
4. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов его главной диагонали.
5. Среди пунктов 1–4 нет требуемых.

3. Какие утверждения справедливы для $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$ (A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} определителя; $i, j = \overline{1, n}$)?

1. Правило вычисления определителя путем его разложения по элементам k-го столбца при $i = j$.
2. Правило вычисления определителя путем его разложения по элементам i-й строки при $i = j$.
3. Нуль при $i \neq j$.
4. Правило вычисления обратной матрицы.
5. a_{ij} — элементы квадратной матрицы, стоящие на пересечении i-й строки и j-го столбца.

4. Перечислите свойства, справедливые для определителя $\det(a_{ij}) = |a_{ij}|$ (A_{ij} — алгебраические дополнения элемента a_{ij} определителя; $i, j = \overline{1, n}$).

1. $\det\,(a_{ij}) = \det\,(a_{ji})$; 2. $\det\,(a_{ij}) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{kj}$;
3. $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{kj} = \delta_{ij}$; 4. $\det\,(a_{ij}) = 0$, если $a_{ij} = 0$ при $i = j$;
5. $\det\,(-a_{ij}) = -\det\,(a_{ij})$, если n нечетно.

5. Перечислите соотношения, справедливые для обратной матрицы A^{-1} (A^c — союзная матрица; A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A; $\Delta = \det\,A$).

1. $A^c = (A_{ji})$; 2. $A^{-1} = A_{ij}/\Delta$; 3. $A^{-1}A \neq AA^{-1}$;
4. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$; 5. $\Delta \neq 0$, если A — квадратная матрица.

6. Перечислите элементарные преобразования над определителями, не изменяющие их значения.

1. Умножение элементов любой строки на число, не равное нулю.
2. Прибавление к элементам столбцов соответствующих элементов других столбцов.
3. Перестановка любых строк (столбцов).
4. Вычеркивание столбцов, состоящих только из нулевых элементов.
5. Вычеркивание строки и столбца, на пересечении которых стоит нулевой элемент.

7. Перечислите свойства операций, присущих матрицам (A, B, C — матрицы одинаковых размерностей; λ — число).
1. $B+A \neq A+B$; 2. $\lambda(AB) = (\lambda A)B$; 3. $A(BC) = (AB)C$;
4. $\lambda(A+B) = \lambda A + B = A + \lambda B$; 5. $A+(B+C) = (A+B)+C$.

8. Перечислите соотношения, справедливые для произведений квадратных матриц порядка n.

1. $AB = BA$; 2. $A(BC) = (AB)C$; 3. $A^2 = (a_{ij}^2)$;

4. $A(B+C) = AB + AC$; 5. $AB = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

9. Перечислите номера пунктов, правильно описывающих элементарные преобразования над матрицами.

1. Удаление строки, пропорциональной другим строкам;
2. Умножение элементов строки на соответствующие элементы других строк;
3. Умножение любого элемента матрицы на ненулевой множитель;
4. Изменение порядка следования строк;
5. Удаление строк и столбцов, не входящих в главный минор.

10. Перечислите номера пунктов, в которых дано определение ранга матриц A размера $m \times n$.

1. $\min\{m, n\}$; 2. $\max\{m, n\}$; 3. Минор порядка $k = m$;
4. Значение минора максимального порядка, отличного от нуля;
5. В пунктах 1–4 нет правильного определения.

11. Поставьте в соответствие номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка), касающихся определения норм матрицы $A = (a_{ij})$. В местах отсутствия правильных ответов поставьте 5.

1. m-норма (по строкам)	1. $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$,
2. n-норма (по столбцам)	2. $\dfrac{1}{n}\max\limits_{i}\sum\limits_{j=1}^{n}\lvert a_{ij}\rvert$,
3. k-норма (по модулю)	3. $\max\limits_{j}\sum\limits_{i=1}^{n}\lvert a_{ij}\rvert$,
4. Нормированная n-норма	4. $\max\limits_{i}\sum\limits_{j=1}^{n}\lvert a_{ij}\rvert$,

ТЕМА 1.1
(§ 1.2–1.4 теории)

Определители

Вопросы

1. Что собой представляет определитель матрицы?
2. Запишите формулы для вычисления определителей первого и второго порядков.
3. Сформулируйте правило треугольников вычисления определителя третьего порядка и запишите соответствующую правилу формулу.
4. Перечислите основные свойства определителей.
5. Что такое алгебраическое дополнение элемента определителя? Запишите формулы разложения определителя по элементам строк и столбцов.
6. Чему равна сумма произведений элементов i-й строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения другой его строки (столбца)?

Задачи

В задачах 1–4 вычислить определители, используя определение.

1. $\det(-2) = |-2| = -2$. **2.** $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot 0 - (-2)\cdot 4 = 8.$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 5 + 4\cdot 6\cdot 2 + (-2)\cdot 3\cdot 0 -$

$$-(-2)\cdot(-1)\cdot 2-4\cdot 3\cdot 5-1\cdot 6\cdot 0=-21.$$

4. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$

Матрица, порождающая этот определитель, является матрицей преобразования поворота на угол α декартовой ортогональной системы координат.

При решении задач 5 и 6 вычислить определители, используя их свойства.

5. $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} -N2 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0.$

Равенство определителя нулю следует из свойства: определитель, элементы строк (столбцов) которого пропорциональны, равен нулю. Коэффициент пропорциональности первой и третьей строк полученного определителя равен единице.

6. При каких значениях переменных x, y, z обратится в нуль определитель

$$\begin{vmatrix} x & 0 & x^2 \\ 0 & y & 0 \\ z & 0 & z^2 \end{vmatrix} ?$$

Р е ш е н и е. При $x=z$ первая и третья строки определителя становятся равными и определитель обратится в нуль. Кроме того, рассматриваемый определитель будет равен нулю, если одна из переменных равна нулю.

В задачах 7–10 вычислить определители, образовав предварительно нули в элементах их строк (столбцов) и понижая порядок определителей.

7. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2N1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -7 & -3 & 0 \end{vmatrix}.$

Разложим определитель по элементам третьего столбца:

$$\Delta = 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-3)-3\cdot(-7)=15.$$

8.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -N4/2 \\ \\ -N4 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по элементам четвертого столбца и вынесем из первой строки общий множитель 3:

$$\Delta = 3\cdot 2\cdot(-1)^{4+4}\begin{array}{c}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1\\ 0 & -3 & 5\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}\\ \scriptstyle -N1\end{array} = 6\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1\\ 0 & -3 & 5\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} =$$

$$= 6\cdot 1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 1\\ -3 & 5\end{vmatrix} = 6\big(-2\cdot 5 - 1\cdot(-3)\big) = -42.$$

9.

$$\Delta = \begin{array}{cl}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 0 & 3\\ -3 & 0 & 5 & 1\\ -2 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{array}{l} -N2\\ \\ \\ \\ \end{array}\end{array} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 0 & 3\\ -3 & 0 & 5 & 1\\ -2 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = 0.$$

Равенство нулю определителя следует из пропорциональности элементов первой и четвертой строк.

10. $$\Delta = \begin{array}{c}\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3\\ b & b^2 & b^3\\ c & c^2 & c^3\end{vmatrix}\\ \scriptstyle \quad -aN1 \;\; -aN2\end{array} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0\\ b & b(b-a) & b^2(b-a)\\ c & c(c-a) & c^2(c-a)\end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по элементам первой строки. При этом из второй строки вынесем общий множитель $b-a$, а из третьей строки $c-a$. В результате придем к определителю второго порядка:

$$\Delta = a(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} b & b^2\\ c & c^2\end{vmatrix} = abc(a-b)(b-c)(c-a).$$

Определители различного порядка, подобные Δ, называются *определителями Вандермонда*. Они используются при аппроксимации функций.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить определители, используя их определение и свойства.

1. $\det(-2{,}3)$; **2.** $\begin{vmatrix} 2 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}$; **3.** $\begin{vmatrix} x+y & 2x\\ y & x+y\end{vmatrix}$;

4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3\\ 4 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 5\end{vmatrix}$; **5.** $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0{,}5\\ 4 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}$; **6.** $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$.

Вычислить определители, образовав предварительно нули в элементах их строк (столбцов) и понижая порядок определителей до 2.

7. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; **8**. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

9. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; **10**. $\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 \\ b & b^2 & b^3 & b^4 \\ c & c^2 & c^3 & c^4 \\ d & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix}$.

ТЕМА 1.2
(§ 1.5–1.10)

Матрицы

Вопросы

1. Какой математический объект называют матрицей? Как определяется размер матрицы?
2. Что обозначает первый индекс в обозначении a_{ij} элемента матрицы?
3. Какая матрица называется прямоугольной? квадратной? нулевой? единичной? треугольной? диагональной? матрицей-строкой? матрицей-столбцом?
4. Что такое транспонированная матрица? симметричная матрица?
5. Какие операции над матрицами называются линейными? Перечислите основные свойства линейных операций над матрицами.
6. Что называется произведением матриц? Запишите формулу для определения элементов матрицы произведения?
7. Сформулируйте основные свойства произведений матриц. Как возвести матрицу в степень?
8. Что такое обратная матрица? Опишите последовательность вычисления обратной матрицы.
9. Что представляет собой невырожденная матрица? Почему требование невырожденности важно для вычисления обратной матрицы?
10. Можно ли менять местами операции определения обратной матрицы и транспонирование?

Задачи

1. Найти $2A - B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. Вспоминаем, что при произведении матрицы на число каждый элемент матрицы умножается на это число (в отличие от определителя, где на число умножаются элементы одной из строк или одного из столбцов). При суммировании матриц (одинакового размера) складываются соответствующие элементы матриц. Поэтому

$$2A - B = \begin{pmatrix} 2{\cdot}2{-}3 & 2{\cdot}(-3){-}(-5) \\ 2{\cdot}(-1){-}(-1) & 2{\cdot}1{-}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Найти AB, BA, $B^T A^T$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Сравнить полученные результаты.

Р е ш е н и е.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3{\cdot}2{+}(-2){\cdot}(-2) & 3{\cdot}(-4){+}(-2){\cdot}1 \\ -1{\cdot}2{+}0{\cdot}(-2) & -1{\cdot}(-4){+}0{\cdot}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -14 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6{+}4 & -4{+}0 \\ -6{-}1 & 4{+}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \neq AB;$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6{+}4 & -2{+}0 \\ -12{-}2 & 4{+}0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = (AB)^T.$$

3. Найти произведения AA^T и $A^T A$ матриц, образованных вектором-столбцом $\boldsymbol{A} = (2; -1; 0)^T$.

Р е ш е н и е. $AA^T = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2{\cdot}2 & 2{\cdot}(-1) & 2{\cdot}0 \\ (-1){\cdot}2 & (-1){\cdot}(-1) & (-1){\cdot}0 \\ 0{\cdot}2 & 0{\cdot}(-1) & 0{\cdot}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2{\cdot}2 + (-1){\cdot}(-1) + 0{\cdot}0) = (5).$$

Получены матрицы размера 3×3 и 1×1. Матрицы отличаются, в том числе и размером.

4. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ убедиться в справедливости соотношений $A = IA$ и $A = AI$, где I — единичные матрицы: в первом случае размера 2×2, во втором — 3×3.

Р е ш е н и е. $IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1{\cdot}1+0{\cdot}(-1) & 1{\cdot}2+0{\cdot}3 & 1{\cdot}0+0{\cdot}4 \\ 0{\cdot}1+1{\cdot}(-1) & 0{\cdot}2+1{\cdot}3 & 0{\cdot}0+1{\cdot}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = A;$$

$$AI = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = A.$$

5. Найти матрицу, обратную по отношению к матрице

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Найдем определитель матрицы:

$\Delta_A = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}^{+N2} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \{$Разложим определитель по элементам второй строки$\} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad (!).$

Отличие определителя от нуля говорит о невырожденности матрицы. Следовательно, матрица, обратная по отношению к A, существует. Для определения A^{-1} найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы A:

$$A_{11}=+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{21}=-\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{31}=+\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{22}=+\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{13}=+\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{23}=-\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{33}=+\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Из алгебраических дополнений формируем союзную матрицу — это транспонированная матрица алгебраических дополнений — и, поделив ее на $\Delta_A = 1$, получаем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица найдена правильно, если ее произведение справа или слева на исходную матрицу приводит к единичной матрице. Убедимся в этом:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3+0+4 & -3-1+4 & 3-1-2 \\ 2+0-2 & 2+1-2 & -2+1+1 \\ -2+0+2 & -2+0+2 & 2+0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \ (!).$$

6. При каких значениях λ матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & \lambda \\ \lambda & -4 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

не имеет обратной?
Р е ш е н и е. Матрица не имеет обратной, если она вырожденная, т.е. если ее определитель равен нулю. Раскроем и приравняем нулю определитель:

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & \lambda \\ \lambda & -4 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 2(3\lambda^2 + \lambda - 4) = 0.$$

Решая квадратное уравнение, находим два искомых значения λ: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -4/3$.

7. Для производства продукции трех видов предприятие использует сырье двух типов. Нормы затрат сырья на изготовление единиц продукции представлены в таблице

Сырье	Продукция		
	1	2	3
1	3	5	2
2	4	2	3

Стоимость единиц сырья задана матрицей $C = (5,\ 10)^T$.

Требуется определить затраты на производство продукции трех видов в количествах, определяемых матрицей $B = (100,\ 50,\ 100)^T$.
Р е ш е н и е. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} -$$

матрица затрат сырья на производство единиц продукции предприятия. Тогда стоимость производства единиц продукции определится произведением матриц

$$A^T C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 45 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Для определения общих затрат S на производство продукции, количество которой задано матрицей B, найдем произведение матриц

$$S = B^T(A^T C) = (100\ 50\ 150) \begin{pmatrix} 55 \\ 45 \\ 40 \end{pmatrix} = 13750.$$

Отметим, что свойства ассоциативности и транспонирования произведения матриц позволяют вычислить величину затрат при других последовательностях математических действий:

$$S = (B^T A^T)C = C^T(AB) = (C^T A)B.$$

8. Определить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. Для определения ранга матрицы выделим в ней единичную подматрицу, используя элементарные преобразования. На первом шаге прибавим к элементам третьей и четвертой строк умноженные на 2 элементы первой строки:

$$\begin{array}{l}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ {\scriptstyle +2N1} \\ {\scriptstyle +2N1}\end{array}\end{array} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 4 \\ 9 & 0 & 0 & 8 & 3 \\ 12 & 0 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

В полученной матрице второй столбец содержит только нули и одну единицу в первой строке. Этот столбец используем для получения нулей во всех элементах первой строки, кроме второго. Для этого достаточно умножить элементы второго столбца на -5 и прибавить их к соответствующим элементам первого столбца, затем умножить на $+2$ и прибавить к элементам третьего столбца и т.д. В результате все элементы первой строки, кроме второго, обратятся в нули, а остальные элементы матрицы не изменятся.

Из элементов четвертой строки полученной матрицы вычтем элементы второй строки:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 4 \\ 9 & 0 & 0 & 8 & 3 \\ 12 & 0 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ {\scriptstyle -N2}\end{array} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 4 \\ 9 & 0 & 0 & 8 & 3 \\ 9 & 0 & 0 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Элементы последних двух строк матрицы совпадают. Одну из этих строк можно сделать нулевой, вычитая из ее элементов элементы равной ей строки. После этого нулевую строку вычеркиваем. Поделим элементы третьего столбца на 2 и с помощью полученной единственной в третьем столбце единицы (остальные элементы третьего столбца нулевые) образуем нули в первом, втором, четвертом и пятом элементах второй строки:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Поделив элементы первого столбца на девять (можно четвертый столбец поделить на 8 или пятый на 3), образуем с помощью полученной единицы нули в четвертом и пятом элементах третьей строки. В результате получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычеркнем нулевые четвертый и пятый столбцы матрицы и переставим оставшиеся столбцы: третий на место второго, второй на место первого и первый на место третьего. В результате получим единичную матрицу третьего порядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ранг исходной матрицы равен трем: $\operatorname{rang} A = 3$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти AB, BA, $A + B^T$ и $A^T + B$, если

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\quad B = A^T$. $\qquad$ **3**. $A = (1\ 2\ -1)$; $\quad B = A^T$.

Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

доказать справедливость соотношений:

4. $\det(AB) = detA \det B = \det(BA)$, **5.** $(AB)^T = B^T A^T \neq A^T B^T$.

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -10 \end{pmatrix}$ найти:

6. A^2; **7.** A^{-1};

убедиться в справедливости соотношений:

8. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$; **9.** $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

10. Определить ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Глава 2

Системы линейных уравнений

2.1. Матричный метод решения систем уравнений

Рассмотрим частный случай систем линейных алгебраических уравнений, а именно, систему, в которую входит n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2.1}$$

Ссылаясь на соотношения примера 3 § 1.6, запишем уравнения (2.1) в матричном виде:

$$AX = B, \tag{2.2}$$

где

$$\underset{n\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \underset{n\times 1}{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}; \quad \underset{n\times 1}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Считая матрицу A невырожденной, умножим обе части матричного уравнения (2.2) **слева** на матрицу A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Имея в виду соотношения $A^{-1}AX = \left(A^{-1}A\right)X = IX = X$, запишем решение матричного уравнения (2.2) в виде

$$X = A^{-1}B \qquad (\neq BA^{-1}). \tag{2.4}$$

Описанный метод решения систем линейных уравнений называется *матричным методом*, или *методом обратной матрицы.* Использование его возможно только в случае, если матрица A неособенная (невырожденная).

Пример 1. Матричным методом найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Найдем определитель матрицы A:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{+N2}{=} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -16 \neq 0.$$

Так как матрица A невырожденная (определитель не равен нулю), обратная по отношению к ней матрица существует и единственная § 1.7.

Найдем все алгебраические дополнения матрицы A:

$$\begin{array}{lll} A_{11} = -4; & A_{21} = -4; & A_{31} = 0; \\ A_{12} = -1; & A_{22} = 7; & A_{32} = -4; \\ A_{13} = 3; & A_{23} = -5; & A_{33} = -4 \end{array}$$

и сформируем обратную матрицу (1.16):

$$A^{-1} = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -1 & 7 & -4 \\ 3 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Получим решение системы, используя формулу (2.4):

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -1 & 7 & -4 \\ 3 & -5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -8 & -8 & +0 \\ -2 & +14 & -28 \\ 6 & -10 & -28 \end{pmatrix} = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -16 \\ -16 \\ -32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим еще один метод решения систем линейных алгебраических уравнений, вытекающий из матричного метода.

Представим решение (2.4) в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix},$$

где

$$\Delta_i = \sum_{k=1}^{n} A_{ki} b_k \qquad (i = \overline{1, n}).$$

Из последнего соотношения следует, что Δ_i — это определитель, образованный путем замены в Δ элементов i-го столбца на свободные члены.

Таким образом,

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \qquad (i = \overline{1, n}). \tag{2.5}$$

Решения (2.5) уравнений (2.1) называются *формулами Крамера,* а метод решения — *методом Крамера* или *методом определителей.*

Пример 2. Методом Крамера найти решение системы уравнений примера 1.

Р е ш е н и е. Найдем определители Δ_i:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -16; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -16;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -32.$$

Подставим найденные значения в формулы Крамера (2.5) (значение $\Delta = -16$ было найдено в примере 1):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-16}{-16} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-16}{-16} = 1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-32}{-16} = 2.$$

Значения искомых переменных, как и следовало ожидать, совпадают с решением систем уравнений, полученным в примере 1 матричным методом.

Как и при использовании матричного метода, формулы Крамера применимы только в случае, когда $\Delta \neq 0$.

2.2. Метод Гаусса–Жордана решения систем уравнений

В предыдущем параграфе рассматривалась система n линейных уравнений, содержащая n неизвестных. Для получения решения таких систем в случае их невырожденности (определитель матрицы коэффициентов не равен нулю) предлагалось использовать матричный метод, или метод Крамера.

К системам линейных алгебраических уравнений сводятся математические модели многих реальных задач. В этих моделях далеко не всегда количество неизвестных равно количеству уравнений.

В общем случае будем рассматривать системы m уравнений с n неизвестными:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}\right. \tag{2.6}$$

Коэффициенты a_{ij} $(i{=}\overline{1,m}; j{=}\overline{1,n})$ образуют матрицу A размера $m{\times}n$ коэффициентов системы уравнений; правая часть уравнений — величины b_i — матрицу-столбец B *свободных членов* размера $m \times 1$; неизвестные x_j — матрицу-столбец X неизвестных размера $m \times 1$:

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \underset{m\times 1}{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}; \quad \underset{n\times 1}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

С учетом введенных обозначений систему уравнений представим в матричном виде:

$$\underset{m\times n}{A} \quad \underset{n\times 1}{X} = \underset{m\times 1}{B}.$$

Если матрица $B = \Theta$ (все элементы правой части нулевые), то уравнения называются *однородными.*

Неотрицательные решения x_j, удовлетворяющие системе уравнений (2.6), называют *допустимыми.* Отрицательные решения системы называют *недопустимыми.* Последние термины пришли из экономики и связаны с тем, что, например, отрицательная прибыль считается недопустимой при планировании работы предприятия.

Из школьного курса алгебры известно, что решение системы уравнений не изменится, если: к любому ее уравнению прибавить другое уравнение, умноженное на любое число; какие-либо уравнения в системе поменять местами; умножить любое уравнение на отличный от нуля множитель; исключить из системы уравнений тождества.

Перечисленные действия над уравнениями системы перекликаются с элементарными преобразованиями над матрицами (§ 1.9).

Отметим, что решение системы полностью определяется ее коэффициентами и свободными членами и не зависит от того, каким образом обозначить неизвестные. Поэтому вместо системы (2.6) можно рассмотреть *расширенную матрицу* P. Предположим первоначально, что количество уравнений и неизвестных совпадают ($m = n$), тогда

$$\underset{n\times(n+1)}{P} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \text{св} \end{array} \end{array}. \tag{2.7}$$

Под столбцами матрицы проставлены соответствующие им переменные из системы уравнений. Последняя позиция в поясняющей строке («св») относится к свободным членам системы.

Преобразования расширенной матрицы будем осуществлять, следуя описанным допустимым действиям над уравнениями. Это будет соответствовать элементарным преобразованиям строк (но не столбцов!) расширенной матрицы.

Образовав на месте элемента a_{11} единицу, с ее помощью получим нули во всех остальных элементах первого столбца расширенной матрицы. Для этого первую строку матрицы P (с единицей на месте элемента a_{11}) умножим на $-a_{21}$ и прибавим ее элементы к соответствующим элементам второй строки матрицы (второму уравнению системы); ту же первую строку умножим на $-a_{31}$ и добавим ее элементы к элементам третьей строки и т.д. до последней строки. В результате в первом столбце расширенной матрицы (коэффициенты при x_1 в уравнениях) будут стоять: единица в первой строке и нули во всех остальных строках (уравнениях):

$$P_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right).$$

Образуем далее единицу на месте коэффициента a'_{22} и нули в оставшихся элементах второй строки. И так далее до тех пор, пока матрица коэффициентов не превратится в единичную:

$$P_2 = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b''_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b''_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b''_n \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \text{св} \end{array} \end{array}.$$

Возвращаясь к матрице P, вспомним, что первый столбец матрицы P_2 образуют коэффициенты, стоящие в системе при x_1, второй — при x_2 и т.д. В результате описанных преобразований система уравнений примет вид

$$\begin{cases} 1{\cdot}x_1 + 0{\cdot}x_2 + \ldots + 0{\cdot}x_n = b_1'', \\ 0{\cdot}x_1 + 1{\cdot}x_2 + \ldots + 0{\cdot}x_n = b_2'', \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ 0{\cdot}x_1 + 0{\cdot}x_2 + \ldots + 1{\cdot}x_n = b_n'' \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1'' \\ b_2'' \\ \vdots \\ b_n'' \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в результате преобразований получено решение системы уравнений. Изложенный метод называется *методом Гаусса–Жордана.*

Пример. Методом Гаусса–Жордана получить решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Составим расширенную матрицу и преобразуем ее по методу Гаусса–Жордана:

$$P = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} {\scriptstyle +N2} \\ \\ {\scriptstyle -2N2} \end{array} \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} {\scriptstyle :4} \\ {\scriptstyle -N1/4} \\ {\scriptstyle +N1/4} \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle +N3/4} \\ {\scriptstyle :4} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ {\scriptstyle x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \text{св}} \end{array} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2.3. Теорема Кронекера–Капелли

Пусть задана система m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.8}$$

Составим матрицу A коэффициентов этой системы и расширенную матрицу P:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad P = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{2.9}$$

О совместности систем уравнений можно судить по следующей теореме.

Теорема (Кронекера–Капелли). *Система линейных алгебраических уравнений будет совместной тогда и только тогда, когда ранг матрицы A ее коэффициентов и ранг расширенной матрицы P равны.*

Относительно системы (2.8) можно сформулировать следующее, вытекающее из теоремы Кронекера–Капелли, утверждение. *Система линейных алгебраических уравнений в случаях, если:*

1) $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} P = n$, *имеет единственное решение;*

2) $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} P < n$, *имеет бесчисленное множество решений;*

3) $\operatorname{rang} A < \operatorname{rang} P$, *не имеет решений (несовместна).*

Рассмотрим каждый из перечисленных случаев.

Случай 1 ($\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} P = n$) рассмотрен в предыдущем параграфе. Для него преобразования Гаусса–Жордана приводят к единственному решению системы уравнений.

Убедиться в том, что ранг расширенной матрицы в этом случае совпадает с рангом матрицы коэффициентов не представляет труда. Действительно, с помощью единственных единиц (остальные нули) в столбцах матрицы P_2 из § 2.2 легко обратить в нули и отбросить правый столбец (свободных членов) этой матрицы (Элементарные преобразования над столбцами матрицы при определении ее ранга правомерны). Этим доказывается равенство рангов матрицы коэффициентов и расширенной матрицы.

Случай 2 ($\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} P = k < n$).

Элементарные преобразования над строками расширенной матрицы P (2.9) в этом случае преобразуют ее к виду

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1,k+1} & a'_{1,k+2} & \dots & a'_{1,n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2,k+1} & a'_{2,k+2} & \dots & a'_{2,n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{k,k+1} & a'_{k,k+2} & \dots & a'_{k,n} & b'_k \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_k & x_{k+1} & x_{k+2} & \dots & x_n & \text{св} \end{array} \end{array}. \qquad (2.10)$$

Матрица содержит k строк, если $\operatorname{rang} P = k$. Оставшиеся $m - k$ строк, ставшие нулевыми, отбрасываются.

Переменные x_1, x_2, $\dots$, x_k, коэффициенты при которых в результате преобразований стали равными единице, называют *основными переменными,* а единичная матрица — базисной матрицей или базисным минором. Остальные переменные системы уравнений, а именно x_{k+1}, $x_{k+2}, \dots$, x_n — *неосновными*, или *свободными переменными.*

Из (2.10) после возвращения к системе уравнений (под столбцами преобразованной матрицы P проставлены соответствующие им переменные) и перенесения слагаемых со свободными переменными в правые части уравнений получим решение:

$$\begin{array}{l} x_1 = b'_1 - a'_{1,k+1}x_{k+1} - a'_{1,k+2}x_{k+2} - \ldots - a'_{1,n}x_n, \\ x_2 = b'_2 - a'_{2,k+1}x_{k+1} - a'_{2,k+2}x_{k+2} - \ldots - a'_{2,n}x_n, \\ \ldots\ \ldots\qquad \ldots\qquad\quad \ldots\qquad\quad \ldots\qquad \ldots \\ x_k = b'_k - a'_{k,k+1}x_{k+1} - a'_{k,k+2}x_{k+2} - \ldots - a'_{k,n}x_n. \end{array} \tag{2.11}$$

Решение (2.11), называемое *общим решением* системы уравнений, неоднозначно. Это решение зависит от произвольности выбора свободных переменных.

При любых фиксированных значениях переменных x_{k+1}, $x_{k+2}, \ldots, x_n$ получаются *частные решения* системы уравнений. Одним из частных решений является решение при нулевых значениях свободных переменных. Это решение назовем *базисным:*

$$x_1 = b'_1, \quad x_2 = b'_2, \quad \ldots, \quad x_k = b'_k.$$

Базисное решение зависит от выбора основных переменных.

Пример 1. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 6x_5 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 5. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Составим расширенную матрицу и преобразуем ее по методу Гаусса-Жордана:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 4 & 6 & 6 & 3 \\ 3 & -4 & 6 & 8 & 9 & 5 \end{array}\right)_{-N1} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 4 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right)^{-2N2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right)^{\cdot(-1)}_{-N1} \Longrightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right). \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \end{array}$$

В результате преобразований выделен единичный базисный минор, состоящий из множителей при переменных x_1 и x_2. Таким образом, выбрав в качестве основных переменных x_1 и x_2, получим общее решение:

$$\begin{array}{l} x_1 = 3 - 2x_3 - 3x_5; \\ x_2 = 1 + 2x_4\ . \end{array}$$

Базисными решениями для этой комбинации основных переменных (при $x_3 = x_4 = x_5 = 0$) являются допустимые (положительные) значения основных переменных:

$$x_1 = 3; \qquad x_2 = 1.$$

Случай 3 ($\operatorname{rang} A = k < \operatorname{rang} P$).

Преобразование расширенной матрицы P (2.9) по методу Гаусса–Жордана приводит в этом случае к следующей ее форме:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & b'_k \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b'_{k+1} \end{array}\right). \tag{2.12}$$

В рассматриваемом случае $\operatorname{rang} P = k + 1 > \operatorname{rang} A = k$.

Не равный нулю коэффициент b'_{k+1} (в случае равенства его нулю ранги матриц A и P были бы равными) в правой части уравнения, соответствующего последней строке матрицы (2.12), приравнен нулю (левая часть последнего уравнения). Это противоречит условию рассматриваемого случая. Следовательно, система уравнений противоречива (несовместна, не имеет решения).

Пример 2. Найти решение системы уравнений или доказать ее несовместность:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 = -1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Запишем и преобразуем расширенную матрицу P:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right)^{+N2-N3} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Дальнейшие преобразования расширенной матрицы неуместны, так как первая строка матрицы указывает на несовместность системы уравнений. Для этой системы $\operatorname{rang} P = 3$; $\operatorname{rang} A = 2$.

2.4. Однородные системы уравнений

Пусть задана однородная система m уравнений с n неизвестными. У такой системы, в отличие от (2.8), все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Ранг расширенной матрицы однородной системы уравнений всегда равен рангу матрицы коэффициентов, так как правый столбец матрицы P

нулевой и его можно отбросить при определении ранга матрицы. Поэтому для однородной системы уравнений условия существования и единственности решения могут быть сформулированы следующим образом.

Однородная система линейных алгебраических уравнений в случаях, если:

1) $\operatorname{rang} A = n$, *имеет единственное решение, причем это решение нулевое (тривиальное)*;

2) $\operatorname{rang} A < n$, *имеет бесчисленное множество решений.*

Случай 1. Для того чтобы убедиться в справедливости утверждения пункта 1 теоремы, достаточно сослаться на решение (2.5) системы методом Крамера. В этих решениях $\Delta \neq 0$ (так как $\operatorname{rang} A = n \leq m$) и определитель Δ должен определяться по коэффициентам тех уравнений, которые при преобразованиях Гаусса–Жордана не обращаются тождественно в нуль.

Что касается определителей Δ_i, то они обратятся в нули, так как в каждом из них хотя бы один столбец представляет собой столбец нулевых свободных членов системы уравнений.

Случай 2 совпадает со случаем 2 теоремы Кронекера-Капелли и в дополнительном доказательстве не нуждается.

Пример. Определить множитель λ, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0, \\ x - 2y + 2z = 0, \\ 3x + y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальные решения. Найти эти решения.

Р е ш е н и е. Однородная система уравнений имеет ненулевые решения только в случае, если ранг ее коэффициентов меньше количества неизвестных. В заданной системе количество неизвестных равно трем и ранг матрицы коэффициентов должен быть не больше двух. Поэтому определитель матрицы коэффициентов (квадратной матрицы третьего порядка) должен быть равен нулю. Это условие используем для определения λ:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & \lambda \end{vmatrix}_{-N1-N2} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 1)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7(\lambda - 1) = 0, \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 1.$$

Расширенную матрицу однородной системы уравнений составлять не имеет смысла, так как преобразования Гаусса с нулевыми элементами столбца свободных членов в любом случае оставят их нулевыми. Поэтому составим только матрицу коэффициентов системы с учетом полученного для λ

значения и преобразуем ее по методу Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ {\scriptstyle +N1} \\ {\scriptstyle -N1-N2} \end{matrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{+N2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} {\scriptstyle :4} \\ {\scriptstyle -N1/4} \end{matrix} \Longrightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5/4 & 1 & 0 \\ 7/4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \scriptstyle x \quad\;\; y \quad\; z \end{array}.$$

Выбрав в качестве основных переменных y и z (множители перед этими переменными равны единицам и образуют единичную матрицу), выразим их через свободную переменную x :

$$y = -\frac{5}{4}x; \qquad z = -\frac{7}{4}x.$$

Это решение часто удобно представить в параметрическом виде, обозначая, например, $x = t$. Тогда

$$x = t, \qquad y = -\frac{5}{4}t; \qquad z = -\frac{7}{4}t.$$

Таким образом, получено зависящее от значения параметра t общее решение заданной однородной системы уравнений при $\lambda = 1$.

При $\lambda \neq 1$ возможны только нулевые решения этой системы.

2.5. Определение обратной матрицы с использованием преобразований Гаусса–Жордана

Преобразования Гаусса–Жордана можно использовать для нахождения обратных матриц.

Предположим, что требуется найти матрицу A^{-1}, обратную по отношению к невырожденной квадратной матрице A.

Сопоставим с матрицей A единичную матрицу I: $A|I$.

Проделаем над строками расширенной матрицы $A|I$ такие преобразования Гаусса–Жордана, которые обратят матрицу A в единичную. Это равнозначно умножению матрицы A на матрицу A^{-1}. Но при одновременном преобразовании матриц A и I единичная матрица превратится в $IA^{-1} = A^{-1}$. То есть в расширенной матрице на месте единичной матрицы будет образована матрица A^{-1}, обратная по отношению к A.

Продемонстрируем описанные преобразования на примере.

Пример. Пусть требуется найти матрицу, обратную по отношению к

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Составим расширенную матрицу, присоединяя к A единичную матрицу I, и проделаем над строками полученной матрицы описанные преобразования Гаусса–Жордана:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ {\scriptstyle -3N3} \\ {\scriptstyle \times(-1)} \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} {\scriptstyle +N2} \\ {\scriptstyle :(-2)} \\ \\ \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 3/2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} {\scriptstyle \times(-1)} \\ \\ {\scriptstyle -N1} \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

В правой части расширенной матрицы стоит обратная по отношению к A матрица:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Она совпадает с обратной матрицей, полученной в примере § 1.7 путем вычисления присоединенной матрицы.

Замечание. При получении обратной матрицы с помощью преобразования Гаусса-Жордана нельзя менять местами строки в матрице $A|I$.

2.6. Резюме

Условия существования и единственности решений системы m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными напрямую зависят от рангов матриц коэффициентов A и расширенной матрицы P системы. Эти условия сформулированы в следующей теореме (Кронекера–Капелли).

Система линейных алгебраических уравнений в случае, если:
1) $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = n$, имеет единственное решение;
2) $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B < n$, имеет бесчисленное множество решений;
3) $\operatorname{rang} A < \operatorname{rang} B$, не имеет решений (несовместна).

Универсальным методом решения систем линейных алгебраических уравнений является метод Гаусса–Жордана, согласно которому в подматрице коэффициентов расширенной матрицы системы путем элементарных преобразований ее строк выделяется единичная матрица с рангом $\operatorname{rang} A$. Единичные элементы этой матрицы стоят в столбцах коэффициентов при неизвестных, и поэтому эти неизвестные равны элементам матрицы-столбца соответствующих свободных членов (стоят в тех же строках расширенной матрицы, что и единицы в матрице коэффициентов).

Однородные системы уравнений могут иметь или нулевые решения для всех неизвестных (если матрица их коэффициентов невырожденная), или, в случае вырожденности матрицы коэффициентов, бесчисленное множество решений.

Преобразования Гаусса–Жордана эффективно используются для нахождения обратных матриц.

Описание методов решения систем уравнений имеется в [1, 2, 5, 6, 8].

2.7. Вопросы

1. Как записать систему уравнений в матричном виде?
2. Что собой представляет матричный метод решения систем линейных уравнений? метод определителей?
3. Какая система уравнений называется однородной?
4. Опишите последовательность решения систем уравнений методом Гаусса–Жордана.
5. Как формируется расширенная матрица систем уравнений? К какому виду она приводится в итоге преобразования по методу Гаусса–Жордана?
6. Сформулируйте теорему Кронекера–Капелли: для общего вида систем уравнений; для однородных систем.

Вопросы для тестирования

1. Перечислите соотношения, определяющие решение $X = (x_i)$ системы уравнений $AX = B$ матричным методом и методом определителей (A — матрица коэффициентов, B — матрица свободных членов).
1. BA^{-1}; 2. $A^{-1}B$; 3. A^c/Δ; 4. Δ_i/Δ; 5. B/Δ.

2. Перечислите утверждения, справедливые для множеств допустимых решений систем уравнений.

1. Неотрицательные значения основных переменных, удовлетворяющие системе уравнений.

2. Любые значения свободных переменных.

3. Решения, получаемые при условии, что свободные переменные равны нулю.

4. Любые частные положительные решения.

5. Среди пунктов 1–4 нет требуемых.

3. Какие утверждения справедливы согласно теореме Кронекера–Капелли (A — матрица коэффициентов; P — расширенная матрица; m — количество уравнений; n — количество неизвестных)?

1. Если $\operatorname{rang} A < \operatorname{rang} P$, система имеет бесчисленное множество решений.

2. Если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} P = n$, система имеет единственное решение.

3. Если определитель коэффициентов равен нулю, то однородная система имеет бесчисленное множество решений.

4. Если определитель коэффициентов не равен нулю, то однородная система не имеет решений.

5. Если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} P < n$, система не имеет решений.

4. Какие преобразования над расширенной матрицей допустимы при решении систем уравнений методом Гаусса–Жордана?

1. Вычеркивание строки, элементы которой пропорциональны соответствующим элементам другой строки.

2. Перестановка строк или столбцов.

3. Добавление к элементам строк соответствующих элементов других строк.

4. Вычеркивание строки и столбца, на пересечении которых стоит нулевой элемент.

5. Умножение всех элементов любого столбца на отличный от нуля множитель.

ТЕМА 2.1
(§ 2.1 теории)
Матричные уравнения
Вопросы

1. Что собой представляет невырожденная матрица
2. Почему при определении решения матричного уравнения в правой части решения нельзя менять местами обратную матрицу коэффициентов системы уравнений и матрицу свободных членов?
3. Что собой представляет матричный метод решения систем уравнений? метод определителей?

4. Опишите последовательность определения решения систем уравнений методом обратной матрицы? методом определителей?

Задачи

1. Матричным методом (методом обратной матрицы) найти решение системы уравнений $\begin{cases} x+3y-z=4, \\ -x+2y+z=6, \\ 3x+4y-4z=-1. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Введенные матрицы позволяют записать исходную систему в матричном виде: $AX = B$.

Если матрица A невырожденная, то, умножая матричное уравнение на A^{-1} слева, придем к искомому решению:

$$X = A^{-1}B. \tag{2.14}$$

Обратить внимание на то, что $X \neq BA^{-1}$. Произведение матриц некоммутативно!

Найдем определитель, образуя предварительно нули в элементах его третьего столбца. Для этого к элементам третьего столбца определителя прибавим соответствующие элементы первого столбца:

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 2 - 3 \cdot (-1)) = -5 \neq 0.$$

Определитель отличен от нуля, поэтому матрица A невырожденная и обратная матрица существует. Найдем все алгебраические дополнения матрицы A:

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -12; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{31} = +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -10; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5.$$

Поделив образованную из алгебраических дополнений союзную матрицу на определитель, получим обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -12 & 8 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ -10 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 & -8 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 10 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Подставим полученное выражение для A^{-1} и матрицу B в (2.14) и раскроем матричное произведение:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 & -8 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 10 & -5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12\cdot 4+(-8)\cdot 6+(-5)\cdot(-1) \\ 1\cdot 4+1\cdot 6+0\cdot(-1) \\ 10\cdot 4+(-5)\cdot 6+(-5)\cdot(-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица-столбец представляет собой искомое решение.

Подставим найденные значения неизвестных в исходные уравнения для того, чтобы убедиться в правильности решения:

$$\begin{cases} 1+3\cdot 2 \quad -3 = \quad 4 \quad (!), \\ -1+2\cdot 2 \quad +3 = \quad 6 \quad (!), \\ 3\cdot 1+4\cdot 2 -4\cdot 3 = -1 \quad (!). \end{cases}$$

Все уравнения превратились в равенства, что подтверждает правильность найденного решения.

2. Систему уравнений задачи 1 решить методом Крамера.

Р е ш е н и е. Согласно методу Крамера неизвестные в заданной системе уравнений определяются по формулам:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \tag{2.15}$$

Здесь $\Delta = \Delta_A = -5$ — определитель матрицы коэффициентов системы уравнений (найден в задаче 1); Δ_x, Δ_y, Δ_z — определители матриц, в которых вместо столбцов коэффициентов соответственно при неизвестных x, y, z стоит вектор-столбец свободных членов (матрица B).

Найдем эти определители:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 4\cdot 2\cdot(-4) + 3\cdot 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 6\cdot 4 -$$

$$-(-1)\cdot 2\cdot(-1) - 3\cdot 6\cdot(-4) - 4\cdot 1\cdot 4 = -5;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 1\cdot 6\cdot(-4) + 4\cdot 1\cdot 3 + (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) -$$

$$-(-1)\cdot 6\cdot 3 - 4\cdot(-1)\cdot(-4) - 1\cdot 1\cdot(-1) = -10;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot(-1) + 3\cdot 6\cdot 3 + 4\cdot(-1)\cdot 4 -$$

$$-4\cdot 2\cdot 3 - 3\cdot(-1)\cdot(-1) - 1\cdot 6\cdot 4 = -15.$$

Подставляя полученные значения определителей в формулы (2.15), найдем требуемые неизвестные:

$$x = \frac{-5}{-5} = 1, \quad y = \frac{-10}{-5} = 2, \quad x = \frac{-15}{-5} = 3.$$

О правильности решения говорит его совпадение с решением, полученным в предыдущей задаче матричным методом.

Задачи для самостоятельного решения

Системы уравнений

$$\begin{cases} x-3y=4, \\ 2x+\ y=1 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3=-4, \\ 3x_1+\ x_2+\ x_3=\ 1, \\ 4x_1+2x_2+3x_3=\ 0 \end{cases}$$

решить:

1. Методом обратной матрицы.

2. Методом определителей.

3. Проверить правильность полученных решений путем их подстановки в заданные уравнения и сравнением результатов двух решений.

ТЕМА 2.2
(§ 2.2–2.5 теории)

Системы линейных уравнений

Вопросы

1. Как формируется расширенная матрица систем уравнений?
2. Опишите последовательность решения систем уравнений методом Гаусса–Жордана. К какому виду при этом приводится матрица коэффициентов?
3. Сформулируйте теорему Кронекера–Капелли для систем уравнений общего вида и для однородных систем уравнений.
4. Изобразите конечный вид расширенной матрицы систем уравнений для всех вариантов систем, в том числе для однородных.

Задачи

1. Систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ x - y = 5 \end{cases}$$

решить:

1) методом исключения неизвестных;

2) путем преобразования расширенной матрицы системы методом Гаусса-Жордана.

Р е ш е н и е.

1. Умножим второе уравнение системы на 3 и прибавим полученное уравнение к первому:

$$\begin{cases} 5x = 15, \\ x - y = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ 3 - y = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = -2. \end{cases}$$

2. Составим расширенную матрицу системы и путем элементарных преобразований строк преобразуем ее к единичной:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}\right)^{+3N2} \Longrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 5 & 0 & 15 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}\right)\begin{matrix} :5 \\ \cdot(-1) \end{matrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -5 \end{array}\right)_{+N1} \Longrightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right). \\ \begin{array}{ccc} x & \;y & \;\text{св} \end{array} \end{array}$$

Первый столбец полученной матрицы соответствует коэффициентам при неизвестной x, второй — при y, третий — свободным членам. Если после проделанных преобразований вернуться к системе уравнений, то получим:

$$\begin{cases} 1{\cdot}x + 0{\cdot}y = \ \ 3, \\ 0{\cdot}x + 1{\cdot}y = -2. \end{cases}$$

Отсюда: $x = 3$, $y = -2$.

То есть решение системы уравнений (столбец свободных членов преобразованной матрицы) соответствует неизвестным, коэффициенты при которых стали равными единице.

Решение системы линейных уравнений единственно, поэтому разные методы преобразования исходных уравнений привели (и не могли не привести) к одному результату.

В задачах 2–4 методом Гаусса–Жордана найти решения систем уравнений или доказать их несовместимость.

2. $\begin{cases} x + 3y - z = 4, \\ -x + 2y + z = 6, \\ 3x + 4y - 4z = -4. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем матрицу коэффициентов при ее неизвестных к единичной:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & -4 & -4 \end{array}\right)\begin{array}{l} {\scriptstyle +N2} \\ \\ {\scriptstyle +4N2} \end{array} \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 5 & 0 & 10 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \\ -1 & 12 & 0 & 20 \end{array}\right)\begin{array}{l} {\scriptstyle :5} \\ {\scriptstyle -N3} \\ {\scriptstyle \cdot(-1)} \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -10 & 1 & -14 \\ 1 & -12 & 0 & -20 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ {\scriptstyle +10N1} \\ {\scriptstyle +12N1} \end{array} \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Так как матрица коэффициентов свелась к единичной матрице третьего порядка, то ранг исходной матрицы равен трем. Ранг расширенной матрицы также равен трем. В этом легко убедиться, вычитая из последнего столбца последней записи преобразованной расширенной матрицы первый столбец, умноженный на 4, второй столбец, умноженный на 2, и третий столбец, умноженный на 6. В результате столбец свободных членов станет нулевым, и его можно вычеркнуть при определении ранга матрицы. Так как ранг матрицы коэффициентов и ранг расширенной матрицы равны, то согласно теореме Кронекера–Капелли система имеет единственное решение — $\operatorname{rang} A$ совпадает с количеством неизвестных.

3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 6, \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -3. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем одну из подматриц коэффициентов при ее неизвестных к единичной матрице:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & -5 & 6 \\ -1 & 3 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} {\scriptstyle -2N3} \\ {\scriptstyle +N3} \\ \end{array} \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & -3 & 3 & -3 & 12 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} {\scriptstyle :-3} \\ {\scriptstyle :2} \\ \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle -2N1} \\ {\scriptstyle -N1} \end{array} \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle :3} \\ \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} {\scriptstyle +N2} \\ \\ \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} {\scriptstyle x_1} & {\scriptstyle x_2} & {\scriptstyle x_3} & {\scriptstyle x_4} & {\scriptstyle \text{св}} \end{array} \end{array}.$$

В матрице коэффициентов выделена единичная подматрица. Под столбцами этой матрицы стоят неизвестные x_1, x_2 и x_3, которые принимаем за базовые. Оставшееся неизвестное x_4 относим к свободным неизвестным и переносим в правую часть матрицы, заменив знаки в его коэффициентах на противоположные:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{rrr|rr} 0 & 1 & 0 & -2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} {\scriptstyle x_1} & {\scriptstyle x_2} & {\scriptstyle x_3} & {\scriptstyle \text{св}} & {\scriptstyle x_4} \end{array} \end{array}$$

Вытекающее из последней матрицы решение (выражение основных переменных через свободную переменную) будет таково:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2x_4, \\ x_2 = -2 - x_4/3, \\ x_3 = 2 + 2x_4/3. \end{cases}$$

В рассмотренном примере ранг матрицы коэффициентов равен рангу расширенной матрицы ($\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = 3$), а количество неизвестных ($n = 4$) превосходит количество уравнений $m = \operatorname{rang} A = 3$. Записанное общее решение системы подтверждает справедливость теоремы Кронекера–Капелли о бесконечном множестве ее частных решений. Каждому из бесчисленного множества значений свободной переменной x_4 соответствуют определенные частные решения (значения основных переменных). Например, при $x_4 = 0$ получим: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$.

Убедиться в правильности найденного общего решения (и каждого из частных решений) можно, подставив его в исходную систему уравнений.

Конечно, в качестве основных можно выбрать и другие неизвестные, рассмотрев отличные от приведенных выше варианты преобразования матрицы коэффициентов. Если, например, в качестве основных выбрать переменные x_1, x_3 и x_4, то в процессе преобразований по методу Гаусса–Жордана в единичную матрицу следует превратить подматрицу матрицы коэффициентов, столбцами которой будут коэффициенты при этих переменных.

Для получения такого решения воспользуемся матрицей, полученной после третьего шага ранее проделанных преобразований:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} +N2 \\ \\ +N2 \end{array} \Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ +N1 \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & -11 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \text{св} \end{array} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -11 & -6 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_3 & x_4 & \text{св} & x_2 \end{array} \end{array}.$$

Последняя матрица получена из предпоследней переносом в правую часть (следовательно, сменой знака) второго столбца. Этим действием выбраны основные переменные x_1, x_3 и x_4, а x_2 становится свободной переменной.

Последняя матрица позволяет записать решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = -11 - 6x_2, \\ x_3 = \ \ -2 - 2x_2, \\ x_4 = \ \ -6 - 3x_2. \end{cases}$$

Одно из частных решений системы, полученное при $x_2 = -2$: $x_1 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$, совпадает с частным решением первого варианта решения.

4. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 = -3, \\ \ \ x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 = \ \ 1, \\ \ \ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = \ \ 0. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем матрицу коэффициентов при ее неизвестных к единичной:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} -2N2 \\ \\ -N2 \end{array} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & -5 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{c} :5 \\ +N1/5 \\ -N1 \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

Вид полученной матрицы говорит о следующем.

Ранг матрицы коэффициентов A оказался меньше ранга P расширенной матрицы ($\text{rang}\ A = 2 < \text{rang}\ P = 3$). По теореме Кронекера–Капелли рассматриваемая систем несовместна. Об этом говорит и преобразованное третье уравнение системы, приводящее к противоречию: $0 = 4$ (!).

5. Определить значение λ, при котором система однородных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 = 0, \\ \ \ x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 = 0, \\ 2x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевые решения. Найти эти решения.

Р е ш е н и е. Это однородная система уравнений, и она может иметь ненулевые решения только в случае, если матрица коэффициентов при неизвестных вырождена (определитель матрицы равен нулю). Приравняем нулю определитель матрицы коэффициентов:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Решая полученное после раскрытия определителя линейное алгебраическое уравнение относительно λ, получим $\lambda = -4$. При этом значении λ матрица коэффициентов при неизвестных заданной системы уравнений будет вырожденной. Факт вырожденности матрицы будет, кроме того, доказан, если окажется, что ее ранг меньше трех. Ранг матрицы, а заодно и ненулевые решения, определим, используя процедуру преобразований Гаусса–Жордана.

Составим расширенную матрицу системы (к матрице коэффициентов прибавляем нулевой столбец свободных членов, что, естественно, не изменит ранга матрицы коэффициентов) и преобразуем полученную матрицу:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} {\scriptstyle -3N2} \\ \\ {\scriptstyle -2N2} \end{array} \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -8 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 4 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} {\scriptstyle :4} \\ \\ {\scriptstyle -N1} \end{array}.$$

Третью строку, обращающуюся в нуль после вычитания из нее первой строки, вычеркиваем из матрицы. После этого продолжим преобразования оставшихся двух строк матрицы:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ {\scriptstyle +N2} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ {\scriptstyle x_1 \quad\ \ x_2 \quad\ \ x_3 \quad\ \text{св}} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{rr|r} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ {\scriptstyle x_1 \quad x_3 \quad x_2} \end{array}.$$

Отсюда следует общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_3 = 2x_2. \end{cases}$$

Подстановка решения в исходную систему уравнений обращает ее в тождество:

$$\begin{cases} 3\cdot 0 - 2x_2 + \ \ 2x_2 = 0 \ (!), \\ \ \ 0 + 2x_2 - \ \ 2x_2 = 0 \ (!), \\ 2\cdot 0 - 4x_2 + 2\cdot 2x_2 = 0 \ (!). \end{cases}$$

6. На изготовление единицы продукции первого вида предприятию требуется: 0,2 кг сырья первого вида; 0,15 кг сырья второго вида: 0,1 кг сырья третьего вида. Соответственно на изготовление единицы продукции второго вида требуется сырья: 0,4 кг первого; 0,2 кг второго и 0,05 кг третьего вида. На изготовление единицы продукции третьего вида требуется: 0,1; 0,1 и 0,2 кг сырья соответствующих видов.

Предприятие располагает сырьем трех видов в количестве: 21 кг — первого вида, 15 кг — второго и 15 кг — третьего.

Требуется определить количество товаров первого, второго и третьего видов, которое может выпустить предприятие из имеющихся у него запасов сырья.

Р е ш е н и е. Обозначая искомое количество товаров через x_1, x_2, x_3, для их определения составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}2x_1 + \ 0{,}4x_2 + 0{,}1x_3 = 21, \\ 0{,}15x_1 + \ 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = 15, \\ 0{,}1x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}2x_3 = 15. \end{cases}$$

Для решения системы используем метод Гаусса–Жордана. Составим и преобразуем расширенную матрицу.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}1 & 21 \\ 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}1 & 15 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}2 & 15 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

(для удобства дальнейших преобразований умножим расширенную матрицу на 10) $\Longrightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 210 \\ 1{,}5 & 2 & 1 & 150 \\ 1 & 0{,}5 & 2 & 150 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -N1 \\ -2N1 \end{array} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 210 \\ -0{,}5 & -2 & 0 & -60 \\ -3 & -7{,}5 & 0 & -270 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ \cdot(-1) \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 210 \\ 1 & 4 & 0 & 120 \\ 3 & 7{,}5 & 0 & 270 \end{array}\right)\begin{array}{l} -2N2 \\ \\ -3N2 \end{array} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 1 & -30 \\ 1 & 4 & 0 & 120 \\ 0 & -4{,}5 & 0 & -90 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ :(-4{,}5) \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 1 & -30 \\ 1 & 4 & 0 & 120 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \end{array}\right) \begin{array}{l} +4N3 \\ -4N3 \\ \end{array} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 50 \\ 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \end{array}\right).$$

Отсюда получаем решение:

$$(x_1, x_2, x_3) = (40, 20, 50).$$

В правильности полученного решения убедимся, подставив найденные значения неизвестных в исходную систему уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}2 \cdot 40 + \ 0{,}4 \cdot 20 + 0{,}1 \cdot 50 = 21, \ (!) \\ 0{,}15 \cdot 40 + \ 0{,}2 \cdot 20 + 0{,}1 \cdot 50 = 15, \ (!) \\ 0{,}1 \cdot 40 + 0{,}05 \cdot 20 + 0{,}2 \cdot 50 = 15. \ (!) \end{cases}$$

7. Путем преобразований Гаусса–Жордана найти обратную матрицу по отношению к

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \\ 4 & -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Присоединим к заданной матрице справа единичную матрицу и путем преобразования Гаусса–Жордана (над строками !) приведем правую часть матрицы к единичной:

$$AI = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} :2 \\ +N1 \\ -2N1 \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2N2 \\ \cdot -1 \\ +2N2 \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -3/2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +3N3 \\ +N3 \\ \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) = IA^{-1}.$$

В правой части полученной матрицы стоит матрица, обратная по отношению к исходной: $A^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 8 & 6 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1–3 методом Гаусса–Жордана найти решения систем уравнений или доказать их несовместность.

1. $\begin{cases} x_1-2x_2-\ x_3=1, \\ 2x_1+3x_2+5x_3=2, \\ x_1+\ x_2+2x_3=7. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 2x_1-\ x_2-3x_3=\ 2, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=\ 1, \\ x_1+5x_2+\ x_3=-1. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 3x_1-x_2=5, \\ x_1+x_2=3, \\ x_1-x_2=1. \end{cases}$

4. Определить значение λ, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x_1+\ x_2-2x_3=0, \\ \lambda x_1-3x_2-\ x_3=0, \\ 2x_1+\ x_2-3x_3=0. \end{cases}$$

имеет ненулевые решения. Найти эти решения.

5. Путем преобразований Гаусса–Жордана найти обратную матрицу по отношению к матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задания на расчетную работу (общие положения)

В задания входят 5 частей. Части 1–3 рекомендуются для выполнения студентам всех специальностей; часть 4 рассчитана на студентов с углубленной подготовкой по математике; часть 5 рекомендуется студентам, обучаемым по экономическим специальностям без углубленной математической подготовки.

Во всех частях заданий $k = 1 + \dfrac{N}{n}$, где N — последняя цифра номера группы, в которой обучается студент, n — порядковый номер студента в списке группы (для заочного отделения — последние две цифры номера студенческого билета. Если они больше 36, то последняя цифра).

Во всех частях заданий вычисления проводить, удерживая в результатах три значащие цифры. Ошибка вычислений не должна превышать 1%.

Пояснительные записки всех частей расчетных работ оформлять на листах размера А4. Текст писать на одной стороне листа. Отчет представляется преподавателю в сшитом виде вместе с титульным листом.

Титульный лист должен содержать следующую информацию (в порядке следования).

«НАИМЕНОВАНИЕ УЧЕБНОГО ЗАВЕДЕНИЯ»

Курсовая работа по линейной алгебре, часть №
Название работы

Выполнил: *ст-т гр.... Фамилия И.*
Принял: *должность преподавателя,*
Фамилия И.О.

ГОРОД 20...г.

Задание на расчетную работу. Часть 1 «Системы линейных уравнений»

Задана система уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + kx_3 = kN, \\ 2x_1 - \ x_2 + 3x_3 = 1 + 3N, \\ \lambda x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 2(1 - N). \end{cases}$$

В предположении, что $\lambda = N$, найти решение системы:
1) матричным методом;
2) методом определителей;
3) методом Гаусса–Жордана.
4). Приравняв нулю правые части системы уравнений определить значение λ, при котором система имеет нетривиальные решения. Найти эти решения.
5). Найти решения системы уравнений или доказать ее несовместность:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + \ kx_3 = 5, \\ 2x_1 + \ x_2 + 2kx_3 = -1, \\ \ x_1 - 3x_2 - \ kx_3 = \ k. \end{cases}$$

Указание.

1. В пунктах 4 и 5 сделать проверку путем подстановки полученного решения (если оно существует) в исходную систему уравнений.

2. Вычисления и числовые решения представлять в виде обыкновенных дробей.

Типовые контрольные работы

БИЛЕТ ПО ТЕОРИИ (на 15 мин)

1. Перечислите свойства, характеризующие определитель.

1. **Множитель всех элементов можно вынести за знак определителя.**
2. **Строки и столбцы равноценны.**
3. **Определитель не изменится, если элементы любой его строки умножить на числовой множитель.**
4. **Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов его главной диагонали.**
5. **Среди пунктов 1–4 нет требуемых.**

2. Перечислите соотношения, справедливые для произведений матриц.

1. $AB = BA$. 2. $A(BC) = (AB)C$. 3. $A^2 = (a_{ij}^2)$.

4. $A(B + C) = AB + AC$. 5. $AB = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

3. Перечислите элементарные преобразования над матрицами, которые не изменяют их ранг.

1. **Прибавление к элементам столбца элементов другого столбца.**
2. **Вычеркивание части строк, если их количество превышает количество столбцов, и наоборот.**
3. **Транспонирование матрицы.**
4. **Суммирование двух матриц.**
5. **Умножение матрицы на число, отличное от нуля.**

4. Перечислите соотношения, определяющие решения систем уравнений матричным методом и методом Крамера.

1. BA^{-1}. 2.$A^{-1}B$. 3.A^c/Δ. 4.Δ_i/Δ. 5.B/Δ.

5. Какие утверждения согласуются с теоремой Кронекера–Капелли (A **— матрица коэффициентов;** B **— матрица свободных членов;** m **— количество уравнений;** n **— количество неизвестных)?**

1. **Если rang** $A <$ **rang** B, **то система имеет множество решений.**
2. **Если rang** $A =$ **rang** $B = n$, **то система имеет единственное решение.**

3. **Если определитель коэффициентов равен нулю, то однородная система имеет бесчисленное множество решений.**
4. **Если определитель коэффициентов не равен нулю, то однородная система не имеет решений.**
5. **Если rang** $A =$ **rang** $B < n$, **то система не имеет решений.**

БИЛЕТ ПО ПРАКТИКЕ (на 75 мин)

1. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Матричным методом решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

3. Методом Гаусса–Жордана решить систему уравнений или доказать ее несовместность.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = -3, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 7. \end{cases}$$

4. Найти значение λ, **при котором система уравнений**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

имеет ненулевые решения. Найти эти решения.

5. Путем преобразований Гаусса–Жордана найти обратную матрицу по отношению к $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \\ 4 & -6 & -5 \end{pmatrix}$.

Глава 3

Векторы

3.1. Вектор как геометрический объект

Вектором с геометрической точки зрения называется отрезок в пространстве (на плоскости), направленный от точки A (начало вектора) к другой точке B (конец вектора) (рис. 3.1,а).

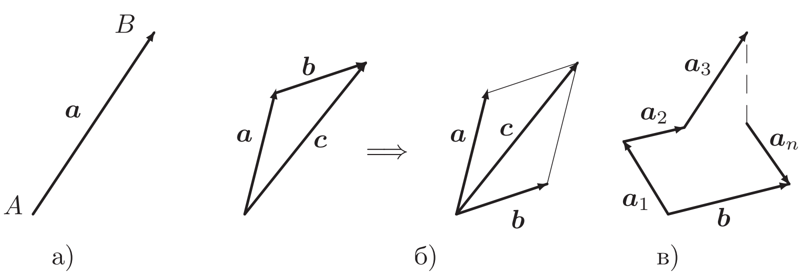


Рис. 3.1. Вектор и суммы векторов

Вектор принято обозначать или парой букв $\overline{AB}$ с чертой (реже стрелкой) сверху, обозначающих начало (первая буква) и конец (вторая буква) вектора, или одной буквой $\boldsymbol{a}$, выделенной жирным шрифтом или чертой сверху.

Модулем вектора называется его длина $a = |\boldsymbol{a}| = |\overline{AB}|$.

Вектор, начало которого совпадает с его концом, называют *нулевым вектором.*

Произведением вектора $\boldsymbol{a}$ на число $\lambda \in \Re$ называют вектор $\lambda\boldsymbol{a}$, модуль которого равен $|\lambda|a$, параллельный вектору $\boldsymbol{a}$ и направленный в сторону $\boldsymbol{a}$ при $\lambda > 0$ и в противоположную вектору $\boldsymbol{a}$ сторону при

$\lambda < 0$.

Для нулевого вектора направление не определено.

Суммой двух векторов $\boldsymbol{a}$ **и** $\boldsymbol{b}$ **называется вектор** $\boldsymbol{c}$, **начало которого совпадает с началом вектора** $\boldsymbol{a}$, **а конец — с концом вектора** $\boldsymbol{b}$ **при условии, что начало вектора** $\boldsymbol{b}$ **совмещено с концом вектора** $\boldsymbol{a}$ **(левый рис. 3.1,б). Вектор** $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ **можно представить как диагональ параллелограмма, сторонами которого служат векторы** $\boldsymbol{a}$ **и** $\boldsymbol{b}$ **(правый рис. 3.1,б).**

Суммой n векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ **называется вектор** $\boldsymbol{b}$, **соединяющий начало первого вектора с концом последнего при условии, что конец каждого предыдущего из суммируемых векторов является началом последующего вектора (рис. 3.1,в).**

Напомним, что сложение и умножение на число математических объектов называют *линейными операциями* **над этими объектами.**

С помощью геометрических построений можно убедиться в том, что для линейных операций над векторами справедливы свойства ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ **— векторы;** $\lambda \in \Re$**):**

1) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ **— коммутативность;**

2) $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$ **— ассоциативность;**

3) $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$ **— дистрибутивность.**

Разность двух векторов $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ **можно рассматривать как сумму вектора** $\boldsymbol{a}$ **с вектором** $\boldsymbol{b}$, **умноженным на** -1.

Читателю рекомендуется провести построения для разности векторов, аналогичные рис. 3.1,б.

3.2. Векторное и линейное пространства

Рассмотрим непустое множество, для элементов которого определены операции сложения и умножения на действительные числа.

Множество элементов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots$ **образуют** *векторное* **или** *линейное пространство* L, **если для его элементов выполняются следующие условия —** *аксиомы линейных пространств*.

1. **Любым двум элементам** $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in L$ **можно поставить в соответствие элемент** $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \in L$, **называемый суммой** $\boldsymbol{a}$ **и** $\boldsymbol{b}$.

2. **Коммутативность по отношению к сумме:** $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$.

3. **Ассоциативность по отношению к сумме:** $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$.

4. **Разрешимость: для любых** $\boldsymbol{a}$ **и** $\boldsymbol{b} \in L$ **существует элемент** $\boldsymbol{x}$ **такой, что** $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

5. **Для любого $\boldsymbol{a} \in L$ и действительного числа $\lambda \in \Re$ существует элемент $(\lambda \boldsymbol{a}) \in L$.**
6. **Ассоциативность по отношению к произведению на действительные числа λ и ν: $(\lambda\nu)\boldsymbol{a} = \lambda(\nu \boldsymbol{a})$.**
7. **Для любого $\boldsymbol{a} \in L$ справедливо $1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.**
8. **Существует нулевой элемент $\boldsymbol{\Theta} \in L$ такой, что $\boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.**
9. **Дистрибутивность по отношению к произведению действительного числа на сумму элементов из L: $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}$.**
10. **Для любого вектора $\boldsymbol{a}$ существует противоположный элемент $(-\boldsymbol{a})$ такой, что $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\Theta}$.**

Элементы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots$ множеств, для которых выполняются аксиомы 1-10, называют *векторами*.

Приведем примеры векторных пространств.

1. Пространство векторов как геометрических объектов (рассмотрено в § 3.1).

2. Пространство L совокупностей конечного (n) числа элементов
$\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) = (a_i) \quad (i = \overline{1, n})$.

Для двух произвольных элеменов $\boldsymbol{a} = (a_i)$ и $\boldsymbol{b} = (b_i)$ пространства L справедливы линейные операции (λ – действительное число):

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_i) + (b_i) = (a_i + b_i) = (c_i) = \boldsymbol{c} \in L;$$
$$\lambda \boldsymbol{a} = \lambda(a_i) = (\lambda a_i) = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n) = (d_1, \ldots, d_n) = (d_i) = \boldsymbol{d} \in L.$$

3. Пространство L многочленов $P_n(a_k, x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$. Для двух произвольных элементов $P_n(a_k, x) \in L$ и $P_n(b_k, x) \in L$ справедливы линейные операции:

$$P_n(a_k, x) + P_n(b_k, x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} c_k x^k = P_n(c_k, x) \in L;$$
$$\lambda P_n(a_k, x) = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) x^k = \sum_{k=0}^{n} d_k x^k = P_n(d_k, x) \in L.$$

4. Пространство L функций, непрерывных на некотором интервале изменения переменной x.

Если функции $f(x) \in L$ и $g(x) \in L$, то

$$f(x) + g(x) \in L.$$
$$\lambda \cdot f(x) \in L.$$

3.3. Линейная зависимость векторов

Пусть задана система n векторов $\boldsymbol{e}_i \in L \quad (i = \overline{1,n})$: $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ и совокупность n чисел $a_i \in \Re$: a_1, a_2, ..., a_n.

Любой вектор типа

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_n\boldsymbol{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{e}_i \tag{3.1}$$

называется *линейной комбинацией векторов* $\boldsymbol{e}_i$ $(i = \overline{1,n})$. **Говорят, что вектор $\boldsymbol{a}$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{e}_i$ или разлагается по этим векторам.**

Система векторов $\boldsymbol{e}_i$ $(i = \overline{1,n})$ называется *линейно зависимой,* **если существуют такие числа $\lambda_i \quad (i = \overline{1,n})$, не равные одновременно нулю, что выполняется равенство**

$$\lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{\Theta}, \tag{3.2}$$

где $\boldsymbol{\Theta}$ – нулевой вектор.

Например, если два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны (параллельны), направлены в противоположные стороны и известно, что модуль вектора $\boldsymbol{a}$ в 5 раз больше модуля вектора $\boldsymbol{b}$, то линейная комбинация

$$\boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\Theta}.$$

Поэтому векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и вообще любые коллинеарные векторы линейно зависимы.

Система векторов $\boldsymbol{e}_i$ $(i = \overline{1,n})$ называется *линейно независимой*, **если равенство (3.2) выполняется только в том случае, когда $\lambda_i = 0$ для всех $i = \overline{1,n}$, т.е. все числовые множители в линейной комбинации векторов равны нулю.**

Перечислим некоторые важные свойства системы линейно зависимых векторов.

Свойство 1. Одиночный ненулевой вектор представляет собой линейно независимую «систему векторов», а нулевой вектор — линейно зависимую.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приравняем нулевому вектору линейную комбинацию одного вектора $\boldsymbol{a}$ (λ — число):

$$\lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\Theta}.$$

Из равенства следует, что линейная комбинация векторов (одного вектора) равна нулю при $\lambda \neq 0$ только в случае, когда вектор $\boldsymbol{a}$ нулевой. Если же $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{\Theta}$, то $\lambda = 0$.

Свойство 2. Если среди системы векторов имеется хотя бы один такой, который является линейной комбинацией остальных векторов, то система векторов линейно зависима.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть среди n векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ имеется вектор $\boldsymbol{e}_i$, который линейно выражается через $n-1$ остальных векторов:

$$\boldsymbol{e}_i = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \lambda_{i-1} \boldsymbol{e}_{i-1} + \lambda_{i+1} \boldsymbol{e}_{i+1} + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n.$$

Прибавляя к обеим частям равенства вектор $-\boldsymbol{e}_i$, противоположный $\boldsymbol{e}_i$ $(-\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{\Theta})$, получим:

$$\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \lambda_{i-1} \boldsymbol{e}_{i-1} + (-1)\boldsymbol{e}_i + \lambda_{i+1} \boldsymbol{e}_{i+1} + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{\Theta}.$$

Равенство нулю линейной комбинации векторов в случае, когда не все множители входящих в нее векторов равны нулю (множитель при $\boldsymbol{e}_i$ равен -1), указывает на линейную зависимость векторов.

Читателю предоставляется возможность самому доказать утверждение, обратное свойству 2: если система векторов линейно зависима, то среди входящих в нее векторов найдется хотя бы один вектор такой, который может быть представлен в виде линейной комбинации остальных векторов.

По аналогии с предыдущими можно доказать еще два нижеприведенных свойства.

Свойство 3. Если часть некоторой совокупности векторов представляет собой линейно зависимую систему, то вся совокупность векторов линейно зависима.

В частности, если система векторов содержит нулевой вектор, то она линейно зависима.

Свойство 4. Если система векторов линейно независима, а при добавлении к ней другого вектора становится линейно зависимой, то добавленный вектор можно представить как линейную комбинацию векторов исходной системы.

Если векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ в разложении (3.1) известны и не изменяются в рассматриваемом процессе, то вектор $\boldsymbol{a}$ характеризуется только коэффициентами разложения. В этом случае вектор принято представлять в виде совокупности коэффициентов разложения (3.1):

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T. \qquad (3.3)$$

Представление (3.3) часто в математической литературе (например, [1], [8]) называют *арифметическим вектором.* **Знак «транспонирования» указывает на общепринятое представление вектора в виде матрицы-столбца.**

Координатная форма (3.3) представления вектора, как и (3.1), называется *n-мерным вектором*, **или** *вектором размерности n*.

Пример. Исследовать на линейную независимость векторы $\boldsymbol{a}_k$ $(k=\overline{1,m})$, представленные в виде линейных комбинаций линейно независимых векторов $\boldsymbol{e}_r$ $(r=\overline{1,n})$:

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} \boldsymbol{a}_1 & = & a_{11}\boldsymbol{e}_1 & + & a_{12}\boldsymbol{e}_2 & + & a_{13}\boldsymbol{e}_3 & +\ \ldots\ + & a_{1n}\boldsymbol{e}_n, \\ \boldsymbol{a}_2 & = & & & a_{22}\boldsymbol{e}_2 & + & a_{23}\boldsymbol{e}_3 & +\ \ldots\ + & a_{2n}\boldsymbol{e}_n, \\ \boldsymbol{a}_3 & = & & & & & a_{33}\boldsymbol{e}_3 & +\ \ldots\ + & a_{3n}\boldsymbol{e}_n, \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{array}\right. \tag{3.4}$$

Заданная совокупность векторов $\boldsymbol{a}_k$ при фиксированных $\boldsymbol{e}_r$ образует *лестничную* **систему, составленную из коэффициентов a_{kr} $(k=\overline{1,m};\quad r=\overline{1,n})$ разложения векторов:**

$$\left\{\begin{array}{lllllll} \boldsymbol{a}_1 & = & (a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \ldots, & a_{1n}), \\ \boldsymbol{a}_2 & = & (\ \ 0 & a_{22}, & a_{23}, & \ldots, & a_{2n}), \\ \boldsymbol{a}_3 & = & (\ \ 0 & 0 & a_{33}, & \ldots, & a_{3n}), \\ . & . & . & . & . & . & . \end{array}\right.$$

Количество m векторов $\boldsymbol{a}_k$ $(k=\overline{1,m})$ может быть любым, но $m\le n$ (иначе совокупность векторов $\boldsymbol{a}_k$ будет заведомо линейно зависимой). Будем предполагать, что числа a_{kk} (с одинаковыми индексами) отличны от нуля.

Р е ш е н и е. Составим и приравняем нулевому вектору линейную комбинацию заданных векторов.

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\ldots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{\Theta}. \tag{3.5}$$

Перепишем последнее соотношение с учетом (3.4) и затем сгруппируем слагаемые с одинаковыми $\boldsymbol{e}_r$:

$$\lambda_1(a_{11}\boldsymbol{e}_1+a_{12}\boldsymbol{e}_2+a_{13}\boldsymbol{e}_3+\ldots+a_{1n}\boldsymbol{e}_n)+\lambda_2(a_{22}\boldsymbol{e}_2+a_{23}\boldsymbol{e}_3+\ldots+a_{2n}\boldsymbol{e}_n)+$$

$$+\lambda_3(a_{33}\boldsymbol{e}_3+\ldots+a_{3n}\boldsymbol{e}_n)+\ldots=\boldsymbol{\Theta}.$$

$$\lambda_1a_{11}\boldsymbol{e}_1+(\lambda_1a_{12}+\lambda_2a_{22})\boldsymbol{e}_2+(\lambda_1a_{31}+\lambda_2a_{32}+\lambda_3a_{33})\boldsymbol{e}_3+\ldots$$

$$+(\lambda_1a_{n1}+\ldots+\lambda_ma_{mn})\boldsymbol{e}_n=0\boldsymbol{e}_1+0\boldsymbol{e}_2+0\boldsymbol{e}_3+\ldots+0\boldsymbol{e}_n.$$

Уравнение будет выполняться при условии, что множители при одинаковых векторах $\boldsymbol{e}_k\ne\boldsymbol{\Theta}$ справа и слева от знака равенства будут равны. В частности, для $k=1$ имеем $\lambda_1a_{11}=0$. При выполнении условия $a_{11}\ne 0$ из последнего соотношения следует $\lambda_1=0$.

Приравняем нулю множитель при $e_2 \neq \Theta$. При выполнении равенства $\lambda_1 = 0$ из векторного уравнения получим $\lambda_2 a_{22} = 0$. Так как по условию $a_{22} \neq 0$, то $\lambda_2 = 0$.

Приравнивая множители при $e_3 \neq \Theta$, получим $\lambda_3 = 0$ и т.д.

Продолжая описанный процесс приравнивания множителей при одинаковых векторах e_r до $r = m \leq n$ можно показать, что все $\lambda_k = 0$ $(k = \overline{1, m})$.

В итоге приходим к выводу: линейная комбинация исходных векторов (3.5) равна нулевому вектору только в случае, когда все $\lambda_k = 0 \quad (k = \overline{1, m})$.

Из определения следует, что система исходных векторов линейно независима (сумма ненулевых линейно независимых векторов равна нулевому вектору только в случае, когда все числовые множители в их линейной комбинации равны нулю).

Прямоугольную матрицу размера $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

как говорилось в § 1.1, можно рассматривать как совокупность векторов-столбцов $(j = \overline{1, n})$:

$$A_j = (a_{1j} \ \dots \ a_{ij} \ \dots \ a_{mj})^T .$$

В этом случае

$$A = (A_1 \ \dots \ A_j \ \dots \ A_n) .$$

Если ввести в рассмотрение векторы-строки $(i = \overline{1, m})$

$$B_i = (a_{i1} \ \dots \ a_{ij} \ \dots \ a_{in}) ,$$

то матрицу A можно представить в виде совокупности векторов-строк:

$$A = (B_1 \ \dots \ B_i \ \dots \ B_m)^T .$$

Ранг матрицы, представленной в виде совокупности векторов, указывает на число линейно независимых векторов в рассматриваемой совокупности.

Линейные операции над строками (столбцами) матриц отождествляются с линейными операциями над ее векторами-строками (векторами-столбцами). Например, для векторов-строк:

$$\lambda B_i = (\lambda a_{i1} \ \dots \ \lambda a_{ij} \ \dots \ \lambda a_{in}) ,$$

$$B_i + B_j = ((a_{i1} + a_{j1})\ \ldots\ (a_{ik} + a_{jk})\ \ldots\ (a_{in} + a_{jn}))\,.$$

Строка B_i называется линейной комбинацией k других строк матрицы ($k < m$, $i \notin \overline{1,k}$), если она равна сумме произведений этих строк на произвольные числа λ_r $\ (r = \overline{1,k})$:

$$B_i = \lambda_1 B_1 + \ldots + \lambda_k B_k.$$

Строки B_1, ..., B_k матрицы *линейно зависимы*, **если их линейная комбинация равна нулевому вектору:**

$$\lambda_1 B_1 + \ldots + \lambda_r B_r + \ldots + \lambda_k B_k = \mathbf{\Theta} \tag{3.6}$$

при условии, что хотя бы один из k числовых множителей λ_r отличен от нуля.

Линейная зависимость строк матрицы означает, что хотя бы одна из строк является линейной комбинацией остальных строк.

Сказанное позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема. *Ранг матрицы равен минимальному из двух значений:*

— максимальному числу ее линейно независимых строк;

— максимальному числу ее линейно независимых столбцов.

Линейно независимые строки (столбцы) матрицы называют *базисными*, **а миноры, построенные на максимально возможном для данной матрицы количестве линейно независимых строк и столбцов называются** *базисными минорами*.

3.4. Разложение вектора по базису в пространствах L_1, L_2 и L_3

Любой вектор можно представить в пространствах L_1, L_2, L_3 в виде линейной комбинации линейно независимых векторов соответствующих пространств. В L_1 только один вектор $\boldsymbol{a}$ (рис. 3.2,а) может быть линейно независимым. Любой другой вектор $\boldsymbol{p}$ будет отличаться от $\boldsymbol{a}$ скалярным множителем: $\boldsymbol{p} = \lambda \boldsymbol{a}$.

Базисом **в пространстве L_1 называется вектор $\boldsymbol{a}$ этого пространства такой, что любой другой вектор этого пространства будет отличаться от $\boldsymbol{a}$ числовым множителем.**

В пространстве L_2 существуют не более двух линейно независимых векторов ($\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ на рис. 3.2,б). Любой вектор $\boldsymbol{p}$ может быть представлен в виде линейной комбинации этих векторов:

$$\boldsymbol{p} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}. \tag{3.7}$$

Базисом **в пространстве L_2 называется пара двух линейно независимых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ этого пространства таких, что любой другой**

вектор $\boldsymbol{p}$ этого пространства будет представляться в виде линейной комбинации (3.7).

Базисом **в пространстве L_3 называется тройка линейно независимых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ этого пространства (рис. 3.2,в) таких, что любой другой вектор $\boldsymbol{p}$ этого пространства будет представляться в виде линейной комбинации:**

$$\boldsymbol{p} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} + \nu \boldsymbol{c}. \tag{3.8}$$

Для геометрических векторов базисные векторы в L_2 не должны быть коллинеарными (параллельными), в L_3 — не должны быть компланарными (не должны лежать в одной плоскости).

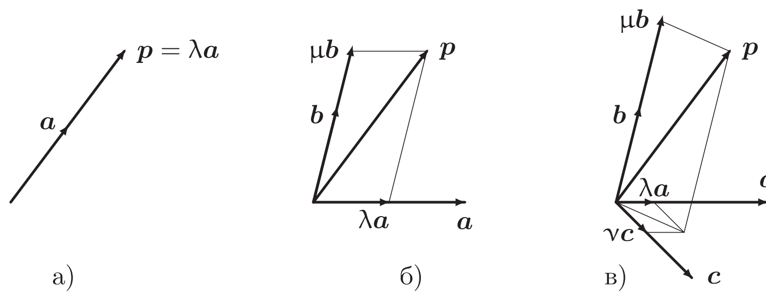


Рис. 3.2. Разложение вектора по базису

Слагаемые формулы (3.8) называются *составляющими* **вектора $\boldsymbol{p}$ по базисным векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, а множители λ, μ и ν — его** *координатами*, **или** *компонентами* **вектора $\boldsymbol{p}$ в базисе векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.**

Такой же смысл заложен в слагаемые и множители соответствующих формул для L_1 и L_2. В этих формулах базисными векторами являются линейно независимые векторы соответствующих пространств, а векторы $\boldsymbol{p}$ трех рассмотренных случаев — линейно зависимы по отношению к базисным векторам.

Как отмечалось в предыдущем параграфе, если базисные векторы заданы и не изменяются в рассматриваемых процессах или явлениях (могут изменяться только координаты векторов), то для описания произвольного вектора $\boldsymbol{p}$ достаточно знать лишь все его координаты. В этом случае вектор может быть представлен только упорядоченной совокупностью его координат. В трехмерном пространстве с фиксированными и неизменяемыми базисными векторами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$

$$\boldsymbol{p} = (\lambda, \mu, \nu). \tag{3.9}$$

3.5. Базис в пространстве L_n

Обобщим формулы § 3.4 на пространство L_n.

Базисом в пространстве L_n называется совокупность n векторов $\boldsymbol{e}_i$ $(i=\overline{1,n})$ этого пространства при выполнении условий:

1) векторы $\boldsymbol{e}_i$ линейно независимы;

2) любой другой вектор $\boldsymbol{p}$ из L_n является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{e}_i$:

$$\boldsymbol{p}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+\lambda_n\boldsymbol{e}_n, \tag{3.10}$$

Здесь λ_i $(i=\overline{1,n})$ — координаты вектора $\boldsymbol{p}$ в базисе $\boldsymbol{e}_i$.

Примером базиса в L_n может служить система n векторов:

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1=(1,0,\ldots,0), \\ \boldsymbol{e}_2=(0,1,\ldots,0), \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \boldsymbol{e}_n=(0,0,\ldots,1). \end{cases} \tag{3.11}$$

В линейной алгебре важное значение имеют следующие теоремы.

Определение. *Если $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$ — система n линейно независимых векторов некоторого пространства и любой другой вектор этого пространства может быть представлен в виде линейной комбинации этой системы векторов, то пространство называется n-мерным (L_n), а совокупность векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$ — его базисом.*

Теорема 1. *В пространстве L_n любая система, состоящая из m векторов, при $m>n$ линейно зависима.*

Теорема 2. *Пусть векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ представлены в одном базисе $\boldsymbol{e}_k$ $(k=\overline{1,n})$: $\boldsymbol{a}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\boldsymbol{e}_k$ и $\boldsymbol{b}=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\boldsymbol{e}_k$. Тогда, если $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$, то $a_k=b_k$.*

Утверждение теоремы следует из равенства $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_k-b_k)\boldsymbol{e}_k=\boldsymbol{\Theta}$.

Так как $\boldsymbol{e}_k$ — базисные, следовательно, линейно независимые векторы, то последнее равенство будет выполняться только при условии $a_k-b_k=0$, т.е при $a_k=b_k$.

Пример. Установить, могут ли три вектора: $\boldsymbol{a}=(-2,3,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,-2,-1)$ и $\boldsymbol{c}=(-5,7,2)$ образовать базис в пространстве L_3.

Р е ш е н и е. Три заданных вектора можно считать базисными, если они линейно независимы, т.е. если хотя бы один из числовых множителей в приравненной нулю линейной комбинации этих векторов будет отличен от нуля.

Составим и приравняем нулевому вектору $\boldsymbol{\Theta}=(0,0,0)$ линейную комбинацию векторов:

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=\boldsymbol{\Theta}.$$

Как и в примере § 3.3, векторное уравнение можно заменить аналогичными ему скалярными уравнениями, записанными для каждой (по порядку следования соответствующих векторов) координаты вектора. Сказанное приводит к системе трех уравнений (три координаты) с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} -2\lambda + \mu - 5\nu = 0, \\ 3\lambda - 2\mu + 7\nu = 0, \\ \lambda - \mu + 2\nu = 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Записанная система, в чем нетрудно убедиться непосредственной подстановкой, имеет бесчисленное множество ненулевых решений при $\lambda = -3\nu$ и $\mu = -\nu$. В частности, ее решением будут значения $\lambda = 3$, $\mu = 1$ и $\nu = -1$.

Не равные нулю значения множителей в приравненной нулю линейной комбинации векторов:

$$3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{\Theta}$$

говорят о линейной зависимости векторов. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ не могут образовать базис в L_3.

3.6. Скалярное произведение

Скалярным произведением $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ **(или $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$) двух векторов $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, заданных совокупностью своих координат в пространстве L_n, называется число c, равное сумме произведений соответствующих координат векторов:**

$$c = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i. \tag{3.13}$$

В литературе скалярное произведение часто обозначается жирной точкой, стоящей между векторами:

$$c = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}.$$

Скалярное произведение широко используется в задачах экономики и техники. Если, например, $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ — вектор количества товаров, а $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ — вектор их цен, то скалярное произведение (3.13) выражает суммарную стоимость товаров.

Если $\boldsymbol{a}$ — вектор силы, а $\boldsymbol{b}$ — вектор перемещения, то скалярное произведение — работа силы на перемещении.

Понятие скалярного произведения векторов для пространства L_n базируется на четырех аксиомах:

1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ **— коммутативность;**

2) $\big((\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}), \boldsymbol{c}\big) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ **— дистрибутивность;**

3) $\lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b})$ **— возможность внесения под (вынесения за) знак скалярного произведения числового множителя;**

4) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = a^2 > 0$ **(скалярный квадрат), если** $(\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{\Theta})$ **и** $(\boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\Theta}) = 0$.

Линейное (векторное) n**-мерное пространство, на котором определено скалярное произведение, называется** *евклидовым* **(пространство** E_n**).**

Норма (длина, модуль) вектора $\boldsymbol{a}$ **в пространстве** E_n **определяется как квадратный корень из суммы квадратов координат вектора:**

$$|\boldsymbol{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}. \tag{3.14}$$

Нулевой вектор — единственный вектор, норма которого равна нулю.

Неравенством Коши–Буняковского **называется следующее соотношение между скалярными произведениями двух векторов:**

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 \leq (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}). \tag{3.15}$$

Докажем справедливость этого неравенства. Для этого найдем скалярный квадрат вектора $\boldsymbol{c} = k\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, **где** k **— скалярный множитель:**

$$(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}) = (k\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, k\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k^2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + 2k(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \geq 0.$$

В левой части равенства стоит неотрицательная величина — скалярный квадрат вектора $\boldsymbol{c}$, **поэтому правая часть записанного равенства, представляющая собой квадратный трехчлен относительно** k, **также неотрицательна. Последнее утверждение говорит о том, что четверть дискриминанта**

$$D/4 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \leq 0.$$

Отсюда следует (3.15).

Неравенство Коши–Буняковского позволяет ввести формально понятие косинуса угла между векторами в евклидовых пространствах любой размерности:

$$\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}) = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{ab}. \tag{3.16}$$

При этом, согласно (3.15),

$$\cos^2(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}) \leq 1, \qquad 0 \leq (\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}) < \pi.$$

Пример 1. Установить связь между неравенством Коши–Буняковского и областью допустимых значений функции $\cos\varphi$**.**

Р е ш е н и е. Пусть $\varphi = (\hat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ **— угол между двумя векторами.**

Запишем неравенство Коши–Буняковского в виде

$$\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2}{a^2b^2} \leq 1.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей последнего равенства, получим:

$$-1 \leq \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{ab} \leq 1.$$

В центре полученного неравенства стоит выражение (3.16), определяющее косинус угла между двумя векторами. Поэтому из него следует:

$$-1 \leq \cos\varphi \leq 1.$$

Формула (3.16) позволяет дать еще одну формулировку скалярного произведения, относящегося больше к векторам как геометрическим объектам.

Скалярное произведение **равно произведению модулей векторов на косинус угла между ними:**

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = ab\cos(\hat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}). \tag{3.17}$$

Из формулы (3.17) следует, что знак скалярного произведения определяется косинусом угла между векторами. Для геометрических векторов оно положительно, если угол между направлениями векторов меньше прямого, и отрицательно в противном случае.

Формула (3.17) может служить определением скалярного произведения векторов для трехмерного пространства. При этом аксиомы 1–4 скалярного произведения становятся его свойствами — они следуют из формулы.

Пример 2. Найти скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ **и** $\boldsymbol{b}$, **если известны их модули** $a = 1$, $b = 2$ **и угол** $\alpha = (\hat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \pi/6$.

Р е ш е н и е. $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 1\cdot 2\cos(\pi/6) = \sqrt{3}$.

Равенство нулю скалярного произведения является условием ортогональности векторов, входящих в произведение.

Векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ **пространства** E_n**, имеющие единичную норму, образуют** *ортонормированный базис*, **если эти векторы попарно ортогональны. Математическая формулировка определения ортонормированного базиса сводится к равенству (**$i, j = \overline{1,n}$**):**

$$(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \textbf{если } i = j, \\ 0, & \textbf{если } i \neq j. \end{cases} \tag{3.18}$$

3.7. Проекции вектора

Проекцией точки на ось, как известно из школьного курса геометрии, является основание перпендикуляра, опущенного на эту ось из рассматриваемой точки.

Направленный отрезок прямой, который представляет собой вектор как геометрический объект, является геометрическим местом точек. Поэтому *проекция вектора* $\boldsymbol{a}$ *на ось, направление которой определяется некоторым вектором* $\boldsymbol{c}$ $(Pr_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a})$, **представляет собой геометрическое место проекций всех точек вектора** $\boldsymbol{a}$ **на эту ось, т.е. (рис. 3.3,а)**

$$Pr_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a} = a\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}}). \tag{3.19}$$

Из формулы видно, что знак проекции определяется знаком косинуса угла между векторами $\boldsymbol{a}$ **и** $\boldsymbol{c}$. **Проекция положительна, если угол меньше** $\pi/2$, **и отрицательна, если угол заключен между** $\pi/2$ **и** π.

Вектор $\boldsymbol{a}_c = \dfrac{\boldsymbol{c}}{c}Pr_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}$, **имеющий направление** $\boldsymbol{c}$ **(при** $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}}) > 0$**) или противоположное** $\boldsymbol{c}$ **(при** $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}}) < 0$**), называется** *составляющей* **вектора** $\boldsymbol{a}$ **по направлению вектора** $\boldsymbol{c}$.

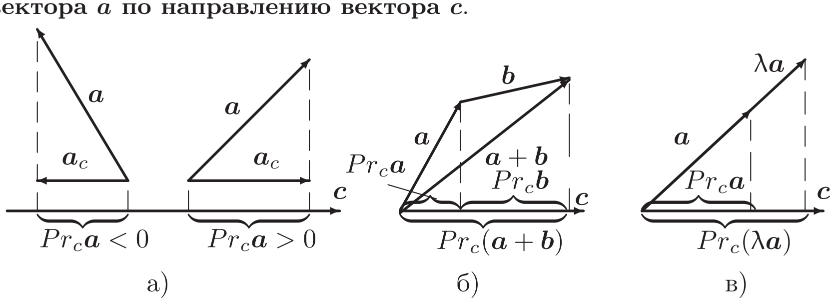


Рис. 3.3. Проекции векторов и их свойства

Свойства проекций.

1. Проекция суммы двух векторов на направленную ось равна сумме проекций векторов на эту ось.

Справедливость свойства следует из рис. 3.3,б.

2. При умножении вектора на число λ **его проекция увеличивается в** λ **раз.**

Справедливость свойства следует из подобия треугольников, изображенных на рис. 3.3,в.

Сравнивая (3.19) с формулой (3.17), для скалярного произведения получим:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = aPr_a\boldsymbol{b} = bPr_b\boldsymbol{a}. \tag{3.20}$$

Если направление оси определяется единичным вектором $\boldsymbol{e}$ ($e = 1$), то

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}) = Pr_e \boldsymbol{a}. \tag{3.21}$$

Пример. Найти проекцию вектора $\boldsymbol{a}$ на направление вектора $\boldsymbol{b}$, если $a = 2$ и $\alpha = (\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}) = 2\pi/3$.
Р е ш е н и е. $Pr_b \boldsymbol{a} = a \cos\alpha = 2\cos(2\pi/3) = -1$.

3.8. Ортонормированный базис

Ортонормированным базисом пространства L_n называется совокупность n попарно ортогональных единичных векторов $\boldsymbol{i}_k$.

Согласно определению модули базисных векторов равны единице, а скалярное произведение пары любых из них, но различных, равно нулю:

$$|\boldsymbol{i}_k| = 1, \qquad (\boldsymbol{i}_k, \boldsymbol{i}_r) = \delta_{kr} \quad (k, r = \overline{1, n}). \tag{3.22}$$

Здесь δ_{kr} — символ Кронекера (3.18).

При дальнейшем изложении материала параграфа ограничимся пространством L_3, где для *упорядоченной* тройки векторов ортонормированного базиса справедливы соотношения:

$$|\boldsymbol{i}_1| = |\boldsymbol{i}_2| = |\boldsymbol{i}_3| = 1;$$

$$(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_1) = (\boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_2) = (\boldsymbol{i}_3, \boldsymbol{i}_3) = 1;$$

$$(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2) = (\boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3) = (\boldsymbol{i}_3, \boldsymbol{i}_1) = 0. \tag{3.23}$$

Упорядоченность ортонормированных базисных векторов имеет два варианта.

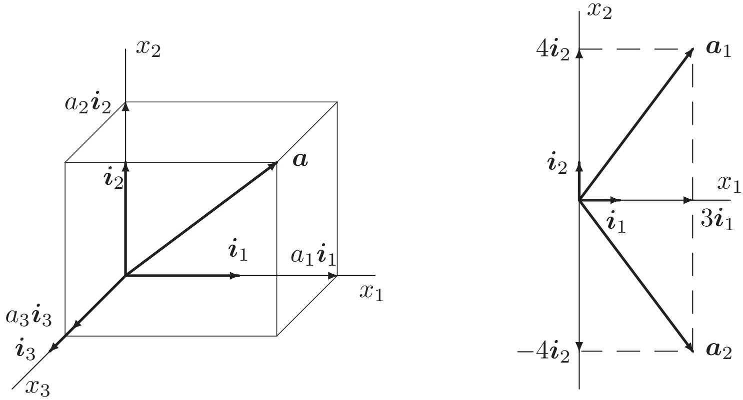
Наибольшее распространение получил *правый базис*, для которого кратчайший поворот от направления вектора $\boldsymbol{i}_1$ к направлению вектора i_2 совершается против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\boldsymbol{i}_3$. Для *левого базиса* аналогичный поворот осуществляется по часовой стрелке.

Ортонормированный базис в пространстве L_2 состоит из двух ортогональных единичных векторов $\boldsymbol{i}_1$ и $\boldsymbol{i}_2$.

В аналитической геометрии для ортонормированных базисных векторов евклидова пространства E_3 чаще используются (как в главах 7 и 8) обозначения $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

С направлением векторов ортонормированного базиса обычно связывается ортогональная декартова (прямолинейная) система

координат x_1, x_2, x_3 (или x, y, z). Указанные координаты определяют в единицах измерения базисных векторов расстояния от начала координат до рассматриваемой точки по направлениям базисных векторов, соответственно $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$ (рис. 3.4,а).



а) б)

Рис. 3.4. Разложение вектора в ортонормированных базисах

Если вектор $\boldsymbol{a}$ разложить по ортонормированному базису:

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i}_1 + a_2\boldsymbol{i}_2 + a_3\boldsymbol{i}_3, \tag{3.24}$$

то в этом разложении a_1, a_2, a_3 будут координатами конца вектора и одновременно проекциями вектора на направления единичных базисных векторов $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$. Действительно, умножим (3.24) скалярно, например, на базисный вектор $\boldsymbol{i}_1$. С учетом (3.23) и (3.21) получим

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}_1) = a_1(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_1) + a_2(\boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_1) + a_3(\boldsymbol{i}_3, \boldsymbol{i}_1) = a_1 = Pr_{\boldsymbol{i}_1}\boldsymbol{a}.$$

Аналогично $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}_2) = a_2 = Pr_{\boldsymbol{i}_2}\boldsymbol{a}$ и $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}_3) = a_3 = Pr_{\boldsymbol{i}_3}\boldsymbol{a}$.

С другой стороны, по определению скалярного произведения $\left((\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\right)$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}_1) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{i}_1|\cos\alpha_1 = a\cos\alpha_1; \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}_2) = a\cos\alpha_2; \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}_3) = a\cos\alpha_3.$$

Здесь α_k $(k = \overline{1,3})$ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и базисным $\boldsymbol{i}_k$.

Из последних выражений следует: $\cos\alpha_k = a_k/a \quad (k = \overline{1,3})$.

Поделим соотношение (3.24) на a (модуль вектора $\boldsymbol{a}$):

$$\boldsymbol{n_a} = \frac{\boldsymbol{a}}{a} = \boldsymbol{i}_1 \cos\alpha_1 + \boldsymbol{i}_2 \cos\alpha_2 + \boldsymbol{i}_3 \cos\alpha_3. \tag{3.25}$$

Здесь $\boldsymbol{n_a}$ — единичный вектор, сонаправленный (совпадающий по направлению) вектору $\boldsymbol{a}$. Соотношение (3.25) указывает на то, что координатами единичного вектора при его разложении по векторам ортонормированного базиса являются направляющие косинусы и

$$a_k = a\cos\alpha_k \qquad (k = \overline{1,3}). \tag{3.26}$$

Используя теорему Пифагора для L_3, найдем скалярный квадрат вектора $\boldsymbol{a}$:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = a \cdot a\cos 0 = a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2. \tag{3.27}$$

Отсюда получаем выражение для модуля вектора $\boldsymbol{a}$:

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \tag{3.28}$$

В частности, после деления соотношения (3.27) на a^2 с учетом (3.26) для модуля единичного вектора получим формулу:

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1. \tag{3.29}$$

Все приведенные выше соотношения легко записываются для случая пространства L_2.

Например, (3.29) с учетом того, что $\alpha_2 = \pi/2 - \alpha_1$ и $\cos^2(\pi/2 - \alpha_1) = \sin^2\alpha_1$, приводится к известной формуле из тригонометрии:

$$\cos^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_1 = 1.$$

Пример. В пространстве L_2 задан вектор $\boldsymbol{a}$ своим модулем $a = 5$ и направляющим косинусом $\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}_1}) = \cos\alpha_1 = 0,6$. Требуется найти координаты вектора $\boldsymbol{a}$.

Р е ш е н и е. 1. Используя (3.29) $\left(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 = 1\right)$, найдем

$$\cos\alpha_2 = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha_1} = \pm\sqrt{1 - (0,6)^2} = \pm 0,8.$$

2. Координаты вектора в ортонормированном базисе, как показано выше, совпадают с проекциями вектора на направления базисных векторов. Поэтому

$$a_{i_1} = Pr_{\boldsymbol{i}_1}\boldsymbol{a} = a\cos\alpha_1 = 5 \cdot 0,6 = 3; \qquad a_{i_2} = Pr_{\boldsymbol{i}_2}\boldsymbol{a} = a\cos\alpha_2 = 5 \cdot (\pm 0,8) = \pm\, 4.$$

Таким образом, условию задачи удовлетворяют два вектора:

$\boldsymbol{a}_1 = 3\boldsymbol{i}_1 + 4\boldsymbol{i}_2$ и $\boldsymbol{a}_2 = 3\boldsymbol{i}_1 - 4\boldsymbol{i}_2$ (рис. 3.4,б).

3.9. Операции над векторами, заданными в координатной форме

Для простоты изложения материала рассмотрим сначала пространство L_2, с которым связан ортонормированный базис $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2$ (рис. 3.5).

Пусть два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ представлены в этом базисе своими составляющими:

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i}_1 + a_2\boldsymbol{i}_2, \qquad \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i}_1 + b_2\boldsymbol{i}_2.$$

Если произвольные векторы представлены в виде разложения по базисным векторам, то эти векторы могут быть охарактеризованы полностью своими координатами.

Вектор, выходящий из начала координат, называют *радиусом-вектором.*

Радиусы-векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ представим в виде совокупности их координат:

$$\boldsymbol{a} = (a_1; a_2); \qquad \boldsymbol{b} = (b_1; b_2). \tag{3.30}$$

Введем новый вектор

$$\boldsymbol{c} = (c_1; c_2), \tag{3.31}$$

равный разности радиусов-векторов ($\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$). Для него

$$\boldsymbol{c}=b_1\boldsymbol{i}_1+b_2\boldsymbol{i}_2-a_1\boldsymbol{i}_1-a_2\boldsymbol{i}_2=(b_1-a_1)\boldsymbol{i}_1+(b_2-a_2)\boldsymbol{i}_2=\big((b_1-a_1); (b_2-a_2)\big).$$

В справедливости записанного равенства легко убедиться путем соответствующих геометрических построений (рис. 3.5).

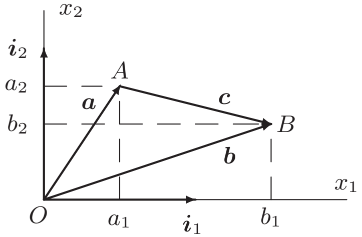


Рис. 3.5. Координаты разности векторов

Таким образом, для того чтобы получить разность двух радиусов-векторов, представленных в фиксированном базисе, связанном с декартовой ортогональной системой координат, достаточно составить вектор, координатами которого будут разности соответствующих координат этих векторов. При этом первой в разности должна стоять координата конца вектора. Если вектор $\overline{AB}$ направлен от точки $A(a_1, a_2)$ к точке $B(b_1, b_2)$, то

$$\overline{AB} = (b_1-a_1)\boldsymbol{i}_1+(b_2-a_2)\boldsymbol{i}_2=\big((b_1-a_1); (b_2-a_2)\big). \tag{3.32}$$

Модуль этого вектора

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}.$$

Условием равенства двух векторов $\overline{OA} = \overline{OB}$ или $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ является, очевидно, равенство их координат:

$$a_1 = b_1; \qquad a_2 = b_2.$$

Легко убедиться в том, что линейные операции над векторами, заданными в фиксированном базисе, сводятся к линейным операциям над их координатами. Например,

$$\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b} = \big((a_1 + \lambda b_1); (a_2 + \lambda b_2)\big). \tag{3.33}$$

Рассмотрим скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, представленных в ортонормированном базисе, с учетом свойств скалярного произведения, приведенных в § 3.6:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \big((a_1\boldsymbol{i}_1 + a_2\boldsymbol{i}_2), (b_1\boldsymbol{i}_1 + b_2\boldsymbol{i}_2)\big) =$$

$$= a_1b_1(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_1) + a_1b_2(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2) + a_2b_1(\boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_1) + a_2b_2(\boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_2) = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Обобщение приведенных выше соотношений на пространство L_n очевидно. Если, например, $\overline{OA} = \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\overline{OB} = \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ то вектор $\overline{AB}$, соединяющий точку $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ с точкой $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, может быть представлен в координатной форме в виде

$$\overline{AB} = \big((b_1 - a_1), (b_2 - a_2), \ldots, (b_n - a_n)\big). \tag{3.34}$$

Модуль этого вектора

$$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2}. \tag{3.35}$$

Скалярное произведение:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n. \tag{3.36}$$

Из определения скалярного произведения (3.17) вытекает выражение для косинуса угла между векторами:

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{ab}, \tag{3.37}$$

которое с учетом (3.36) представляется в виде

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}}. \tag{3.38}$$

Равенство

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = 0 \tag{3.39}$$

является условием ортогональности векторов. Оно следует из (3.38) при $\cos(\hat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = 0$.

Условие параллельности векторов $\boldsymbol{a}$ **и** $\boldsymbol{b}$ **можно записать в виде**

$$\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b}.$$

Это условие в координатной форме сводится к равенствам

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} (= \lambda). \tag{3.40}$$

Для пространства L_2 **из последних отношений в равенстве остается только первое.**

Пример 1. В торговый павильон поступили товары трех видов. Совокупность этих товаров представляется вектором $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$. **Количество товаров первого вида** $a_1 = 10$, **второго вида** $a_2 = 5$, **третьего вида** $a_3 = 12$. **Стоимость этих товаров задается вектором цен** $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$, **где в некоторых денежных единицах** $b_1 = 15$, $b_2 = 20$, $b_3 = 25$. **Требуется определить общую стоимость** P **поступивших товаров.**

Р е ш е н и е. При определении общей стоимости трех упомянутых товаров естественно использовать скалярное произведение векторов количества товаров и вектора их цен:

$$P = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 10 \cdot 15 + 5 \cdot 20 + 12 \cdot 25 = 550.$$

Пример 2. Найти угол (косинус угла) между векторами $\boldsymbol{a} = (1, -2, 2)$ **и** $\boldsymbol{b} = (-3, 2, 6)$.

Р е ш е н и е. $\cos(\hat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} =$

$$= \frac{1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 6}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 6^2}} = \frac{5}{21}.$$

Пример 3. Найти угол α **(косинус угла) между прямыми** AC **и** BD, **если** $A(2; -3; 1)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$, $D(-5; -5; 3)$.

Р е ш е н и е. Используя (3.34), получим:

$$\overline{AC} = (-4 - 2; 1 + 3; 1 - 1) = (-6; 4; 0) = 2(-3; 2; 0);$$

$$\overline{BD} = (-5 - 1; -5 - 4; 3 - 0) = (-6; -9; 3) = 3(-2; -3; 1).$$

$$\cos\alpha = \frac{(\overline{AC}, \overline{BD})}{|\overline{AC}||\overline{BD}|} = \frac{2 \cdot 3\big(-3 \cdot (-2) + 2 \cdot (-3) + 0 \cdot 1\big)}{2\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 0^2} \cdot 3\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 1^2}} = 0.$$

Результат указывает на ортогональность векторов.

Пример 4. Доказать, что вектор $\boldsymbol{a} = (-1{,}3; 2{,}1; 0{,}7)$ параллелен вектору $\boldsymbol{b} = (3{,}9; -6{,}3; -2{,}1)$.

Р е ш е н и е. Используя формулу (3.40), получим

$$\frac{-1{,}3}{3{,}9} = \frac{2{,}1}{-6{,}3} = \frac{0{,}7}{-2{,}1}\left(= -\frac{1}{3}\right).$$

Равенство указывает на то, что векторы параллельны.

3.10. Векторное произведение векторов

С геометрической точки зрения *векторным произведением* **вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{c}$, обладающий следующими свойствами:**

1) модуль вектора $\boldsymbol{c}$ равен произведению модулей векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ на синус угла между ними:

$$c = ab\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) \qquad (\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) \leq \pi;$$

2) вектор $\boldsymbol{c}$ ортогонален плоскости векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;

3) векторы, входящие в векторное произведение, образуют правую тройку векторов в порядке их расположения $\boldsymbol{cab}$ ($\boldsymbol{abc}$).

Для обозначения векторного произведения приняты записи

$$\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \qquad \text{или} \qquad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}.$$

С в о й с т в а векторного произведения.

1. Геометрически векторное произведение $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ по модулю равно площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, как на сторонах. Действительно (рис. 3.6),

$$c = ab\sin\alpha = ah.$$

Здесь h высота, опущенная из конца вектора $\boldsymbol{b}$ на вектор $\boldsymbol{a}$.

2. При перестановке векторов (коммутации) знак векторного произведения меняется на противоположный:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}.$$

3. Дистрибутивность по отношению к произведению вектора на сумму векторов: $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$.

4. Постоянный множитель можно выносить за знак произведения: $\lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\lambda\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\lambda\boldsymbol{b})$.

Отметим, что в $\Re_2$ ввести понятие векторного произведения векторов невозможно.

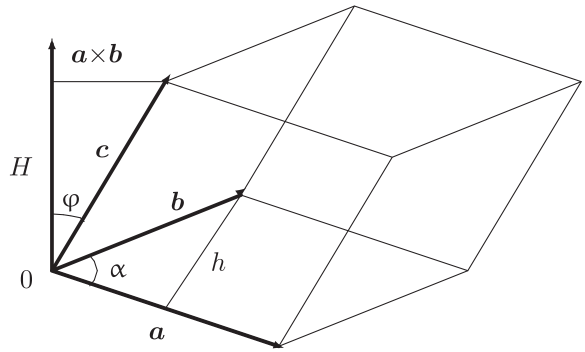


Рис. 3.6. Векторное и смешанное произведения векторов

Обратимся к векторам ортонормированного базиса в пространстве L_3 и рассмотрим их векторные произведения:

$$\boldsymbol{i_1} \times \boldsymbol{i_2} = -\boldsymbol{i_2} \times \boldsymbol{i_1} = \boldsymbol{i}_3,$$

$$\boldsymbol{i_2} \times \boldsymbol{i_3} = -\boldsymbol{i_3} \times \boldsymbol{i_2} = \boldsymbol{i}_1,$$

$$\boldsymbol{i_3} \times \boldsymbol{i_1} = -\boldsymbol{i_1} \times \boldsymbol{i_3} = \boldsymbol{i}_2;$$

$$\boldsymbol{i_1} \times \boldsymbol{i_1} = \boldsymbol{i_2} \times \boldsymbol{i_2} = \boldsymbol{i_3} \times \boldsymbol{i_3} = \boldsymbol{\Theta}.$$

Обобщим эти соотношения с использованием *символа Леви-Чивита***:**

$$e_{klm} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad klm = 123,\ 231,\ 312; \\ -1, & \text{если} \quad klm = 321,\ 213,\ 132; \\ 0, & \text{в остальных случаях :} \end{cases} \tag{3.41}$$

$$\boldsymbol{i_k} \times \boldsymbol{i_l} = \sum_{m=1}^{3} e_{klm} \boldsymbol{i}_m \quad (\kappa, l = \overline{1,3}). \tag{3.42}$$

Заметим, что равенство нулю векторного произведения двух векторов указывает на то, что эти векторы линейно зависимы (параллельны).

Рассмотрим, как представляется векторное произведение векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе. Пусть заданы два вектора в виде их разложения по ортонормированному базису $\boldsymbol{i}_k$ $(k = \overline{1,3})$:

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i}_1 + a_2\boldsymbol{i}_2 + a_3\boldsymbol{i}_3, \qquad \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i}_1 + b_2\boldsymbol{i}_2 + b_3\boldsymbol{i}_3.$$

Формулу для определения векторного произведения этих векторов получим с учетом (3.42):

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_1\boldsymbol{i}_1 + a_2\boldsymbol{i}_2 + a_3\boldsymbol{i}_3) \times (b_1\boldsymbol{i}_1 + b_2\boldsymbol{i}_2 + b_3\boldsymbol{i}_3) =$$

$$= \boldsymbol{i}_3(a_1b_2 - a_2b_1) + \boldsymbol{i}_2(a_3b_1 - a_1b_3) + \boldsymbol{i}_1(a_2b_3 - a_3b_2). \qquad (3.43)$$

Последнее выражение представляет собой разложение определителя третьего порядка

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad (3.44)$$

по элементам первой строки — совокупности трех векторов ортонормированного базиса.

Пример 1. Найти модули векторных произведений: а) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$**; б)** $(2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b})$, **если** $a = 3$**,** $b = 2$**,** $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \pi/6$.

Р е ш е н и е.

а) Следуя п. 1 определения векторного произведения, найдем

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = ab\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = 3 \cdot 2\sin(\pi/6) = 3.$$

б) Для определения модуля произведения, заданного в этом пункте, предварительно раскроем векторное произведение векторных двучленов:

$$\big|(2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b})\big| = \big|\boldsymbol{2a} \times \boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b}\big| =$$

$$= \big|2aa\sin 0 + 5ab\sin(\pi/6) - 2bb\sin 0\big| = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 15.$$

Пример 2. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a} = (3, 0, 2)$ **и** $\boldsymbol{b} = (2, 4, -1)$**.**

Р е ш е н и е. Найдем векторное произведение $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ **заданных векторов, используя формулу (3.43):**

$$\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3) = \big((a_1b_2 - a_2b_1), (a_3b_1 - a_1b_3), (a_2b_3 - a_3b_2)\big) =$$

$$= \big((3 \cdot 4 - 0 \cdot 2), (2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1)), (0 \cdot (-1) - 2 \cdot 4)\big) = (12, 7, -8).$$

Так как площадь S **параллелограмма равна модулю векторного произведения. то**

$$S = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = \sqrt{12^2 + 7^2 + (-8)^2} = \sqrt{257}.$$

3.11. Смешанное произведение векторов

Смешанным (векторно-скалярным) **произведением трех векторов называется число, равное скалярному произведение одного вектора на векторное произведение двух других:**

$$\boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).$$

Свойства смешанного произведения.

1. Модуль смешанного произведения векторов равен объему параллелепипеда, построенного на входящих в него векторах как на сторонах.

Свойство очевидно, так как векторное произведение — это вектор $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, ортогональный плоскости векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и модуль которого равен площади параллелограмма. Что касается скалярного произведения вектора $\boldsymbol{c}$ на единичный вектор в направлении вектора $\boldsymbol{d}$, то оно равно проекции $\boldsymbol{c}$ на этот вектор. А это высота H параллелепипеда (рис. 3.6).

2. Знак смешанного произведения не изменится, если в нем произвести четную перестановку векторов:

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).$$

При нечетной перестановке векторов знак произведения изменится на противоположный:

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = -\boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) = -\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) = -\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}).$$

3. Значение смешанного произведения не изменится, если поменять местами знаки скалярного и векторного произведений:

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c},$$

поэтому смешанное произведение часто изображают в виде совокупности расположенных в определенном порядке векторов:

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{abc}.$$

Для записи формулы вычисления смешанного произведения векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе, умножим (3.43) скалярно на вектор $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$:

$$\boldsymbol{abc} = a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3,$$

или

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{3.45}$$

Если смешанное произведение $\boldsymbol{abc}$ трех векторов в L_3 отлично от нуля, то эти векторы можно принять за базисные в L_3. Если $\boldsymbol{abc} > 0$, то тройка векторов образует правый базис; при $\boldsymbol{abc} < 0$ — левый базис. Чтобы левый базис превратить в правый, достаточно направление одного из векторов сменить на противоположное (умножить вектор на -1).

Пример 1. Найти объемы V параллелепипедов, построенных на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, в случае двух вариантов векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе:

$$\text{а) } \boldsymbol{a} = (1, -2, 4), \quad \boldsymbol{b} = (-3, 2, 0), \quad \boldsymbol{c} = (2, -1, 3);$$

$$\text{б) } \boldsymbol{a} = (3, 2, 7), \quad \boldsymbol{b} = (-2, 1, -3), \quad \boldsymbol{c} = (-1, 4, 1).$$

Р е ш е н и е. Для определения объема найдем модули смешанных произведений заданных троек векторов, воспользовавшись формулой (3.45):

$$\text{а)} \quad V = \left\| \begin{matrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{matrix} \right\| = |-16| = 16.$$

$$\text{б)} \quad V = \left\| \begin{matrix} 3 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Равенство нулю смешанного произведения векторов примера б) указывает на их линейную зависимость. Действительно равенство нулю линейной комбинации

$$-\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{\Theta}$$

с отличными от нуля множителями при векторах подтверждает записанный вывод. Три вектора линейно зависимы — они лежат в одной плоскости — поэтому не могут образовать объемную фигуру (параллелепипед) с неравным нулю объемом.

3.12. Деление отрезка в заданном отношении

Пусть требуется определить координаты точки M, делящей отрезок

M_1M_2 прямой в отношении $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2}$ (рис. 3.7).

В векторной форме отношение может быть представлено в виде равенства

$$\overline{M_1M} = \lambda\overline{MM_2}. \tag{3.46}$$

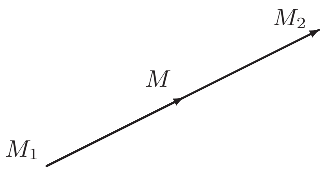


Рис. 3.7. Деление отрезка

Если координаты перечисленных точек в ортогональной декартовой системе координат в L_2 **известны:** $M_1(x_1, y_1)$**,** $M_2(x_2, y_2)$**,** $M(x, y)$**, то равенство (3.46) с учетом (3.34) можно переписать в виде**

$$(x - x_1; y - y_1) = \lambda(x_2 - x; y_2 - y).$$

На основании теоремы 3 § 3.5 приравняем соответствующие координаты равных векторов и из полученных равенств выразим координаты точки M**:**

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{3.47}$$

В частности, если точка M **делит отрезок** M_1M_2 **пополам, то** $M_1M = MM_2$ **и** $\lambda = 1$. **Тогда из (3.47) следует, что координаты точки** M **равны полусуммам координат точек** M_1 **и** M_2**:**

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right). \tag{3.48}$$

Пример. Найти координаты точки M, **делящей отрезок** M_1M_2 **в отношении** $\frac{3}{1} = 3$, **если** $M_1(2; 3),\ M_2(-2; 3)$.

Р е ш е н и е. $M\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}\right) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow M\left(\frac{2 + 3\cdot(-2)}{1+3}; \frac{3 + 3\cdot 3}{1+3}\right) \Longrightarrow M(-1; 3).$$

Формулы (3.47) обобщим на пространство E_n **(евклидово пространство, в котором речь можно вести об измеренном по прямой расстоянии между точками).**

Пусть в E_n **две точки заданы своими координатами:** $M_1(x_1^1, \ldots, x_i^1, \ldots, x_n^1)$, $M_2(x_1^2, \ldots, x_i^2, \ldots, x_n^2)$**. Требуется найти координаты точки** $M(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$**, которая делит отрезок** M_1M_2 **в отношении** λ**.**

Координаты точки M **определятся по формуле** $(i = \overline{1, n})$**:**

$$x_i = \frac{x_i^1 + \lambda x_i^2}{1+\lambda}. \tag{3.49}$$

3.13. Резюме

Вектором в математике называют совокупность элементов, описывающих некоторый объект исследования. Такой вектор в линейном пространстве L_n представляется в виде совокупности координат:

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T. \tag{3.50}$$

В пространствах, размерность которых не превышает трех, можно ввести геометрический аналог вектора — направленный отрезок определенной длины, равной модулю a вектора. В евклидовом пространстве E_n $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$.

Направление вектора в пространстве L_n определяется совокупностью «направляющих косинусов» n_i — координат единичного вектора $\boldsymbol{n}$, сонаправленного рассматриваемому вектору:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{a}}{a} = \left(\frac{a_1}{a}, \ldots, \frac{a_n}{a}\right) = (n_1, \ldots, n_n).$$

Линейные операции над векторами (сложение и умножение на число) обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.

Любой вектор может быть разложен по базисным векторам $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ (представлен в виде их линейной комбинации):

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_n\boldsymbol{e}_n.$$

В этом случае (3.50) представляет собой совокупность координат вектора $\boldsymbol{a}$ в заданном базисе.

Если базис ортонормированный $(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \ldots, \boldsymbol{i}_n)$, то есть базис, векторы которого удовлетворяют условиям

$$(\boldsymbol{i}_k, \boldsymbol{i}_r) = \delta_{kr} = \begin{cases} 1, & \textbf{если } k = r, \\ 0, & \textbf{если } k \neq r, \end{cases}$$

то в разложении $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i}_1 + a_2\boldsymbol{i}_2 + \ldots + a_n\boldsymbol{i}_n$ координаты a_k $(k = \overline{1, n})$ в представлении (3.50) вектора являются проекциями вектора $\boldsymbol{a}$ на направления базисных векторов.

Важной математической операцией над двумя векторами является их скалярное произведение. Для геометрических векторов — это число, равное произведению модулей векторов на косинус угла между ними:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = ab\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}).$$

Для векторов, представленных в ортонормированном базисе,

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

Скалярное произведение векторов коммутативно.

Векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ **называются линейно независимыми, если равенство**

$$\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{\Theta}$$

($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ **— числовые множители;** $\boldsymbol{\Theta}$ **– нулевой вектор) выполняется только при условии, когда все множители** λ_i $(i = \overline{1, n})$ **равны нулю. В противном случае совокупность векторов линейно зависима.**

Кроме скалярного произведения на практике находят широкое применение векторное и смешанное произведения векторов. С помощью этих произведений упрощается вычисление площадей и объемов фигур, ограниченных прямыми и плоскостями.

Желающим расширить свои познания в векторной алгебре рекомендуем [1], [4], [5], [6], [8].

3.14. Вопросы

1. **Что собой представляет вектор с геометрической точки зрения?**
2. **Что представляет собой модуль вектора? Как определяется направление вектора?**
3. **Какой вектор называется нулевым? Можно ли определить его направление?**
4. **Перечислите аксиомы векторных (линейных) пространств.**
5. **Что называется суммой двух векторов? n векторов?**
6. **Что называется скалярным произведением векторов? Запишите формулу для скалярного произведения векторов и поясните, от чего зависит знак скалярного произведения?**
7. **Что такое проекция вектора на направленную ось? составляющая вектора? Перечислите основные свойства проекций.**
8. **Какие векторы называются линейно зависимыми? линейно независимыми? Перечислите свойства линейно зависимых векторов.**
9. **Как можно разложить вектор по базисам в различных пространствах?**
10. **Что собой представляет ортонормированный базис? Запишите все возможные варианты скалярных произведений векторов ортонормированного базиса в L_3.**
11. **Что собой представляют координаты единичного вектора в ортонормированном базисе?**
12. **Как определить модуль вектора по его координатам в ортонормированном базисе?**
13. **Приведите выражения для скалярного произведения векторов, представленных своими координатами в ортонормированном базисе. Для косинуса угла между векторами.**
14. **Запишите в координатной форме условия ортогональности и параллельности двух векторов.**
15. **Приведите формулы для определения координат точки, делящей отрезок в заданном отношении. Делящей отрезок пополам.**
16. **Дайте определение и поясните геометрический смысл векторного произведения. Смешанного произведения.**

17. Запишите формулы для определения векторного и смешанного произведения векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе.

Вопросы для тестирования

1. Отметьте, какие из записанных ниже выражений относятся к линейным операциям над векторами ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ — векторы, λ — скаляр).

1. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$; **2.** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$; **3.** $\boldsymbol{a}+\mu \boldsymbol{b}$; **4.** $a=|\boldsymbol{a}|$; **5.** $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

2. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка) ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ – векторы, $\lambda \in \Re$). В местах отсутствия правильных ответов поставьте цифру 5.

1. Коммутативность	**1.** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\lambda$;
2. Ассоциативность	**2.** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;
3. Дистрибутивность	**3.** $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$;
4. Скалярное произведение	**4.** $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda \boldsymbol{a}+\lambda \boldsymbol{b}$.

3. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка) по отношению к скалярному произведению и его свойствам ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ — векторы, $\lambda \in \Re$). В местах отсутствия правильных ответов поставьте цифру 5.

1. Коммутативность	**1.** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=a \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$;
2. Ассоциативность	**2.** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$;
3. Дистрибутивность	**3.** $\big(\boldsymbol{a},(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\big)=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$;
4. Определение	**4.** $\lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=(\lambda \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}, \lambda \boldsymbol{b})$.

4. Какие из перечисленных ниже соотношений справедливы для проекций векторов?

1. $Pr_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}=Pr_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b}$; **2.** $Pr_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}=b \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$;

3. $Pr_{\boldsymbol{b}} \lambda \boldsymbol{a}=\lambda Pr_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}$; **4.** $Pr_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=Pr_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{a} \cdot Pr_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{b}$;

5. $Pr_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=Pr_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{a}+Pr_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{b}$.

5. Отметьте свойства, справедливые для векторов $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$ ортонормированного базиса в L_2 ($\boldsymbol{n}$ — единичный вектор).

1. $(\boldsymbol{i_1}, \boldsymbol{i_2})=0$; **2.** $\boldsymbol{i_1}+\boldsymbol{i_2}=2 \boldsymbol{n}$; **3.** $\boldsymbol{i}_1 \perp \boldsymbol{i}_2$;

4. $\sqrt{\boldsymbol{i}_1{}^2+\boldsymbol{i}_2{}^2}=1$; **5.** $(\boldsymbol{i_1}, \boldsymbol{i_1})=1$.

6. Отметьте свойства, справедливые по отношению к действиям над векторами, представленными в ортонормированном базисе.

1. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$;

2. $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1, a_2, a_3)=(a_1, \lambda a_2, a_3)=(a_1, a_2, \lambda a_3)$;

3. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sqrt{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$;

4. $Pr_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$;

5. $\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}) = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$.

7. Отметьте свойства, справедливые по отношению к действиям над векторами, представленными в ортонормированном базисе ($\boldsymbol{a}$ — произвольный вектор).

1. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$; **2.** $a_1 = Pr_{\boldsymbol{i}_1}\boldsymbol{a}$; **3.** $a_1 = a\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{i_1})$;

4. $a = \sqrt{{\boldsymbol{i}_1}^2 + {\boldsymbol{i}_2}^2 + {\boldsymbol{i}_3}^2}$; **5.** $(\boldsymbol{i_1}, \boldsymbol{i_3}) = 1$.

8. Отметьте свойства, справедливые для векторов, представленных в ортонормированном базисе в L_3 ($\boldsymbol{a}$ — произвольный вектор; $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор).

1. $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{i_1}) = \cos\alpha_1$; **2.** $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i}_1 + a_2\boldsymbol{i}_2 + a_3\boldsymbol{i}_3$; **3.** $a_1a_3 = 0$;

4. $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$; **5.** $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha_1; \cos\alpha_2; \cos\alpha_3)$.

9. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка). В местах отсутствия соответствия поставьте цифру 5.

1. Модуль вектора	**1.** $a\cos\alpha_1$;
2. Координата вектора	**2.** $\sqrt{(x_1^A - x_1^B)^2 + (x_2^A - x_2^B)^2}$;
3. Деление отрезка	**3.** $(x_1^A + \lambda x_1^B)/(1+\lambda)$;
4. Скалярное произведение	**4.** $a_1b_1 + a_2b_2$.

10. Поставьте в соответствие номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка), касающихся типов произведений векторов ортонормированного базиса $\boldsymbol{i}_k$, $\boldsymbol{i}_m$ и $\boldsymbol{i}_r$. В местах отсутствия правильных ответов поставьте 5.

1. Скалярное	**1.** $\boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_r$
2. Векторное	**2.** $\boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_m\boldsymbol{i}_r$
3. Смешанное	**3.** δ_{km},
4. Неопределенное	**4.** $e_{krm}\boldsymbol{i}_m$.

ТЕМА 3.1
(§ 3.1–3.7 теории)

Векторы. Линейные зависимость и независимость системы векторов

Вопросы

1. **Что собой представляет вектор с геометрической точки зрения? модуль вектора? направление вектора?**
2. **Что собой представляют линейные операции над векторами? Перечислите свойства линейных операций.**
3. **Что называется скалярным произведением векторов? Запишите формулу для скалярного произведения векторов и поясните, от чего зависит знак скалярного произведения.**
4. **Что такое проекция вектора на направленную ось? Перечислите основные свойства проекций.**
5. **Как связана проекция вектора со скалярным произведением?**
6. **Какие векторы называются линейно зависимыми? линейно независимыми?**
7. **Как можно разложить вектор по базисам пространств L_1? L_2? L_3?**

Задачи

1. Заданы три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, произвольным образом расположенные в пространстве. Путем построений изобразить процесс получения векторов $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ и $-2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

Р е ш е н и е. Для решения задачи используем правила суммирования векторов и умножения их на число. Например, в случае построения третьего вектора сначала изображается вектор, длина которого в 2 раза больше вектора $\boldsymbol{a}$ и который направлен в сторону, противоположную вектору $\boldsymbol{a}$. С концом полученного вектора совмещается начало вектора $\boldsymbol{b}$, затем с концом присоединенного вектора $\boldsymbol{b}$ совмещается начало вектора $\boldsymbol{c}$. Началом искомого вектора является начало вектора $-2\boldsymbol{a}$, а концом — конец вектора $\boldsymbol{c}$.

Проверить справедливость свойства коммутативности операции сложения векторов.

2. Построить вектор $\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_2 + 3\boldsymbol{i}_3$, где $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$ и $\boldsymbol{i}_3$ — тройка взаимно ортогональных единичных векторов.

Р е ш е н и е (рис.3.8). Искомый вектор $\boldsymbol{a}$ можно получить двумя способами. Либо построением прямоугольного параллелепипеда на векторах $-2\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$ и $3\boldsymbol{i}_3$, либо последовательно присоединяя к концу каждого предыдущего вектора начало последующего. В первом случае искомый вектор, началом которого служат начала трех векторов — сторон параллелепипеда, совпадает с диагональю построенного прямоугольного параллелепипеда. Во втором случае начало вектора $\boldsymbol{a}$ совпадает с началом первого изображаемого вектора суммы, конец — с концом последнего.

3. Заданы модули $a = 10$, $b = 5$ двух векторов и угол $\varphi = (\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}) = 2\pi/3$ между ними. Найти скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Р е ш е н и е. Используя формулу, соответствующую определению скалярного произведения $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a \cdot b \cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$, найдем $\bigl(\cos(2\pi/3) = -1/2\bigr)$:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 10 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -25.$$

Знак «минус» в значении скалярного произведения говорит о том, что угол между рассматриваемыми векторами тупой.

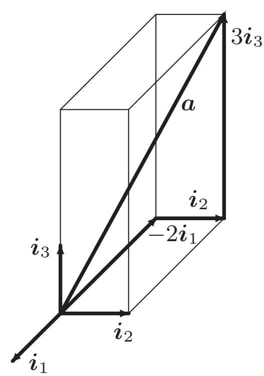


Рис. 3.8. Задача 3

4. Заданы модули $a = 2$, $b = 5$ двух векторов и их скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 10$. Определить угол между векторами.

Р е ш е н и е. Из формулы, соответствующей определению скалярного произведения, следует: $\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}) = \dfrac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{a \cdot b}$. Воспользовавшись этим выражением, найдем

$$\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}) = \frac{10}{2 \cdot 5} = 1.$$

Отсюда $(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}) = 2\pi k \quad (k \in Z)$.

5. Найти скалярное произведение векторов $2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$, если известны модули векторов $a = 4$, $b = 1$ и угол $\varphi = (\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}) = \pi/3$.

Р е ш е н и е. Для определения искомой величины предварительно раскроем скалярное произведение, опираясь на его свойства (дистрибутивность, коммутативность и возможность вынесе-

ния числового множителя за знак скалярного произведения):

$$\big((2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}),(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\big)=2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})-4(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+3(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})-6(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})=$$

$$=2a^2-a\cdot b\cos\varphi-6b^2=2\cdot4^2-4\cdot1\cdot\frac{1}{2}-6\cdot1^2=24.$$

6. Найти проекцию вектора $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ на направление вектора $\boldsymbol{c}$, если $a=\sqrt{3}$, $(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{c})=\pi/6$, $(\boldsymbol{b}\hat{,}\boldsymbol{c})=\pi/2$.

Р е ш е н и е. Используя свойства суммы проекций векторов и произведения проекции вектора на число, получим

$$Pr_{\boldsymbol{c}}(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})=2Pr_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}+3Pr_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b}=2a\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{c})+3b\cos(\boldsymbol{b}\hat{,}\boldsymbol{c})=$$

$$=2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+3\cdot b\cdot0=3.$$

7. Найти проекцию вектора $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ на направление вектора $\boldsymbol{c}$, если $c=2$, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})=-1$, $(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=4$.

Р е ш е н и е. Используя формулу, связывающую проекции векторов со скалярным произведением $Pr_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}=\dfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})}{c}$, получим

$$Pr_{\boldsymbol{c}}(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=2\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})}{c}-3\frac{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}{c}=2\frac{-1}{2}-3\frac{4}{2}=-7.$$

8. Убедиться в том, что любое частное решение уравнения $x-2y=0$ представляет собой вектор в пространстве $\Re_2$.

Р е ш е н и е. Исходное уравнение — частный случай однородной системы уравнений при $n=2$ и $m=1$. Ранги матрицы ее коэффициентов и расширенной матрицы равны: $rang(1,2)=rang(1,2,0)=r=1$. Количество неизвестных $n=2>r$. Согласно теореме Кронекера-Капелли система имеет бесчисленное множество решений. Общее решение заданной «системы» уравнений неоднозначно и представляется совокупностью двух величин $x=t$ и $x=2t$, где $t\in\Re$.

Обозначим эту совокупность через X и покажем, что $X=(t,2t)$ представляет собой вектор в пространстве $\Re_2$, т.е. удовлетворяет всем условиям параграфа 3.2, определяющим векторное пространства.

Рассмотрим два частные решения исходного уравнения $X_1 = (t_1, 2t_1)$ **и** $X_2 = (t_2, 2t_2)$ **и совокупность** $\Theta = (0,0)$**. Проверку осуществим следуя пунктам аксиом векторного пространства.**

1. Образуем сумму двух векторов: $X_1 + X_2 = ((t_1, 2t_1) + (t_2, 2t_2) = (t_1 + t_2, 2t_1 + 2t_2) = (T, 2T)$**. Здесь и далее** $T = t_1 + t_2 \in \Re$**.**

2. Операция суммирования обладает свойством коммутативности. Действительно, $X_1 + X_2 = (t_1 + t_2, 2t_1 + 2t_2) = (t_2 + t_1, 2t_2 + 2t_1) = (t_2, 2t_2) + (t_1, 2t_1) = X_2 + X_1$**.**

В выполнимости пунктов 3-9 аксиом векторного пространства читателям предлагается убедиться самостоятельно.

10. $X + (-X) = (t, 2t) + (-t, -2t) = (t - t, 2t - 2t) = (0,0) = \Theta$.

Все пункты аксиом выполнены, поэтому, следуя определению, $\boldsymbol{X}$ **представляет собой вектор в** $\Re_2$**.**

9. Установить, будут ли векторы $\boldsymbol{a}_1 = (2,1,1) = 2i_1 + i_2 + i_3$, $\boldsymbol{a}_2 = (-3,1,-4) = -3i_1 + i_2 - 4i_3$ **и** $\boldsymbol{a}_3 = (1,3,-2) = i_1 + 3i_2 - 2i_3$ **линейно независимыми.**

Р е ш е н и е. Для установления факта линейной зависимости или линейной независимости заданных векторов составим и приравняем нулевому вектору их линейную комбинацию:

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{\Theta}.$$

Подставим в записанное равенство заданные векторы, выраженные через базисные векторы и сгруппируем слагаемые с одинаковыми $\boldsymbol{i}_k \quad (k = 1,2,3)$**:**

$$(2\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3)\boldsymbol{i}_1 + (\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3)\boldsymbol{i}_2 + (\lambda_1 - 4\lambda_2 - 2\lambda_3)\boldsymbol{i}_3 = 0 \cdot i_1 + 0 \cdot i_2 + 0 \cdot i_3.$$

Приравнивая множители при одинаковых базисных векторах правой и левой частей записанного равенства, придем к системе уравнений:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - 3\lambda_2 + \ \lambda_3 = 0, \\ \ \lambda_1 + \ \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ \ \lambda_1 - 4\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Однородная система уравнений будет иметь ненулевые решения, если определитель матрицы ее коэффициентов равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-4} & \mathbf{-2} \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathbf{-2N2} \\ \\ \mathbf{-N\ 2} \end{matrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-5} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-5} & \mathbf{-5} \end{vmatrix} = 0 \ (!)$$

Обратим внимание на то, что столбцами определителя являются координаты заданных векторов.

Равенство нулю определителя указывает на то, что существуют ненулевые значения коэффициентов λ_k при которых линейная комбинация заданных векторов обращается в нуль. Эти значения: $\lambda_1 = -2t,\ \lambda_2 = -t,\ \lambda_3 = t$. Таким образом

$$-2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{\Theta}.$$

Система заданных векторов линейно зависима.

10. Установить, можно ли считать функции e^{k_1x} и e^{k_2x} линейно независимыми векторами.
Р е ш е н и е. Составим и приравняем нулю линейную комбинацию заданных функций.

$$\lambda_1 e^{k_1x} + \lambda_2 e^{k_2x} = 0.$$

Предположим, что хотя бы один из числовых множителей в равенстве (пусть λ_1) не равен нулю. Перенесем второе слагаемое в правую часть равенства и поделим полученное выражение на $\lambda_1 e^{k_2x}$:

$$e^{(k_1-k_2)x} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

В правой части полученного выражения стоит число, а в левой — функция переменной x. Равенство возможно только в случае, когда $k_1 = k_2$. Таким образом, экспоненциальные функции будут линейно независимыми если коэффициенты в их показателях различны.

11. Установить, можно ли считать функции x и kx линейно независимыми векторами.
Р е ш е н и е. Составим и приравняем нулю линейную комбинацию заданных функций:

$$\lambda_1 x + 2\lambda_2 kx = 0.$$

Ясно, что записанное равенство будет выполняться при не равных нулю коэффициентах λ_1 и λ_2, связанных зависимостью $\lambda_1 = -2k\lambda_2$. Функции — линейно зависимые.

12. Записать вектор $\boldsymbol{a} = -1{,}5\boldsymbol{p}_1 + 0{,}5\boldsymbol{p}_2$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, если зависимость между двумя парами базисных векторов выражается соотношениями:

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2); \qquad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{4}(3\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2).$$

Р е ш е н и е. Из двух векторных уравнений, связывающих заданные базисные векторы, найдем

$$\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2; \qquad \boldsymbol{p}_2 = 3\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2.$$

Подставляя эти зависимости в выражение для вектора $\boldsymbol{a}$, получим

$$\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{e}_1 - 4\boldsymbol{e}_2.$$

Замечание: линейная независимость двух пар базисных векторов следует из возможности взаимного однозначного представления одной пары векторов через другую.

Желательно представленные преобразования сопроводить рисунком, выбрав в качестве исходного базиса любую пару некомпланарных векторов: $(\boldsymbol{e}_1; \boldsymbol{e}_2)$ или $(\boldsymbol{p}_1; \boldsymbol{p}_2)$.

13. Записать вектор $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2 + 2\boldsymbol{p}_3$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, если зависимость между векторами выражается соотношениями:

$$\boldsymbol{e}_1 = 3\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 - 2\boldsymbol{p}_3; \quad \boldsymbol{e}_2 = -1{,}5\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2; \quad \boldsymbol{e}_3 = 3\boldsymbol{p}_1 - 2\boldsymbol{p}_2.$$

Р е ш е н и е. Искомое представление вектора $\boldsymbol{a}$ должно иметь вид

$$\boldsymbol{a} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \lambda_3\boldsymbol{e}_3. \tag{3.51}$$

Подставим в (3.51) зависимости между $\boldsymbol{e}_k$ и $\boldsymbol{p}_k$ ($k = \overline{1,3}$) и сгруппируем в полученном выражении слагаемые при одинаковых векторах $\boldsymbol{p}_k$:

$$\boldsymbol{a} = (\lambda_1 - 1{,}5\lambda_2 + 3\lambda_3)\boldsymbol{p}_1 + (-\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3)\boldsymbol{p}_2 - 2\lambda_1\boldsymbol{p}_3.$$

Приравнивая коэффициенты при векторах $\boldsymbol{p}_k$ в полученном и исходном выражениях для вектора $\boldsymbol{a}$, придем к системе трех уравнений относительно трех неизвестных λ_k:

$$\begin{cases} 3\lambda_1 - 1{,}5\lambda_2 + 3\lambda_3 = 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = -1, \\ -2\lambda_1 = -2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -1{,}5\lambda_2 + 3\lambda_3 = -2, \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = -2, \\ \lambda_1 = 1. \end{cases}$$

Умножение первого уравнения системы на -2, второго на 3 приводит к уравнениям с одинаковыми левыми и различными правыми частями:

$$\begin{cases} 3\lambda_2 - 6\lambda_3 = 4, \\ 3\lambda_2 - 6\lambda_3 = -6, \end{cases}$$

что говорит о несовместности двух уравнений. Причина тому — линейная зависимость (коллинеарность) двух заданных векторов: $\boldsymbol{e}_3 = -2\boldsymbol{e}_2$.

14. Денежные единицы E, D и R трех государств связаны отношениями, представленными таблицей (значения единиц, приведенных в верхней строке относятся к значениям единиц первого столбца).

Установить факт линейной зависимости или независимости систем векторов, представленных координатами строк (столбцов) таблицы.

	E	D	R
E	**1**	**5/6**	**25**
D	**6/5**	**1**	**30**
R	**1/25**	**1/30**	**1**

Р е ш е н и е Составим в виде совокупности координат векторы, представленные тремя строками таблицы:

$$\boldsymbol{a} = \left(\frac{E}{E}; \frac{D}{E}; \frac{R}{E}\right) = \left(1; \frac{5}{6}; 25\right), \quad \boldsymbol{b} = \left(\frac{6}{5}; 1; 30\right), \quad \boldsymbol{c} = \left(\frac{1}{25}; \frac{1}{30}; 1\right).$$

Нетрудно убедиться в том, что любой из записанных векторов коллинеарен двум другим. Действительно, например, $\boldsymbol{b} = \frac{6}{5}\boldsymbol{a} = 30\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a} = \frac{5}{6}\boldsymbol{b} = 25\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c} = \frac{1}{25}\boldsymbol{a} = \frac{1}{25}\boldsymbol{b}$. Аналогичные соотношения можно записать для векторов, представленных координатами столбцов таблицы. Следовательно, отношения обменных курсов различных валют представляются числами, которые являются координатами линейно зависимых векторов.

Задачи для самостоятельного решения

1. Изобразить на рисунке три произвольных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Построить по ним векторы $0{,}5\boldsymbol{a}$, $-0{,}5\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$, $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})$.

2. Заданы модули векторов $a = 4$, $b = 5$ и угол $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = 2\pi/3$. Найти скалярное произведение векторов.

3. Заданы модули векторов $a = 1$, $b = 3$ и угол $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \pi/2$. Найти скалярное произведение векторов $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

4. Найти $Pr_b\boldsymbol{a}$, если $b = 4$, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 8$.

5. Найти угол $\alpha = (\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$, если $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 4$, $a = 2$, $b = 4$.

6. Доказать, что полином n-й степени $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ представляет собой линейную комбинацию системы линейно независимых «векторов» $(x^0, x^1, x^2, \ldots, x^n)$.

7. Записать вектор $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ в базисе $(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3)$, если $\boldsymbol{i}_1 = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{i}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{i}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$.

8. Записать вектор $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$ в базисе $(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2)$, если $\boldsymbol{i}_1 = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{i}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$. Изобразить на рисунке разложение вектора в двух базисах.

9. Определить, будут ли линейно независимыми функции $\sin x$ и $\cos x$?

10. Определить, будут ли векторы $(3, 1, 5)$, $(-2, 2, -3)$ и $(1, -5, 1)$ линейно независимыми.

ТЕМА 3.2
(§ 3.8–3.9 теории)

Операции над векторами в ортонормированном базисе

Вопросы

1. **Что собой представляет ортонормированный базис? Запишите все возможные варианты скалярных произведений векторов ортонормированного базиса.**
2. **Какова связь между проекциями вектора на векторы ортонормированного базиса и координатами вектора?**
3. **Что собой представляют координаты единичного вектора в ортонормированном базисе?**
4. **Как определить модуль вектора по его координатам в ортонормированном базисе?**
5. **Как связаны между собой направляющие косинусы вектора, заданного в ортонормированном базисе?**
6. **Приведите выражение для скалярного произведения векторов, представленных своими координатами в ортонормированном базисе, а также для косинуса угла между векторами.**
7. **Запишите в координатной форме условия ортогональности и параллельности двух векторов.**

Задачи

1. В пространстве L_2 заданы два геометрических вектора $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$. Ввести в этом пространстве ортонормированный базис и показать на рисунке проекции векторов $\overline{CA}$, $\overline{CB}$ и $\overline{AB}$. Записать выражения для проекций и составляющих этих векторов по направлениям базисных векторов.

Р е ш е н и е. Проекции векторов соответствуют длинам отрезков по координатным осям, связанным с базисными векторами, так как ортогональные базисные векторы имеют единичные модули: $Pr_{\boldsymbol{i}_1}\overline{CA} = a_1 - c_1$ **(отрицательная величина);** $Pr_{\boldsymbol{i}_1}\overline{CB} = b_1 - c_1$, $Pr_{\boldsymbol{i}_1}\overline{AB} = b_1 - a_1$, **. . . ,** $Pr_{\boldsymbol{i}_2}\overline{AB} = b_2 - a_2$.

Векторы раскладываются на составляющие по направлениям базисных векторов:

$$\overline{CA} = (a_1 - c_1)\boldsymbol{i}_1 + (a_2 - c_2)\boldsymbol{i}_2,\ \ldots,\ \overline{AB} = (b_1 - a_1)\boldsymbol{i}_1 + (b_2 - a_2)\boldsymbol{i}_2.$$

2. Найти вектор $\overline{AB}$, если в декартовой ортогональной системе координат $A(3;-2)$, $B(2;-4)$.

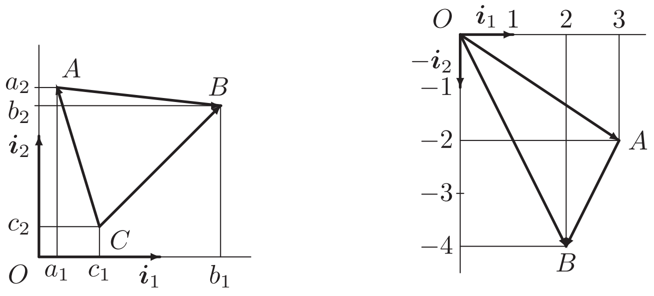


Рис. 3.9. Решения задач 1 (слева) и 2 (справа)

Построить векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{AB}$ в ортонормированном базисе, связанном с системой координат (O — начало координат).

Р е ш е н и е. Векторы, задаваемые координатами точек их конца и начала, определяются разностями соответствующих координат. Так как координаты точки O нулевые: $O(0,0)$, то $\overline{OA} = (a_1 - 0; a_2 - 0) = (a_1; a_2) = (3;-2)$, $\overline{OB} = (b_1; b_2) = (2;-4)$. **Записанные соотношения подтверждают утверждение о том, что координаты радиусов-векторов в ортонормированном базисе равны координатам концов этих векторов.**

Далее имеем: $\overline{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2) = \big(2 - 3; -4 - (-2)\big) = (-1;-2)$.

3. В ортонормированном базисе заданы векторы $\boldsymbol{a} = (4;-2;0)$ и $\boldsymbol{b} = (3;5;-1)$. Найти $0{,}5\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ и $2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$.

Р е ш е н и е. Учитывая свойства линейных операций над векторами, заданными своими координатами, найдем:
$0{,}5\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\big(0{,}5\cdot 4+3; 0{,}5\cdot(-2)+5; 0{,}5\cdot 0+(-1)\big)=(5;4;-1)$**;**
$2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\big(2\cdot 3-4; 2\cdot 5-(-2); 2\cdot(-1)-0\big)=(2;12;-2)=2(1;6;-1)$**.**

4. Найти $Pr_b\boldsymbol{a}$**, если** $\boldsymbol{a}=(0;2;-3)$, $\boldsymbol{b}=(1;-2;-1)$**.**
Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой определения проекций через скалярное произведение векторов:

$$Pr_b\boldsymbol{a}=\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{b}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}=\frac{0\cdot1+2\cdot(-2)+(-3)\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

5. Найти угол между векторами $\boldsymbol{a}=(-0{,}5;2;1{,}5)$ **и** $\boldsymbol{b}=(1;-4;-3)$.
Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой определения косинуса угла между двумя векторами через скалярное произведение этих векторов:

$$\cos\varphi=\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{a\cdot b}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}=$$

$$=\frac{-0{,}5\cdot1+2\cdot(-4)+1{,}5\cdot(-3)}{\sqrt{(-0{,}5)^2+2^2+(1{,}5)^2}\sqrt{1^2+(-4)^2+(-3)^2}}=\frac{-13}{0{,}5\sqrt{26}\sqrt{26}}=-1.$$

Отсюда $\varphi=\arccos(-1)=\pi$**.**

Заданные векторы оказались коллинеарными. Этого результата можно было ожидать. Действительно, векторы $\boldsymbol{a}$ **и** $\boldsymbol{b}$ **линейно зависимы:** $\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{a}$.

6. Найти m **и** n**, если известно, что векторы** $\boldsymbol{a}=(2;2;m)$ **и** $\boldsymbol{b}=(n;4;6)$ **параллельны.**
Р е ш е н и е. Из условия параллельности векторов $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$ **следует** $\dfrac{2}{n}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{m}{6}$.

Из двух независимых уравнений получим:

$$\frac{2}{n}=\frac{2}{4}\Longrightarrow n=4;\qquad \frac{2}{4}=\frac{m}{6}\Longrightarrow m=3.$$

7. Найти m**, если векторы** $\boldsymbol{a}=(5m;2;m)$ **и** $\boldsymbol{b}=(-1;3;m)$ **перпендикулярны.**
Р е ш е н и е. Из условия перпендикулярности векторов

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$$

следует:

$$5m\cdot(-1)+2\cdot3+m\cdot m=0.$$

Для определения m **имеем квадратное уравнение**

$$m^2 - 5m + 6 = 0.$$

Это уравнение имеет два действительных корня: $m_1 = 2$ **и** $m_2 = 3$ **— искомые значения** m**.**

8. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{a} = (1; \sqrt{2}; -1)$.
Р е ш е н и е. Определив модуль заданного вектора

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + (-1)^2} = 2,$$

найдем единичный вектор, сонаправленный вектору $\boldsymbol{a}$**:**

$$\boldsymbol{n_a} = \frac{\boldsymbol{a}}{a} = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

Координатами единичного вектора в ортонормированном базисе являются направляющие косинусы. Таким образом,

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\alpha_3 = -\frac{1}{2}.$$

Отсюда находим значения углов: $\alpha_1 = \pi/3$**,** $\alpha_2 = \pi/4$**,** $\alpha_3 = 2\pi/3$**, которые определяют направление вектора** $\boldsymbol{a}$**.**

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти вектор $\overline{AB}$**, если в декартовой ортогональной системе координат** $A(1; 2; -1)$, $B(3; -4; 1)$.

Построить векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ **и** $\overline{AB}$ **в ортонормированном базисе, связанном с системой координат (**O **– начало координат).**

2. В ортонормированном базисе заданы векторы $\boldsymbol{a} = (2; -1; 0)$ **и** $\boldsymbol{b} = (3; 1; 5)$. **Найти** $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ **и** $\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a}$.

3. Найти $Pr_b\boldsymbol{a}$**, если** $\boldsymbol{a} = (0; 2; -3)$, $\boldsymbol{b} = (1; -2; -1)$.

4. Найти угол между векторами $\boldsymbol{a} = (2; 3; -1)$ **и** $\boldsymbol{b} = (-1; 0; 3)$.

5. Найти m**, если известно, что векторы** $\boldsymbol{a} = (1; n; 3)$ **и** $\boldsymbol{b} = (m; 4; 6)$ **параллельны.**

6. Из условия перпендикулярности векторов $\boldsymbol{a} = (m; 2m; 1)$ **и** $\boldsymbol{b} = (m; 1; 1)$ **найти** m.

7. Найти угол между диагоналями четырехугольника, заданного координатами его вершин: $A(-1; -1)$**,** $B(-1; 2)$**,** $C(2; -1)$ **и** $D(2; 2)$.

8. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{a} = (3; -6; 2)$.

Т Е М А 3.3
(§ 3.10–3.12 теории)

Векторное и смешанное произведения векторов

Вопросы

1. Дайте определение векторного произведения векторов?

2. В чем геометрический смысл векторного произведения?

3. Дайте определение смешанного произведения векторов?

4. В чем геометрический смысл смешанного произведения?

5. В чем состоит задача деления отрезка в заданном отношении? Приведите формулы для определения координат точки, делящей отрезок в заданном отношении и, в частности, пополам.

Задачи

1. Заданы модули двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$: $a = 3$, $b = 1/\sqrt{3}$ и угол между векторами $(\widehat{\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}}) = \pi/3$. Вычислить площадь S параллелограмма, двумя сторонами которого являются векторы $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

Р е ш е н и е.

Составим векторное произведение, раскроем его и найдем модуль полученного вектора:

$$c = |\boldsymbol{c}| = |(3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})| = |3\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b}|.$$

Так как $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}| = aa \sin 0 = 0$, $|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b}| = bb \sin 0 = 0$ и $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ то

$$c = |4ab \sin \pi/3| = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 = S.$$

2. Сумма трех векторов равна нулевому вектору: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{\Theta}$. Доказать, что при этом $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$. Каков геометрический смысл полученного результата?

Р е ш е н и е. Из первого заданного равенства выразим один из векторов (произвольный) через два других:

$$\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}.$$

Полученное равенство приводит к следующим результатам:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c};$$

$$\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = -\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}.$$

Таким образом требуемое равенство доказано.

Геометрический смысл полученного результата объясняется следующим. Равенство нулю суммы трех векторов указывает на то, что эти векторы образуют замкнутый треугольник. Векторные произведения любой из пар векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ равны одной и той же площади — площади, образованной тремя векторами.

3. $a = 4$, $b = 3$ — модули векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Угол между этими векторами $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \pi/6$. Выразить через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ единичный вектор $\boldsymbol{i}$, ортогональный плоскости векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и образующий с заданными векторами (в порядке их записи) правую тройку векторов.

Р е ш е н и е. Согласно определению в векторном произведении

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

$\boldsymbol{c}$ — вектор, перпендикулярный векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, составляет с ними правую тройку векторов. Чтобы найти единичный вектор в направлении $\boldsymbol{c}$, достаточно разделить этот вектор на его модуль

$$c = ab \sin \pi/6 = 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 6.$$

Тогда

$$\boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{c}}{c} = \frac{1}{6} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}.$$

4. Используя определение векторного произведения найти угол между векторами $\boldsymbol{a} = (-2, 1, 0)$ и $\boldsymbol{b} = (3, 2, -1)$.

Р е ш е н и е. Для определения векторного произведения заданных векторов воспользуемся формулой (3.44):

$$\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

В результате раскрытия определителя получим совокупности координат вектора $\boldsymbol{c}$:

$$\boldsymbol{c} = \big((1 \cdot (-1) - 0 \cdot 2), (0 \cdot 3 - (-2)(-1)), (-2 \cdot 2 - 1 \cdot 3)\big) = \big(-1, -2, -7\big).$$

Модуль этого вектора

$$c = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-7)^2} = \sqrt{54}.$$

Найдем модули векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$a = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}; \qquad b = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}.$$

Из формулы для определения модуля векторного произведения найдем

$$\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{c}{ab} = \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{5}\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{27}{35}}.$$

5. Найти вектор $\boldsymbol{c} = (2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})$, если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ заданы в задаче 4 в виде совокупности их координат в ортонормированном базисе.

Р е ш е н и е. Для определения векторного произведения раскроем векторное произведение двучленов, стоящих в скобках условия примера:

$$\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} + 2\cdot 3\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b} = 7\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

Используем полученное в примере 4 по формуле (3.44) значение $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \big(-1,-2,-7\big)$.

Тогда

$$\boldsymbol{c} = 7\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -7\big(1,2,7\big).$$

6. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1,5,0)$, $B(3,1,0)$, $C(0,3,0)$.

Р е ш е н и е. Отметим характерную особенность расположения точек в L_3. Отсутствие в них третьей координаты указывает на то, что все точки лежат в первой координатной плоскости.

Выберем любые два из трех векторов, совпадающих со сторонами треугольника. Пусть эти векторы $\boldsymbol{a} = \overline{CB} = (3,-2,0)$ и $\boldsymbol{b} = \overline{CA} = (1,2,0)$. Тогда

$$S = \frac{1}{2}\big|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\big| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_3 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\big|(3\cdot 2-(-2)\cdot 1)\boldsymbol{i}_1+0\boldsymbol{i}_2+0\boldsymbol{i}_3\big| = |4i_1| = 4.$$

Замечание. **Если бы под знаком абсолютной величины стояла сумма трех отличных от нуля векторов: $s_1\boldsymbol{i}_1 + s_2\boldsymbol{i}_2 + s_3\boldsymbol{i}_3$, то искомую площадь следовало искать по правилам определения модуля вектора, т.е: $S = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}$.**

7. Три вектора заданы своими координатами в ортонормированном базисе: $\boldsymbol{a} = (2,-1,4)$, $\boldsymbol{b} = (0,-2,3)$, $\boldsymbol{c} = (-2,3,1)$.

Установить, могут ли эти векторы, расположенные в порядке их перечисления, составлять правый базис в L_3;

Р е ш е н и е.

Если смешанное произведение трех векторов abc **положительно, то векторы образуют правый базис в** L_3**. При отрицательном значении смешанного произведения — левый базис. Если смешанное произведение векторов равно нулю, то векторы компланарны и не могут быть базисными.**

Найдем смешанное произведение заданных векторов по формуле (3.45)

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(-2)\cdot 1 + 4\cdot 0\cdot 3 + (-1)\cdot 3\cdot(-2) - 4\cdot(-2)\cdot(-2) - 2\cdot 3\cdot 3 - (-1)\cdot 0\cdot 1 = -32.$$

Отличное от нуля значение смешанного произведения указывает на то, что векторы линейно независимы и могут быть приняты в качестве базисных. Знак минус указывает на то, что тройка векторов образует левый базис. Чтобы изменить ориентацию векторов на правую, достаточно в порядке заданного следования векторов $\boldsymbol{abc}$ **поменять местами два любых вектора. Так, например,** $\boldsymbol{acb} = +32$.

8. Вершины тетраэдра заданы своими координатами в ортонормированном базисе L_3**:** $A(1,-2,5)$**,** $B(4,3,0)$**,** $C(-2,1,3)$**,** $D(4,0,2)$**.**

а) Определить объем V_T **тетраэдра** $ABCD$**;**

б) Вычислить высоту h **тетраэдра, опущенную из вершины** A.

Р е ш е н и е.

а) Объем тетраэдра составляет шестую часть объема параллелепипеда $V_T = \dfrac{1}{6}V = \dfrac{1}{6}|\boldsymbol{abc}|$**. Векторы** $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ **и** $\boldsymbol{c}$ **при этом должны выходить из одной вершины (или быть направлеными в одну вершину). Пусть это будет вершина** D**. Тогда:**

$$\boldsymbol{a} = \overline{AD} = (3,2,-3); \quad \boldsymbol{b} = \overline{BD} = (0,-3,2); \quad \boldsymbol{c} = \overline{CD} = (6,-1,-1).$$

Искомый объем

$$V_T = \frac{1}{6}\left|\boldsymbol{abc}\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 6 & -1 & -1 \end{matrix}\right\| =$$

$$= \frac{1}{6}\left|3\cdot(-3)\cdot(-1) + (-3)\cdot 0\cdot(-1) + 2\cdot 2\cdot 6 - (-3)\cdot(-3)\cdot 6 - 3\cdot 2\cdot(-1) - 2\cdot 0\cdot(-1)\right| =$$

$$= \frac{1}{6}\left|-15\right| = 2{,}5.$$

б) Объем тетраэдра $V_T = \dfrac{1}{3}Sh$, где S – площадь основания тетраэдра, противоположного вершине A. Для ее определения воспользуемся векторным произведением двух произвольных векторов основания. Пусть это будут найденные ранее векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$S = \frac{1}{2}\left\| \begin{array}{ccc} \boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 6 & -1 & -1 \end{array} \right\| = \frac{1}{2}\big|(3\cdot 1 + 2\cdot 1;\ 2\cdot 6 - 0\cdot 1;\ -0\cdot 1 + 3\cdot 6)\big| =$$

$$= \frac{1}{2}\big|(5, 12, 18)\big| = \frac{1}{2}\sqrt{5^2 + 12^2 + 18^2} = \frac{1}{2}\sqrt{493}.$$

Искомое значение высоты

$$h = \frac{3V_T}{S} = \frac{3\cdot 2{,}5}{\sqrt{493}/2} = \frac{15}{\sqrt{493}}.$$

9. Отрезок, соединяющий точки $M_1(6;-8;2)$ и $M_2(-2;0;2)$, разделить в отношении 3:1.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулами деления отрезка в отношении λ:

$$x_1 = \frac{x_1^1 + \lambda x_1^2}{1+\lambda}, \quad x_2 = \frac{x_2^1 + \lambda x_2^2}{1+\lambda}, \quad x_3 = \frac{x_3^1 + \lambda x_3^2}{1+\lambda},$$

находим:

$$x_1 = \frac{6 + 3\cdot(-2)}{1+3} = 0; \qquad x_2 = \frac{-8 + 3\cdot 0}{1+3} = -2; \qquad x_3 = \frac{2 + 3\cdot 2}{1+3} = 2.$$

Эти значения определяют координаты точки $M(0;-2;2)$, делящей отрезок M_1M_2 в отношении $3{:}1$.

10. Записать выражение для вектора $\overline{AD}$, совпадающего с медианой треугольника ABC, если $A(0;5;-2)$, $B(3;-1;4)$, $C(1;3;-4)$.

Р е ш е н и е. По определению медианы точка D делит отрезок BC пополам. Поэтому $D\left(\dfrac{x_1^B + x_1^C}{2}; \dfrac{x_2^B + x_2^C}{2} + \dfrac{x_3^B + x_3^C}{2}\right) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow D\left(\frac{3+1}{2}; \frac{-1+3}{2}; \frac{4+(-4)}{2}\right) \Longrightarrow D(2;1;0).$$

Запишем выражение для вектора, совпадающего с медианой:

$$\overline{AD} = (x_1^D - x_1^A; x_2^D - x_2^A; x_3^D - x_3^A) = \big(2-0; 1-5; 0-(-2)\big) = 2(1;-2;1).$$

11. Найти координаты точки C, симметричной точке $A(1;2)$ относительно точки $B(-1;5)$.

Р е ш е н и е. Из условия задачи следует, что B делит отрезок AC пополам. Пусть координаты точки C x_C и y_C. Из формул определения координат точки, делящей отрезок пополам,

$$x_B = \frac{1}{2}(x_A + x_C), \qquad y_B = \frac{1}{2}(y_A + y_C)$$

находим и определяем значения искомых координат:

$$x_C = 2x_B - x_A = 2 \cdot (-1) - 1 = -3; \quad y_C = 2y_B - y_A = 2 \cdot 5 - 2 = 8.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Заданы модули двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$: $a = 1$, $b = 3$ и угол между векторами $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \pi/6$. Вычислить площадь S параллелограмма, двумя сторонами которого являются векторы $2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$.

2. Найти модуль вектора $\boldsymbol{c} = (3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{b})$, если $\boldsymbol{a} = (1, -2, 0)$ и $\boldsymbol{b} = (-3, 1, -1)$.

Заданы координаты точек: $A(-2, 3, 1)$, $B(2, 0, -1)$, $C(0, -2, 3)$, $D(-1, 4, 1)$. Требуется:

3. Проверить, будут ли точки лежать в одной плоскости.

4. Определить, могут ли три вектора, выходящих из точки D в направлениях оставшихся точек, образовать базис.

5. Установить, какой тип базиса (правый или левый) образует тройка векторов, построенных в задаче 4.

6. Найти площадь основания тетраэдра, противоположного вершине D.

7. Вычислить объем тетраэдра, вершинами которого являются заданные точки.

8. Определить высоту тетраэдра, опущенную из вершины D на противоположное основание.

9. Разделить отрезок, соединяющий точки $M_1(2; 3; 0)$ и $M_2(4; 1; 2)$, в отношении 2:1.

10. Точка $B(2; 1; 4)$ делит отрезок AC пополам. Найти координаты точки C, если $A(3; -1; 5)$.

Задание на расчетную работу. Часть 2 «Векторная алгебра»

Пояснения к выполнению и оформлению задания даны на странице 69.

Заданы координаты четырех вершин тетраэдра: $A(3, 5, -2)$, $B(-1, 3, 2)$, $C(k, -4, 3)$, $D(3, -4, -k)$.

В декартовой ортогональной системе координат изобразить тетраэдр.

Средствами линейной алгебра найти следующие элементы тетраэдра.

1. Длину стороны CD.

2. Длину медианы треугольника BCD, выходящую из вершины D.

3. Угол между диагоналями параллелограмма, построенного на сторонах BC и BD.

4. Длину высоты, опущенной из вершины A на основание BCD.

5. Площадь основания BCD.

6. Объем тетраэдра.

7. Убедиться в том, что векторы AB, AC, AD и BC линейно зависимы. Выбрать среди этих векторов линейно независимые. Доказать факт их линейной независимости.

По возможности, выполнить проверку правильности полученных результатов (возможно получив результаты другими методами).

ТИПОВЫЕ БИЛЕТЫ
контрольных работ

Билет по теории
(на 15 минут)

1. Перечислите элементарные преобразования над определителями, не изменяющие их значения.

1. Прибавление к элементам столбцов соответствующих элементов других столбцов.

2. Перестановка любых строк (столбцов).

3. Вычеркивание столбцов, состоящих только из нулевых элементов.

4. Вычеркивание строки и столбца, на пересечении которых стоит нулевой элемент.

5. Среди ответов 1–4 нет правильных.

2. Перечислите соотношения, справедливые для произведений матриц.

1. $AB = BA$; 2. $A(BC) = (AB)C$; 3. $A^2 = (a_{ij}^2)$;

4. $A(B + C) = AB + AC$; 5. $AB = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

3. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка) по отношению к скалярному произведению и его свойствам ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ — векторы, $\lambda \in \Re$). В местах отсутствия правильных ответов поставьте цифру 5.

1. Коммутативность	**1.** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$;
2. Ассоциативность	**2.** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$;
3. Дистрибутивность	**3.** $\big(\boldsymbol{a}, (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\big) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$;
4. Определение	**4.** $\lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b})$.

4. Какие из перечисленных ниже соотношений справедливы для проекций векторов?

1. $Pr_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = Pr_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$; **2.** $Pr_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = b\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$;
3. $Pr_{\boldsymbol{b}}\lambda\boldsymbol{a} = \lambda Pr_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$; **4.** $Pr_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = Pr_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a} \cdot Pr_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b}$;
5. $Pr_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = Pr_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a} + Pr_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b}$.

5. Отметьте свойства, справедливые для векторов, представленных в ортонормированном базисе в L_3 ($\boldsymbol{a}$ — произвольный вектор; $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор).

1. $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{i}_1) = \cos\alpha_1$; **2.** $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i}_1 + a_2\boldsymbol{i}_2 + a_3\boldsymbol{i}_3$; **3.** $a_1 a_3 = 0$;
4. $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$; **5.** $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha_1; \cos\alpha_2; \cos\alpha_3)$.

Билет по практике

(на 45 минут)

1. Из условия перпендикулярности векторов $\boldsymbol{a} = (m; 2m; 1)$ и $\boldsymbol{b} = (m; 1; 1)$ найти m.

2. Найти скалярное (другой вариант: векторное) произведение $\big((2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}), (\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\big)$, если $a = 1$, $b = 2$, $(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}) = \pi/3$.

3. Определить, при каких условиях будут линейно независимыми векторы (функции) $a^{k_1 x}$ и $a^{k_2 x}$.

4. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$, если $A(-2; 1; 3)$ и $B(2; 1; 0)$.

5. Найти площадь параллелограмма, вершинами которого являются точки $A(2; -1; 3)$, $B(3; -2; 1)$ и $C(2; 1; 4)$.

Глава 4

Комплексное векторное пространство

4.1. Комплексные числа

Найдем решение квадратного уравнения

$$z^2 - 4z + 13 = 0.$$

Два корня этого уравнения (решения) представим в виде

$$z_1 = 2 - 3i, \qquad z_2 = 2 + 3i,$$

где $i = \sqrt{-1}$ **называется** *мнимой единицей***.**

В общем случае

$$z = x + iy \tag{4.1}$$

называется *ко́мплексным числом***, а выражение (4.1) —** *алгебраической формой комплексного числа.* **Если** x **и** y **переменные, то** z **— переменная комплексная величина.**

Первое слагаемое (4.1) $x = \text{Re } z$ **называется** *действительной частью* z **(сокращение от английского real — действительный). Множитель** $y = \text{Im } z$ **при** i **называется** *мнимой частью* z **(от английского imájinary — мнимый). Так что**

$$z = \text{Re } z + i \text{ Im } z. \tag{4.2}$$

Комплексное число

$$\overline{z} = x - iy \tag{4.3}$$

называют *сопряженным* **по отношению к** z **(4.1).**

Комплексные числа не принадлежат множеству действительных (рациональных и иррациональных) чисел.

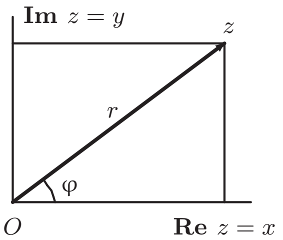


Рис. 4.1. Представление комплексного числа

Геометрически комплексное число можно изобразить точкой на плоскости со связанной с этой плоскостью ортогональной декартовой системой координат (x, y)**: координату** $x = \mathrm{Re}\ z$ **принимают за абсциссу и называют** *действительной осью*, $y = \mathrm{Im}\ z$ **— за ординату числа** z **и называют** *мнимой осью* **(рис. 4.1).**

Такое представление дает право отождествить комплексное число с вектором (x, y) **в** L_2**. Базисными в представлении** $z = x + yi$ **являются пара линейно независимых векторов 1 и** i**.**

Для комплексных чисел определены линейные операции сложение:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) =$$
$$= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$

и умножение на действительное число:

$$\lambda z = \lambda(x + yi) = \lambda x + \lambda yi = (\lambda x, \lambda y).$$

Можно убедиться в том, что комплексные числа удовлетворяют всем аксиомам линейного векторного пространства (§3.2).

Что касается произведений комплексных чисел, то они обладают некоторыми характерными свойствами. В частности, произведение двух комплексных чисел равно в общем случае комплексному числу, состоящему из действительной и мнимой частей (исключение — произведение комплексно-сопряженных чисел):

$$z = z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i;$$

$$\mathrm{Re}\ z = x_1 x_2 - y_1 y_2, \qquad \mathrm{Im}\ z = x_1 y_2 + x_2 y_1.$$

Произведение комплексно-сопряженных чисел равно действительному числу. Действительно,

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2. \tag{4.4}$$

Комплексное число z**, удовлетворяющее равенству** $z_2 z = z z_2 = z_1$**, называется** *частным от деления* **чисел** z_1 **на** z_2**:** $z = \dfrac{z_1}{z_2}$**. Для представления частного от деления комплексных чисел в алгебраическом виде следует числитель и знаменатель дроби умножить на**

комплексное число, сопряженное знаменателю:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \text{Re } z + i \text{ Im } z.$$

Здесь

$$\text{Re } z = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \qquad \text{Im } z = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

4.2. Тригонометрическая и показательная формы комплексных чисел

Вернемся к рис. 4.1. Действительное число,

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\text{Re z})^2 + (\text{Im z})^2}, \tag{4.5}$$

определяющее длину вектора $\overline{Oz}$, называется *модулем* **комплексного числа z. Имея в виду (4.4) можно записать**

$$r = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Направление этого радиуса-вектора определяет угол φ, отсчитываемый против часовой стрелки от положительного направления координаты x. Для этого угла ($n \in Z$):

$$\text{tg}\,\varphi = \text{tg}(\varphi + 2\pi n) = \frac{\text{Im } z}{\text{Re } z} = \frac{y}{x}. \tag{4.6}$$

Всякое решение уравнения (4.6) называется *аргументом* **комплексного числа z:**

$$\text{Arg } z = \text{Arctg } \frac{y}{x} = \varphi + 2\pi n, \qquad (n \in Z). \tag{4.7}$$

Угол $\varphi = \arg z \in [0; 2\pi)$ называется *главной частью* **аргумента числа z.**

Из приведенных соотношений следует:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi. \tag{4.8}$$

При подстановке этих зависимостей в алгебраическую форму (4.1) получим *тригонометрическую форму* **комплексного числа:**

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{4.9}$$

Пример 1. Комплексное число $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ представить в тригонометрической форме.

Р е ш е н и е. Так как $x = \mathrm{Re}\ z = -2$, $y = \mathrm{Im}\ z = 2\sqrt{3}$, то из (4.5) находим

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4.$$

Обратимся к формулам (4.6):

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = -\frac{1}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отсюда находим главную часть аргумента:

$$\varphi = \arg\ z = \mathrm{arctg}\ \frac{y}{x} = \mathrm{arctg}\ (-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}.$$

Тригонометрическая форма числа:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Еще одну форму комплексного числа получим, используя известные в математике формулы Эйлера зависимости тригонометрических функций от экспонент с мнимыми показателями:

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}), \qquad i\sin\varphi = \frac{1}{2}(e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}). \tag{4.10}$$

Суммируя два последних соотношения, получим

$$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{4.11}$$

Аналогично, вычитание второго соотношения (4.10) из первого приводит к выражению

$$e^{-\varphi i} = \cos\varphi - i\sin\varphi. \tag{4.12}$$

Подставляя последние выражения в (4.9), получим *показательные формы* комплексного числа:

$$z = re^{\varphi i} \qquad\qquad \overline{z} = re^{-\varphi i}. \tag{4.13}$$

Показательная форма комплексного числа зачастую облегчает процесс его вычисления. Так, произведение и частное от деления двух комплексных чисел:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{\varphi_1 i} e^{\varphi_2 i} = r_1 r_2 e^{(\varphi_1 + \varphi_2)i};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\frac{e^{\varphi_1 i}}{e^{\varphi_2 i}} = \frac{r_1}{r_2} e^{(\varphi_1 - \varphi_2)i}.$$

Для квадрата комплексного числа получим

$$z^2 = z \cdot z = r^2 e^{2\varphi i},$$

для n-й степени:

$$z^n = z^{n-1} z = r^n e^{n\varphi i}.$$

В тригонометрическом представлении последняя формула, называемая *формулой Муавра*, имеет вид

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \tag{4.14}$$

Пример 2. Записать в показательной и тригонометрической формах комплексное число $z = (1+i)^8$.

Р е ш е н и е. Найдем модуль и аргумент комплексного числа $1+i$ $(\operatorname{Re}(1+i) = \operatorname{Im}(1+i) = 1)$:

$$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}; \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\, \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}.$$

Подставим полученные выражения в формулу Муавра:

$$z = (1+i)^8 = r^8 e^{8\varphi i} = 16e^{2\pi i} = 16(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 16.$$

Пусть $a = re^{\varphi i} = re^{(\varphi+2\pi n)i}$ — комплексное число. Тогда уравнение $z^n = a$ $(n \in N)$ имеет ровно n решений z_k $(k = \overline{0, n-1})$, получаемых по формуле

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\varphi+2\pi k)/n} = \\ = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i \sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right). \tag{4.15}$$

Здесь $\sqrt[n]{r}$ — положительное действительное число. Решения z_k $(k = \overline{0, n-1})$ называются *корнями n-й степени* из комплексного числа a.

Пример 3. Найти все корни $\sqrt[3]{-2+2\sqrt{3}i}$.

Р е ш е н и е. Представим комплексное число $a = -2 + 2\sqrt{3}i$ в показательной и тригонометрической формах. Так как для a $r = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$ и $\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi k = \operatorname{Arctg}\, \dfrac{2\sqrt{3}}{-2} = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k$, то

$$a = 4e^{\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)i} = 4\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)\right] =$$

$$= 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Используем формулы (4.14) и (4.15) для $k = 0, 1, 2$:

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)_k = \sqrt[3]{4}e^{\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}\right)i} =$$
$$= \sqrt[3]{4}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}\right)\right].$$

Для частных значений $k = 0,\ 1,\ 2$:

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)_0 = \sqrt[3]{4}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right];$$
$$\left(\sqrt[3]{a}\right)_1 = \sqrt[3]{4}\left[\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{9}\right)\right];$$
$$\left(\sqrt[3]{a}\right)_2 = \sqrt[3]{4}\left[\cos\left(\frac{14\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{14\pi}{9}\right)\right].$$

4.3. Комплексное векторное пространство

Пусть в n-мерном векторном пространстве задан вектор своими координатами: $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$.

Будем считать, что координаты x_k $(k = \overline{1, n})$ — комплексные числа:

$$x_k = \mathrm{Re}\ x_k + i\ \mathrm{Im}\ x_k = \alpha_k + i\beta_k.$$

Введем сопряженные величины

$$\overline{x}_k = \alpha_k - i\beta_k,$$

так что

$$x_k\overline{x}_k = \alpha_k^2 + \beta_k^2 = |x_k|^2.$$

Наряду с вектором $\boldsymbol{x}$ рассмотрим вектор $\boldsymbol{y} = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$, координаты которого $y_k = \eta_k + i\nu_k$.

Скалярным произведением **двух векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, заданных в n-мерном комплексном пространстве, называется число, определяемое выражением**

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k\overline{y}_k. \qquad (4.16)$$

То есть, скалярное произведение равно сумме произведений координат первого вектора на сопряженные координаты второго вектора.

Скалярное произведение обладает свойством положительной определенности, заключающемся в выполнении неравенства

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} x_k\overline{x}_k = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \geq 0.$$

Рассмотрим некоторые свойства скалярных произведений векторов комплексного пространства, отличные от скалярных произведений действительных векторов.

1. Для векторов с комплексными координатами справедливо свойство *эрмитовой симметрии*: если скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ комплексного пространства равно комплексному числу $a = Re\ a + iIm\ a$, то при перестановке множителей в скалярном произведении получится число $\overline{a} = Re\ a - iIm\ a$, сопряженное с a.

Покажем, что это так.

Пусть $\boldsymbol{x} = (x_k) = (\alpha_k + i\beta_k)$, $\quad \boldsymbol{y} = (y_k) = (\eta_k + i\nu_k) \quad (k = \overline{1, n})$.

Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ согласно (4.16) равно сумме произведений координат первого вектора x_k на соответствующие сопряженные координаты $\overline{y}_k$ второго вектора:

$$a = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k = \sum_{k=1}^{n} [\alpha_k\eta_k + \beta_k\nu_k + i(\beta_k\eta_k - \alpha_k\nu_k)] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k\eta_k + \beta_k\nu_k) + i\sum_{k=1}^{n} (\beta_k\eta_k - \alpha_k\nu_k) = Re\ a + i\ Im\ a;$$

$$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} y_k \overline{x}_k = \sum_{k=1}^{n} [\alpha_k\eta_k + \beta_k\nu_k - i(\beta_k\eta_k - \alpha_k\nu_k)] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k\eta_k + \beta_k\nu_k) - i\sum_{k=1}^{n} (\beta_k\eta_k - \alpha_k\nu_k) = Re\ a - i\ Im\ a = \overline{a}.$$

Сравнение двух полученных величин указывает на то, что они —
сопряженные комплексные числа. Отсюда следует эрмитова симметрия

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})} \tag{4.17}$$

2. Скалярный множитель (не вектор, а комплексная скалярная величина), стоящий перед первым множителем скалярного произведения, можно выносить за знак скалярного произведения. Скалярный множитель, стоящий перед второй комплексной величиной в скалярном произведении, можно выносить за знак скалярного произведения, заменяя его на соответствующий сопряженный множитель:

$$(a\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \qquad (\boldsymbol{x}, b\boldsymbol{y}) = \overline{b}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \tag{4.18}$$

В справедливости второго соотношения можно убедиться, воспользовавшись формулами (4.17) и (4.18):

$$(\boldsymbol{x}, b\boldsymbol{y}) = \overline{(b\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})} = \overline{b}\ \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})} = \overline{b}\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \tag{4.19}$$

Свойства 1 и 2, рассмотренные выше, справедливы для векторов действительного пространства, получаемых из векторов комплексного пространства в предположении, что $\mathrm{Im}\; x = 0$. В этом случае $\overline{x} = x$.

4.4. Резюме

Решение квадратных уравнений функций одной переменной зачастую приводит к отрицательному значению дискриминанта. В этом случае действительные корни уравнения отсутствуют, а для записи его решения вводится мнимая единица ($i = \sqrt{-1}$). Решением квадратного уравнения в этом случае будут два комплексно сопряженных корня.

Для удобства использования комплексных чисел при решении задач кроме естественной алгебраической их формы вводят тригонометрическую форму (формула Муавра) и показательную форму, предложенную Эйлером.

Комплексные числа образуют комплексное векторное пространство. Векторы этого пространства обладают рядом свойств, отличных от свойств действительного пространства («эрмитова» симметрия, особенности вынесения скалярного комплексного множителя за знак скалярного произведения).

Отметим, что математический анализ функций комплексного переменного привел к развитию самостоятельного раздела математики — *теории аналитических функций*.

4.5. Вопросы

1. **Какие числа называют комплексными? комплексно сопряженными?**
2. **Дайте геометрическую интерпретацию комплексного числа.**
3. **Воспроизведите тригонометрическую и показательную формы комплексного числа.**
4. **В чем смысл эрмитовой симметрии?**
5. **В каком виде выносят комплексное число за знак скалярного произведения комплексных векторов?**

Вопросы для тестирования

1 Поставьте в соответствие номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка), касающихся комплексных чисел $z = x+iy$. В местах отсутствия правильных ответов поставьте 5.

1. $\|\mathbf{z}\|$	**1.** $\operatorname{arctg} y/x$;
2. arg **z**	**2.** $\sqrt{x^2+y^2}$**;**
3. Re **z**	**3.** x**;**
4. Im **z**	**4.** $y\sqrt{-1}$**.**

2. Поставьте в соответствие номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка), касающихся комплексных чисел $z = x + iy$ и комплексных векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. В местах отсутствия правильных ответов поставьте 5.

1. Формула Эйлера	**1.** $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\overline{\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}})$;
2. Формула Муавра	**2.** $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$;
3. Эрмитова симметри́я	**3.** $z = re^{i\varphi}$;
4. Модуль z	**4.** $\sqrt{x^2+y^2}$**.**

3. Перечислите номера правильных соотношений, относящихся к векторам $\boldsymbol{x} = (x_k)^T$, $\boldsymbol{y} = (y_k)^T$, $\boldsymbol{z}$, заданным в комплексном пространстве (a – комплексное число).

1. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$; **2.** $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k$**;**

3. $\big(\boldsymbol{x}, (\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})\big) = (\overline{\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}}) + (\overline{\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}})$; **4.** $(\boldsymbol{x}, a\boldsymbol{y}) = a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$**;**

5. Среди соотношений 1–4 нет правильных.

4. Перечислите номера правильных соотношений, относящихся к комплексным числам z (L_n — линейное пространство; $\Re$ и J множества рациональных и иррациональных чисел).

1. $z \in L_n \quad (n > 2)$; **2.** $z\overline{z} \in \Re$**;** **3.** $z^2 \in J$**;** **4.** $|z| \in \Re$**;**

5. Среди соотношений 1–4 нет правильных.

5. Перечислите номера правильных утверждений, относящихся к комплексным числам $z_k = x_k + iy_k = r_k e^{\varphi_k i} = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)$ $(k = 1, 2)$;

1. $z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$; **2.** $\mathbf{arg}(z_1+z_2) = \varphi_1 + \varphi_2$;

3. $z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$**;** **4.** $\mathbf{arg}\sqrt[n]{z} = \varphi^{1/n}$**;**

5. Среди соотношений 1–4 нет правильных.

ТЕМА 4.1
Комплексные числа

Задачи

1. Доказать (самостоятельно), что операции сложения и умножения комплексных чисел $(z_k = x_k + iy_k) \quad (k = 1, 2, 3)$ **обладают свойствами:**

а) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
б) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$;
в) $z_1 z_2 = z_2 z_1$;
г) $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2)z_3$;
д) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

В задачах 2 – 5 преобразовать выражения к алгебраической форме комплексного числа.

2. $z = (1 - 2i)(2 + i)^2 + 5i$**.**
Решение проведем поэтапно:
$(2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 3 + 4i$;
$(1 - 2i)(3 + 4i) = 3 + (4 - 6)i - 8i^2 = 11 - 2i$;
$z = 11 - 2i + 5i = 11 + 3i$.

3. $z = (2i - 1)^2 + (1 - 3i)^3$:
$z = (4i^2 - 4i + 1) + (1 - 3 \cdot 3i + 3(3i)^2 - 3^3 i^3) =$
$-3 + 4i - 26 + 18i = -29 + 14i$.

4. $z = \dfrac{2 - i}{1 + i}$
$z = \dfrac{(2 - i)(1 - i)}{1^2 - i^2} = \dfrac{1 - 3i}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}i$.

5. $z = \dfrac{(1 + i)(3 + i)}{3 - i} - \dfrac{(1 - i)(3 - i)}{3 + i}$.
$z = \dfrac{(2 + 4i)(3 + i) - (2 - 4i)(3 - i)}{(3 - i)(3 + i)} = \dfrac{(2 + 14i) - (2 - 14i)}{9 + 1} = 2{,}8i$.

6. Найти действительные решения уравнения

$$12[(2x + i)(1 + i) + (x + y)(3 - 2i)] = 17 + 6i.$$

Решение. Преобразуем уравнение:

$$12[(2x - 1) + (2x + 1)i + 3(x + y) - 2(x + y)i] = 17 + 6i;$$

$$12[5x + 3y - 1 + (1 - 2y)i] = 17 + 6i.$$

Так как в выражении $a+bi$ слагаемые с Re a и Im a линейно независимы, то для нахождения решения уравнения приравниваем действительные слагаемые правой и левой частей уравнения, а затем мнимые:

$$\begin{cases} 5x+3y-1=\dfrac{17}{12}, \\ 1-2y=\dfrac{6}{12}; \end{cases} \implies x=\frac{1}{3}, \qquad y=\frac{1}{4}.$$

В задачах 7–8 доказать справедливость соотношений.

7. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$**, где** $z_k=x_k+y_k \quad (k=1,2)$.

Р е ш е н и е. Так как $\overline{z}_k=x_k-y_k i$**, то**

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i, \quad \implies \quad \overline{z_1+z_2}=(x_1+x_2)-(y_1+y_2)i.$$

$$\overline{z}_1+\overline{z}_2=x_1-y_1 i+x_2-y_2 i=(x_1+x_2)-(y_1+y_2)i \quad (!).$$

8. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

Р е ш е н и е.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(x_1+y_1 i)(x_2-y_2 i)}{x_2^2+y_2^2}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+(y_1x_2-x_1y_2)i}{x_2^2+y_2^2};$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{1}{x_2^2+y_2^2}\sqrt{(x_1x_2+y_1y_2)^2+(y_1x_2-x_1y_2)^2}=$$
$$=\frac{1}{x_2^2+y_2^2}\sqrt{x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+y_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2};$$

$$\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}=\frac{1}{x_2^2+y_2^2}\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}=$$
$$=\frac{1}{x_2^2+y_2^2}\sqrt{x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+y_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2} \quad (!).$$

9. Доказать, что $|z_1-z_2|$ **— это расстояние между точками** M_1 **и** M_2**, изображающими комплексные числа** z_1 **и** z_2**.**

Р е ш е н и е. Пусть $z_1=x_1+iy_1$**,** $\ z_2=x_2+iy_2$. **Тогда** $z_1-z_2=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i$ **и** $|z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

Записанное выражение представляет собой модуль вектора $\overline{M_1M_2}=\big((x_2-x_1),\ (y_2-y_1)\big)$.

10. Найти корни второй, третьей и четвертой степеней из единицы.

Р е ш е н и е. Для $a=1 \ \ (a=1+0\cdot i)$ **имеем:** $r=1, \quad \varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{0}{1}=0$**.**

Для решения задачи используем формулу

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)\right].$$

Для $n = 2$**.**

$z_0 = \sqrt[n]{1}\left[\cos\left(\frac{0}{n} + \frac{2\pi}{n}\cdot 0\right) + i\sin\left(\frac{0}{n} + \frac{2\pi}{n}0\right)\right] = 1.$

$z_1 = \cos\left(0 + \frac{2\pi}{2}\cdot 1\right) + i\sin\left(0 + \frac{2\pi}{2}\cdot 1\right) = -1.$

Для $n = 3$**.**

$z_0 = 1, \quad z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$

$z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Для $n = 4$.

$z_0 = 1, \quad z_1 = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = i,$

$z_2 = \cos\frac{4\pi}{4} + i\sin\frac{4\pi}{4} = -1, \quad z_3 = \cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4} = -i.$

Задачи для самостоятельного решения

Привести к алгебраической форме комплексные выражения.

1. $(1-i)^3 + (1+i)^3$; **2**. $\dfrac{3-i}{1-i} + \dfrac{1-i}{2+i}$.

3. Найти решение уравнения $(1+i)x + (-2+5i)y = -4+17i$.

4. Вычислить $\left(\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\right)^2$**, если** $z_1 = 1 - i\sqrt{3}, \;\; z_2 = \sqrt{3} + i$.

5. Доказать справедливость равенства $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

6. Доказать справедливость неравенств

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \quad \text{и} \quad |z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|.$$

Представить в показательной и тригонометрической формах комплексные числа

7. $z = 12i$ **8.** $\dfrac{z_1}{z_2}$**, если** $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i, \;\; z_2 = 3 - 3\sqrt{3}i$.

9. $z = \dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$. **10. Найти все значения** $\sqrt[5]{-1-i}$.

Глава 5

Преобразования векторов и матриц

5.1. LU-преобразование матриц

Обращение квадратных матриц намного упрощается, если привести их к треугольному виду. В этом случае использование только обратного хода метода Гаусса позволяет найти обратную матрицу. Рассмотрим один из приемов представления квадратных невырожденных матриц в виде произведения двух треугольных матриц.

Теорема. *Любую квадратную невырожденную матрицу с действительными элементами можно представить в виде произведения нижней треугольной матрицы с единицами на ее главной диагонали справа на верхнюю треугольную матрицу. При этом, если диагональные элементы исходной матрицы отличны от нуля, то такое представление единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть задана квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что все элементы главной диагонали матрицы A **не равны нулю. Если условие не выполняется, то элементарными преобразованиями над строками или столбцами матрицы можно добиться выполнения этого требования.**

Введем величины $\mu_{i1} = a_{i1}/a_{11}$ $(i = \overline{2,n})$ и обратим в нули все элементы первого столбца матрицы A, кроме первого. Для этого осуществим первый шаг преобразования — найдем произведение матрицы A слева на матрицу M_1:

$$A_1 = M_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ -\mu_{21} & 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ -\mu_{n1} & 0 \ldots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^1 & \ldots & a_{2n}^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n2}^1 & \ldots & a_{nn}^1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $a_{ik}^1 = a_{ik} - \mu_{i1} a_{1k}$ $(i, k = \overline{2,n})$.

Определим новые величины: $\mu_{i2} = a_{i2}^1 / a_{22}^1$ $(i = \overline{3,n})$. На втором шаге преобразуем матрицу A_1 путем ее произведения на матрицу M_2:

$$A_2 = M_2 A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & -\mu_{32} & 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 0 & -\mu_{n2} & 0 \ldots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ 0\;\; a_{22}^1 \ldots a_{2n}^1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\;\; a_{n2}^1 \ldots a_{nn}^1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 & \ldots & a_{2n}^1 \\ 0 & 0 & a_{33}^2 & \ldots & a_{3n}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & a_{n3}^2 & \ldots & a_{nn}^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь $a_{ik}^2 = a_{ik}^1 - \mu_{i2} a_{2k}^1$ $(i, k = \overline{3,n})$.

Процесс преобразования матрицы A следует продолжить до образования верхней треугольной матрицы. На предпоследнем, $(n-1)$-м шаге, необходимо выполнить следующее произведение матриц:

$$A_{n-1} = M_{n-1} A_{n-2} = \begin{pmatrix} 1 \ldots & 0 & 0 \\ 0 \ldots & 0 & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 0 \ldots & 1 & 0 \\ 0 \ldots & -\mu_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0\;\; a_{22}^1 \ldots a_{2,n-1}^1 & a_{2n}^1 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ 0\;\; 0\; \ldots a_{n,n-1}^{n-2} & a_{nn}^{n-2} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{1} & \dots & a_{2n}^{1} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3n}^{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{n-1} \end{pmatrix} = U.$$

Здесь $a_{nn}^{n-1} = a_{nn}^{n-2} - \mu_{n,n-1} a_{n-1,n}^{n-2}$.

Объединим действия умножения матриц на всех шагах преобразования матрицы A. В результате получим верхнюю треугольную матрицу

$$U = A_{n-1} = M_{n-1} \dots M_2 M_1 A = MA. \tag{5.1}$$

Непосредственным произведением матриц M_i $(i = \overline{n{-}1, 1})$ можно убедиться в справедливости соотношения (порядок матриц в произведении важен!):

$$M = \prod_{i=n-1}^{1} M_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\mu_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\mu_{31} & -\mu_{32} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ -\mu_{n1} & -\mu_{n2} & -\mu_{n3} & \dots & -\mu_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Из соотношения (5.1) путем обращения матрицы M получим

$$A = M^{-1} U. \tag{5.3}$$

Матрица

$$L = M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu_{31} & \mu_{32} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \mu_{n3} & \dots & \mu_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

В правильности определения M^{-1} можно убедиться, выполнив операцию произведения матриц $M^{-1}M = I$.

Матрица L — нижняя треугольная матрица с единичной главной диагональю.

Таким образом, получено требуемое представление квадратной матрицы A в виде произведения слева нижней треугольной матрицы с единичной главной диагональю L на верхнюю треугольную матрицу U:

$$A = LU. \tag{5.5}$$

В литературе последнее представление называют LU-представлением матриц, от английских слов: «lower» – нижний; «upper» – верхний).

Метод LU-представления матриц дает заметный выигрыш при решении линейных алгебраических уравнений, представляемых в матричном виде (пример 3 § 1.6):

$$AX = B$$

.

Применение метода становится особенно эффективным в задачах, где при одинаковых матрицах коэффициентов A рассматриваются варианты решения уравнений с различными правыми частями (различными векторами B). С такими моделями часто имеют дело экономисты при необходимости выбора наилучших решений задач с различными ограничениями, определяемыми вектором B. Например, производство продукции по заданным технологиям с отлаженной системой управления предприятием, но с различными вариантами поставок материалов.

5.2. Преобразование векторов и матриц при преобразовании базиса

Пусть $\boldsymbol{e}_k$ и $\tilde{\boldsymbol{e}}_k$ $(k = \overline{1,n})$ — совокупности n линейно независимых векторов одного и того же линейного пространства L_n и пусть известно правило преобразования векторов одного базиса в другой:

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_k = s_{1k}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + s_{nk}\boldsymbol{e}_n = \sum_{i=1}^{n} s_{ik}\boldsymbol{e}_i \qquad (k = \overline{1,n}). \tag{5.6}$$

Введем векторы $\tilde{\boldsymbol{E}} = (\tilde{\boldsymbol{e}}_1 \ \ \tilde{\boldsymbol{e}}_2 \ \ \ldots \ \ \tilde{\boldsymbol{e}}_n)^T$, $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1 \ \ \boldsymbol{e}_2 \ \ \ldots \ \ \boldsymbol{e}_n)^T$ и матрицу

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \ldots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \ldots & s_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n1} & s_{n2} & \ldots & s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Так как в (5.6) суммирование идет по первому индексу у s_{ik}, то матричный вид этого преобразования:

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = S^T \boldsymbol{E}. \tag{5.7}$$

Любой вектор $\boldsymbol{x}$ из L_n может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{e}_k$ или $\tilde{\boldsymbol{e}}_k$:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e}_i = X^T\boldsymbol{E}; \tag{5.8}$$

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{x}_k \tilde{\boldsymbol{e}}_k = \tilde{X}^T \tilde{\boldsymbol{E}}. \tag{5.9}$$

Здесь X^T и $\tilde{X}^T$ — матрицы-строки координат вектора $\boldsymbol{x}$ в базисах $\boldsymbol{E}$ и $\tilde{\boldsymbol{E}}$.

Приравняем правые части равенств (5.8) и (5.9), после чего подставим в полученное равенство вместо $\tilde{\boldsymbol{E}}$ соотношение (5.7):

$$X^T E = \tilde{X}^T S^T E.$$

Полученное равенство выполняется при условии

$$X^T = \tilde{X}^T S^T \quad \Longrightarrow \quad X = S\tilde{X}. \tag{5.10}$$

Зависимость выражает правило преобразования матрицы вектора (вектора-столбца) при известном правиле (5.7) преобразования базисных векторов.

Если базисные векторы $\boldsymbol{e}_k$ $(\tilde{\boldsymbol{e}}_k)$ $\quad (k = \overline{1, n})$ линейно независимы, то матрица S невырожденная и можно получить матрицу S^{-1}, обратную к S. В этом случае из (5.10) получим обратное преобразование:

$$\tilde{X} = S^{-1} X. \tag{5.11}$$

Так как $(S^{-1})^T = (S^T)^{-1}$, то $\tilde{X}^T = X^T (S^T)^{-1}$.

Запись $X^T \boldsymbol{E}$ для вектора $\boldsymbol{x}$ сохраняет свой вид при переходе к новому базису. Действительно,

$$\tilde{X}^T \tilde{\boldsymbol{E}} = X^T (S^T)^{-1} S^T \boldsymbol{E} = X^T \boldsymbol{E}.$$

Равенство указывает на то, что вектор $\boldsymbol{x} = \tilde{X}^T \tilde{\boldsymbol{E}} = X^T \boldsymbol{E}$ — инвариантная по отношению к выбору базиса величина. Свойство инвариантности — это свойство независимости от выбора базиса.

Рассмотрим пару векторов, заданных в базисе $\boldsymbol{E}$: $\boldsymbol{x} = X^T \boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{y} = Y^T \boldsymbol{E}$.

Пусть квадратная невырожденная матрица A преобразует векторы-столбцы X в Y:

$$Y = AX. \tag{5.12}$$

Зададим новый базис $\tilde{\boldsymbol{E}}$, который связан с $\boldsymbol{E}$ преобразованием (5.7) и в котором $\boldsymbol{x} = \tilde{X}^T \tilde{\boldsymbol{E}}$ и $\boldsymbol{y} = \tilde{Y}^T \tilde{\boldsymbol{E}}$.

Векторы — объекты, инвариантные по отношению к изменению базисов. Поэтому зависимость (5.12) в новом базисе должна перейти в аналогичную зависимость:

$$\tilde{Y} = \tilde{A}\tilde{X}. \tag{5.13}$$

При известным преобразовании (5.10) векторов-столбцов установим правило преобразования матрицы A при переходе к новому базису. Для этого подставим в (5.13) вместо $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ выражения, вытекающие из (5.11):

$$S^{-1}Y = \tilde{A}S^{-1}X.$$

Матрица S невырожденная, поэтому $S = S^{-1}$ и

$$Y = S\tilde{A}S^{-1}X.$$

Сравнивая полученную зависимость с (5.12) получим правило преобразования матриц при переходе от нового базиса к исходному:

$$A = S\tilde{A}S^{-1}.$$

Отсюда приходим к формуле преобразования матриц, заданных в исходном (без тильды) базисе, к матрицам, заданным в новом базисе (с тильдой):

$$\tilde{A} = S^{-1}AS. \tag{5.14}$$

Отметим, что соотношения (5.10), (5.11) и (5.14) строго согласуются с изначально принятой зависимостью (5.7) для матрицы преобразования S^T. Если в зависимости (5.7) заменить обозначение S^T на S (что правомерно), то в последующих соотношениях следует всюду заменить S на S^T.

5.3. Ортогональные матрицы

Пусть $\boldsymbol{i}_i$ и $\tilde{\boldsymbol{i}}_k$ — векторы двух ортонормированных базисов в L_n $(i, k = \overline{1, n})$. В этом случае (δ_{ik} — символы Кронекера)

$$(\boldsymbol{i}_i, \boldsymbol{i}_j) = \delta_{ij}, \qquad (\tilde{\boldsymbol{i}}_i, \tilde{\boldsymbol{i}}_j) = \delta_{ij}. \tag{5.15}$$

Пусть известно правило преобразования базисных векторов (5.6):

$$\tilde{\boldsymbol{i}}_k = \sum_{i=1}^{n} s_{ik}\boldsymbol{i}_i. \tag{5.16}$$

Умножим (5.16) скалярно на $\boldsymbol{i}_j$:

$$(\tilde{\boldsymbol{i}}_k, \boldsymbol{i}_j) = \sum_{i=1}^{n} s_{ik}(\boldsymbol{i}_i, \boldsymbol{i}_j) = \sum_{i=i}^{n} s_{ik}\delta_{ij} = s_{jk}. \tag{5.17}$$

Так как s_{jk} представляет собой скалярное произведение единичных векторов двух ортонормированных базисов, то по смыслу — это косинусы углов между единичными векторами $\tilde{\boldsymbol{i}}_k$ и $\boldsymbol{i}_j$:

$$s_{jk} = \cos(\tilde{\boldsymbol{i}}_j \hat{,} \boldsymbol{i}_k) = s_{kj}, \tag{5.18}$$

т.е. матрица S симметрична ($S = S^T$).

Подставим (5.16) во второе соотношение (5.15). С учетом (5.18) получим:

$$(\tilde{\boldsymbol{i}}_i, \tilde{\boldsymbol{i}}_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} s_{ki}\boldsymbol{i}_k, \sum_{r=1}^{n} s_{rj}\boldsymbol{i}_r\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} s_{ki}s_{rj}(\boldsymbol{i}_k, \boldsymbol{i}_r) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} s_{ik}s_{rj}\delta_{kr} = \sum_{k=1}^{n} s_{ik}s_{kj} = \delta_{ij}. \tag{5.19}$$

Последнее равенство говорит о следующем.

1. **Сумма квадратов направляющих косинусов преобразования ортонормированных базисов равна единице;**
2. **Приведенная последняя сумма есть правило вычисления произведения матриц (количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй матрицы);**
3. **Первую матрицу, представленную в последней сумме элементами s_{ik}, можно считать транспонированной по отношению к матрице S, представленной элементами s_{ki} (δ_{ij} — элементы единичной матрицы).**

Поэтому

$$S^T S = I \tag{5.20}$$

и из определения обратной матрицы следует

$$S^T = S^{-1}.$$

Обобщим полученный результат.

Квадратная невырожденная матрица A называется *ортогональной*, **если для нее справедливо соотношение**

$$A^T = A^{-1}, \tag{5.21}$$

или

$$A^T A = AA^T = I. \tag{5.22}$$

Пусть

$$A = (a_{ij}), \qquad A^T = (a_{ij})^T = (a_{ji}) = A^{-1}.$$

Приведем основные свойства ортогональных матриц.

1. Векторы, представляющие строки (столбцы) ортогональной матрицы, попарно ортогональны. Действительно, так как $A^T A = I$, то по аналогии с (5.19)

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj} = \delta_{ij}, \tag{5.23}$$

и при $i \neq j$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{jk} = 0.$$

Равенство нулю последних двух сумм указывает на то, что векторы, которые определяются элементами i-й строки и j-го столбца (i-го столбца и j-й строки), ортогональны. Сумма произведений их координат — это скалярное произведение векторов.

2. Сумма произведений элементов каждой i-й строки (k-го столбца) ортогональной матрицы на соответствующие элементы i-го столбца (k-й строки) равна единице. Действительно, из (5.23) при $i = j$ получим

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{ki} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} a_{ki} = 1 \qquad (i, k = \overline{1, n}). \tag{5.24}$$

3. Определитель ортогональной матрицы равен ± 1. Действительно, из равенств

$$\det\ I = \det\ (A^T A) = \det\ A^T \cdot \det\ \mathrm{A} = (\det\ A)^2 = 1$$

следует

$$\det\ A = \pm 1. \tag{5.25}$$

4. Матрицы транспонированная и обратная по отношению к ортогональной матрице также являются ортогональными. Свойство следует из (5.21).

5.4. Ортогонализация столбцов матрицы методом Шмидта

Представим квадратную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

в виде совокупности векторов-столбцов $\boldsymbol{a}_j = (a_{1j} \ \ a_{2j} \ \ \ldots \ \ a_{nj})^T$ $(j = \overline{1,n})$**:**

$$A = (\boldsymbol{a}_1 \ \boldsymbol{a}_2 \ \ldots \ \boldsymbol{a}_n). \tag{5.26}$$

Матрицы, все элементы которых – действительные числа, будем называть *действительными матрицами***.**

Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Всякую неособенную действительную квадратную матрицу A можно представить в виде произведения матрицы Q с ортогональными столбцами справа на верхнюю треугольную матрицу U с единичной диагональю:*

$$A = QU. \tag{5.27}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для упрощения преобразований ограничимся рассмотрением матрицы третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_1 \ \boldsymbol{a}_2 \ \boldsymbol{a}_3),$$

где $\boldsymbol{a}_j = (a_{1j} \ a_{2j} \ a_{3j})^T \quad (j = \overline{1,3})$**.**

Так как матрица A неособенная, то векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_3$ линейно независимы.

Будем искать ортогональную матрицу Q, входящую в равенство (5.27), в виде

$$Q = (\boldsymbol{q}_1 \ \boldsymbol{q}_2 \ \boldsymbol{q}_3),$$

где $\boldsymbol{q}_j = (q_{1j} \ q_{2j} \ q_{3j})^T \quad (j = \overline{1,3})$ — **искомые векторы-столбцы.**

Положим

$$\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{a}_1. \tag{5.28}$$

Введем далее вектор $\boldsymbol{q}_2$, ортогональный вектору $\boldsymbol{q}_1$ $\big((\boldsymbol{q}_1, \ \boldsymbol{q}_2) = 0\big)$ **(рис. 5.1). Разложим вектор $\boldsymbol{a}_2$ по направлениям двух введенных ортогональных векторов $\boldsymbol{q}_1$ и $\boldsymbol{q}_2$. При этом модуль вектора $\boldsymbol{q}_2$ выберем таким образом, чтобы этот вектор входил в разложение с множителем, равным единице:**

$$\boldsymbol{a}_2 = u_{12}\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2. \tag{5.29}$$

Введем еще один вектор $\boldsymbol{q}_3$, перпендикулярный плоскости векторов $\boldsymbol{q}_1$ и $\boldsymbol{q}_2$, и такой, что вектор $\boldsymbol{a}_3$ будет представляться в виде линейной комбинации:

$$\boldsymbol{a}_3 = u_{13}\boldsymbol{q}_1 + u_{23}\boldsymbol{q}_2 + \boldsymbol{q}_3. \tag{5.30}$$

Векторы $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ и $\boldsymbol{q}_3$ попарно ортогональны, т.е. для них справедливы соотношения:

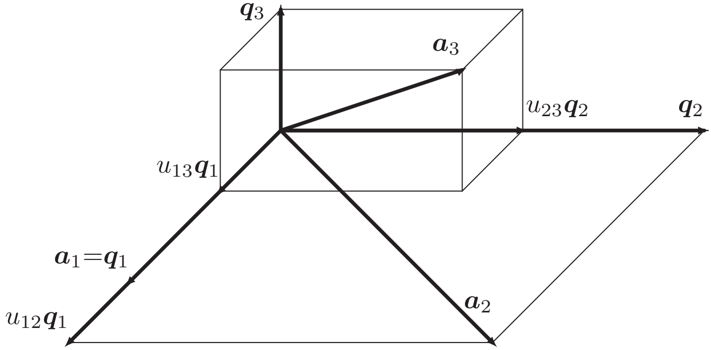


Рис. 5.1. Ортогонализация столбцов матрицы

$$(\boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{q}_j) = \delta_{ij} q_i^2. \tag{5.31}$$

Из системы равенств (5.28)–(5.30) выразим координаты u_{ij} векторов $\boldsymbol{a}_j$, представленных в базисе $\boldsymbol{q}_i$. Для этого умножим обе части равенства (5.29) скалярно на $\boldsymbol{q}_1$:

$$(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{a}_2) = u_{12}(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_1) + (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2).$$

Отсюда, в силу ортогональности векторов $\boldsymbol{q}_1$ и $\boldsymbol{q}_2$, получим:

$$u_{12} = \frac{(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{a}_2)}{q_1^2}. \tag{5.32}$$

Умножим соотношение (5.30) последовательно на $\boldsymbol{q}_1$ и $\boldsymbol{q}_2$ скалярно. Имея в виду (5.31), получим:

$$(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{a}_3) = u_{13} q_1^2, \qquad (\boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{a}_3) = u_{23} q_2^2.$$

Отсюда найдем:

$$u_{13} = \frac{(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{a}_3)}{q_1^2}, \qquad u_{23} = \frac{(\boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{a}_3)}{q_2^2}. \tag{5.33}$$

Таким образом, получены разложения трех линейно независимых векторов $\boldsymbol{a}_i$ $(i = \overline{1,3})$ по взаимно ортогональным векторам $\boldsymbol{q}_j$ $(j = \overline{1,3})$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{q}_1, \\ \boldsymbol{a}_2 = u_{12}\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2, \\ \boldsymbol{a}_3 = u_{13}\boldsymbol{q}_1 + u_{23}\boldsymbol{q}_2 + \boldsymbol{q}_3. \end{cases} \tag{5.34}$$

Система (5.34) эквивалентна матричному равенству (5.27):

$$(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3) = (\boldsymbol{q}_1\ \boldsymbol{q}_2\ \boldsymbol{q}_3)\begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.35}$$

Таким образом, в представлении (5.27) матрица

$$Q = (\boldsymbol{q}_1\ \boldsymbol{q}_2\ \boldsymbol{q}_3) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

имеет ортогональные векторы-столбцы, а

$$U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

является верхней треугольной матрицей с единичной главной диагональю.

Формулы (5.34) естественным образом обобщаются на пространство L_n:

$$\boldsymbol{a}_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ji}\boldsymbol{q}_j \quad (j < i); \qquad Q = (\boldsymbol{q}_1\ \boldsymbol{q}_2\ \dots\ \boldsymbol{q}_n);$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$u_{ji} = \frac{(\boldsymbol{q}_j, \boldsymbol{a}_i)}{q_j^2} \tag{5.36}$$

и

$$(\boldsymbol{q}_j, \boldsymbol{q}_i) = q_j^2 \delta_{ji}.$$

Пример. Матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

преобразовать в матрицу с ортогональными столбцами.

Р е ш е н и е. Пусть $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3)$, где $\boldsymbol{a}_1 = (0\ 1\ 2)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (1\ 2\ 0)^T$, $\boldsymbol{a}_3 = (2\ 0\ 1)^T$. Положим $\boldsymbol{q}_1 = (0\ 1\ 2)^T = \boldsymbol{a}_1$.

По формуле (5.36) найдем

$$u_{12} = \frac{(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{a}_2)}{q_1^2} = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0}{0^2 + 1^2 + 2^2} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Из второго соотношения (5.34) найдем вектор q_2, ортогональный q_1:

$$\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{a}_2 - u_{12}\boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 0{,}4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}6 \\ -0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Для определения q_3 из (5.33) найдем координаты u_{13} и u_{23}:

$$u_{13} = \frac{(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{a}_3)}{q_1^2} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1}{5} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

$$u_{23} = \frac{(\boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{a}_3)}{q_2^2} = \frac{1 \cdot 2 + 1{,}6 \cdot 0 + (-0{,}8) \cdot 1}{1^2 + (1{,}6)^2 + (-0{,}8)^2} = \frac{1{,}2}{4{,}2} = \frac{2}{7}.$$

Обратимся к последней формуле (5.34). Из нее следует

$$\boldsymbol{q}_3 = \boldsymbol{a}_3 - u_{13}\boldsymbol{q}_1 - u_{23}\boldsymbol{q}_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0{,}4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}6 \\ -0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/7 \\ -6/7 \\ 3/7 \end{pmatrix}.$$

Таким образом

$$A = QU = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 12/7 \\ 1 & 1{,}6 & -6/7 \\ 2 & -0{,}8 & 3/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0 & 1 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично ортогонализации столбцов можно осуществить ортогонализацию строк матриц. Теорема 1, сформулированная для ортогонализации столбцов, для случая ортогонализации строк формулируется следующим образом.

Теорема 2. *Всякую действительную неособенную матрицу A можно представить в виде произведения нижней треугольной матрицы с единичной диагональю L справа на матрицу P с ортогональными строками:*

$$A = LP.$$

Существенно следование матриц в произведениях: $A = QU = LP$**, но не наоборот.**

5.5. Ортогонализация строк матрицы путем элементарных преобразований

Рассмотрим еще один способ ортогонализации на примере ортогонализации строк.

Рассмотрим неособенную действительную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{a}_i = (a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{in}) \qquad (i = \overline{1, n}) \tag{5.37}$$

Из второй и всех последующих строк матрицы A вычтем первую ее строку, умноженную соответственно на числа λ_{i1} $(i = \overline{2, n})$. В результате получим

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a^1_{21} & a^1_{22} & \dots & a^1_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^1_{n1} & a^1_{n2} & \dots & a^1_{nn} \end{pmatrix},$$

Здесь $a^1_{ij} = a_{ij} - \lambda_{i1}a_{1j}$.

Множители λ_{i1} найдем из условия, чтобы вектор $\boldsymbol{a}_1$ (первая строка матрицы A) был ортогонален всем другим векторам-строкам $\boldsymbol{a}^1_i = (a^1_{i1}\ a^1_{i2}\ \dots\ a^1_{in})$ $(i = \overline{2, n})$. Запишем условия ортогональности векторов в виде равенства нулю скалярных произведений:

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}^1_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(a_{ij} - \lambda_{i1}a_{1j}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}a_{ij} - \lambda_{i1}\sum_{j=1}^{n} a^2_{1j} = 0 \qquad (i = \overline{2, n}).$$

Отсюда получим

$$\lambda_{i1} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}a_{ij}}{\sum\limits_{j=1}^{n} a^2_{1j}}.$$

Следующим шагом описанную процедуру проделаем со второй (уже преобразованной) вектором-строкой, превращая векторы-- строки $i = \overline{3, n}$ в ортогональные ей. Для этого к элементам строк

$3-n$ **добавляем соответствующие элементы второй строки a^1_{2j}, умноженные на**

$$\lambda_{i2} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} a^1_{2j} a^1_{ij}}{\sum\limits_{j=1}^{n} (a^1_{2j})^2} \qquad (i = \overline{3, n}).$$

После завершения ортогонализации первых k строк для корректировки элементов следующих за ними строк получим множители

$$\lambda_{ik} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} a^{k-1}_{kj} a^{k-1}_{ij}}{\sum\limits_{j=1}^{n} (a^{k-1}_{kj})^2} \qquad (i = \overline{k+1, n}). \tag{5.38}$$

Таким образом доходим до последней, n-ной строки. В результате преобразований на всех $n-1$ шагах получим матрицу

$$A_{n-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a^1_{21} & a^1_{22} & \ldots & a^1_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^{n-1}_{n1} & a^{n-1}_{n2} & \ldots & a^{n-1}_{nn} \end{pmatrix} = P, \tag{5.39}$$

все строки которой попарно ортогональны.

Матрица P получена из матрицы A путем элементарных преобразований. Отождествим совокупность этих преобразований с некоторой матрицей L такой, что справедливо равенство

$$A = LP \tag{5.40}$$

Можно проверить, что L — нижняя треугольная матрица с единичной главной диагональю:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_{21} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \ldots & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.41}$$

5.6. Свойства матриц с ортогональными строками (столбцами)

Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Произведение действительной неособенной матрицы с ортогональными строками P (столбцами Q) справа (слева) на транспонированную по отношению к ней матрицу P^T (Q^T) равно диагональной матрице D_P^2 (D_Q^2).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для матрицы P с ортогональными строками согласно теореме

$$PP^T = D_P^2, \tag{5.42}$$

где

$$P = (\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \ldots\ \boldsymbol{p}_n)^T, \quad P^T = (\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \ldots\ \boldsymbol{p}_n),$$
$$\boldsymbol{p}_i = (p_{i1}\ p_{i2}\ \ldots\ p_{in}) \quad (i = \overline{1,n}).$$

Так как векторы-строки $\boldsymbol{p}_i$ попарно ортогональны, то справедливо соотношение

$$(\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{p}_m) = |\boldsymbol{p}_k||\boldsymbol{p}_m|\delta_{km} = p_k^2\delta_{km} \quad (k, m = \overline{1,n}).$$

В матричном виде соотношение (5.42) приводится к равенству

$$PP^T = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_1) & (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) & \ldots & (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_n) \\ (\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1) & (\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_2) & \ldots & (\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ (\boldsymbol{p}_n, \boldsymbol{p}_1) & (\boldsymbol{p}_n, \boldsymbol{p}_2) & \ldots & (\boldsymbol{p}_n, \boldsymbol{p}_n) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p_1^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_2^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & p_n^2 \end{pmatrix} = \lceil p_1^2\ p_2^2\ \ldots\ p_n^2 \rfloor = D_P^2.$$

Аналогично доказывается вторая часть теоремы:

$$Q^TQ = D_Q^2, \tag{5.43}$$

Теорема 2. *Всякую действительную неособенную матрицу с ортогональными строками P (столбцами Q) можно представить в виде произведения ортогональной матрицы $\Im_P$ ($\Im_Q$) слева (справа) на диагональную матрицу D_P (D_Q).*

Д о к о з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 1 имеем соотношение (5.42). В этом соотношении матрица $D_P^2 = \lceil p_1^2\ p_2^2\ \ldots\ p_n^2 \rfloor$, так что

$$D_P = \lceil p_1\ p_2\ \ldots\ p_n \rfloor.$$

Так как

$$PP^T = D_P^2 = D_P D_P$$

и матрица D_P неособенная (существует D_P^{-1}), то справедливо соотношение

$$D_P^{-1} P P^T D_P^{-1} = I. \tag{5.44}$$

Матрица, транспонированная к диагональной, является той же диагональной матрицей, т.е. $D_P^{-1} = (D_P^{-1})^T$. Поэтому из (5.44) получим

$$(D_P^{-1} P)(D_P^{-1} P)^T = I.$$

Равенство указывает на то, что матрица

$$\Im_P = D_P^{-1} P$$

ортогональная.

Из последнего соотношения следует утверждение теоремы 2:

$$P = D_P \Im_P. \tag{5.45}$$

Аналогично, для матрицы Q с ортогональными столбцами справедливо равенство

$$Q = \Im_Q D_Q. \tag{5.46}$$

Чтобы неособенную матрицу с ортогональными строками P (с ортогональными столбцами Q) преобразовать в ортогональную матрицу $\Im_P$ ($\Im_Q$) необходимо осуществить нормирование строк матрицы P (столбцов матрицы Q). Для этого достаточно все векторы-строки матрицы P (векторы-столбцы матрицы Q) разделить на модули этих векторов:

$$|\boldsymbol{p}_i| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} p_{ik}^2} \qquad \left(|\boldsymbol{q}_j| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} q_{kj}^2} \right). \tag{5.47}$$

В результате получим

$$\Im_P = \left(p_{ik}^0\right) \qquad \left(\Im_Q = \left(q_{kj}^0\right)\right),$$

где

$$p_{ik}^0 = p_{ik} \Big/ |\boldsymbol{p}_i| \qquad \left(q_{kj}^0 = q_{kj} \Big/ |\boldsymbol{q}_j|\right) -$$

элементы нормированных векторов-строк (векторов-столбцов) матрицы с ортогональными строками (столбцами).

Свойства ортогональных и частично ортогональных матриц (матрицы только с ортогональными строками или только с ортогональными столбцами) используются в решении систем линейных уравнений, что зачастую намного упрощает процесс вычислений.

Пусть требуется найти решение системы уравнений, приведенной к матричному виду:

$$AX = B. \tag{5.48}$$

Если матрица A действительная и неособенная, то ее векторы-столбцы или векторы-строки можно сделать попарно ортогональными и даже выделить из A ортогональную матрицу $\Im$. Целесообразность таких преобразований заключается в том, что обращение получающихся при преобразовании треугольных и диагональных матриц требует намного меньше времени, чем обращение квадратных матриц общего вида.

Покажем как можно осуществить решение (5.48) на примере ортогонализации столбцов матрицы A. В этом случае A можно представить в виде произведения матрицы с ортогональными столбцами Q на верхнюю треугольную матрицу с единичной диагональю U. Система (5.48) примет вид

$$QUX = \Im_Q D_Q UX = B. \tag{5.49}$$

Умножим обе части уравнения слева на $(\Im_Q D_Q U)^{-1} = U^{-1} D_Q^{-1} \Im_Q^T$ $(\Im_Q^{-1} = \Im_Q^T)$. Получим искомое решение:

$$X = U^{-1} D_Q^{-1} \Im_Q^T B. \tag{5.50}$$

Матрица, обратная по отношению к ортогональной, равна транспонированной матрице: $\Im_Q^{-1} = \Im_Q^T$; матрица D_Q^{-1} определяется по матрице D_Q обращением диагональных элементов:

$$D_Q^{-1} = \lceil q_i \rfloor^{-1} = \lceil q_i^{-1} \rfloor.$$

Относительно просто находится и матрица U^{-1}, обратная по отношению к верхней треугольной матрице U с единичной диагональю.

5.7. Матрица как оператор преобразования векторов

В математике под преобразованием понимают действие, которое переводит элементы одного пространства в элементы другого пространства.

Если преобразование переводит элементы некоторого пространства в элементы этого же пространства, то объект, который осуществляет преобразование, называют *оператором*. Понятие оператора не связывается с базисом пространства или с координатными системами.

Если оператор $\boldsymbol{A}$ переводит некоторый вектор $\boldsymbol{x}$ в вектор $\boldsymbol{y}$ того же пространства, что и $\boldsymbol{x}$, то этот факт можно записать в виде

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}. \tag{5.51}$$

Последнее преобразование можно обобщить и представить в виде

$$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^0 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}. \tag{5.52}$$

В отличие от (5.51) последнее соотношение указывает на то, что значение вектора $\boldsymbol{y}$ зависит не только от вектора $\boldsymbol{x}$ и вида оператора A, но и от положения «начала» вектора $\boldsymbol{y}$, которое определяется вектором $\boldsymbol{y}_0$.

Если ввести в рассматриваемом пространстве базис, в котором векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ представляются своими координатами $X = (x_1\ x_2\ \ldots x_n)^T$, $Y = (y_1\ y_2\ \ldots y_n)^T$, а оператор матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то инвариантное по отношению к выбору базиса соотношение (5.51) превратится в матричное соотношение

$$Y - Y^0 = AX. \tag{5.53}$$

Элементы матриц этого соотношения зависят от выбора базиса. Матрица A с совокупностью образующих ее элементов представляет оператор $\boldsymbol{A}$ так же, как совокупности элементов векторов-столбцов X и Y представляют векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$.

В развернутом виде (5.53) представляет собой n соотношений:

$$\begin{cases} y_1 - y_1^0 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 - y_2^0 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n - y_n^0 = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{cases} \tag{5.54}$$

Пример 1. Пусть на плоскости каждому вектору $X = (x_1\ x_2)^T$ ставится в соответствие вектор $Y = (y_1\ y_2)^T$, являющийся составляющей вектора X на направление оси x_1 декартовой ортогональной системы координат (рис. 5.2).

Требуется показать, что в преобразовании $Y = AX$ матрица A представляет оператор линейного преобразования.

По условию примера

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = 0. \end{cases}$$

Записанные соотношения линейны, следовательно, линейно и представляемое ими преобразование. Матрица оператора преобразования

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

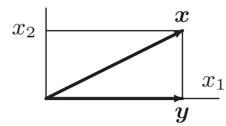


Рис. 5.2. Пример 1

Выясним смысл элемента a_{ij} матрицы преобразования A. Предположим, что вектор $X = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)^T$ представляет совокупность координат декартовой ортогональной системы. Рассмотрим связанные с координатами x_i $(i = \overline{1,n})$ единичные орты $E_1 = (1\ 0\ \ldots\ 0)^T$, $E_2 = (0\ 1\ \ldots\ 0)^T$, ..., $E_n = (0\ 0\ \ldots\ 1)^T$.

Применим преобразование A к E_j — вектору, в котором j-я координата равна единице, а остальные координаты равны нулю:

$$AE_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & a_{ij} & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \qquad (j = \overline{1,n}).$$

Приведенное равенство указывает на то, что a_{ij} — i-я координата преобразования j-го единичного вектора, осуществляемого оператором A.

Пример 2. Составить оператор преобразования, который переводит на плоскости радиус-вектор $\boldsymbol{x}$ с матрицей $X = (x_1\ x_2)^T$ в радиус-вектор $\boldsymbol{y}$ с матрицей $Y = (y_1\ y_2)^T$, равный по модулю вектору $\boldsymbol{x}$.

Пусть α — угол между векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Принято считать угол между векторами положительным, если поворот от первого вектора ко второму осуществляется против часовой стрелки.

Пусть $x = |\boldsymbol{x}|$, $y = |\boldsymbol{y}|$ – модули векторов. По условию примера $x = y$.

Запишем соотношения, вытекающие из условия примера и рис. 5.3.

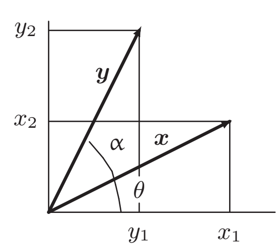


Рис. 5.3. Преобразование поворота

Проекции вектора $\boldsymbol{y}$:

$$\begin{aligned} y_1 &= y\cos(\alpha+\theta) = y(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta);\\ y_2 &= y\sin(\alpha+\theta) = y(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta). \end{aligned} \tag{5.55}$$

Проекции вектора $\boldsymbol{x}$ с учетом равенства модулей векторов $x = y$:

$$x_1 = x\cos\theta = y\cos\theta;$$

$$x_2 = x\sin\theta = y\sin\theta.$$

Подставим последние соотношения в (5.55):

$$\begin{cases} y_1 = x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha,\\ y_2 = x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha. \end{cases} \tag{5.56}$$

Таким образом, преобразование поворота линейное ($\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ — числа). Оно осуществляется матрицей линейного оператора

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрица A ортогональная ($A^{-1} = A^T$).

Соотношения (5.56) определяют «жесткий поворот» в преобразованиях декартовой ортогональной системы координат в $\Re_2$. Если наряду с поворотом осуществляется параллельный перенос системы координат, определяемый вектором $\boldsymbol{y}^0$, то соотношения, определяющие преобразование системы координат, запишутся в виде (рис. 5.4)

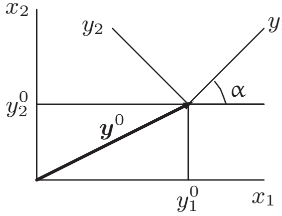


Рис. 5.4. Преобразование координат

$$\begin{cases} y_1 - y_1^0 = x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha,\\ y_2 - y_2^0 = x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha. \end{cases} \tag{5.57}$$

Перечислим основные свойства линейных операторов (A, B — матрицы операторов; X, Y — векторы-столбцы; a — число).

1. Постоянный множитель можно выносить за знак оператора:

$$A(aX) = aAX.$$

2. Оператор от суммы векторов равен сумме операторов от этих векторов

$$A(X+Y) = AX + AY.$$

3. $(A + B)X = AX + BX.$

4. $(aA)X = a(AX)$.

5. $(AB)X = A(BX)$.

Перечисленные действия не изменяют характера линейности операторов. Это свойство, как и свойства, перечисленные в пунктах 1–5, можно проверить на примерах.

Пример 3. Найти результат последовательного выполнения линейных операций:

$$\begin{cases} y_1 = 5x_1 - x_2 + 3x_3, \\ y_2 = x_1 - 2x_2, \\ y_3 = 7x_2 - x_3 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} z_1 = 2y_1 + y_3, \\ z_2 = y_2 - 5y_3, \\ z_3 = 2y_2. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Составим матрицы преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Преобразование $Z = CX$ осуществляет матрица преобразования, равная произведению матриц:

$$C = BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 1 & -37 & 5 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, искомое преобразование:

$$\begin{cases} z_1 = 10x_1 + 5x_2 + 5x_3, \\ z_2 = x_1 - 37x_2 + 5x_3, \\ z_3 = 2x_1 - 4x_2. \end{cases}$$

Если в соотношении (5.53) матрица оператора A квадратная и невырожденная, то можно осуществить обратное преобразование:

$$X = A^{-1}(Y - Y^0).$$

Если же матрица A вырожденная ($\det A = 0$), то формула (5.53) осуществляет преобразование вектора $X \in L_n$ в вектор $Y \in L_m$ $(m < n)$.

5.8. Собственные значения матриц

Пусть с помощью квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ n-го порядка осуществляется линейное преобразование векторов-столбцов (в общем комплексных) X в Y, заданных в n-мерном (в общем комплексном) пространстве:

$$Y = AX. \tag{5.58}$$

Если преобразование (5.58) превращает некоторый вектор X в параллельный ему вектор

$$AX = \lambda X, \tag{5.59}$$

то вектор $X \neq \Theta$ называется *собственным вектором* **матрицы A, а число λ —** *собственным значением* **этой матрицы.**

Рассмотрим и сформулируем в виде теоремы важное свойство собственных значений квадратной матрицы.

Теорема 1. *В комплексном векторном пространстве (в частности, в пространстве действительных чисел) матрица оператора линейного преобразования имеет по меньшей мере одно действительное или пару комплексных собственных значений.*

Доказательство. Собственные векторы являются ненулевыми решениями матричного уравнения (5.59). Перепишем это уравнение в виде

$$(A - \lambda I)X = \Theta. \tag{5.60}$$

Матрица $A - \lambda I$ называется *характеристической матрицей***. Система линейных однородных уравнений, которая представлена матричным уравнением (5.60) будет (согласно теореме Кронекера-Капелли) иметь ненулевые решения только в случае если определитель характеристической матрицы равен нулю:**

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{5.61}$$

Уравнение (5.61) называется *характеристическим* **или** *вековым* **(определение, заимствованное из астрономии) уравнением матрицы A. Запишем его в развернутом виде:**

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5.62}$$

Раскрывая определитель придем к уравнению n-го порядка относительно неизвестного λ:

$$\lambda^n - \sigma_1\lambda^{n-1} + \sigma_2\lambda^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}\lambda + (-1)^n\sigma_n = 0. \tag{5.63}$$

Коэффициенты $\sigma_k \ \ (k = \overline{1, n})$ *характеристического полинома* **(левая часть уравнения) определяются следующим образом.**

$$\sigma_1 = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} \tag{5.64}$$

называется *следом* **матрицы** A**. В математической литературе этот коэффициент обозначается sp** A **(от немецкого «spur») или tr** A **(от английского «trace»);**

$$\sigma_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \ \ldots \ + \begin{vmatrix} a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{nn} & a_{n1} \\ a_{1n} & a_{11} \end{vmatrix}. \tag{5.65}$$

То есть, коэффициент σ_2 **равен сумме всех диагональных миноров второго порядка матрицы** A**.** *Диагональным* **называют минор, элементы главной диагонали которого являются рядом стоящими упорядоченными элементами главной диагонали матрицы. Минор последней суммы образован элементами, стоящими на пересечении** n**-й и первой строк с** n**-м и первым столбцами матрицы** A**.**

Вообще, коэффициенты $\sigma_k \ \ (k = \overline{1, n})$ **равны суммам всех диагональных миноров** k**-го порядка матрицы** A**, главными диагоналями которых являются упорядоченные соседствующие элементы главной диагонали матрицы.**

Свободный член характеристического полинома равен определителю матрицы A **(минору порядка** n**):**

$$\sigma_n = \det A. \tag{5.66}$$

Уравнение (5.63) с многочленом степени n **в левой части имеет, следуя основной теореме алгебры, ровно** n **корней. Среди этих корней могут быть равные и комплексно сопряженные. Тем не менее наверное можно утверждать, что это уравнение имеет по меньшей мере один действительный или одну пару комплексно-сопряженных корней.**

Различные корни характеристического уравнения называются *собственными значениями* **или** *характеристическими числами* **матрицы, а совокупность всех различных значений корней называют** *спектром* **матрицы.**

Максимальное по абсолютной величине собственное значение матрицы A **называется** *спектральным радиусом* **матрицы:**

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, \ |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|\}.$$

Спектральный радиус является одной из норм матрицы.

Пусть корнями уравнения являются числа λ_k $(k = \overline{1,n})$, среди которых могут быть равные и комплексно сопряженные. Следуя формулам Вье́та коэффициенты уравнения n-го порядка (5.59) выразим через его корни:

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n,\\
&\sigma_2 = \lambda_1\lambda_2 + \ldots + \lambda_{n-1}\lambda_n + \lambda_n\lambda_1 =\\
&= \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} + \ \ldots \begin{vmatrix} \lambda_n - 1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{vmatrix},\\
&\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots\\
&\sigma_n = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.67}$$

Сравним формулы (5.64)–(5.66) с формулами (5.67). И в первых и во вторых формулах одни и те же коэффициенты σ_k характеристического уравнения представляются в виде сумм главных миноров k-го порядка $(k = \overline{1,n})$. В отличие от первых, в определителях вторых формул на месте недиагональных элементов стоят нули.

Подчеркнем еще раз тот факт, что одни и те же коэффициенты σ_k характеристического уравнения выражаются различным образом через элементы матрицы A. Оказывается можно осуществить такие преобразования матрицы A, которые превратят определители (5.64)–(5.66) в диагональные (5.67). Неизменяемость значений σ_k позволяет назвать их *главными инвариантами* **матрицы A.**

Пример. Найти собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Составим характеристическое уравнение матрицы A:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, придем к кубическому уравнению

$$\lambda^3 - \sigma_1\lambda^2 + \sigma_2\lambda - \sigma_3 = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 = 0.$$

Корни этого уравнения:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1; \quad \lambda_3 = 4.$$

Проверим справедливость формул Вьета:
$\sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 2 + 3 = 6;$
$\sigma_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 9;$
$\sigma_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1 \cdot 1 \cdot 4 = 4.$

5.9. Собственные векторы матриц

Представив соотношение (5.60) в компонентной форме, подставим в него одно из собственных значений λ_k матрицы A. В результате придем к однородной системе линейных уравнений для определения координат x_i^k $(i = \overline{1, n})$ вектора X^k, соответствующего собственному значению λ_k:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_k)x_1^k + a_{12}x_2^k + \ldots + a_{1n}x_n^k = 0, \\ a_{21}x_1^k + (a_{22} - \lambda_k)x_2^k + \ldots + a_{2n}x_n^k = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1^k + a_{n2}x_2^k + \ldots + (a_{nn} - \lambda_k)x_n^k = 0. \end{cases} \tag{5.68}$$

Так как по условию (5.61) определитель системы уравнений (5.68) $\det(A - \lambda_k I) = 0$, то согласно теореме Кронекера-Капелли система уравнений имеет ненулевые решения. Эти решения являются собственными векторами матрицы A.

Если $\mathrm{rang}(A - \lambda_k I) = r$ $(r < n)$, то существуют $n - r \geq 1$ линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственным значениям λ_k матрицы A. То есть, существует хотя бы один собственный вектор, соответствующий конкретному значению λ_k. Координаты x_i^k этих векторов (этого вектора) находятся из системы (5.68), например, методом Гаусса-Жордана.

Пример. Найти собственные векторы матрицы A, заданной в примере предыдущего параграфа.

Р е ш е н и е. Воспользуемся результатами решения указанного примера: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 4$.

Для $\lambda = \lambda_1 = 1$ получим:

$$\begin{cases} (2 - 1)x_1^1 + x_2^1 + x_3^1 = 0, \\ x_1^1 + (2 - 1)x_2^1 + x_3^1 = 0, \\ x_1^1 + x_2^1 + (2 - 1)x_3^1 = 0. \end{cases} \tag{5.69}$$

Ранг матрицы коэффициентов этой системы $r = 1$, поэтому два ее уравнения являются следствием третьего. То есть среди трех

уравнений для определения координат вектора $X^1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1)$ только одно линейно независимое:

$$x_1^1 + x_2^1 + x_3^1 = 0. \tag{5.70}$$

Для координат вектора $X^2 = (x_1^2, x_2^2, x_3^2)$, соответствующего второму собственному значению $\lambda = \lambda_2 = 1$ матрицы A получим такое же, как для X^1, выражение

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0. \tag{5.71}$$

Произвол в выборе координат векторов X^1 и X^2 можно сузить, выполняя требования: во-первых, удовлетворения равенствам (5.70-5.71), во-вторых, линейной независимости векторов X^1 и X^2. Из первого требования вытекают равенства $-x_3^1 = x_1^1 + x_2^1$, $-x_3^2 = x_1^2 + x_2^2$. Что касается второго требования, то его усилим условием ортогональности векторов: $(X^1, X^2) = x_1^1 x_1^2 + x_2^1 x_2^2 + x_3^1 x_3^2$.

Воспользовавшись оставшимся произволом, полагаем $x_3^1 = 0$ и вводим для векторов скалярные множители k^1 и k^2, обеспечивающие произвольность длин векторов X^1 и X^2.

В результате получим два собственных вектора, соответствующих двум одинаковым собственным значениям $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$X^1 = k^1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X^2 = k^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Любые другие векторы, которые могут быть получены из (5.69) для собственного значения $\lambda = 1$, можно представить в виде линейной комбинации векторов X^1 и X^2 — все они будут лежать в плоскости этих векторов.

Для собственного значения $\lambda = \lambda_3 = 4$ составим, следуя (5.68), систему уравнений

$$\begin{cases} (2-4)x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0, \\ x_1^3 + (2-4)x_2^3 + x_3^3 = 0, \\ x_1^3 + x_2^3 + (2-4)x_3^3 = 0. \end{cases} \tag{5.72}$$

Ранг матрицы коэффициентов этой системы равен двум. Это следует, во-первых, из того, что определитель матрицы коэффициентов равен нулю и, во-вторых, определитель главного минора второго порядка

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Отличие от нуля минора говорит о том, что два первых уравнения системы (5.72) линейно независимы. Что касается третьего

уравнения, то оно при ранге $r = 2$ матрицы коэффициентов зависит от первых двух уравнений и может быть отброшено. Таким образом, искомый вектор можно найти из двух уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1^3 + \ \ x_2^3 + x_3^3 = 0, \\ \ \ \ x_1^3 - 2x_2^3 + x_3^3 = 0. \end{cases}$$

Этим уравнениям удовлетворяют решения

$$x_1^3 = x_2^3 = x_3^3 = k^3$$

при любых значениях k^3. Поэтому искомый вектор $X^3 = k^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Заметим, что собственный вектор X^3, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = 4$, отличному от значений $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, ортогонален векторам (плоскости векторов) X^1 и X^2. Действительно, скалярные произведения

$$(X^1,X^3) = k^1k^3(1{\cdot}1{-}1{\cdot}1{+}1{\cdot}0) = 0, \quad (X^2,X^3) = k^2k^3(1{\cdot}1{+}1{\cdot}1{-}2{\cdot}1) = 0.$$

Ортогональные векторы X^1, X^2, X^3 желательно нормировать к единичной длине, поделив их на соответствующие модули:

$$|X^1| = k^1\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}; |X^2| = k^2\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6};$$

$$|X^3| = k^3\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

В результате получаем тройку векторов ортонормированного базиса

$$e^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0); e^2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2); e^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1).$$

Проверим, будет ли полученная тройка векторов образовывать правый базис. Для проверки этого факта достаточно, чтобы смешанное произведение тройки векторов было положительным:

$$e^1e^2e^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0 \ (!).$$

Таким образом получен правый ортонормированный базис.

Предварительный вывод, который можно сделать по результатам примера, следующий. Если собственные значения матрицы действительные и равные (кратные) числа, то соответствующие им собственные векторы располагаются произвольно в некоторой

плоскости (в частности, могут быть ортогональными при соответствующем подборе координат этих векторов). Что касается собственного значения, отличного от других, то ему соответствует собственный вектор, ортогональный другим векторам.

Обобщим результаты решения примера в виде теоремы.

Теорема. *Собственные векторы матрицы, соответствующие попарно различным собственным значениям этой матрицы, линейно независимы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для квадратной матрицы A n-го порядка, у которой $\mathrm{rang} A = n$, справедливы соотношения

$$AX^k = \lambda_k X^k \qquad (k = \overline{1, n}), \tag{5.73}$$

в которых $X^k \neq \Theta$, $\lambda_k \neq \lambda_j$ при $k \neq j$. То есть все собственные значения λ_k попарно не равны.

Составим линейную комбинацию векторов X^k и приравняем ее нулевому вектору:

$$a_1 X^1 + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n = \Theta. \tag{5.74}$$

Предположим в противовес теореме, что векторы X^k линейно зависимы. В этом случае равенство (5.74) должно выполняться в случае, если хотя бы один из множителей a_k отличен от нуля. Пусть таким множителем является a_1 ($a_1 \neq 0$).

Подействуем оператором A на (5.74). В силу (5.73) получим

$$a_1 \lambda_1 X^1 + a_2 \lambda_2 X^2 + \ldots + a_n \lambda_n X^n = \Theta. \tag{5.75}$$

Умножим (5.74) на $-\lambda_n$ и прибавим полученное равенство к (5.75). В результате получим равенство, в котором отсутствует слагаемое с вектором X^n:

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_n) X^1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_n) X^2 + \ldots + a_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n) X^{n-1} = \Theta. \tag{5.76}$$

Следующим шагом избавимся от слагаемого с вектором X^{n-1}. Для этого в (5.74) полагаем $a_n = 0$. Затем умножим полученное выражение на $-(\lambda_{n-1} - \lambda_n)$ и сложим с (5.76). Получим:

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_{n-1}) X^1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_{n-1}) X^2 + \ldots + a_{n-2}(\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1}) X^{n-2} = \Theta.$$

И так далее.

Процесс продолжаем до получения равенства

$$(\lambda_1 - \lambda_2) a_1 X^1 = \Theta.$$

Последнее равенство получено в предположении, что все $a_k = 0$ при $k = \overline{1, n-1}$. Это равенство будет выполнено в условиях принятых предположений только при $a_1 = 0$. Но если линейная комбинация векторов (5.74) равна нулю только при условии, что все коэффициенты $a_k = 0$, то по определению векторы X^k $(k = \overline{1, n})$ — линейно независимы.

З а м е ч а н и е. Если все собственные значения квадратной действительной матрицы порядка n попарно различны, то соответствующие им n собственных векторов матрицы образуют базис в n-мерном пространстве. Векторы этого базиса попарно ортогональны.

5.10. Подобные матрицы

Матрицы, собственные векторы и собственные значения которых совпадают, называются *подобными.* **Подобные матрицы путем преобразования базисов могут быть приведены к одному виду. Если матрицы A и B подобны, то будем писать $A \sim B$ ($B \sim A$).**

Выведем соотношения, связывающие подобные матрицы при преобразованиях базисов.

Пусть в линейном пространстве L_n заданы два базиса: $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)^T$ и $\tilde{\boldsymbol{E}} = (\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e}}_n)^T$ и пусть известна матрица преобразования $S^T = (s_{ik})$ векторов $\boldsymbol{e}_i$ в векторы $\tilde{\boldsymbol{e}}_k$ (5.6).

Рассмотрим два представления одного вектора $\boldsymbol{x}$ в данном пространстве. Одно представление вектором-столбцом $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$ в базисе $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{x} = X^T \boldsymbol{E} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i,$$

второе представление — вектором-столбцом $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)^T$ в базисе $\tilde{\boldsymbol{E}}$:

$$\boldsymbol{x} = \tilde{X}^T \tilde{\boldsymbol{E}} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{x}_k \tilde{\boldsymbol{e}}_k.$$

Матрицы X и $\tilde{X}$ связаны преобразованием (5.10)

$$X = S\tilde{X} \tag{5.77}$$

Пусть матрицы A и B осуществляют преобразования векторов X и $\tilde{X}$ в векторы Y и $\tilde{Y}$:

$$Y = AX; \qquad \tilde{Y} = B\tilde{X}, \tag{5.78}$$

где $A \sim B$.

Так как векторы Y и X представлены в одном базисе $\boldsymbol{E}$, а векторы $\tilde{Y}$ и $\tilde{X}$ в другом (но одинаковым для обоих векторов) базисе $\tilde{\boldsymbol{E}}$, то векторы Y и $\tilde{Y}$ должны быть связаны соотношением (5.77):

$$Y = S\tilde{Y}. \tag{5.79}$$

Подставим преобразования (5.77) и (5.79) в первое соотношение (5.78):

$$S\tilde{Y} = AS\tilde{X}.$$

Так как S — невырожденная матрица, то отсюда получим

$$\tilde{Y} = S^{-1}AS\tilde{X}.$$

Сравнение последней формулы со второй зависимостью (5.78) приводит к правилу преобразования подобных операторов при преобразовании базисов с помощью матрицы S:

$$B = S^{-1}AS \qquad A = SBS^{-1}. \tag{5.80}$$

Полученная зависимость позволяет утверждать: *если две матрицы подобны, то для них существует правило преобразования* **(5.80).**

Отметим без доказательства некоторые свойства матрицы преобразования S.

1. Преобразование суммы матриц равно сумме преобразований этих матриц:

$$S^{-1}(A + B)S = S^{-1}AS + S^{-1}BS.$$

2. Преобразование произведения матриц равно произведению преобразований этих матриц:

$$S^{-1}(AB)S = S^{-1}AS \cdot S^{-1}BS.$$

Обобщением этого свойства является формула

$$S^{-1}A^nS = (S^{-1}AS)^n.$$

3. Преобразование обратной матрицы равно обратной матрице от преобразования:

$$S^{-1}A^{-1}S = (S^{-1}AS)^{-1}.$$

Сформулируем и докажем следующие теоремы.

Теорема 1. *Подобные матрицы имеют одинаковые характеристические полиномы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть матрицы A и B подобны (имеют одинаковые собственные значения λ и одинаковые собственные

векторы X). Тогда при известной матрице S преобразования базисных векторов и очевидной справедливости соотношений

$$\det S \neq 0, \quad \det S^{-1} \det S = 1$$

получим

$$\det(B - \lambda I) = \det[S^{-1}(A - \lambda I)S] =$$
$$= \det S^{-1} \det(A - \lambda I) \det S = \det(A - \lambda I).$$

То есть,

$$\det(B - \lambda I) = \det(A - \lambda I).$$

В обеих частях равенства стоят полиномы, о которых шла речь в теореме.

С л е д с т в и е 1. Так как подобные матрицы имеют одинаковые собственные значения то их одинаковые инварианты равны.

С л е д с т в и е 2. Свойство вектора быть собственным для конкретного линейного преобразования не зависит от выбора базиса в рассматриваемом векторном пространстве.

Действительно, пусть

$$AX = \lambda X \quad (X \neq \Theta).$$

Если вектор с матрицей координат X в новом базисе представляется матрицей координат $\tilde{X}$, то справедливы соотношения

$$X = S\tilde{X} \quad \text{и} \quad AS\tilde{X} = \lambda S\tilde{X}.$$

Отсюда следует

$$S^{-1}AS\tilde{X} = S^{-1}\lambda S\tilde{X}, \quad \text{или} \quad B\tilde{X} = \lambda\tilde{X}.$$

Теорема 2. *Если квадратная матрица A порядка n имеет n линейно независимых собственных векторов, то, приняв эти векторы за базисные, получим диагональную матрицу, подобную A.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Образуем базис из собственных векторов $\boldsymbol{e}_i$ $(i = \overline{1,n})$ матрицы A. Так как $\boldsymbol{e}_i$ собственный вектор матрицы A и λ_i — соответствующее этому вектору собственное значение, то справедливо соотношение

$$A\boldsymbol{e}_i = \lambda_i \boldsymbol{e}_i \quad (i = \overline{1,n}).$$

Разложим произвольный вектор $\boldsymbol{x}$ по базису $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i.$$

Применяя преобразование A к вектору $\boldsymbol{x}$, получим новый вектор (δ_{ik} — символ Кронекера)

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} = A\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i A\boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i \boldsymbol{e}_i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i \delta_{ik} \boldsymbol{e}_k.$$

Сравнивая полученное выражение с разложением вектора $\boldsymbol{y}$ по базису: $\boldsymbol{e}_k \quad (k = \overline{1, n})$

$$\boldsymbol{y} = \sum_{k=1}^{n} y_k \boldsymbol{e}_k,$$

и приравнивая в двух последних выражениях множители при одинаковых базисных векторах $\boldsymbol{e}_k$, придем к соотношению:

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ik} \lambda_i x_i.$$

Следовательно, в базисе собственных векторов $\boldsymbol{e}_i$ матрица преобразования векторов $\boldsymbol{x}$ в $\boldsymbol{y}$ $\;(X$ в $Y)$:

$$\Lambda = (\delta_{ik}\lambda_i),$$

или в развернутом виде

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

С л е д с т в и е. Всякую квадратную матрицу, собственные векторы которой попарно различны, можно путем преобразования подобия привести к диагональному виду.

5.11. Билинейная и квадратичная формы

Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная действительная матрица порядка n, $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — векторы n-мерного, в общем комплексного пространства. Составим скалярное произведение

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} (A\boldsymbol{x})_j \overline{y}_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k \overline{y}_j. \tag{5.81}$$

Соотношения, входящие в равенства (5.81), называются *билинейной формой* матрицы A.

В следующих преобразованиях использовано свойство: сопряженная величина произведения двух комплексных чисел равна

произведению сопряженных величин, входящих в произведение, но записанных в обратном порядке (4.17). Кроме того, использована возможность произвола в выборе «немых» индексов под знаком суммы.

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{kj} x_j \overline{y}_k = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{kj} \overline{y}_k x_j = (\overline{A^T\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}}) = (\boldsymbol{x}, A^T\boldsymbol{y}).$$

Таким образом,

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A^T\boldsymbol{y}). \tag{5.82}$$

То есть, в билинейной форме действительную матрицу как оператор преобразования одного из векторов можно переставлять от первого вектора ко второму и наоборот, заменяя ее при этом на транспонированную.

Если матрица A **симметричная, то в (5.82) ее можно переносить от одного вектора к другому:**

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}). \tag{5.83}$$

Билинейная форма (5.83) при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ **называется** *квадратичной формой*:

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}).$$

Привлекательность последних двух формул приводит к необходимости выделения из квадратной матрицы ее симметричной части.

Рассмотрим квадратную матрицу $A = (a_{ij})$.

Введем две дополнительные матрицы:

$$Q = \frac{1}{2}(A + A^T), \qquad \Omega = \frac{1}{2}(A - A^T). \tag{5.84}$$

Очевидно, что $Q^T = Q$ — *симметричная матрица*; $\Omega^T = -\Omega$ — *обратносимметричная матрица*.

В пространстве $\Re_3$ **среди координат матрицы** $Q:\ q_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) = \frac{1}{2}(a_{ji} + a_{ij}) = q_{ji}$ **шесть в общем неравных.**

Среди координат матрицы $\Omega:\ \omega_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) = -\frac{1}{2}(a_{ji} - a_{ij}) = -\omega_{ji}$ **в том же пространстве** $\Re_3$ **неравных три (как у вектора) — диагональные координаты матрицы равны нулю.**

Складывая равенства (5.84) получим

$$A = Q + \Omega.$$

Таким образом, любая квадратная матрица может быть представлена в виде суммы симметричной Q и обратносимметричной Ω матриц. При этом справедливы соотношения

$$A^T = Q^T + \Omega^T = Q - \Omega.$$

Теорема. *Квадратичная форма обратносимметричной матрицы равна нулю.*

Докажем справедливость теоремы на примере квадратной обратносимметричной матрицы второго прядка $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$:

$$X^T \Omega X = (x_1 x_2) \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1\omega \quad - x_2\omega) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \omega x_1 x_2 - \omega x_1 x_2 = 0.$$

Теорема по существу утверждает, что для квадратной, в общем несимметричной матрицы A **справедливо равенство**

$$X^T A X = X^T Q X,$$

где $Q = \dfrac{1}{2}(A + A^T)$.

5.12. Свойства симметричных матриц

Сформулируем в виде теорем некоторые основные свойства симметричных матриц.

Теорема 1. *Собственные значения действительных симметричных матриц — действительные числа.*

Доказательство. **Пусть** λ **— собственное значение симметричной матрицы** A **и** $\boldsymbol{x}$ **— соответствующий этому значению собственный вектор. В этом случае справедливо равенство**

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{\Theta}). \tag{5.85}$$

Так как $A = A^T$**, то для квадратичной формы матрицы** A **справедливо соотношение**

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}),$$

или с учетом (5.85)

$$(\lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \lambda \boldsymbol{x}).$$

По свойствам скалярных произведений комплексных векторов отсюда получим

$$\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \overline{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}).$$

Собственный вектор — ненулевой, поэтому $(x, x) \neq 0$ и последнее равенство справедливо если $\lambda = \overline{\lambda}$. Равенство выполнимо только когда λ — действительное число.

Теорема 2. *Собственные векторы действительной симметричной матрицы, соответствующие ее различным собственным значениям, попарно ортогональны.*

Доказательство. Пусть двум различным собственным значениям λ_i и λ_j симметричной действительной матрицы A соответствуют собственные векторы $\boldsymbol{x}^i$ и $\boldsymbol{x}^j$. При этом будут выполнены равенства

$$A\boldsymbol{x}^i = \lambda_i \boldsymbol{x}^i, \qquad A\boldsymbol{x}^j = \lambda_j \boldsymbol{x}^j. \tag{5.86}$$

Составим скалярные произведения, справедливые для симметричной матрицы A:

$$(A\boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x}^j) = (\boldsymbol{x}^i, A\boldsymbol{x}^j).$$

Перепишем это равенство с учетом (5.86) и свойств скалярных произведений:

$$\lambda_i(\boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x}^j) = \lambda_j(\boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x}^j).$$

Отсюда

$$(\lambda_i - \lambda_j)(\boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x}^j) = 0.$$

Для различных собственных значений матрицы $(\lambda_i \neq \lambda_j)$ из последнего равенства следует

$$(\boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x}^j) = 0.$$

Равенство нулю скалярного произведения векторов указывает на их ортогональность. Иллюстрацией сказанного служит пример, разобранный в § 5.9.

Теорема 3. *Всякую действительную симметричную матрицу можно при помощи преобразования подобия привести к диагональному виду.*

Теорема была сформулирована как следствие к теореме 2 §5.10.

Приведем два следствия, вытекающие из теоремы 3.

Следствие 1. Для всякого линейного преобразования действительной симметричной матрицы A существует ортогональный базис, состоящий из собственных векторов матрицы и для которого матрица A — диагональная.

Следствие 2. Каждому k-кратному собственному значению действительной симметричной матрицы соответствует k линейно независимых векторов.

Теорема 4 (экстремальное свойство собственных значений). *Для действительной симметричной матрицы A справедливо соотношение*

$$\lambda_{\min}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \le (A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \le \lambda_{\max}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}),$$

где $\lambda_{\min}$ — минимальное; $\lambda_{\max}$ — максимальное из всех возможных значений матрицы A:

$$\lambda_{\min} = \min\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\};$$

$$\lambda_{\max} = \max\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}.$$

Доказательство. Предположим для определенности, что матрица A имеет n различных корней — собственных значений λ_i $(i=\overline{1,n})$. При этом n совпадает с размерностью пространства. Пусть значениям λ_i соответствуют собственные ортонормированные векторы $\boldsymbol{e}_i$. Отметим, что собственные векторы, получаемые в результате решения задачи, имеют неопределенную длину. Однако, их всегда можно нормировать, поделив каждый из векторов на его модуль. Для нормированных собственных векторов, таким образом, будут справедливы соотношения

$$(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}.$$

Запишем очевидные равенства:

$$A\boldsymbol{e}_i = \lambda_i\boldsymbol{e}_i \qquad (i=\overline{1,n}).$$

Произвольный вектор x представим в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{e}_i$

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n = \sum_{k=1}^{n} x_k\boldsymbol{e}_k. \tag{5.87}$$

Умножим обе части (5.87) слева на матрицу A. С учетом того, что скалярные множители (x_i) можно вынести за пределы произведения матриц, получим

$$A\boldsymbol{x} = x_1A\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_nA\boldsymbol{e}_n = \lambda_1x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \lambda_nx_n\boldsymbol{e}_n = \sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i\boldsymbol{e}_i.$$

Чтобы не усложнять дальнейшие преобразования, будем считать, что собственные векторы матрицы A — действительные числа. Найдем скалярное произведение полученного вектора на вектор x:

$$(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i\boldsymbol{e}_i, \sum_{k=1}^{n}x_k\boldsymbol{e}_k\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_ix_ix_k(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_i x_i x_k \delta_{ik} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i {x_i}^2.$$

Таким образом, в базисе собственных векторов матрицы A

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i {x_i}^2. \tag{5.88}$$

Заменяя в (5.88) все λ_i на $\lambda_{\min}$ и затем на $\lambda_{\max}$, придем к неравенствам:

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq \lambda_{\min}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2, \qquad (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \leq \lambda_{\max}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2. \tag{5.89}$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Процесс приведения квадратной матрицы A к диагональному виду можно осуществить с помощью матрицы преобразования произвольного вектора $\boldsymbol{x} = X^T\boldsymbol{I}$ к собственному вектору $\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{X}^T\boldsymbol{I}$ матрицы A. Считаем, что оба вектора представлены в одном базисе $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_k)$.

Так как квадратичная форма $(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})$ — величина, инвариантная по отношению к выбору базиса, то справедливо равенство

$$X^T A X = \tilde{X}^T \Lambda \tilde{X}. \tag{5.90}$$

Считаем, что тильдой отмечены собственные векторы-столбцы матрицы A, а Λ — приведенная к диагональному виду матрица A с собственными значениями на главной диагонали.

Так как $X^T = \tilde{X}^T S^{-1}$ и $X = S\tilde{X}$, то левая часть равенства (5.90) преобразится к виду

$$\tilde{X}^T S^{-1} A S \tilde{X}.$$

Сравнивая это выражение с правой частью (5.90), получим формулу для преобразования матрицы A к диагональной матрице Λ собственных значений:

$$\Lambda = S^{-1} A S.$$

5.13. Знакоопределенные квадратичные формы

Действительная симметричная матрица A называется *положительно (отрицательно) определенной*, если положительна (отрицательна) квадратичная форма:

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0 \quad (< 0).$$

Если в последнем выражении строгие неравенства заменить на нестрогие $\geq$ ($\leq$), то квадратичная форма называется *положительно (отрицательно) полуопределенной***.**

Теорема 1. *Действительная симметричная матрица является положительно определенной тогда и только тогда, когда все ее собственные значения положительны.*

Доказательство. Обратимся к первому из неравенств (5.89). Допустим, что для матрицы A $\lambda_{\min} < 0$. В этом случае квадратичная форма для собственного вектора, соответствующего $\lambda_{\min}$, будет отрицательной. По определению матрица A не будет положительно определенной.

С другой стороны, если все $\lambda_i > 0$ то в сумму правой части (5.88) будут входить только положительные слагаемые. Матрица A будет положительно определенной.

Следующая теорема поможет выяснить будет ли матрица положительно определенной.

Теорема 2. *Для положительной определенности действительной симметричной матрицы $A = (a_{ik})$ необходимо и достаточно, чтобы все ее главные миноры были положительными.*

Теорема отражает условие, известное в математике как *принцип Сильвестра* **или** *условие Сильвестра.*

Если все собственные значения симметричной действительной матрицы меньше нуля, то такая матрица будет, очевидно, *отрицательно определенной***.**

Ясно, что для перехода от положительной к отрицательной определенности достаточно матрицу умножить на -1. Вспомним, что при умножении матрицы на число все ее элементы умножаются на это число.

Если положительно определенную матрицу умножить на -1, то знаки ее нечетных главных миноров станут отрицательными. Поэтому можно сформулировать критерий отрицательной определенности действительной симметричной матрицы A.

Если знаки (sign) главных миноров M_k (k-го порядка) матрицы A определяются соотношением

$$\text{sign } M_k = (-1)^k,$$

то матрица A отрицательно определенная.

Пример. Определить знак квадратичной формы $K(X) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$, не приводя ее к базису собственных значений.

Р е ш е н и е. Составим матрицу коэффициентов квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Главные миноры этой матрицы:

$$M_1{=}4{>}0, \qquad M_2{=}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0.$$

Так как оба главных минора матрицы положительны, то квадратичная форма определена положительно. Образуем из $K(X)$ отрицательную квадратичную форму: $-K(X) = -4x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$.

Главные миноры матрицы этой квадратичной формы:

$$M_1{=}{-4}{<}0, \qquad M_2 = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 > 0.$$

Так как знаки главных миноров матрицы чередуются, причем знак первого минора отрицательный, то квадратичная форма $-K(X)$ определена отрицательно.

5.14. Преобразование квадратичных форм в $\Re_2$

Пусть вектор $X = (x_1 \;\; x_2)^T$ вместе с действительной симметричной матрицей $Q = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ образуют квадратичную форму $K = X^TQX$.

Предположим, что вектор X и матрица Q заданы своими координатами в ортонормированном базисе $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2)^T$.

Так как матрица Q действительная и симметричная, то ее собственные векторы взаимно ортогональны. Обозначим нормированный базис собственных значений матрицы Q через $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1 \; \boldsymbol{e}_2)^T$ и предположим, что базис $\boldsymbol{E}$ образован поворотом базиса $\boldsymbol{I}$ на угол α (рис. 5.5).

Так как базисные векторы «скользящие», т.е. могут перемещаться параллельно самим себе, то можно считать, что они приложены к одной точке и рассматриваемое преобразование равносильно «жесткому повороту» базиса на угол α. Принято угол поворота считать положительным, если он отсчитывается от положительного направления оси i_1 против часовой стрелки.

В силу того, что векторы $\boldsymbol{i}_k$ и $\boldsymbol{e}_r$ $(k, r = \overline{1,2})$ ортонормированные, их проекции на направления других векторов равны косинусам

углов между этими векторами. Тогда

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = \quad \boldsymbol{i}_1 \cos\alpha + \boldsymbol{i}_2 \sin\alpha, \\ \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{i}_1 \sin\alpha + \boldsymbol{i}_2 \cos\alpha, \end{cases}$$

или

$$\boldsymbol{E} = S^T \boldsymbol{I} : \tag{5.91}$$

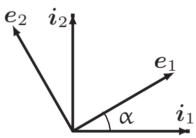


Рис. 5.5. Преобразование базисов

Коэффициенты разложения базисных векторов $\boldsymbol{E}$ по базисным векторам $\boldsymbol{I}$ образуют ортогональную матрицу преобразования базисов

$$S^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = S^{-1}.$$

Используя S^T выразим вектор X переменных исходной декартовой ортогональной системы координат через вектор $\tilde{X} = (\tilde{x}_1 \tilde{x}_2)^T$ новой системы координат, «соосной» с ортонормированным базисом $\boldsymbol{E}$:

$$X = S\tilde{X}, \qquad \text{или} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}.$$

При переходе к новому базису матрица Q преобразуется в $\tilde{Q}$:

$$\tilde{Q} = S^{-1}QS = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Или

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{B} & \tilde{C} \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A\cos^2\alpha + B\sin 2\alpha + C\sin^2\alpha; \\ \tilde{B} &= (-A\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha + C\sin^2\alpha)/2; \\ \tilde{C} &= A\sin^2\alpha - B\sin 2\alpha + C\cos^2\alpha. \end{aligned} \tag{5.92}$$

В последних соотношениях угол α выберем таким, чтобы коэффициент $\tilde{B}$ обратился в нуль, т.е.

$$-A\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha + C\sin^2\alpha = 0.$$

Отсюда следует

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{2B}. \tag{5.93}$$

Если угол поворота базиса выбрать таким, чтобы выполнялось последнее условие, то в матрице $\tilde{Q} = \Lambda$ диагональные элементы обратятся в нуль. А это означает, что матрица приведена к диагональному виды и на ее главной диагонали стоят собственные значения $\lambda_1 = \tilde{A}$, $\lambda_2 = \tilde{C}$. При этом квадратичная форма примет вид

$$\tilde{K} = \tilde{X}^T \Lambda \tilde{X} = (\tilde{x}_1 \ \tilde{x}_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}.$$

Или

$$\tilde{K} = \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2. \tag{5.94}$$

5.15. Резюме

Все реальные объекты существуют независимо от вводимых систем координат и базисных векторов. Тем не менее, построение алгоритмов решения задач требует введение базисных векторов и систем координат. Совокупности базисных векторов могут быть различными, но между ними существуют соотношения, позволяющие преобразовывать один базис в другой. Такое преобразование осуществляется соответствующими матрицами. Для обеспечения инвариантности математических моделей, состоящих из координат векторов и матриц, последние должны подчиняться определенным правилам преобразования при изменении базисов.

Простейшим из базисов является базис ортонормированных векторов. Преобразование таких базисов осуществляется ортогональными матрицами, наиболее удобными в решении задач. Поэтому важную роль в реализации решений задач уделяется вопросам выделения из произвольных матриц их ортогональных составляющих.

Собственные значения матриц обладают свойствами экстремальности. Поэтому проблеме определения собственных векторов и собственных значений матриц в математической литературе уделяется большое внимание. В частности, в базисах собственных векторов матриц квадратичных форм алгебраические уравнения второго порядка имеют канонический вид.

5.16. Вопросы

1. **Дайте характеристики матриц, входящих в LU-представление матрицы A.**
2. **Какой смысл LU представления матриц при решении систем уравнений?**
3. **Получите формулы, определяющие преобразования векторов и матриц при известном преобразовании матриц.**
4. **Что представляет собой ортогональная матрица? В чем состоит особенность использования ортогональных матриц в задачах преобразования векторов?**
5. **Поясните, в чем заключается метод Шмидта ортогонализации столбцов матриц. Метод элементарных преобразований?**
6. **Какими способами можно осуществить ортогонализацию строк матриц?**
7. **Перечислите основные характерные свойства матриц с ортогональными строками (столбцами).**
8. **Как можно найти главные инварианты матриц?**
9. **Что такое собственные значения матрицы? собственные векторы?**
10. **Запишите систему уравнений для определения собственных значений и собственных векторов матрицы.**
11. **Перечислите основные свойства собственных векторов и собственных значений произвольных квадратных матриц. Симметричных матриц.**
12. **Какие матрицы называют подобными? Перечислите основные свойства подобных матриц.**
13. **Что такое билинейная форма матриц? Квадратичная форма? Как выглядят эти формы для симметричных матриц?**
14. **Как представить квадратичную форму в виде матричного произведения?**

Вопросы для тестирования

1. Перечислите номера правильных утверждений, относящихся к разложению $A = LU$, **где** $A = (a_{kr})$, $U = (u_{kr})$, $L = (\mu_{kr})$ $(k, r = \overline{1, n})$**.**

1. U **— матрица с единичной главной диагональю;**

2. L **— диагональная матрица;**

3. $u_{kr} = 0$ **при** $k < r$**;**

4. $\mu_{kr} = 0$ **при** $k < r$;

5. Среди утверждений 1–4 нет правильных.

2. Перечислите номера правильных соотношений, справедливых для ортогональной матрицы $A = (a_{kr})$.

1. $a_{kr} = a_{rk}$; **2.** $a_{km}a_{mr} = \delta_{kr}$; **3.** $\det A = \pm 1$**;** **4.** $(A^{-1})^T = A$;

5. Среди соотношений 1–4 нет правильных.

3. Заданы векторы двух произвольных базисов $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_k)^T$ **и** $\tilde{\boldsymbol{E}} = (\tilde{\boldsymbol{e}}_r)^T$ **и преобразование** $S = (s_{kr})$, **в котором** $s_{kr} = (\boldsymbol{e}_k, \tilde{\boldsymbol{e}}_r)$. **Перечислите номера правильных соотношений.**

1. $\boldsymbol{e}_k = s_{kr}\tilde{\boldsymbol{e}_r}$**;** **2.** $s_{kr} = \delta_{kr}$; **3.** $s_{km}s_{mr} = \delta_{kr}$; **4.** $S^{-1} = S^T$;

5. Среди соотношений 1–4 нет правильных.

4. Заданы векторы двух ортонормированных базисов $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_k)^T$, $\tilde{\boldsymbol{I}} = (\tilde{\boldsymbol{i}}_r)^T$ **и преобразование** $S = (s_{kr})$, **в котором** $s_{kr} = (\boldsymbol{i}_k, \tilde{\boldsymbol{i}}_r)$. **Перечислите номера правильных соотношений.**

1. $\boldsymbol{i}_k = \cos(\boldsymbol{i}_k\hat{,}\tilde{\boldsymbol{i}_r})\tilde{\boldsymbol{i}_r}$**;** **2.** $s_{kr} = \delta_{kr}$; **3.** $s_{km}s_{mr} = \delta_{kr}$; **4.** $S^{-1} = S^T$;

5. Среди соотношений 1–4 нет правильных.

5. Задана матрица в виде разложения на произведения $A = QU = \Im_Q D_Q U$. **Перечислите номера правильных соотношений, относящихся к приведенному произведению, в котором** $Q = (\boldsymbol{q}_r)$, $U = (u_{kr})$, $\boldsymbol{q}_r = (q_{kr})^T$, $D_Q = \lceil d_k \rfloor$.

1. $q_{ik}q_{jk} = \delta_{ij}q_k^2$**;** **2.** $u_{kr} = 0$ **при** $k > r$;

3. $(\boldsymbol{q}_k, \boldsymbol{q}_r) = \delta_{kr}$; **4.** $\Im_Q^{-1} = \Im_Q^T$;

5. Среди соотношений 1–4 нет правильных.

6. Матрица A **представлена по методу Шмидта в виде** $A = QU$, **где** $A = (\boldsymbol{a}_k)$, $Q = (\boldsymbol{q}_r)$, $U = (u_{kr})$ $(k, r = \overline{1, n})$. **Перечислите номера правильных соотношений и утверждений.**

1. $A = A^T$**;** **2.** $\boldsymbol{a}_k = \sum\limits_{i=1}^{k-1} u_{ik}\boldsymbol{q}_i + \boldsymbol{q}_k$;

3. $(\boldsymbol{q}_k, \boldsymbol{q}_r) = q_k q_r \delta_{kr}$; **4.** $u_{kr} = 0$, **если** $k < r$**;**

5. Среди соотношений 1–4 нет правильных.

7. Какие утверждения и соотношения справедливы для равенства

$AX^m = \lambda_m X^m$, **где** $A = (a_{kr})$, $X = (x_k)^T$ $(k, r, m = \overline{1, n})$.

1. A **— всегда ортогональная матрица;**

2. Среди λ_m **имеется по меньшей мере пара комплексно сопряженных чисел, если** $A = A^T$**;**

3. Векторы X^m **линейно зависимы** $(m = \overline{1, n})$**;**

4. $\det(A - \lambda I_m) = 0$**;**

5. Среди утверждений 1–4 нет правильных.

8. Перечислите номера правильных утверждений.

1. Если все собственные значения произвольной матрицы действительны и различны, то ее собственные векторы всегда образуют ортонормированный базис;

2. Если матрица A **симметрична, то** $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$;

3. Если среди собственных значений действительной матрицы имеется комплексное число λ_k**, то среди них имеется и комплексно сопряженное число** $\overline{\lambda}_k$**.**

4. Матрица положительно определена, если для ее главных миноров справедливо условие $\operatorname{sign} M_k = (-1)^k$**;**

5. Среди утверждений 1–4 нет правильных.

9. Какие утверждения справедливы при отыскании собственных значений и векторов квадратной матрицы?

1. Собственные векторы всегда ортонормированы.

2. Для симметричной матрицы с действительными элементами собственные значения — действительные числа.

3. Матрица становится диагональной в базисе собственных векторов.

4. Симметричная матрица, выраженная через собственные значения, равна своей обратной матрице.

5. В пунктах 1–4 отсутствуют правильные утверждения.

10. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов, касающихся собственных значений и векторов матриц (левая колонка). В местах отсутствия соответствия поставьте цифру 5.

1.	**Характеристическое уравнение**	**1.** $\operatorname{diag}\,(\lambda_1\ \lambda_2\ \ldots\ \lambda_n)$**;**
2.	**Условие существования собственных векторов**	**2.** $\lvert A - \lambda I\rvert = 0$**;**
3.	**Условие для собственных векторов симметричных матриц**	**3.** $AX = \lambda X$**;**
4.	**Матрица коэффициентов квадратичной формы**	**4.** $\left(X^i, X^j\right) = \lvert X^i\rvert^2 \delta_{ij}$.

ТЕМА 5.1
(§ 5.2 теории)

Преобразование базисов

Вопросы

1. **Какие векторы могут образовать базис в пространстве L_n?**
2. **Что представляет собой правый базис в пространстве L_3?**
3. **Какие признаки характеризуют правый базис? Каким образом можно превратить левый базис в правый.**
4. **При каких условиях можно осуществить взаимно однозначное преобразование одной совокупности векторов в другую?**

Задачи

1. Между двумя совокупностями векторов линейного пространства L_3 $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)^T$ (условно исходный базис) и $\tilde{\boldsymbol{E}}=(\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_2, \tilde{\boldsymbol{e}}_3)^T$ существует зависимость:

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \quad \tilde{\boldsymbol{e}}_2 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \tilde{\boldsymbol{e}}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3.$$

Требуется составить матрицу S^T преобразования $\tilde{\boldsymbol{E}}=S^T\boldsymbol{E}$ и установить, можно ли $\tilde{\boldsymbol{E}}$ считать совокупностью базисных векторов. Если да, то записать преобразование, обратное к заданному.

Р е ш е н и е. Запишем в матричном виде заданное преобразование векторов:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{e}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{e}}_2 \\ \tilde{\boldsymbol{e}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix}, \quad \Longrightarrow \quad S^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную по отношению к S^T матрицу, используя преобразования Гаусса-Жордана:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)_{-N1} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)_{+N2} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -N3/2 \\ :2 \end{array} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \begin{array}{c} -N2 \\ \\ \\ \end{array} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad (S^T)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $(S^T)^{-1}$ существует, то совокупность трех векторов $\tilde{\boldsymbol{E}}$ образует базис в том же линейном пространстве L_3, что и векторы $\boldsymbol{E}$.

Найдем обратное преобразование $\boldsymbol{E} = (S^T)^{-1}\tilde{\boldsymbol{E}}$:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{e}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{e}}_2 \\ \tilde{\boldsymbol{e}}_3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= \frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{e}}_1 - \tilde{\boldsymbol{e}}_2 + \tilde{\boldsymbol{e}}_3), \\ \boldsymbol{e}_2 &= \frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{e}}_1 + \tilde{\boldsymbol{e}}_2 - \tilde{\boldsymbol{e}}_3), \\ \boldsymbol{e}_1 &= \frac{1}{2}(-\tilde{\boldsymbol{e}}_1 + \tilde{\boldsymbol{e}}_2 + \tilde{\boldsymbol{e}}_3). \end{aligned} \right.$$

Для проверки правильности полученных результатов достаточно подставить в них заданные соотношения между векторами $\tilde{\boldsymbol{E}}$ и $\boldsymbol{E}$. В результате придем к исходному базису. Проверка соответствует матричной записи:

$$\boldsymbol{E} = (S^T)^{-1}\tilde{\boldsymbol{E}} = (S^T)^{-1}S^T\boldsymbol{E} = I\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}.$$

2. В базисе $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1\ \ \boldsymbol{e}_2\ \ \boldsymbol{e}_3)^T$ задан вектор $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$. Представить $\boldsymbol{x}$ в базисе $\tilde{\boldsymbol{E}} = (\tilde{\boldsymbol{e}}_1\ \tilde{\boldsymbol{e}}_2\ \tilde{\boldsymbol{e}}_3)^T$, если зависимость $\tilde{\boldsymbol{E}} = S^T\boldsymbol{E}$ задана в условии задачи 1.

Р е ш е н и е. Запишем заданное разложение вектора $\boldsymbol{x}$ в матричной форме

$$\boldsymbol{x} = X^T\boldsymbol{E} = (-1\ \ 2\ \ 1) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу преобразования базисов и результат, полученный в задаче 1, перейдем к базису $\tilde{\boldsymbol{E}}$:

$$\boldsymbol{x} = X^T(S^T)^{-1}\tilde{\boldsymbol{E}} = (-1\ 2\ 1)\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (0\ 2\ \ -1)\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = 2\tilde{\boldsymbol{e}}_2 - \tilde{\boldsymbol{e}}_3.$$

3. Вектор $\boldsymbol{E}$ задан своими координатами $E_1 = (1,\ 2)^T$, $E_2 = (2,\ 3)^T$ в базисе $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_1\ \boldsymbol{i}_2)^T$. Доказать, что $\boldsymbol{E}$ представляет базис в L_2. Вектор $\boldsymbol{x}$, заданный в базисе $\boldsymbol{I}$ матрицей $X = (-1,\ 4)$, записать в базисе $\boldsymbol{E}$.

Р е ш е н и е. По условию

$$\boldsymbol{E} = (E_1\ E_2)\begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \boldsymbol{i}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \boldsymbol{i}_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь $(E_1\ E_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = S^T$ – матрица преобразования базисов $\boldsymbol{I}$ в $\boldsymbol{E}$.

Так как $\det S^T = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 2\cdot 2 = -1 \neq 0$, то существует обратное к S^T преобразование с матрицей

$$(S^T)^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Представим вектор $\boldsymbol{x}$ в новом базисе:

$$\boldsymbol{x} = X^T\boldsymbol{I} = X^T(S^T)^{-1}\boldsymbol{E} = (-1\ \ 4)\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (11\ \ \ -6)\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} = 11\boldsymbol{e}_1 - 6\boldsymbol{e}_2.$$

4. Векторы правого ортонормированного базиса $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_1\ \boldsymbol{i}_2\ \boldsymbol{i}_3)^T$ связаны с совокупностью векторов $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3)^T$ зависимостями

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i}_2, \quad \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{i}_1, \quad \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{i}_1 + 2\boldsymbol{i}_3.$$

Требуется:

а) установить, будет ли совокупность векторов $\boldsymbol{E}$ базисом в пространстве L_3; определить его ориентацию;

б) записать вектор $x = 2i_1 - i_2 + i_3$ в базисе E.

Р е ш е н и е. Запишем заданное преобразование векторов в матричной форме $E = S^T I$:

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \boldsymbol{i}_2 \\ \boldsymbol{i}_3 \end{pmatrix}.$$

Методом элементарных преобразований найдем ранг матрицы S:

$$S^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{+N2}. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{rang } S^T = 3.$$

Поэтому векторы E образуют базис в линейном пространстве L_3.

Для проверки того, будет ли базис E правым, найдем смешанное произведение его векторов:

$$\boldsymbol{e_1 e_2 e_3} = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = +2.$$

Положительное значение смешанного произведения указывает на то, что базис E правый.

Найдем матрицу, обратную по ношению к S^T:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -N2 \\ \\ +N2 \end{array} \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +N1 \\ \\ \end{array} \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -N2 \\ \\ :2 \end{array} \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right).$$

Таким образом получена обратная матрица

$$(S^T)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Существование обратной матрицы $(S^T)^{-1}$ указывает на то, что S^T невырожденная матрица и векторы $\boldsymbol{E}$ образуют базис в пространстве L_3.

Получим разложение вектора

$$\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{i}_1 - \boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_3 = (2 \ \ -1 \ \ 1) \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \boldsymbol{i}_2 \\ \boldsymbol{i}_3 \end{pmatrix} = X^T \boldsymbol{I}$$

в этом базисе:

$$\boldsymbol{x} = X^T \boldsymbol{I} = X^T (S^T)^{-1} \boldsymbol{E} = (2 \ \ -1 \ \ 1) \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}(-2 \ \ -3 \ \ 1) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{e}_1 - \frac{3}{2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_3.$$

5. Преобразование базисов $\boldsymbol{I}$ в $\boldsymbol{E}$ линейного пространства L_2 осуществляется матрицей

$$S^T_{EI} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

В свою очередь базис $\boldsymbol{E}$ преобразуется в базис $\tilde{\boldsymbol{E}}$ матрицей

$$S^T_{\tilde{E}E} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $S^T_{\tilde{E}I}$ преобразования базисов $\boldsymbol{I}$ в $\tilde{\boldsymbol{E}}$.
Р е ш е н и е. Так как

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = S^T_{\tilde{E}E}\boldsymbol{E} = S^T_{\tilde{E}E} S^T_{EI} \boldsymbol{I} = S^T_{\tilde{E}I} \boldsymbol{I},$$

то

$$S^T_{\tilde{E}I} = S^T_{\tilde{E}E} S^T_{EI} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. Задана совокупность многочленов $T = (1 \ t \ t^2)^T$. Показать, что она может служить базисом в линейном пространстве L_3. Представить совокупность многочленов

$$P = (p_1 \ p_2 \ p_3)^T = (1 - 2t, \quad t - t^2, \quad t^2)^T$$

в базисе T.

Проверить, будет ли P базисом в L_3. Если да, то представить многочлен $Q_3 = 1 + 2t - 3t^2$ в базисе P.

Р е ш е н и е. Совокупность T может быть представлена в виде канонического разложения. Действительно,

$$T = (T_1\ T_2\ T_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix}.$$

Ранг записанной таким образом матрицы равен трем — векторы-столбцы (и векторы-строки) линейно независимы.

Составим преобразование $P = S^T T$ и найдем S^T:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad S^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица преобразования S^T невырожденная. Это треугольная матрица, определитель которой равен произведению элементов главной диагонали: det $S^T = 1 \neq 0$.

Найдем обратную к S^T матрицу методом Гаусса-Жордана:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) {+N3} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{+2N2} \quad \Longrightarrow \quad (S^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратимся к многочлену Q_3:

$$Q_3 = Q^T T = Q^T (S^T)^{-1} P = (1 \quad 2 \quad -3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (1 \quad 4 \quad 1) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = p_1 + 4p_2 + p_3.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Заданы соотношения:

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \quad \tilde{\boldsymbol{e}}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \quad \tilde{\boldsymbol{e}}_3 = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3,$$

При условии, что векторы $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3)$ образуют базис в L_3, доказать, что $\tilde{\boldsymbol{E}} = (\tilde{\boldsymbol{e}}_1\ \tilde{\boldsymbol{e}}_2\ \tilde{\boldsymbol{e}}_3)$ также образуют базис в L_3. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$ в этом базисе.

2. В линейном пространстве L_4 задан ортонормированный базис $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_1\ \boldsymbol{i}_2\ \boldsymbol{i}_3\ \boldsymbol{i}_4)^T$. Векторы $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_4)^T$ связаны с $\boldsymbol{I}$ зависимостями

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = 2\boldsymbol{i}_1 - \boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_3 + 2\boldsymbol{i}_4, \\ \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{i}_1 + 3\boldsymbol{i}_2 - 2\boldsymbol{i}_3 + \boldsymbol{i}_4, \\ \boldsymbol{e}_3 = 2\boldsymbol{i}_1 - 3\boldsymbol{i}_2 + 2\boldsymbol{i}_3, \\ \boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{i}_1 - 2\boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_3 - \boldsymbol{i}_4. \end{cases}$$

Установить, будут ли векторы $\boldsymbol{E}$ образовывать базис в рассматриваемом пространстве.

3. В линейном пространстве L_3 с ортонормированным базисом $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_1\ \boldsymbol{i}_2\ \boldsymbol{i}_3)^T$ заданы две матрицы S_{1I}^T и S_{2I}^T преобразования базиса $\boldsymbol{I}$ в базисы $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$: $\boldsymbol{E}_1 = S_{1I}^T\boldsymbol{I}$ и $\boldsymbol{E}_2 = S_{2I}^T\boldsymbol{I}$. Найти матрицу S_{12}^T, обеспечивающую преобразование $\boldsymbol{E}_1 = S_{12}^T\boldsymbol{E}_2$, если

$$S_{1I}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad S_{2I}^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Доказать, что система многочленов $T = (1 + t^2,\ 2t - t^2,\ 1 + t)^T$ образует базис в пространстве L_3. Представить в этом базисе многочлен $1 - 2t + t^2$.

5. Вектор $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ с помощью матрицы S преобразования базисных векторов приводится к виду $\tilde{X} = (0,\ x_2 - x_3,\ 2x_2)^T$. Записать выражение для матрицы S. Возможно ли обратное преобразование?

6. В линейном пространстве L_3 заданы три базиса: $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3)^T$, $\boldsymbol{E}' = (\boldsymbol{e}_1'\ \boldsymbol{e}_2'\ \boldsymbol{e}_3')^T$, $\boldsymbol{E}'' = (\boldsymbol{e}_1''\ \boldsymbol{e}_2''\ \boldsymbol{e}_3'')^T$, которые связаны соотношениями

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1' = 8\boldsymbol{e}_1 - 6\boldsymbol{e}_2 + 7\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}_2' = 16\boldsymbol{e}_1 + 7\boldsymbol{e}_2 - 13\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}_3' = 9\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 + 7\boldsymbol{e}_3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \boldsymbol{e}_1'' = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}_2'' = 3\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}_3'' = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3. \end{cases}$$

Найти матрицу A оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{E}''$, если его матрица в базисе $\boldsymbol{E}'$ имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

7. Векторы старого $\boldsymbol{I}$ и нового $\tilde{\boldsymbol{I}}$ базисов связаны соотношениями:

$$\tilde{\boldsymbol{i}}_1 = \frac{1}{3}(2\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_2 + 2\boldsymbol{i}_3), \quad \tilde{\boldsymbol{i}}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{i}_1 - \boldsymbol{i}_3), \quad \tilde{\boldsymbol{i}}_3 = \frac{\sqrt{2}}{6}(-\boldsymbol{i}_1 + 4\boldsymbol{i}_2 - \boldsymbol{i}_3).$$

Считая базис $\boldsymbol{I}$ правым ортонормированным, показать, что базис $\tilde{\boldsymbol{I}}$ также ортонормированный. Определить ориентацию базиса $\tilde{\boldsymbol{I}}$. Найти матрицу преобразования базисов. Показать, что она ортогональна. Выразить векторы старого базиса через векторы нового.

8. В ортонормированном базисе задан вектор $\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i}_1 + 3\boldsymbol{i}_2 + 5\boldsymbol{i}_3$. Представить этот вектор в базисе, повернутом относительно $\boldsymbol{i}_3$ на угол $\pi/4$.

Т Е М А 5.2
(§ 5.1, 5.3–5.6 теории)

Разложение матриц

Вопросы

1. **Дайте характеристики матриц, входящих в LU-представление матрицы A.**
2. **Какой смысл LU представления матриц при решении систем уравнений?**
3. **Получите формулы, определяющие преобразования векторов и матриц при известном преобразовании матриц.**
4. **Что представляет собой ортогональная матрица? В чем состоит особенность использования ортогональных матриц в задачах преобразования векторов?**
5. **Поясните, в чем заключается метод Шмидта ортогонализации столбцов матриц. Метод элементарных преобразований?**

6. Какими способами можно осуществить ортогонализацию строк матриц?

7. Перечислите основные характерные свойства матриц с ортогональными строками (столбцами).

Задачи

1. Матрицу $A = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ представить в виде суммы симметричной и обратносимметричной матриц.

Р е ш е н и е.

$$S = \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\Omega = \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Задана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Требуется:

1) разложить матрицу на сумму симметричной S и обратносимметричной Ω матриц;

Представить симметричную матрицу S в виде произведений:

2) слева матрицы с ортогональными столбцами на верхнюю треугольную матрицу с единичной главной диагональю.

3) справа матрицы с ортогональными строками на нижнюю треугольную матрицу с единичной главной диагональю.

Ортогонализацию строк и столбцов матрицы произвести двумя способами: методом Шмидта и с помощью элементарных преобразований.

4). Выделить из матриц, полученных в пунктах 2 и 3 ортогональные матрицы.

Р е ш е н и е.

1) Выделим из матрицы A симметричную и обратносимметричную матрицы:

$$S = \frac{1}{2}[A + A^T] = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\Omega = \frac{1}{2}[A - A^T] = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Осуществим ортогонализацию столбцов и строк симметричной матрицы S методом Шмидта. Согласно этому методу матрицу

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2),$$

где $\boldsymbol{s}_1 = (1,2)^T$, $\boldsymbol{s}_2 = (2,3)^T$, следует представить в виде произведения $S = QU$, где

$$Q = (\boldsymbol{q}_1 \quad \boldsymbol{q}_2) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}; \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2) = 0.$$

Примем, согласно методу Шмидта, $\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Обращаясь к формуле (5.36), найдем

$$u_{12} = \frac{(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{s}_2)}{q_1^2} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3}{1^2 + 2^2} = \frac{8}{5}.$$

Это единственный требующий определения элемент треугольной матрицы. Поэтому

$$U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее определяем

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -8/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$Q = SU^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -8/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/5 \\ 2 & -1/5 \end{pmatrix}.$$

Осуществим процесс ортогонализации столбцов путем элементарных преобразований, а именно, используем возможность прибавления к одному столбцу элементов другого столбца, умноженных на произвольный множитель (в данном случае λ_{12}):

$$\lambda_{12} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{2} s_{i2}^0 s_{i1}^0}{\sum\limits_{i=1}^{2} (s_{i1}^0)^2} = \frac{s_{12}s_{11} + s_{22}s_{21}}{s_{11}^2 + s_{21}^2} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2}{1 + 2^2} = \frac{8}{5}.$$

Верхний индекс «0» у элементов s_{ij}^0 матриц указывает на то, что рассматривается решение на исходном, «нулевом» шаге (в данной задаче единственном в преобразовании матрицы).

Осуществим описанные преобразования со вторым столбцом матрицы S. В результате получим матрицу с ортогональными столбцами:

$$Q = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} - \lambda_{12}s_{11} \\ s_{21} & s_{22} - \lambda_{12}s_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 - 8/5 \cdot 1 \\ 2 & 3 - 8/5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/5 \\ 2 & -1/5 \end{pmatrix}.$$

Матрица совпадает с такой же матрицей, полученной в результате ортогонализации столбцов методом Шмидта.

3) Осуществим ортогонализацию строк матрицы S методом Шмидта. Для этого представим матрицу в виде совокупности векторов-строк $S = (\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2)^T$, где $\boldsymbol{s}_1 = (1, 2)$, $\boldsymbol{s}_2 = (2, 3)$.

Примем, согласно методу Шмидта $\boldsymbol{s}_1 = \boldsymbol{p}_1 = (s_{11}, s_{12}) = (1, 2)$, $\boldsymbol{s}_2 = l_{21}\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$.

Для определения l_{21} умножим последний вектор скалярно на $\boldsymbol{p}_1$ и учтем условие ортогональности векторов $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$:

$$(\boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{p}_1) = l_{21}\boldsymbol{p}_1^2 + (\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1) = l_{21}p_1^2.$$

Отсюда найдем

$$l_{21} = \frac{(\boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{p}_1)}{p_1^2} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2}{1^2 + 2^2} = \frac{8}{5}.$$

Составим левую (нижнюю) треугольную матрицу L с единичной главной диагональю и найдем обратную по отношению к ней матрицу L^{-1}:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8/5 & 1 \end{pmatrix}; \qquad L^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8/5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Искомая матрица с ортогональными строками

$$P = L^{-1}S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8/5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}.$$

Осуществим ортогонализацию строк матрицы путем добавления к элементам второй строки соответствующих элементов первой строки, умноженных на

$$\nu_{21} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{2} s_{2j}^0 s_{1j}^0}{\sum\limits_{j=1}^{2} (s_{1j}^0)^2} = \frac{s_{21}s_{11} + s_{22}s_{12}}{s_{11}^2 + s_{12}^2} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2}{1 + 2^2} = \frac{8}{5}.$$

В результате получим матрицу с ортогональными строками:

$$P = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} - \nu_{21}s_{11} & s_{22} - \nu_{21}s_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 - 8/5 \cdot 1 & 3 - 8/5 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}.$$

Матрица совпадает с такой же матрицей, полученной в результате ортогонализации строк методом Шмидта.

4) Полученные в пунктах 2 и 3 матрицы с ортогональными строками и столбцами оказываются, как в том нетрудно убедиться, ортогональными одновременно и по строкам и по столбцам. Отметим, что это не закономерность.

Следующий шаг в решении задачи — выделение диагональных и ортогональных матриц.

Начнем с матрицы с ортогональными столбцами.

Следуя формуле (5.43)

$$D_Q^2 = Q^T Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2/5 \\ 2 & -1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$D_Q = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Аналогичные вычисления с левой ортогональной матрицей приводят к тому же результату, т.е.

$$D_P^2 = PP^T = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix} = D_Q^2.$$

Ортогональные матрицы

$$\Im_P = D_P^{-1} P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = Q D_Q^{-1} = \Im_Q.$$

Матрицы $\Im_Q$ и $\Im_P$ ортогональны, так как $\Im_Q^T \Im_Q = \Im_P^T \Im_P = I$.

3. Убедиться в том, что матрица $S = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ ортогональная.

Р е ш е н и е. Для ортогональных матриц справедливо соотношение $S^T = S^{-1}$. Поэтому для установления принадлежности матрицы к ортогональным следует найти транспонированную матрицу S^T и убедиться в том, что $SS^T = I$.

Последовательно найдем: $S^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$,

$$S^T S = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Результат указывает на то, что S — ортогональная матрица.

Задачи для самостоятельного решения

1. В линейном пространстве L_3 заданы три базиса: $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3)^T$, $\boldsymbol{E}' = (\boldsymbol{e}_1'\ \boldsymbol{e}_2'\ \boldsymbol{e}_3')^T$, $\boldsymbol{E}'' = (\boldsymbol{e}_1''\ \boldsymbol{e}_2''\ \boldsymbol{e}_3'')^T$, которые связаны соотношениями

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1' = 8\boldsymbol{e}_1 - 6\boldsymbol{e}_2 + 7\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}_2' = 16\boldsymbol{e}_1 + 7\boldsymbol{e}_2 - 13\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}_3' = 9\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 + 7\boldsymbol{e}_3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \boldsymbol{e}_1'' = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}_2'' = 3\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}_3'' = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3. \end{cases}$$

Найти матрицу A оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{E}''$, если его матрица в базисе $\boldsymbol{E}'$ имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

2. Матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ представить в виде произведений LP и QU, где L и U — нижняя и верхняя треугольные матрицы; P и Q — матрицы с ортогональными строками и столбцами. Найти диагональные матрицы d_P и d_Q а также ортогональные матрицы $\Im_P$ и $\Im_Q$.

3. Матрицу $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ представить в виде суммы симметричной и обратносимметричной матриц.

ТЕМА 5.3
(§ 5.8–5.14 теории)
Собственные значения и векторы матриц

Вопросы

1. **Как можно найти главные инварианты матриц?**
2. **Что такое собственные значения матрицы? собственные векторы?**
3. **Запишите систему уравнений для определения собственных значений и собственных векторов матрицы.**
4. **Перечислите основные свойства собственных векторов и собственных значений произвольных квадратных матриц. Симметричных матриц.**
5. **Какие матрицы называют подобными? Перечислите основные свойства подобных матриц.**
6. **Что такое билинейная форма матриц? Квадратичная форма? Как выглядят эти формы для симметричных матриц?**
7. **Как представить квадратичную форму в виде матричного произведения?**

Задачи

1. Найти собственные значения и собственные векторы оператора проектирования $\boldsymbol{P}_{12}$ произвольного вектора пространства L_3

$$\boldsymbol{x} = X^T \boldsymbol{I} = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \boldsymbol{i}_2 \\ \boldsymbol{i}_3 \end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{i}_1 + x_2\boldsymbol{i}_2 + x_3\boldsymbol{i}_3$$

на плоскость базисных векторов $(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2)$.

Р е ш е н и е. По условию результатом действия оператора $\boldsymbol{P}$ на любой вектор является вектор, лежащий в плоскости $(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2)$. Составляющая вектора на направление вектора $\boldsymbol{i}_3$ равна нулю.

Матрица P оператора $\boldsymbol{P}_{12}$ в ортонормированном базисе $\boldsymbol{I}$ имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\det\,(P-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(1-\lambda)^2=0.$$

Собственные значения матрицы P**:** $\lambda_1=\lambda_2=1$ **(два одинаковых корня) и** $\lambda_3=0$.

Для определения собственных векторов имеем систему однородных уравнений

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=0,\\ 0\cdot x_1+(1-\lambda)x_2+0\cdot x_3=0,\\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+(0-\lambda)x_3=0;\end{cases}\qquad \text{или}\qquad \begin{cases}(1-\lambda)x_1=0,\\ (1-\lambda)x_2=0,\\ -\lambda x_3=0.\end{cases}$$

Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1=\lambda_2=1$. **Для этого собственного значения первые два уравнения последней системы обращаются в тождества при любых** x_1^1 (x_1^2) **и** x_2^1 (x_2^2)**. Из третьего уравнения получим** $x_3^1=x_3^2=0$.

Зададимся частными значениями переменных $x_1^1=k_1^1$**,** $x_2^1=k_2^1$ **и** $x_1^2=k_1^2$**,** $x_2^2=k_2^2$**. Собственные векторы, соответствующий первым двум (равным) собственным значениям матрицы:**

$$\boldsymbol{x}^1=k_1^1\boldsymbol{i}_1+k_2^1\boldsymbol{i}_2,\qquad \boldsymbol{x}^2=k_1^2\boldsymbol{i}_1+k_2^2\boldsymbol{i}_2\quad -$$

произвольные векторы, лежащие в плоскости базисных векторов. Матрицы-столбцы этих векторов состоят из совокупностей координат: $X^1=(k_1^1,k_2^1,0)^T$ **и** $X^2=(k_1^2,k_2^2,0)^T$**.**

При имеющейся произвольности в выборе двух собственных векторов удобно выбирать их взаимно ортогональными и единичными. В этом случае на выбор координат двух собственных векторов накладываются ограничения:

$$k_1^1k_1^2+k_2^1k_2^2=0,\quad (k_1^1)^2+(k_2^1)^2=1,\quad (k_1^2)^2+(k_2^2)^2=1,$$

уменьшающие до единицы «степени свободы» в произволе выбора координат k_i^j **собственных векторов** X^1 **и** X^2**. То есть, для однозначного определения** k_i^j **достаточно задать значение одного из них.**

Один из вариантов задания этих векторов: $X^1=(1,0,0)$**,** $X^2=(0,1,0)$**.**

Для $\lambda_3=0$ **из системы уравнений получим** $x_1^3=x_2^3=0$**,** $x_3^3=k_3$ **— произвольное число. Поэтому**

$$\boldsymbol{x}^3=k_3\boldsymbol{i}_3\qquad \text{или}\qquad X^3=(0,0,k_3)^T.$$

В частном случае $X^3 = (0,0,1)$. Вместе с $X^1 = (1,0,0)$ и $X^2 = (0,1,0)$ в этом случае собственные векторы образуют ортонормированный базис.

Проверим ориентацию полученного базиса нормированных векторов. Для этого найдем их смешанное произведение:

$$X^1X^2X^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Положительное значение смешанного произведения указывает на то, что полученный базис собственных векторов матрицы P правый.

2. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Составим характеристическое уравнение и найдем его решение.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 6 \\ 7 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 36 = 0.$$

Уравнение имеет два корня: $\lambda_1 = -4$ и $\lambda_2 = 9$.

Будем считать, что А является матрицей оператора, преобразующего вектор $\boldsymbol{x}$ в параллельный ему вектор $\lambda\boldsymbol{x}$. При этом считаем, что операция преобразования осуществляется в ортонормированном базисе $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_1\ \boldsymbol{i}_2)^T$. В этом случае искомый вектор

$$\boldsymbol{x} = X^T\boldsymbol{I} = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \boldsymbol{i}_2 \end{pmatrix}.$$

Матрицы-столбцы собственных векторов найдем из системы линейно зависимых однородных уравнений:

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 6x_2 = 0, \\ 7x_1 + (3-\lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

Для вектора, соответствующего собственному значению $\lambda_1 = -4$:

$$\begin{cases} (2+4)x_1^1 + 6x_2^1 = 0, \\ 7x_1^1 + (3+4)x_2^1 = 0. \end{cases}$$

Из двух уравнений только одно линейно независимое. Его решение

$$x_1^1 = -x_2^1.$$

С точностью до множителя k_1 матрицу первого собственного вектора можно представить в виде

$$X^1 = k_1(1,\ -1)^T.$$

Для $\lambda_2 = 9$:

$$\begin{cases} (2-9)x_1^2 + 6x_2^2 = 0, \\ 7x_1^2 + (3-9)x_2^2 = 0. \end{cases}$$

В системе уравнений одно независимое. Его решение приводит к матрице второго вектора:

$$X^2 = k_2(6,\ 7)^T.$$

Направление первого вектора совпадает с биссектрисой второго координатного угла (между положительным направлением одного из базисных векторов и отрицательным направлением второго). Второй собственный вектор располагается между положительными (отрицательными) направлениями базисных векторов и имеет проекции на их направления $6k_2$ на $\boldsymbol{i}_1$ и $7k_2$ на $\boldsymbol{i}_2$.

Собственные векторы матрицы A не ортогональны. Этого следовало ожидать: матрица A — несимметричная.

3. Задана матрица оператора

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти ее собственные значения и собственные векторы.
Р е ш е н и е. Составим характеристическое уравнение и найдем его решение.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0.$$

Слева в уравнении стоит отрицательное значение куба суммы λ и 1. То есть, характеристическое уравнение приводится к виду

$$(\lambda + 1)^3 = 0$$

и имеет три одинаковых корня, соответствующих единственному собственному значению $\lambda = -1$.

Координаты единственного собственного вектора матрицы A найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} (2+1)x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 + (-3+1)x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + (-2+1)x_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем решение системы уравнений методом Гаусса-Жордана (последнее уравнение умножим на -1).

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3N3 \\ -5N3 \\ \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Отсюда получаем решение $x_1 = x_2 = -x_3 = k$ (k произвольное число). Этому решению соответствует собственный вектор:

$$X = k(1,\ 1,\ -1)^T.$$

Поделив X на его модуль $|X| = k\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}k$ получим один из трех нормированных собственных векторов:

$$\overline{X}^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1).$$

Два других собственных вектора получим, выбирая в качестве k переменные $-x_1$ и $-x_2$:

$$\overline{X}^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1), \qquad \overline{X}^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1).$$

Векторы $\overline{X}^1$, $\overline{X}^2$ и $\overline{X}^3$ нормированные, но они не ортогональные (исходная матрица несимметричная). Найдем смешанное произведение полученных собственных векторов:

$$\overline{X}^1\overline{X}^2\overline{X}^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = +\frac{4}{3\sqrt{3}} > 0.$$

Положительное значение смешанного произведения указывает на то, что собственные векторы матрицы A образуют правый базис.

4. В правом ортонормированном базисе задана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Требуется.

1. **Составить характеристическое уравнение. Найти собственные значения матрицы. Определить главные инварианты, выразив их через главные значения матрицы и через заданные значения элементов матрицы.**
2. **Определить собственные векторы матрицы. Нормализовать эти векторы. обеспечить их правую ориентацию. Проверить, будут ли эти векторы попарно ортогональными.**
3. **Составить матрицу S преобразования исходного ортонормированного базиса в базис собственных векторов матрицы. Убедиться в том, что эта матрица ортогональная.**
4. **С помощью матрицы S преобразовать матрицу A в диагональную матрицу ее собственных значений.**

Р е ш е н и е.

1. Составим характеристическое уравнение для матрицы A и найдем его решение:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Для формирования характеристического полинома

$$\lambda^3 - \sigma_1\lambda^2 + \sigma_2\lambda - \sigma_3 = 0$$

найдем главные инварианты σ_k $(k = \overline{1,3})$ матрицы A:

$$\sigma_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 3 + 0 + 0 = 3,$$

$$\sigma_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 - 4 - 1 = -6,$$

$$\sigma_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -8.$$

Подставляя полученные значения в характеристическое уравнение, получим кубическое уравнение:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0.$$

Уравнение имеет три различные действительные корня:

$$\lambda_1 = -2, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 4.$$

В качестве проверки правильности определения главных значений матрицы найдем согласно теореме Вьета главные инварианты матрицы A:

$$\sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -2 + 1 + 4 = 3;$$

$$\sigma_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = -2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 4 \cdot (-2) = -6;$$

$$\sigma_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2 \cdot 1 \cdot 4 = -8.$$

Значения совпадают с найденными выше значениями главных инвариантов.

2. Для определения собственных векторов матрицы A составим систему однородных уравнений:

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - \lambda x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - \lambda x_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем решения этой линейно зависимой системы при различных собственных значениях.

<u>**Для** $\lambda = \lambda_1 = -2.$</u>

$$\begin{cases} (3+2)x_1^1 + x_2^1 + x_3^1 = 0, \\ x_1^1 + 2x_2^1 + 2x_3^1 = 0, \\ x_1^1 + 2x_2^1 + 2x_3^1 = 0. \end{cases}$$

Образуем матрицу коэффициентов при неизвестных и преобразуем ее методом Гаусса-Жордана:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \implies \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \implies$$

$$\boldsymbol{x}^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

<u>**Для** $\lambda = \lambda_2 = 1.$</u>

$$\begin{cases} (3-1)x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \\ x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 = 0, \\ x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 = 0. \end{cases}$$

Составим матрицу коэффициентов и преобразуем ее методом Гаусса-Жордана:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{x}^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

<u>**Для** $\lambda = \lambda_3 = 4.$</u>

$$\begin{cases} (3-4)x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0, \\ x_1^3 - 4x_2^3 + 2x_3^3 = 0, \\ x_1^3 + 2x_2^3 - 4x_3^3 = 0. \end{cases}$$

Составим матрицу коэффициентов и преобразуем ее методом Гаусса-Жордана:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{x}^3 = \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \\ x_3^3 \end{pmatrix} = k_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим, будут ли собственные векторы попарно ортогональными. Для этого найдем их скалярные произведения:

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2) = 0 + 1 - 1 = 0 \ (!), \\ &(\boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{x}^3) = -2 + 1 + 1 = 0 \ (!), \\ &(\boldsymbol{x}^3, \boldsymbol{x}^1) = 0 + 1 - 1 = 0 \ (!). \end{aligned}$$

Векторы попарно ортогональны. Нормируем их и запишем в виде разложения по векторам исходного базиса:

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{i}}_1 = \dfrac{\boldsymbol{x}^1}{x^1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i}_2 - \boldsymbol{i}_3), \\ \tilde{\boldsymbol{i}}_2 = \dfrac{\boldsymbol{x}^2}{x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_3), \\ \tilde{\boldsymbol{i}}_3 = \dfrac{\boldsymbol{x}^3}{x^3} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_3). \end{cases}$$

Проверим ориентацию векторов, определив их смешанное произведение:

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +1.$$

Векторы образуют правый базис.

3. Запишем матрицу преобразования $\tilde{\boldsymbol{I}} = S^T \boldsymbol{I}$ исходного базиса в ортонормированный базис собственных векторов матрицы A:

$$S^T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица S^T должна быть ортогональной, так как преобразует ортонормированный базис в ортонормированный. Проверим это:

$$S^T S = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = I \quad (!).$$

4. Используя матрицу S путем преобразования найдем диагональную матрицу собственных значений матрицы A:

$$\Lambda = S^T A S = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

На главной диагонали полученной матрицы стоят главные значения матрицы A.

5. В ортонормированном базисе $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2)^T$ задана квадратичная форма

$K = x_1^2 + 1{,}2x_1x_2 + x_2^2$.

Требуется:

а) привести K к виду $\tilde{K} = \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2$;

б) записать матрицу преобразования исходного базиса в базис переменных квадратичной формы $\tilde{K}$.

Р е ш е н и е. Заданную квадратичную форму представим в матричном виде:

$$K = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X^T Q X.$$

Здесь $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица квадратичной формы.

Составим характеристическое уравнение для определения собственных значений матрицы Q:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda^2 - 2\lambda + 0{,}64 = 0.$$

Решения характеристического уравнения: $\lambda_1 = 0{,}4$ **и** $\lambda_2 = 1{,}6$.

Найдем собственные векторы матрицы Q, соответствующие найденным собственным значениям.

Для $\lambda_1 = 0{,}4$**:**

$$\begin{cases} (1-0{,}4)x_1^1 + 0{,}6x_2^1 = 0 \\ 0{,}6x_1^1 + (1-0{,}4)x_2^1 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{X}^1 = k_1(1,-1)^T$$

Нормализованный вектор: $\tilde{E}_1 = \dfrac{\tilde{X}^1}{|\tilde{X}^1|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,-1)^T$.

Для $\lambda_2 = 1{,}6$**:**

$$\begin{cases} (1-1{,}6)x_1^2 + 0{,}6x_2^2 = 0 \\ 0{,}6x_1^2 + (1-1{,}6)x_2^2 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{X}^2 = k_2(1,1)^T$$

Нормализованный вектор: $\tilde{E}_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,1)^T$.

Матрицы-столбцы $\tilde{E}_1$ и $\tilde{E}_2$ связывают базис собственных векторов $\boldsymbol{E} = (\tilde{\boldsymbol{E}}_1, \tilde{\boldsymbol{E}}_2)^T$ с исходным базисом $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2)^T$ зависимостями

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_1 = \tilde{E}_1^T \boldsymbol{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \ \ -1)\begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \boldsymbol{i}_2 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_2 = \tilde{E}_2^T \boldsymbol{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \ \ 1)\begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \boldsymbol{i}_2 \end{pmatrix}.$$

Выписанные соотношения позволяют записать преобразование исходного базиса $\boldsymbol{I}$ в новый $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{E}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{E}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{E}_1^T \\ \tilde{E}_2^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \boldsymbol{i}_2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \boldsymbol{i}_2 \end{pmatrix} = S^T \boldsymbol{I}.$$

Получено преобразование, соответствующее (5.7). Отсюда получаем выражение для матрицы преобразования исходного базиса в базис нормированных ортогональных собственных векторов матрицы квадратичной формы

$$S^T = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица ортогональная, так как $S^T S = S^{-1} S = I$.

Преобразуем матрицу Q к базису ее собственных значений:

$$\tilde{Q} = S^{-1}QS = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 1 \end{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0 \\ 0 & 1{,}6 \end{pmatrix}.$$

Запишем квадратичную форму в базисе собственных векторов матрицы Q:

$$\tilde{K} = \tilde{X}^T\tilde{Q}\tilde{X} = (\tilde{x}_1 \quad \tilde{x}_2)\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0 \\ 0 & 1{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = 0{,}4\tilde{x}_1^2 + 1{,}6\tilde{x}_2^2.$$

Имея в виду зависимость (5.11) $\tilde{X} = S^{-1}X$, преобразуем квадратичную форму к исходному базису:

$$\tilde{K} = \tilde{X}^T\tilde{Q}\tilde{X} = X^TSS^{-1}QSS^{-1}X = X^TQX = K.$$

Таким образом, квадратичная форма инвариантна по отношению к выбору базиса.

Задачи для самостоятельного решения

В ортонормированном базисе заданы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}. \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Базис, в котором задана матрица B, правый.
Требуется.

1. **Составить характеристические уравнения.**
2. **Найти собственные значения матриц. Определить главные инварианты, выразив их через главные значения матриц и через заданные значения элементов матриц.**
3. **Определить собственные векторы матриц. Нормализовать эти векторы. Проверить, будут ли векторы попарно ортогональными. Обеспечить правую ориентацию базиса, построенного на собственных векторах матрицы B.**
4. **Составить матрицы S преобразования исходных ортонормированных базисов в базисы собственных векторов матриц. Убедиться в том, что эти матрицы ортогональные.**

5. С помощью матриц S преобразовать матрицы A и B в диагональные матрицы их собственных значений.

Квадратичную форму $31x_1^2 + 10x_1x_2 + 21x_2^2$, заданную в ортонормированном базисе:

6. Привести к виду $\lambda_1\tilde{x}_1^2 + \lambda_2\tilde{x}_2^2$;

7. Записать матрицу преобразования исходного базиса в базис собственных значений матрицы квадратичной формы.

Задание на расчетную работу. Часть 3: «Преобразование матриц»

Пояснения к выполнению и оформлению задания даны на странице 69.

Задана матрица в ортонормированном базисе

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 4 & k & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Требуется выполнить следующие действия.

1. Найти матрицу, обратную по отношению к A.

Представить A в следующих видах.

2. LU-разложения, где L — нижняя треугольная матрица с единичной главной диагональю; U — верхняя треугольная матрица.

3. LP-разложения, где P — матрица с ортогональными строками.

4. QU-разложения, где Q — матрица с ортогональными столбцами.

Задания пунктов 3 и 4 выполнить двумя способами: методом Шмидта и путем элементарных преобразований.

5. Убедиться в том, что векторы-строки (векторы-столбцы) в полученных матрицах ортогональны. Нормализовать эти векторы.

5. Получить ортогональные матрицы $\Im_P$ и $\Im_Q$ по найденным в пунктах 3 и 4 матрицам P и Q. Убедиться в том, что полученные матрицы ортогональные.

6. Представить матрицу A в виде суммы симметричной Q и обратносимметричной Ω матриц.

Для симметричной матрицы Q, полученной в пункте 6, найти

7 главные инварианты и собственные числа;

8 главные векторы и нормализовать их. Обеспечить правую ориентацию базисных векторов.

9. Считая исходный базис, в котором задана матрица Q, ортонормированным, найти матрицу S его преобразования в базис собственных векторов матрицы Q.

10. С помощью матрицы S привести матрицу Q к диагональному виду.

Осуществить все возможные проверки полученных результатов.

ТИПОВЫЕ БИЛЕТЫ
контрольных работ

Билет по теории
(на 15 минут)

1. Поставьте в соответствие номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка), касающихся комплексных чисел $z = x + iy$ и комплексных векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. В местах отсутствия правильных ответов поставьте 0.

1. Формула Эйлера	**1.** $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\overline{\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}})$,
2. Формула Муавра	**2.** $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$,
3. Эрмитова симметри́я	**3.** $z = re^{i\varphi}$,
4. Модуль z	**4.** $\sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Перечислите номера правильных утверждений, относящихся к разложению $A = LU$, где $A = (a_{kr})$, $U = (u_{kr})$, $L = (\mu_{kr})$ $(k, r = \overline{1, n})$.

1. $u_{kr} = 0$ **при** $k < r$**;**
2. $\mu_{kr} = 0$ **при** $k < r$;
3. U **— матрица с единичной главной диагональю;**
4. L **— диагональная матрица;**
5. Среди утверждений 1–4 нет правильных.

3. Заданы векторы двух базисов $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_k)^T$, $\tilde{\boldsymbol{I}} = (\tilde{\boldsymbol{i}}_r)^T$ и преобразование $S = (s_{kr})$, в котором $s_{kr} = (\boldsymbol{i}_k, \tilde{\boldsymbol{i}}_r)$. Перечислите номера правильных соотношений.

1. $\boldsymbol{i}_k = \cos(\boldsymbol{i}_k \hat{,} \tilde{\boldsymbol{i}}_r)\tilde{\boldsymbol{i}}_r$**;** **2.** $s_{kr} = \delta_{kr}$;

3. $s_{km}s_{mr} = \delta_{kr}$; **4.** $S^{-1} = S^T$;

5. Среди соотношений 1–4 нет правильных.

4. Какие утверждения и соотношения справедливы для равенства $AX^m = \lambda_m X^m$, где $A = (a_{kr})$, $X^m = (x_k^m)^T$ $(k, r, m = \overline{1, n})$.

1. Хотя бы одна из координат x_k^m векторов X^m может быть представлен в виде линейной комбинации координат x_k^m;

2. X_m, соответствующие различным значениям λ_m, линейно независимы;

3. Если матрицы имеют одинаковые собственные значения и собственные векторы, то они подобны;

4. Матрицы подобны, если они представлены в одном базисе;

5. Среди утверждений 1–4 нет правильных.

5. Перечислите номера правильных утверждений.

1. Если все собственные значения матрицы различны, то ее собственные векторы образуют ортогональный базис;

2. Если матрица A симметрична, то $(AX, Y) = (X, AY)$;

3. Если среди собственных значений симметричной действительной матрицы имеется комплексное число λ_k, то среди них имеется и комплексно сопряженное число $\overline{\lambda}_k$.

4. Матрица положительно определена, если для ее главных миноров справедливо условие sign $M_k = (-1)^k$;

5. Среди утверждений 1–4 нет правильных.

Билет по практике

(на 75 минут)

1. Найти все значения $\sqrt[3]{-1 - \sqrt{3}i}$.

Задана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Выделить из A симметричную матрицу Σ. Представить Σ в виде LU произведения (в других вариантах могут быть другие задания представления Σ: методом Шмидта или путем элементарных преобразований LU, QU).

3. Выделить из матрицы Σ ортогональную матрицу $\Im_Q$ $(\Im_P)$. Убедиться в том, что полученная матрица ортогональная.

4. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}.$$

5. В предположении, что матрица B пункта 4 задана в ортонормированном базисе, найти матрицу преобразования S исходного

базиса в базис собственных векторов B**. С помощью матрицы** S **преобразовать матрицу** B **в диагональную матрицу ее собственных значений.**

Глава 6

Алгебра тензоров

6.1. Диада векторов

Введем еще один вид произведения векторов — *неопределенное произведение*. **Используются другие названия:** *диадное или тензорное* **произведения.**

Пусть паре векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y} \in L_n$ ставится в соответствие некоторый объект, который обозначим $\boldsymbol{xy}$ (или $\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}$).

Определение. *Диадой* **векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ называется математический объект $\boldsymbol{xy}$, для которого выполняются следующие аксиомы.**

1. **Некоммутативность**
$$\boldsymbol{xy} \neq \boldsymbol{yx}.$$
2. **Дистрибутивность**
$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{xy} + \boldsymbol{xz}.$$
3. **Возможность вынесения скалярного множителя за знак произведения**
$$\lambda(\boldsymbol{xy}) = (\lambda\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}(\lambda\boldsymbol{y}).$$
4. **Существование нулевой диады, образованной совокупностью двух нулевых векторов $\boldsymbol{\theta\theta}$ такой, что**
$$\boldsymbol{xy} + \boldsymbol{\theta\theta} = \boldsymbol{xy}.$$
5. **Существование противоположной диады $-\boldsymbol{xy}$ такой, что**
$$\boldsymbol{xy} + (-\boldsymbol{xy}) = \boldsymbol{\theta\theta}.$$

Рассмотрим некоторые математические операции над диадами.

Прежде всего из сформулированных пяти свойств диад вытекает очевидность и справедливость линейных операций над ними. В частности, *сумма двух диад* (о правилах суммирования будет сказано ниже при рассмотрении линейных операций над тензорами) *коммутативна*

$$\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1;$$

ассоциативна

$$\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 + (\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2) = (\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2) + \boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2;$$

и дистрибутивна по отношению к произведению на число

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2) = \lambda\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + \lambda\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2.$$

Введем еще некоторые понятия и операции над диадами.

Диада $\boldsymbol{yx} = \boldsymbol{D}^T$ называется *транспонированной* по отношению к диаде $\boldsymbol{xy} = \boldsymbol{D}$.

Каждой диаде можно поставить в соответствие скаляр, равный скалярному произведению входящих в диаду векторов и называемый *следом* диады:

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{D} = d = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$$

и вектор

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}.$$

Введем понятие скалярного произведения диады на вектор. ***Скалярным произведением диады*** $\boldsymbol{xy}$ ***на вектор*** $\boldsymbol{u}$ ***справа*** называется вектор, сонаправленный $\boldsymbol{x}$ и равный произведению $\boldsymbol{x}$ на скалярное произведение $\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{u}$. То есть,

$$(\boldsymbol{xy})\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{u})$$

Аналогично

$$\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{xy}) = (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} \neq (\boldsymbol{xy})\cdot\boldsymbol{u}$$

Векторным произведением диады $\boldsymbol{xy}$ ***на вектор*** $\boldsymbol{u}$ ***справа*** называется диада, составленная из векторов $\boldsymbol{x}$ и $(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{u})$. То есть,

$$(\boldsymbol{xy})\times\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{u}).$$

Аналогично

$$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{xy}) = (\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}.$$

Скалярным произведением диад называется диада, определяемая соотношением

$$(\boldsymbol{xy})\cdot(\boldsymbol{uv}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{xv}$$

Ясно, что новая диада отличается от диады xv скалярным множителем $\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{u}$.

Диады могут быть образованы базисными векторами. Так, для ортонормированного базиса $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3)^T$, введенного в линейном пространстве L_3, можно образовать девять диад:

$$\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1,\ \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2,\ \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1,\ \ldots, \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3 \text{ или } \boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_r \qquad (k, n = \overline{1,3}).$$

Перейдем к пространству L_n. Разложим векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ по базису $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \ldots, \boldsymbol{i}_n)^T$:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{I}^T X = (\boldsymbol{i}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{i}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \ \ldots \ x_n) \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{i}_n \end{pmatrix} = X^T \boldsymbol{I};$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{I}^T Y = (\boldsymbol{i}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{i}_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (y_1 \ \ldots \ y_n) \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{i}_n \end{pmatrix} = Y^T \boldsymbol{I}.$$

Используя эти соотношения, запишем выражение для диады векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{xy} = \boldsymbol{I}^T X Y^T \boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{i}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (y_1 \ \ldots \ y_n) \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{i}_n \end{pmatrix} =$$

$$= (\boldsymbol{i}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{i}_n) \begin{pmatrix} x_1y_1 & \ldots & x_1y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_ny_1 & \ldots & x_ny_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{i}_n \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} \boldsymbol{i}_k x_k y_r \boldsymbol{i}_r = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} x_k y_r \boldsymbol{i}_k \boldsymbol{i}_r = x_k y_r \boldsymbol{i}_k \boldsymbol{i}_r. \quad (k, r = \overline{1,n}).$$

В последнем равенстве использовано *соглашение о суммировании Эйнштейна*. **Согласно этому соглашению (правилу) в одночлене с повторяющимся индексом ведется суммирование по этому индексу от 1 до n — до размерности пространства. Знак суммы Σ при этом не ставится. Индексы, по которым ведется суммирование, называются** *немыми*.

Последнее приведенное соотношение указывает на то, что диада векторов $\boldsymbol{xy}$ представляется в базисе $\boldsymbol{I}$ пространства L_n суммой n^2 слагаемых.

В отличие от немых, индексы, повторяющиеся в различных слагаемых многочленов, называются *свободными*. **Они пробегают значения от 1 до** n.

Например, выражение $y_k = A_{kr}x_r$ **в пространстве** L_2 **представляет собой совокупность двух соотношений:**

$$\begin{cases} y_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2, \\ y_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2. \end{cases}$$

6.2. Тензор второго ранга

Рассмотрим два вектора

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{I}^T X \qquad \text{и} \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{I}^T Y, \tag{6.1}$$

заданных в линейном пространстве L_n **их разложениями по ортонормированному базису** $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \ldots, \boldsymbol{i}_n)^T$**, в котором** $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$.

Пусть вектор $\boldsymbol{y}$ **является образом вектора** $\boldsymbol{x}$ **(**$\boldsymbol{x}$ **— прообраз** $\boldsymbol{y}$**), получаемым с помощью оператора** $\boldsymbol{T}$**:**

$$\boldsymbol{T}\colon\ \boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{y}$$

Определение 1. ***Оператор, с помощью которого отображается (преобразуется) один вектор (как инвариантная величина!) в другой вектор того же пространства, называется тензором второго ранга.***

Для тензора $\boldsymbol{T}$ **и векторов** $\boldsymbol{x}$ **и** $\boldsymbol{y}$ **такое преобразование записывается в виде**

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{x} \tag{6.2}$$

Между тензором $\boldsymbol{T}$ **и вектором** $\boldsymbol{x}$ **ставится знак скалярного произведения (!).**

Представим (6.2) в матрично-индексной форме:

$$\boldsymbol{I}^T Y = \boldsymbol{I}^T T \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{I}^T X, \quad \text{или} \quad (\boldsymbol{i}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{i}_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$= (\boldsymbol{i}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{i}_n) \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{i}_n \end{pmatrix} \cdot (\boldsymbol{i}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{i}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Скалярное произведение вектора-столбца базисных векторов на их вектор-строку (между ними стоит знак $\cdot$ скалярного произведения) дает единичную матрицу. Поэтому

$$(\boldsymbol{i}_1 \ \dots \ \boldsymbol{i}_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{i}_1 \ \dots \ \boldsymbol{i}_n)\begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Приравнивая множители при одинаковых базисных векторах, приходим к матричной форме соотношения (6.2):

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

или

$$y_k = t_{kr} x_r \quad (k, r = \overline{1, n}), \quad \text{или} \quad Y = TX. \tag{6.4}$$

В рассматриваемом ортонормированном базисе $\boldsymbol{I}$ пространства L_n тензор $\boldsymbol{T}$ представляется матрицей T размера $(n \times n)$, так что

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{I}^T T \boldsymbol{I}. \tag{6.5}$$

Введем в рассматриваемом пространстве L_n новый базис $\tilde{\boldsymbol{I}} = (\tilde{\boldsymbol{i}}_1, \tilde{\boldsymbol{i}}_2, \dots, \tilde{\boldsymbol{i}}_n)^T$. В этом базисе инвариантный математический объект, тензор $\boldsymbol{T}$, представится в виде

$$\boldsymbol{T} = \tilde{\boldsymbol{I}}^T \tilde{T} \tilde{\boldsymbol{I}}. \tag{6.6}$$

Зная вводимое по (5.7) правило преобразования базисных векторов

$$\tilde{\boldsymbol{I}} = S^T \boldsymbol{I}, \qquad \tilde{\boldsymbol{I}}^T = \boldsymbol{I} S, \tag{6.7}$$

перейдем в (6.5) к новому базису:

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{I}^T S \tilde{T} S^T \boldsymbol{I}.$$

Сравнивая это выражение с (6.5), запишем правило преобразования матрицы T тензора $\boldsymbol{T}$ при переходе от нового базиса к исходному:

$$T = S \tilde{T} S^T. \tag{6.8}$$

Если осуществляется ортогональное преобразование (ортонормированного базиса в ортонормированный), то $S^{-1} = S^T$ и последнее соотношение примет вид

$$T = S\tilde{T}S^{-1}. \tag{6.9}$$

Обратное по отношению к (6.9) преобразование:

$$\tilde{T} = S^{-1}TS. \tag{6.10}$$

Определение 2. *Тензором второго ранга* называется математический объект пространства L_n, соответствующий квадратной матрице порядка n, которая при преобразовании ортонормированных базисов подчиняется правилам преобразования (6.9) — (6.10).

Отметим две особенности, характерные для тензора $\boldsymbol{T}$. Во-первых, понятие тензор отождествляется с понятием оператора. Как всякий оператор, тензор преобразует векторы рассматриваемого пространства в векторы того же пространства. Во-вторых, тензор (как и оператор) в заданном базисе представляется матрицей, что дает возможность использовать при выполнении операций с тензорами аппарат матричного исчисления.

6.3. Диада как тензор второго ранга

Пусть заданы два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b} \in L_n$, образующие диаду $\boldsymbol{ab}$. Умножим эту диаду справа (можно слева) скалярно на некоторый вектор $\boldsymbol{x} \in L_n$. В результате получим новый вектор $\boldsymbol{y}$, который определится следующим образом:

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{ab}) \cdot \boldsymbol{x}.$$

Произведение диады $\boldsymbol{ab}$ скалярно справа на вектор $\boldsymbol{x}$ преобразует этот вектор в $\boldsymbol{y}$. Так как векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ принадлежат одному линейному пространству L_n и, следовательно, $\boldsymbol{ab}$ преобразует вектор $\boldsymbol{x} \in L_n$ в вектор $\boldsymbol{y} \in L_n$, то в описанном действии диада выполняет роль оператора линейного пространства L_n. Поэтому на основании определения, вытекающего из (6.2), диада $\boldsymbol{ab}$ является тензором второго ранга. Обозначим этот тензор $\boldsymbol{T}$:

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{ab} = a_k b_r \boldsymbol{i}_k \boldsymbol{i}_r = t_{kr} \boldsymbol{i}_k \boldsymbol{i}_r. \tag{6.11}$$

Преобразование компонентов тензора, порожденного диадой, вытекает из правила преобразования векторов. Действительно, в исходном базисе $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_1, \ldots, \boldsymbol{i}_n)^T$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{I}^T A, \ \boldsymbol{b} = B^T \boldsymbol{I} \quad \text{и}$$

$$\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{I}^T A B^T \boldsymbol{I}. \tag{6.12}$$

Аналогичные соотношения для нового базиса $\tilde{\boldsymbol{I}} = (\tilde{\boldsymbol{i}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{i}}_n)^T$ запишем в виде:

$$\boldsymbol{a} = \tilde{\boldsymbol{I}}^T \tilde{A}, \ \boldsymbol{b} = \tilde{B}^T \tilde{\boldsymbol{I}} \quad \text{и}$$

$$\boldsymbol{ab} = \tilde{\boldsymbol{I}}^T \tilde{A} \tilde{B}^T \tilde{\boldsymbol{I}}. \tag{6.13}$$

Пусть далее матрица S преобразует исходный базис $\boldsymbol{I}$ в новый $\tilde{\boldsymbol{I}}$ (5.7):

$$\tilde{\boldsymbol{I}} = S^T \boldsymbol{I} \quad \text{и} \quad \tilde{\boldsymbol{I}}^T = \boldsymbol{I}^T S. \tag{6.14}$$

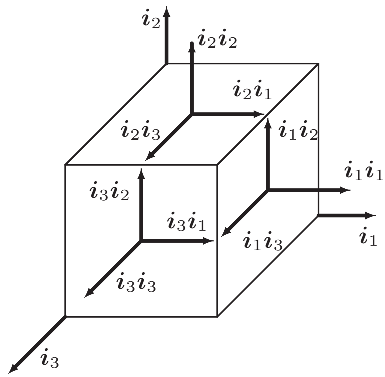


Рис. 6.1. Диады в L_3

Подставим (6.14) в (6.13)

$$\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{I}^T S (\tilde{A} \tilde{B}^T) S^T \boldsymbol{I}. \tag{6.15}$$

Приравнивая выражения, стоящие между $\boldsymbol{I}^T$ и $\boldsymbol{I}$ в формулах (6.12) и (6.15), получим правило преобразования компонентов (AB^T) диады

$$(AB^T) = S(\tilde{A}\tilde{B}^T)S^T \quad \text{или} \quad (\tilde{A}\tilde{B}^T) = S^T (AB^T) S,$$

что соответствует правилу преобразования матрицы тензора второго ранга (6.10) при преобразовании ортонормированных базисов.

Дадим геометрическую интерпретацию тензора второго ранга. Введем в L_3 ортонормированный базис $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3)^T$ и изобразим куб, образованный плоскостями, перпендикулярными базисным векторам (рис. 6.1).

На рисунке показаны 9 векторов, каждый из которых обозначен соответствующей ему диадой. Принято считать, что первый базисный вектор диады обозначает направление нормали к площадке, на которую воздействует векторная величина, направление которой определено вторым вектором диады.

6.4. Тензоры ранга n

В § 6.1 упоминалось о скалярном и векторном произведениях векторов и введено понятие таких произведений вектора на диаду. В частности, для векторов ортонормированного базиса $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_1, \ldots, \boldsymbol{i}_n)^T$ пространства L_n упомянутые произведения могут быть представлены в виде:

$$\boldsymbol{i}_k \cdot \boldsymbol{i}_r = \delta_{kr} - \text{скаляр}; \quad \boldsymbol{i}_k \times \boldsymbol{i}_r = e_{krm}\boldsymbol{i}_m - \text{вектор}; \quad \boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_r - \text{диада}.$$

Рассмотрим различные виды произведений диады на вектор:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_m \cdot \boldsymbol{i}_r = \delta_{mr}\boldsymbol{i}_k - \text{вектор};\\
&\boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_m \times \boldsymbol{i}_r = e_{mrp}\boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_p - \text{диада};\\
&\boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_m\boldsymbol{i}_r - \text{триада или тензор третьего ранга.}
\end{aligned}$$

Тонзорное произведение диады (тензора второго ранга) на вектор приводит к новому объекту — *триаде* или *тензору третьего ранга*. Триада трех произвольных (не базисных) векторов также приводит к тензору третьего ранга:

$$\boldsymbol{abc} = a_k b_m c_r \boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_m\boldsymbol{i}_r = A_{kmr}\boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_m\boldsymbol{i}_r = {}^{(3)}\boldsymbol{A}. \tag{6.16}$$

Заметим, что ранг тензора определяется количеством базисных векторов — в тензоре третьего ранга их три (триада). Тензор второго ранга содержал диаду двух базисных векторов.

Обобщая сказанное на n базисных векторов, образующих *полиаду n-го порядка*, запишем выражение для *тензора n-го ранга*:

$${}^{(n)}\boldsymbol{A} = a_{k_1 k_2 \ldots k_{n-1} k_n}\boldsymbol{i}_{k_1}\boldsymbol{i}_{k_2}\ldots\boldsymbol{i}_{k_{n-1}}\boldsymbol{i}_{k_n}.$$

После сделанного обобщения становится ясным, что вектор, характеризуемый только одним базисным вектором, является тензором первого ранга. Скаляр не содержит базисных векторов, он — тензор нулевого ранга.

По отношению к тензорам справедливы все действия, применимые к линейным операторам и, в том числе, к их матрицам. В частности, операция сложения может иметь место только по отношению к тензорам одинакового ранга.

Не представляет труда убедиться в том, что тензоры одинакового ранга образуют линейное пространство.

Для *транспонирования* тензора второго ранга (на знаке для тензора второго ранга не принято указывать его ранг) $\boldsymbol{A} = a_{kr}\boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_r$ достаточно поменять местами индексы только у его компонентов или только у базисных векторов:

$$\boldsymbol{A}^T = a_{rk}\boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_r = a_{kr}\boldsymbol{i}_r\boldsymbol{i}_k.$$

Что касается тензора ранга n, то для него существует операция транспонирования по какой-либо паре индексов.

Теперь естественным образом может быть введено понятие скалярного, векторного и неопределенного произведений тензоров. Оговорим лишь условие: в произведениях тензоров (скалярном, векторном или неопределенном) знак соответствующего произведения относится к «соприкасающимся» с этим знаком базисным векторам.

Рассмотрим в качестве примера скалярное произведение двух тензоров:

$$\begin{gathered}
{}^{(n)}\boldsymbol{A}\cdot{}^{(m)}\boldsymbol{B} = A_{k_1\ldots k_{n-1}k_n}\underbrace{\boldsymbol{i}_{k_1}\ldots\boldsymbol{i}_{k_{n-1}}\boldsymbol{i}_{k_n}}_{n}\cdot B_{r_1r_2\ldots r_m}\underbrace{\boldsymbol{i}_{r_1}\boldsymbol{i}_{r_2}\ldots\boldsymbol{i}_{r_m}}_{m} = \\
= A_{k_1\ldots k_{n-1}k_n}B_{r_1r_2\ldots r_m}\boldsymbol{i}_{k_1}\ldots\boldsymbol{i}_{k_{n-1}}\boldsymbol{i}_{k_n}\cdot\boldsymbol{i}_{r_1}\boldsymbol{i}_{r_2}\ldots\boldsymbol{i}_{r_m} = \\
= A_{k_1\ldots k_{n-1}k_n}B_{r_1r_2\ldots r_m}\boldsymbol{i}_{k_1}\ldots\boldsymbol{i}_{k_{n-1}}\delta_{k_n,r_1}\boldsymbol{i}_{r_2}\ldots\boldsymbol{i}_{r_m} = \\
= A_{k_1\ldots k_{n-1}k_n}B_{k_nr_2\ldots r_m}\underbrace{\boldsymbol{i}_{k_1}\ldots\boldsymbol{i}_{k_{n-1}}\boldsymbol{i}_{r_2}\ldots\boldsymbol{i}_{r_m}}_{n+m-2} = {}^{(n+m-2)}\boldsymbol{C}.
\end{gathered}$$

Постановка знака скалярного произведения между парой соприкасающихся базисных векторов называют *свертыванием* тензора по паре соответствующих индексов.

Свертка тензора второго ранга приводит к скаляру, называемому *следом тензора* или первым главным инвариантом тензора. Названия, как и следовало ожидать, повторяют названия, введенные ранее для квадратных матриц.

Скалярное произведение уменьшило суммарное количество базисных векторов $(n+m)$ перемножаемых тензоров на два. Количество свободных индексов в произведении компонентов тензоров стало равным $(n+m-2)$, так как два индекса, а именно (k_n) и (r_1), стали одинаковыми (немыми) и по ним ведется суммирование. Количество слагаемых в упомянутой сумме равно размерности пространства.

Аналогично можно показать, что векторное произведение двух тензоров равно новому тензору, ранг которого на единицу меньше суммарного ранга перемножаемых тензоров:

$${}^{(n+m-1)}\boldsymbol{C} = {}^{(n)}\boldsymbol{A}\times{}^{(m)}\boldsymbol{B}.$$

Неопределенное произведение двух тензоров приводит к тензору, ранг которого равен сумме рангов перемножаемых тензоров:

$${}^{(n+m)}\boldsymbol{C} = {}^{(n)}\boldsymbol{A}{}^{(m)}\boldsymbol{B}.$$

6.5. Матрицы тензоров

Рассмотрим соотношение между двумя скалярными величинами X и Y, отличающимися друг от друга числовым множителем A:

$$^{(0)}Y = {}^{(0)}A \ {}^{(0)}X.$$

С точки зрения рангов входящих в это соотношение величин (скаляр — тензор нулевого ранга) попробуем воспринять представленную зависимость как зависимость между двумя точками «нульмерного пространства рангов тензора».

Усложним зависимость, заменив скаляры на параллельные векторы:

$$^{(1)}\boldsymbol{Y} = {}^{(0)}A \ {}^{(1)}\boldsymbol{X}.$$

Разложим векторы по базису n-мерного пространства:

$$(y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)^T = {}^{(0)}A(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T.$$

С точки зрения рангов матриц (векторов-столбцов) пространство, в котором записано это соотношение, является одномерным.

Следующий шаг усложнения — зависимость между произвольными (в общем неколлинеарными) векторами:

$$^{(1)}\boldsymbol{Y} = {}^{(2)}\boldsymbol{A}\cdot{}^{(1)}\boldsymbol{X},$$

которое в матричной форме имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Последнее соотношение относится к двухмерному ранговому пространству. Пространству соответствует квадратный вид матрицы преобразования объекта $^{(1)}\boldsymbol{X}$ в объект $^{(1)}\boldsymbol{Y}$.

Рассмотрим следующее соотношение

$$^{(2)}\boldsymbol{Y} = {}^{(3)}\boldsymbol{A} \cdot {}^{(1)}\boldsymbol{X},$$

которое преобразует вектор $\boldsymbol{X}$ одномерного рангового пространства в тензор $\boldsymbol{Y}$ двухмерного рангового пространства с помощью оператора $\boldsymbol{A}$ трехмерного векторного пространства.

При некоторых мысленных усилиях можно представить себе трехмерную «кубическую» матрицу в трехмерном ранговом пространстве и даже ухитриться изобразить куб, разбитый на ячейки-кубики и содержащий n^3 элементов тензора третьего ранга.

Изобразить и даже мысленно представить матрицу четвертого ранга, входящую, например, в уравнение

$$ {}^{(2)}\boldsymbol{Y} = {}^{(4)}\boldsymbol{A} : {}^{(2)}\boldsymbol{X}, $$

невозможно в силу ограниченности нашего мышления, способного составлять образы только трехмерного мира.

В последней записи знак :, равносильный $\cdot\cdot$, обозначает двойное скалярное произведение: сначала перемножается пара соприкасающихся знаками произведения базисных векторов, затем следующая пара.

Отметим, что программное обеспечение современных компьютеров не рассчитано на представление n-мерных $n \geq 3$ матриц и на действия с ними. Тем не менее, решение тензорных соотношений — посильная задача для компьютеров.

Чтобы составить алгоритмы решения тензорных уравнений, тензоры любого ранга представляются в виде прямоугольных (в общем случае) и квадратных (для матриц с четным рангом) матриц.

6.6. Резюме

Все реальные процессы и явления, происходящие в природе и обществе, существуют независимо от нашего сознания. Естественно, что эти процессы и явления инвариантны по отношению к искусственно вводимой исследователем системе координат. Это обстоятельство диктует определенные правила преобразования координат векторов, матриц и других математических объектов при преобразовании базисов.

Использование аппарата тензорной алгебры позволяет составлять математические модели реальных процессов в операторном виде — в виде, не содержащем никаких координатных систем. Тензорная запись отличается большой наглядностью, не зависит от размерности рассматриваемых пространств и напоминает соответствующие зависимости для одномерных процессов и явлений.

Переход к тензорно-операторной записи математических моделей стал возможным благодаря введению операции неопределенного произведения векторов.

Благодаря возможности представить тензорные соотношения в матричной форме (при выборе соответствующего базиса) не вызывает принципиальных трудностей реализация операторных математических моделей на компьютерах.

6.7. Вопросы

1. **Что такое диада векторов. Перечислите аксиомы диды.**
2. **Как осуществляются различные виды произведений тензорных величин?**
3. **Дайте определения тензоров второго ранга. Ранга n.**
4. **Перечислите свойства диады базисных векторов.**
5. **Как тензорные соотношения привести к матричному виду?**

Вопросы для тестирования

1. Поставьте в соответствие номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка). В местах отсутствия правильных ответов поставьте 5.

1. Вектор, параллельный $\boldsymbol{x}$	**1.** $(\boldsymbol{xy}) \cdot \boldsymbol{u}$;
2. Тензор нулевого ранга	**2.** $(\boldsymbol{xy}) : (\boldsymbol{uv})$;
3. Тензор первого ранга	**3.** $\boldsymbol{xy} + \boldsymbol{yx}$;
4. Симметричный тензор	**4.** $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$.

2. Перечислите номера пунктов, содержащих правильные ответы на вопрос: что определяет ранг тензора?

1. Число знаков скалярного произведения между базисными векторами.

2. Количество базисных векторов в полиаде.

3. Размерность пространства, в котором задан тензор.

4. Размерность матрицы координат тензора.

5. В пунктах 1–4 не содержится правильных ответов.

ТЕМА 6.1
(§ 6.1–6.5 теории)
Алгебра тензоров

Задачи

1. Зависимости

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3, \\ y_2 = -x_1 + 2x_2 - 3x_3, \\ y_3 = x_1 - 4x_2 - x_3 \end{cases}$$

осуществляют преобразование $\boldsymbol{A}: \quad \boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{y}$. Векторы заданы в ортонормированном базисе $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3)^T$.

Требуется представить заданное преобразование:

а) в матричном виде;

б) в тензорно-операторном виде;

в) в виде суммы диад;

г) в координатно-индексном виде.

Решение.

Введем обозначения для матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

а) $Y = AX$ **или** $Y^T = X^T A^T$;

б) $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X}$,

где

$$\boldsymbol{Y} = Y^T \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}^T Y = (y_1 \ y_2 \ y_3) \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \boldsymbol{i}_2 \\ \boldsymbol{i}_3 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{i}_1 \ \boldsymbol{i}_2 \ \boldsymbol{i}_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = (\boldsymbol{i}_1 \ \boldsymbol{i}_2 \ \boldsymbol{i}_3) \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \boldsymbol{i}_2 \\ \boldsymbol{i}_3 \end{pmatrix} \cdot (\boldsymbol{i}_1 \ \boldsymbol{i}_2 \ \boldsymbol{i}_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (\boldsymbol{i}_1 \ \boldsymbol{i}_2 \ \boldsymbol{i}_3) \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};$$

в) $y_k \boldsymbol{i}_k = a_{mn} \boldsymbol{i}_m \boldsymbol{i}_n \cdot x_r \boldsymbol{i}_r = a_{mn} \boldsymbol{i}_m \delta_{nr} x_r = a_{mn} x_n \boldsymbol{i}_m$;

г) $y_k = a_{kn} x_n$.

2. В пространстве L_2 задано соотношение $x_{kr} = a_{kn}b_{nr}$. Расписать это соотношение для $kr = 11$ и $kr = 12$.

Р е ш е н и е.

$$x_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}; \quad x_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}.$$

3. Векторы $\boldsymbol{a} = A^T\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{b} = B^T\boldsymbol{I}$ и $\boldsymbol{c} = C^T\boldsymbol{I}$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_1\ \boldsymbol{i}_2\ \boldsymbol{i}_3)^T$ пространства L_3: $A = (1\ 3\ -1)^T$, $B = (-2\ 1\ 0)^T$ и $C = (2\ 0\ -1)^T$.

Требуется:

а) записать выражения для диад $\boldsymbol{ab}$, и $\boldsymbol{ac}$;

б) найти $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{ab}\cdot\boldsymbol{c}$; $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{ab}$; $\boldsymbol{ab}\times\boldsymbol{c}$; $\boldsymbol{ab}:\boldsymbol{ca}$.

Р е ш е н и е.

а) $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{I}^T AB^T\boldsymbol{I} =$

$$= (\boldsymbol{i}_1\ \boldsymbol{i}_2\ \boldsymbol{i}_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}(-2\ 1\ 0)\begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \boldsymbol{i}_2 \\ \boldsymbol{i}_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (\boldsymbol{i}_1\ \boldsymbol{i}_2\ \boldsymbol{i}_3)\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \boldsymbol{i}_2 \\ \boldsymbol{i}_3 \end{pmatrix} =$$

$$= -2\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2 - 6\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1 + 3\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2 + 2\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_1 - \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_2.$$

Аналогично находим

$$\boldsymbol{ac} = (\boldsymbol{i}_1\ \boldsymbol{i}_2\ \boldsymbol{i}_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}(2\ 0\ -1)\begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \boldsymbol{i}_2 \\ \boldsymbol{i}_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (\boldsymbol{i}_1\ \boldsymbol{i}_2\ \boldsymbol{i}_3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \boldsymbol{i}_2 \\ \boldsymbol{i}_3 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 - \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_3 + 6\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1 - 3\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3 + 2\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3.$$

$$\text{б)}\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = A^T\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{I}^T B = (1\ 3\ -1)\begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \boldsymbol{i}_2 \\ \boldsymbol{i}_3 \end{pmatrix}\cdot(\boldsymbol{i}_1\ \boldsymbol{i}_2\ \boldsymbol{i}_3)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$(1\ 3\ -1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1\ 3\ -1)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 1.$$

Такой же результат получится, если в исходном произведении поменять местами векторы-столбцы координат и базисных векторов:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{I}^T A \cdot B^T \boldsymbol{I}.$$

Результат предлагается получить самостоятельно.

Найдем скалярное произведение, выполняя операции в координатно-индексной форме:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_k \boldsymbol{i}_k \cdot b_m \boldsymbol{i}_m = a_k b_m \delta_{km} = a_k b_k =$$
$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 1.$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = A^T \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{I}^T B =$$
$$= (1\ 3\ \ -1) \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \times \boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_1 \times \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_1 \times \boldsymbol{i}_3 \\ \boldsymbol{i}_2 \times \boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_2 \times \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_2 \times \boldsymbol{i}_3 \\ \boldsymbol{i}_3 \times \boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_3 \times \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_3 \times \boldsymbol{i}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$
$$(1\ 3\ \ -1) \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{i}_3 & -\boldsymbol{i}_2 \\ -\boldsymbol{i}_3 & 0 & \boldsymbol{i}_1 \\ \boldsymbol{i}_2 & -\boldsymbol{i}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{i}_1 + 2\boldsymbol{i}_2 + 7\boldsymbol{i}_3.$$

Обратимся к определению векторного произведения, представляя векторы в координатно-индексной форме:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = a_k \boldsymbol{i}_k \times b_m \boldsymbol{i}_m = a_k b_m e_{kmn} \boldsymbol{i}_n =$$

$$= a_1 b_2 \boldsymbol{i}_3 + a_2 b_3 \boldsymbol{i}_1 + a_3 b_1 \boldsymbol{i}_2 - a_3 b_2 \boldsymbol{i}_1 - a_2 b_1 \boldsymbol{i}_3 - a_1 b_3 \boldsymbol{i}_2 = \boldsymbol{i}_1 + 2\boldsymbol{i}_2 + 7\boldsymbol{i}_3.$$

Решения следующих трех заданий пункта б) приводят к результатам:

$$\boldsymbol{ab} \cdot \boldsymbol{c} = -4\boldsymbol{a};$$

$$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{ab} = 3\boldsymbol{b};$$

$$\boldsymbol{ab} \times \boldsymbol{c} = -3(\boldsymbol{i}_2 \boldsymbol{i}_1 + 2\boldsymbol{i}_2 \boldsymbol{i}_2 + 2\boldsymbol{i}_2 \boldsymbol{i}_3).$$

Обратимся к последнему заданию пункта б).

Выполним операцию двойного скалярного произведения, представляя выражение в координатно-индексной форме:

$$\boldsymbol{ab} : \boldsymbol{ca} = a_k b_r \boldsymbol{i}_k \boldsymbol{i}_r : c_m a_n \boldsymbol{i}_m \boldsymbol{i}_n.$$

Для выполнения операции двойного скалярного произведения (:) сначала выполняется свертка по первым соприкасающимся базисным векторам $\boldsymbol{i}_r \cdot \boldsymbol{i}_m = \delta_{rm}$. После этого скалярная величина

δ_{rm} **выносится за скалярное произведение оставшихся базисных векторов и находится их свертка. В результате получим**

$$\boldsymbol{ab} : \boldsymbol{ca} = a_k b_r \delta_{rm} \delta_{kn} c_m a_n = a_k b_r c_r a_k = (a_k a_k)(b_r c_r) =$$

$$= a_1^2 b_1 c_1 + a_1^2 b_2 c_2 + a_1^2 b_3 c_3 + a_2^2 b_1 c_1 + \ldots + a_3^2 b_3 c_3 = -44.$$

4. Найти свертку $\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{A}$ и двойную свертку $\boldsymbol{I} : \boldsymbol{A}$, где $\boldsymbol{I} = \delta_{kr} \boldsymbol{i}_k \boldsymbol{i}_r$ — единичный тензор, $\boldsymbol{A}$ тензор второго ранга в пространстве L_n.
Р е ш е н и е.

$$\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{A} = \delta_{kr} \boldsymbol{i}_k \boldsymbol{i}_r \cdot a_{mn} \boldsymbol{i}_m \boldsymbol{i}_n = a_{kn} \boldsymbol{i}_k \boldsymbol{i}_n = \boldsymbol{A}.$$

$$\boldsymbol{I} : \boldsymbol{A} = a_{kn} \boldsymbol{i}_k \cdot \boldsymbol{i}_n = a_{nn} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = tr\boldsymbol{A}.$$

Остальные задания предлагается выполнить студентам самостоятельно.

Задачи для самостоятельного решения

1. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе пространства L_3: $A = (2\ 1\ \ -3)^T$, $B = (-1\ 0\ 2)^T$ **и** $C = (2\ 1\ 4)^T$.

Требуется:

а) записать выражения для диад $\boldsymbol{ab}$ и $\boldsymbol{bc}$;

б) найти $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{ab} \cdot \boldsymbol{c}$; $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{ab}$; $\boldsymbol{ab} \times \boldsymbol{c}$**;** $\boldsymbol{ab} : \boldsymbol{ca}$.

2. Доказать справедливость соотношений:

а) $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A} : \boldsymbol{xy} = \boldsymbol{A}^T : \boldsymbol{yx}$ **($\boldsymbol{A}$ — тензор второго ранга, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ — векторы);**

б) $tr(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) : \boldsymbol{I} = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) : \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} : (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})$ **($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ — тензоры второго ранга, $\boldsymbol{I}$ — единичный тензор).**

Глава 7

Прямые и плоскости

7.1. Прямая на плоскости

Проведем из фиксированной точки M_0 прямой ℓ, принадлежащей пространству $\Re_2$, вектор $\boldsymbol{N}$, перпендикулярный этой прямой (рис. 7.1). Соединим точку M_0 с произвольной точкой M прямой радиусом-вектором $\overline{M_0M} = \boldsymbol{R}$.

Так как векторы $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{R}$ перпендикулярны, их скалярное произведение равно нулю:

$$(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{R}) = 0. \tag{7.1}$$

Равенство (7.1) представляет собой уравнение прямой на плоскости, записанное в *векторной форме.* **Действительно, оно справедливо только для точек M, лежащих на прямой.**

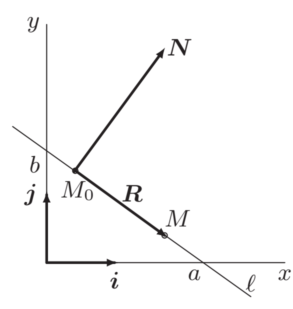


Рис. 7.1. Прямая в $\Re_2$

Для представления уравнения (7.1) в координатной форме введем в рассматриваемом пространстве ортонормированный базис $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ со связанной с ним декартовой ортогональной системой координат x, y.

Пусть A и B являются проекциями вектора $\boldsymbol{N}$ на направления базисных векторов, x_0 и y_0 — координаты фиксированной точки M_0 прямой ℓ, а x и y — координаты ее произвольной точки M.

Введенные векторы представим в виде совокупности их координат:

$$\boldsymbol{N} = (A; B), \qquad \boldsymbol{R} = \overline{M_0M} = (x-x_0; y-y_0). \tag{7.2}$$

Подставим (7.2) в (7.1). Имея в виду, что скалярное произведение векторов, представленных в ортонормированном базисе, равно сумме произведений их соответствующих координат, получим

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \tag{7.3}$$

Это *уравнение прямой, проходящей через заданную точку,* или *уравнение пучка прямых*. Если прямая проходит через точку с координатами $x=x_0$, $y=y_0$, то при этих значениях координат уравнение (7.3) обращается в тождество.

Раскрыв в (7.3) скобки, приводя подобные члены и обозначая $C=-Ax_0-By_0$, придем к *уравнению прямой в общем виде*:

$$Ax+By+C=0. \tag{7.4}$$

Уравнение, называемое *уравнением прямой в отрезках,* получается из (7.4), если в нем перенести C в правую часть равенства и поделить полученное уравнение на $-C$ (при условии, что $C\neq 0$, т.е. прямая не проходит через начало координат):

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{7.5}$$

Здесь $a=-C/A$, $b=-C/B$.

При $x=0$ из (7.5) находится координата $y=b$ пересечения прямой с осью y, а координата $x=a$ пересечения прямой с осью x определяется из уравнения при $y=0$. Отсюда следует, что a и b — это отрезки, отсекаемые прямой на координатных осях (рис. 7.1).

Найдем модуль вектора $\boldsymbol{N}=(A,B)$: $N=\sqrt{A^2+B^2}$. Деление вектора на его модуль приводит к единичному вектору, совпадающему по направлению (сонаправленному) с исходным вектором (§ 3.8). При этом координатами единичного вектора будут его направляющие косинусы: $\boldsymbol{n}=\dfrac{\boldsymbol{N}}{N}=\left(\dfrac{A}{N},\dfrac{B}{N}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta)$.

Отмеченное свойство единичных векторов позволяет получить еще один вид уравнения прямой. Для его записи умножим все слагаемые уравнения (7.4) на *нормирующий множитель* $\mu=-\dfrac{\operatorname{sign}C}{\sqrt{A^2+B^2}}$. В результате получим *уравнение прямой в нормальном виде*:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0. \tag{7.6}$$

В этом уравнении $p=\mu C$ — расстояние от начала координат до прямой. В этом можно убедиться, обратившись к рис. 7.2. Из рисунка видно, что $p=x\cos\alpha+y\cos\beta$. Следует иметь в виду, что в уравнении (7.6) перед параметром p должен стоять знак «минус».

Если уравнение (7.5) умножить на b и ввести обозначение $k = -b/a$, то придем к известному из школьного курса математики *уравнению прямой с угловым коэффициентом:*

$$y = kx + b. \tag{7.7}$$

Предположим, что прямая ℓ проходит через две точки: $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$. Тогда уравнение (7.3) при подстановке в него координат точки M_1 должно обратиться в тождество:

$$A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) = 0.$$

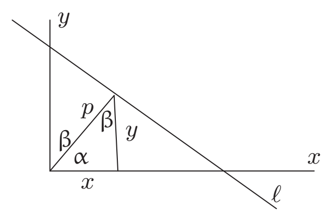


Рис. 7.2. Расстояние от начала координат до прямой

Перенесем в (7.3) и в полученном уравнении слагаемые с множителем B в правые части равенств. Поделив почленно полученные равенства, придем к *уравнению прямой, проходящей через две заданные точки***:**

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \tag{7.8}$$

Если ввести обозначения для координат вектора $\overline{M_0M_1}$: $x_1 - x_0 = m$, $y_1 - y_0 = n$, то последнее уравнение можно переписать в виде

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{7.9}$$

Координаты m и n отличаются от единичного вектора, соосного вектору $\overline{M_0M_1}$, только множителем — модулем этого вектора. Поэтому в частном случае в качестве координат m и n можно принять направляющие косинусы прямой.

К *уравнению прямой с угловым коэффициентом, проходящей через заданную точку***, можно прийти, потребовав, чтобы уравнение (7.7) обратилось в тождество при подстановке в него координат точки $(x_0; y_0)$, т.е. $y_0 = kx_0 + b$. Вычитая последнее равенство из (7.7), получим:**

$$y = y_0 + k(x - x_0). \tag{7.10}$$

Обобщая сказанное, отметим, что *любое линейное уравнение в $\Re_2$, т.е. уравнение, связывающее переменные x и y (в первых степенях !), представляет собой уравнение прямой***.**

Пример. На связанной с плоскостью декартовой ортогональной системе координат заданы координаты двух точек $M_0(1; -2)$ и $M_1(5; 0)$. Требуется:

1. Записать уравнение прямой, проходящей через эти точки, и представить его в виде уравнений:

1.1) в общем виде;

1.2) в отрезках;

1.3) с угловым коэффициентом.

2. Найти угол между:

2.1) прямой и осью x;

2.2) нормалью к прямой и осями координат.

Р е ш е н и е.

1. Подставляя координаты точек M_0 и M_1 в уравнение (7.8), получим

$$\frac{x-1}{5-1} = \frac{y-(-2)}{0-(-2)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1}.$$

1.1. Приводя полученное уравнение к общему знаменателю и перенося все слагаемые в его левую часть, получим общее уравнение прямой ($A = 1$, $B = -2$, $C = -5$):

$$x - 2y - 5 = 0.$$

1.2. Перенесем свободный член (число -5) в правую часть полученного уравнения. После деления уравнения на 5 придем к уравнению прямой в отрезках:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-2{,}5} = 1.$$

Следовательно, прямая отсекает на оси x отрезок, равный 5, а на оси y — отрезок, равный $-2{,}5$.

1.3. Выражая из полученных уравнений переменную y, придем к уравнению прямой с угловым коэффициентом ($k = 1/2$):

$$y = \frac{1}{2}x - 2{,}5.$$

2.1. Угол θ наклона прямой к оси x определяется ее угловым коэффициентом (уравнение п. 1.3), равным тангенсу искомого угла:

$$k = \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}.$$

2.2. Для определения угла между нормалью к прямой и осями координат найдем единичный вектор $\boldsymbol{n}$, совпадающий по направлению с $\boldsymbol{N} = (A; B) = (1; -2)$ (координаты вектора – множители при переменных в общем уравнении прямой, полученной в п. 1.1):

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{N}}{N} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}(1; -2) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Координаты полученного вектора являются косинусами искомых углов наклона нормали к осям координат. Таким образом,

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

7.2. Уравнение плоскости

Рассмотрим в пространстве $\Re_3$ плоскость $\wp$ (рис. 7.3,а).

Подход к выводу уравнения плоскости не отличается в принципе от вывода уравнения прямой на плоскости, приведенного в предыдущем параграфе.

Пусть из некоторой фиксированной точки M_0 плоскости восстановлен перпендикуляр к $\wp$, параллельный (может, и совпадающий) с некоторым вектором $\boldsymbol{N}$.

Соединим выбранную точку M_0 с произвольной точкой M плоскости радиусом-вектором $\overline{M_0M} = \boldsymbol{R}$. Так как векторы $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{N}$ перпендикулярны, то их скалярное произведение должно быть равно нулю:

$$\big(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{R}\big) = 0. \tag{7.11}$$

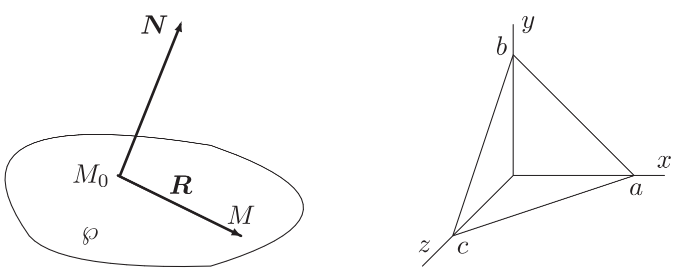


Рис. 7.3. Плоскости в $\Re_3$

Это векторное уравнение плоскости, совпадающее по написанию с векторным уравнением прямой на плоскости (7.1).

Введем в рассматриваемое пространство $\Re_3$ ортонормированный базис $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ со связанной с ним декартовой ортогональной системой координат x, y, z. Пусть в этом базисе векторы $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{R}$ представлены своими координатами:

$$\boldsymbol{N} = (A, B, C), \qquad \boldsymbol{R} = \overline{M_0M} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0). \tag{7.12}$$

Подставляя (7.12) в (7.11) и расписывая скалярное произведение, придем к уравнению

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0. \tag{7.13}$$

По смыслу вывода уравнение (7.13) описывает *плоскость, проходящую через заданную точку.*

Если в этом уравнении раскрыть скобки и ввести обозначение постоянной величины

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0,$$

то придем к *уравнению плоскости в общем виде***:**

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{7.14}$$

Перенесем постоянную D в правую часть уравнения (7.14) и поделим полученное уравнение на $-D$ при условии, что $D \neq 0$ (плоскость не проходит через начало координат). Вводя обозначения $a = -D/A$, $b = -D/B$, $c = -D/C$, перепишем (7.14) в виде *уравнения плоскости в отрезках***:**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{7.15}$$

При $y = z = 0$ из этого уравнения получаем $x = a$; при $z = x = 0$: $y = b$; при $x = y = 0$: $z = c$, т.е. a, b, c — отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат (рис. 7.3,б).

Найдем модуль вектора $\boldsymbol{N} = (A, B, C)$: $N = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Деление вектора на его модуль приводит к единичному вектору, совпадающему по направлению с вектором $\boldsymbol{N}$. Координатами единичного вектора будут его направляющие косинусы: $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{N}}{N} = \left(\dfrac{A}{N}, \dfrac{B}{N}, \dfrac{C}{N}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Как и в случае прямой на плоскости умножим все слагаемые уравнения (7.4) на *нормирующий множитель* $\mu = -\dfrac{\operatorname{sign} D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$**. В результате получим** *уравнение плоскости в нормальном виде***:**

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \tag{7.16}$$

В этом уравнении $p = \mu D$ — расстояние от начала координат до плоскости. Следует иметь в виду, что в уравнении (7.16) перед параметром p должен стоять знак «минус».

Рассмотрим некоторые частные виды общего уравнения (7.14).

При $D = 0$, как отмечалось выше, плоскость проходит через начало координат, так как обращается в тождество при $x = y = z = 0$.

Равенство $A = 0$ (или $B = 0$, или $C = 0$) делает уравнение (7.4) не зависящим от координаты x (или y, или z). Отсутствие координаты x (или y, или z) в уравнении указывает на то, что плоскость параллельна оси x (или y, или z).

Равенство нулю двух постоянных, стоящих при независимых переменных (например, $A = B = 0$ при $C \neq 0$), приводит к уравнению плоскости, перпендикулярной третьей координате (z).

Равенство постоянных $A = B = C$ определяет плоскость, равнонаклоненную к осям координат.

Пример 1. В пространстве $\Re_3$ заданы вектор $\boldsymbol{a} = (2; -4; 5)$ и некоторая точка $M(1; -2; 0)$. Требуется:

1) получить и записать в общем виде уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{a}$ и проходящей через точку M;

2) найти отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях;

3) определить косинусы углов между вектором нормали к плоскости и координатными осями.

Р е ш е н и е.

1. Принимаем $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{a}$. Воспользовавшись уравнением плоскости, проходящей через заданную точку (7.13), получим

$$2(x - 1) - 4(y + 2) + 5(z + 0) = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, придем к уравнению плоскости в общем виде:

$$2x - 4y + 5z - 10 = 0.$$

2. Для получения уравнения плоскости в отрезках перенесем свободный член вправо и поделим на него уравнение:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-2{,}5} + \frac{z}{2} = 1.$$

В знаменателях слагаемых уравнения стоят величины, равные отрезкам, отсекаемым плоскостью на координатных осях: $a = 5$, $b = -2{,}5$, $c = 2$.

3. Чтобы найти косинусы углов между нормалью $\boldsymbol{N}$ к плоскости и осями координат, достаточно записать уравнение плоскости в нормальном виде. Для этого определив модуль вектора $\boldsymbol{N}$:

$$N = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 5^2} = 3\sqrt{5},$$

умножим представленное в общем виде уравнение на нормирующий множитель $\mu = -\dfrac{\operatorname{sign} D}{N} = \dfrac{1}{3\sqrt{5}}$**:**

$$\frac{2}{3\sqrt{5}}x - \frac{4}{3\sqrt{5}}y + \frac{5}{3\sqrt{5}}z - \frac{10}{3\sqrt{5}} = 0.$$

Множителями при координатах нормального уравнения являются направляющие косинусы нормали к плоскости:

$$\cos\alpha = \frac{2}{3\sqrt{5}}; \quad \cos\beta = -\frac{4}{3\sqrt{5}}; \quad \cos\gamma = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Последнее слагаемое нормального уравнения (перед ним должен стоять знак «минус») определяет расстояние от начала координат до плоскости:

$$p = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

Запишем уравнение плоскости, проходящей через три точки с координатами: $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ **и** $A_3(x_3; y_3; z_3)$**. Для этого выберем на плоскости произвольную точку** $A(x; y; z)$ **и проведем через четыре точки три вектора, которые представим в виде совокупности их координат:**

$$\begin{aligned} \overline{A_1A} &= (x - x_1; y - y_1; z - z_1), \\ \overline{A_1A_2} &= (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1), \\ \overline{A_1A_3} &= (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1). \end{aligned}$$

Векторы компланарны (лежат на одной плоскости) и потому линейно зависимы. Смешанное произведение этих векторов равно нулю. В этом случае определитель, составленный из координат векторов, должен обратиться в нуль:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{7.17}$$

Это (линейное относительно переменных x, y **и** z**) уравнение плоскости,** *проходящей через три фиксированные точки***.**

Пример 2. Записать уравнение плоскости, проходящей через точки с координатами $(1, -2, 0)$, $(2, -2, 1)$ **и** $(3, -1, 1)$**.**

Р е ш е н и е. Подставим координаты заданных точек в уравнение

(7.17):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-0 \\ 2-1 & -2+2 & 1-0 \\ 3-1 & -1+2 & 1-0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по элементам первой строки:

$$(x-1)\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} - (y+2)\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда, раскрывая определители, получим

$$-1\cdot(x-1)+(y+2)+z=0,$$

или

$$x-y-z-3=0.$$

Подстановка координат каждой из трех точек в полученное уравнение обращает его в тождество, что подтверждает его правильность.

Сравнение уравнений различных видов для плоскости с соответствующими уравнениями прямой указывает на их идентичность и одинаковую природу с точки зрения векторной алгебры.

В математической литературе обобщения упомянутых уравнений на многомерные пространства с переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют *гиперплоскостями.* Так, для уравнения гиперплоскости в общем виде имеем:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n + D = 0.$$

Подходя с этих позиций, например к уравнению (7.4), можно назвать его уравнением гиперплоскости в общем виде, а (7.5) — гиперплоскости в отрезках в пространстве $\Re_2$. Характерной особенностью гиперплоскости (в том числе прямой) является то, что все переменные входят в ее уравнение в первой степени.

7.3. Взаимное расположение плоскостей

Рассмотрим две плоскости $\wp_1$ и $\wp_2$, заданные в общем виде:

$$\begin{aligned} \wp_1 :&\quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ \wp_2 :&\quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{aligned} \tag{7.18}$$

Следы этих плоскостей на плоскости страницы, перпендикулярной заданным плоскостям, показаны на рис. 7.4, где θ — угол между плоскостями.

Восстановим к плоскостям $\wp_1$ и $\wp_2$ нормали $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$.

Из рис. 7.4 видно, что угол θ между плоскостями равен углу между векторами нормалей к ним. Поэтому $\cos\theta$ может быть определен по скалярному произведению векторов $\boldsymbol{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\boldsymbol{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$:

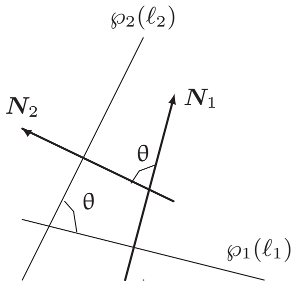


Рис. 7.4. Угол между плоскостями (прямыми)

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2)}{N_1 N_2} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (7.19)$$

Полученное выражение позволяет записать условие ортогональности двух плоскостей ($\cos\theta = 0$):

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (7.20)$$

Условие параллельности плоскостей вытекает из условия параллельности ортогональных им векторов ($\boldsymbol{N}_1 = \lambda\boldsymbol{N}_2$):

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} (= \lambda). \qquad (7.21)$$

Угол между двумя прямыми

$$\begin{aligned} \ell_1&: \quad A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 = 0; \\ \ell_2&: \quad A_2x_2 + B_2y_2 + C_2 = 0 \end{aligned} \qquad (7.22)$$

может быть изображен тем же рис. 7.4, что и угол между плоскостями.

Что касается определения угла θ, записи условий ортогональности и параллельности прямых, то формулы для них получаются из выражений (7.19)– (7.21) путем отбрасывания в них членов, содержащих коэффициенты C_1 и C_2:

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2)}{N_1 N_2} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}; \qquad (7.23)$$

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \qquad (\ell_1 \perp \ell_2); \qquad (7.24)$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad (\ell_1 \parallel \ell_2). \qquad (7.25)$$

Напомним, что в школьном курсе математики предлагался еще один вариант определения угла между прямыми на плоскости (но не между плоскостями).

Пусть θ_1 **и** θ_2 **— углы наклона прямых** ℓ_1 **и** ℓ_2 **к координатной оси** x **и** $k_1 = \operatorname{tg}\theta_1$; $k_2 = \operatorname{tg}\theta_2$ **— угловые коэффициенты, входящие в уравнения прямых с угловым коэффициентом:**

$$\ell_1:\ \ y = k_1x + b_1; \qquad \ell_2:\ \ y = k_2x + b_2.$$

Тогда тангенс угла между прямыми

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}. \tag{7.26}$$

Условие ортогональности и параллельности соответственно

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}, \qquad\qquad k_1 = k_2. \tag{7.27}$$

Пример 1. Найти углы между плоскостями
а) $\wp_1\colon x - 3y + 4z + 2 = 0$ **и** $\wp_2\colon 6x + 4y - 3 = 0.$

б) $\wp_1\colon 2x - 3y + z - 2 = 0$ **и** $\wp_2\colon 4x + 3y + z + 5 = 0.$

в) $\wp_1\colon x - 2y + 3z + 1 = 0$ **и** $\wp_2\colon -2x + 4y - 6z + 5 = 0.$

Р е ш е н и е:
а) так как $\boldsymbol{N}_1 = (1; -3; 4)$, $\boldsymbol{N}_2 = (6; 4; 0)$, **то по (7.19):**

$$\cos\theta = \frac{1\cdot 6 + (-3)\cdot 4 + 4\cdot 0}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 4^2}\sqrt{6^2 + 4^2 + 0^2}} = -\frac{3}{13\sqrt{2}};$$

б) $$\cos\theta = \frac{2\cdot 4 + (-3)\cdot 3 + 1\cdot 1}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}\sqrt{4^2 + 3^2 + 1^2}} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \wp_1 \perp \wp_2;$$

в) $$\cos\theta = \frac{1\cdot(-2) + (-2)\cdot 4 + 3\cdot(-6)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}\ 2\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-3)^2}} = -1 \ \Longrightarrow\ \theta = \pi.$$

Результат решения варианта в) говорит о том, что плоскости параллельны. Знак косинуса здесь не имеет значения — ориентацию плоскости определяет только условие ее ортогональности вектору нормали $\boldsymbol{N}$**.**

Убедимся в правильности последнего результата, используя условие параллельности плоскостей (7.20):

$$\frac{1}{-2} = \frac{-2}{4} = \frac{3}{-6} \quad \left(= -\frac{1}{2}\right)\ (!).$$

Пример 2. Составить уравнение плоскости $\wp$, проходящей через точку $M(2;1;0)$ и параллельной плоскости $\wp_1$: $x-3y+2z-5=0$.
Р е ш е н и е. Длина вектора $\boldsymbol{N}$, перпендикулярного плоскости, несущественна. Поэтому в силу требуемой параллельности плоскостей (и их нормальных векторов) принимаем $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}_1=(1;-3;2)$.

Воспользовавшись уравнением плоскости, проходящей через заданную точку (7.13), запишем требуемое уравнение:

$$1(x-2)-3(y-1)+2(z-0)=0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, запишем уравнение в общем виде:

$$x-3y+2z+1=0.$$

Пример 3. Составить уравнение плоскости $\wp$, проходящей через точку $M(3;2;-1)$ и перпендикулярной плоскостям $\wp_1$: $2x-y+z-3=0$ и $\wp_2$: $x+2y-z-2=0$.
Р е ш е н и е Запишем уравнение плоскости $\wp$, проходящей через точку M:

$$A(x-3)+B(y-2)+C(z+1)=0, \tag{7.28}$$

и потребуем выполнения условия (7.20) ортогональности плоскости $\wp$ плоскостям $\wp_1$ и $\wp_2$ одновременно:

$$\begin{cases} 2A-\ \ B+C=0; \\ \ \ A+2B-C=0. \end{cases}$$

Решение двух уравнений с тремя неизвестными позволяет выразить две неизвестные через третью. После преобразования системы придем к зависимостям:

$$B=-3A; \qquad C=-5A.$$

Подставляя эти выражения в (7.28), получим

$$A(x-3)-3A(y-2)-5A(z+1)=0.$$

При всех слагаемых этого уравнения стоит одинаковый множитель A, что закономерно при таких преобразованиях. Сокращая уравнение на A, раскрывая скобки и приводя подобные, приходим к искомому уравнению плоскости в общем виде:

$$x-3y-5z-2=0.$$

Вектор нормали $\boldsymbol{N}=(1,-3,-5)$ можно найти как векторное произведение векторов нормалей $\boldsymbol{N}_1=(2,-1,1)$ и $\boldsymbol{N}_2=(1,2,-1)$ к заданным плоскостям ρ_1 и ρ_2:

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}=-(1,-3,-5).$$

Вектор параллелен найденному первым способом вектору.

Замечание. При решении задач на построение математических моделей, описывающих геометрические объекты, рекомендуется проверять правильность их построения установлением их непротиворечивости исходным данным.

Так, плоскость, смоделированная в последней задаче, должна быть:

1) перпендикулярной плоскости $\wp_1 \implies (AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0)$**:**

$$1 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) + (-5) \cdot 1 = 0 \quad (!);$$

2) перпендикулярной плоскости $\wp_2 \implies (AA_2 + BB_2 + CC_2 = 0)$**:**

$$1 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + (-5) \cdot (-1) = 0 \quad (!);$$

3) проходить через точку $M(3, 2, -1)$ **(обращаться в тождество при подстановке в уравнение плоскости координат точки** M **вместо текущих координат):**

$$1 \cdot 3 - 3 \cdot 2 - 5 \cdot (-1) - 4 = 0 \quad (!).$$

Пример 4. Найти угол между прямыми $\ell_1\colon\ 3x + 4y - 8 = 0$ **и** $\ell_2\colon\ 2x - y + 3 = 0$.

Р е ш е н и е.

1-й способ. **Воспользуемся выражением (7.23) для косинуса угла между прямыми:**

$$\cos\theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1)}{\sqrt{3^2 + 4^2}\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{5\sqrt{5}}.$$

2-й способ. **Воспользуемся выражением (7.26) для тангенса угла между прямыми:**

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}.$$

Для определения угловых коэффициентов k_1 **и** k_2 **приведем заданные уравнения к виду уравнений с угловыми коэффициентами:**

$$\ell_1\colon\ y = -\frac{3}{4}x + 2, \implies k_1 = -\frac{3}{4}; \quad \ell_2\colon\ y = 2x + 3, \implies k_2 = 2.$$

Тогда

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-3/4 - 2}{1 - (3/4) \cdot 2} = \frac{11}{2}.$$

Обе функции угла θ $\left(\cos\theta = \dfrac{2}{5\sqrt{5}} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\theta = \dfrac{11}{2}\right)$ **приводят к одному углу** $\theta = \arccos\dfrac{2}{5\sqrt{5}} = \operatorname{arctg}\dfrac{11}{2} \approx 80^\circ$.

Пример 5. Заданы уравнение прямой ℓ: $3x - y - 5 = 0$ и точка $M(2;-1)$. Составить уравнения прямых, проходящих через точку M:
а) параллельную ℓ; б) перпендикулярную ℓ.
Р е ш е н и е. Уравнение прямой, проходящей через точку M:

$$A(x-2) + B(y+1) = 0.$$

а) используем условие параллельности прямых (7.25):

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{-1}, \implies A = -3B, \implies -3B(x-2) + B(y+1) = 0, \implies$$

$$\implies 3x - y - 7 = 0.$$

б) используем условие ортогональности прямых (7.24):

$$3A - B = 0, \implies B = 3A, \implies A(x-2) + 3A(y+1) = 0, \implies$$

$$\implies x + 3y + 1 = 0.$$

Полученные в пунктах а) и б) прямые перпендикулярны, так как их коэффициенты удовлетворяют условию (7.24):

$$3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 = 0. \quad (!)$$

7.4. Расстояние от точки до плоскости

Пусть заданы плоскость $\wp$ своим общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

и точка M_0, не лежащая на плоскости. На рис. 7.5 показаны след этой плоскости, расположенной для удобства перпендикулярно плоскости листа, и точка. Требуется найти расстояние d от точки до плоскости.

Выбирая на плоскости произвольную точку M, построим вектор $\overline{M_0M}$.

Проекция вектора $\overline{M_0M}$ на направление вектора нормали $\boldsymbol{N}$ к плоскости будет искомым расстоянием:

$$d = |Pr_N \overline{M_0M}| = \frac{|(\boldsymbol{N}, \overline{M_0M})|}{N}. \tag{7.29}$$

Если в рассматриваемом пространстве ввести ортонормированный базис и декартову ортогональную систему координат, в которых $\boldsymbol{N}$=(A,B,C), $\overline{M_0M} = \big((x-x_0),(y-y_0),(z-z_0)\big)$, N=$\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, то

$$d = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \big| A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) \big|.$$

Раскроем скобки под знаком модуля. Изменив знак на противоположный (под знаком модуля это допустимо) и вводя используемую в общем уравнении плоскости (7.14) и получаемую из этого уравнения постоянную $D = -Ax - By - Cz$, придем к формуле:

$$d=\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \big| Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \big|. \qquad (7.30)$$

Отметим, что под знаком модуля получается знак минус (как в рассматриваемом случае), если точка M_0 и начало координат лежат по одну сторону от плоскости, и знак плюс, если по разные стороны.

В частном случае расстояние от точки до прямой (гиперплоскости в пространстве $\Re_2$)

$$d = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \big| Ax_0 + By_0 + C \big|. \qquad (7.31)$$

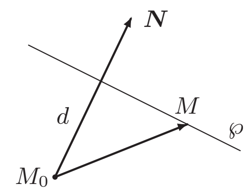


Рис. 7.5. Расстояние от точки до плоскости

Если точка M_0 совпадает с началом координат, то $\overline{M_0M} = \overline{OM} = (x; y; z)$ и $(\boldsymbol{N}, \overline{OM}) = Ax + By + Cz$. В этом случае

$$d = p = \frac{1}{N} |Ax + By + Cz|.$$

Так как $A/N = \cos\alpha$, $B/N = \cos\beta$, $C/N = \cos\gamma$, то последнее равенство приводит к полученному ранее (7.16) уравнению плоскости в нормальном виде

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0.$$

Пример. Найти расстояние от начала координат и от точки $M(2, 3)$ до прямой, заданной уравнением $3x + 4y + 2 = 0$. Определить направляющие косинусы углов наклона нормали к плоскости.

Р е ш е н и е. Для определения расстояния от начала координат до плоскости приведем ее уравнение к нормальному виду, разделив на отрицательное значение модуля вектора $\boldsymbol{N}$=$(3; 4)$, т.е. на $-N = -\sqrt{3^2+4^2} = -5$:

$$-\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{2}{5} = 0.$$

Отсюда расстояние от начала координат до плоскости $p = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$, а направляющие косинусы нормали: $\cos\alpha = -0{,}6$; $\cos\beta = -0{,}8$.

Найдем расстояние от точки M до прямой (7.31):

$$d = \frac{1}{5}|3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2| = 4.$$

7.5. Уравнения прямой в $\Re_3$

Рассмотрим в $\Re_3$ прямую ℓ с фиксированной на ней точкой M_0 (рис. 7.6).

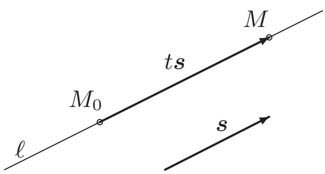


Рис. 7.6. Прямая в $\Re_3$

Выберем на ℓ произвольную точку M и построим вектор $\boldsymbol{L} = \overline{M_0M}$.

Направление прямой зададим некоторым параллельным ℓ (можно совпадающим с ℓ) вектором $\boldsymbol{s}$.

Тогда условием того, что любая точка $M \in \ell$, будет условие параллельности векторов $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{s}$:

$$\boldsymbol{L} = t\boldsymbol{s}. \tag{7.32}$$

Уравнение (7.32) является уравнением прямой в $\Re_3$, представленным в векторной форме. Модуль параметра t определяет разделенное на модуль вектора $\boldsymbol{s}$ расстояние от фиксированной точки M_0 прямой до ее произвольной точки M. Если $|\boldsymbol{s}| = 1$, то $|t|$ равно этому расстоянию.

Отметим, что векторная запись (7.32) уравнения прямой не накладывает никаких ограничений на размерность пространства. Уравнение справедливо и для $\Re_n$, и, в частности, для $\Re_2$. Введем в рассматриваемое пространство ортонормированный базис с декартовой ортогональной системой координат, в которых

$$\boldsymbol{s} = (m, n, p); \qquad \boldsymbol{L} = \overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0). \tag{7.33}$$

Подставляя (7.33) в (7.32) и приравнивая соответствующие координаты, придем к *уравнениям прямой в параметрическом виде*. **Таких уравнений три:**

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + \ tn, \\ z = z_0 + \ tp. \end{cases} \tag{7.34}$$

Выразим из каждого уравнения (7.34) параметр t. Приравняв полученные выражения, получим *канонические уравнения прямой* **(их три):**

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} (= t). \tag{7.35}$$

Если прямая проходит через две заданные точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и $M_1(x_1;y_1;z_1)$, то в качестве вектора, определяющего направление прямой, можно выбрать $s=(x_1-x_0;y_1-y_0;\ z_1-z_0)$. Тогда уравнения (7.35) можно представить в виде *уравнений прямой, проходящей через две точки:*

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}. \tag{7.36}$$

Из трех канонических уравнений прямой (7.36) только два линейно независимы. Покажем, что это так. Введем для удобства новые переменные:

$$X=\frac{x-x_0}{x_1-x_0},\quad Y=\frac{y-y_0}{y_1-y_0},\quad Z=\frac{z-z_0}{z_1-z_0},$$

после чего канонические уравнения представим в виде системы:

$$\begin{cases} X-Y = 0,\\ Y-Z = 0,\\ -X +Z = 0. \end{cases}$$

Выпишем матрицу коэффициентов этой однородной системы уравнений и преобразуем ее:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ +N1 \\ \cdot(-1) \end{array} \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Две последние строки у матрицы равны и одну из них можно вычеркнуть. Умножим все элементы полученной после этого матрицы на -1 и перенесем столбец коэффициентов при X в правую часть расширенной матрицы:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\\ \begin{array}{ccc} Y & Z & X \end{array} \end{array}$$

В левой части расширенной матрицы получена единичная подматрица второго порядка. Следовательно, ранг расширенной матрицы равен двум. Из трех уравнений, которые представляет матрица, линейно независимыми остаются только два.

В частном случае для пространства $\Re_2$ (отсутствует координата z) из трех уравнений (7.36) останется одно:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0},$$

совпадающее с ранее полученным уравнением (7.8).

Пример. Записать в параметрическом и каноническом видах уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1;-2;3)$ и:
а) параллельной вектору $\boldsymbol{s}=(-2;4;1)$;
б) проходящей через точку $M_1(0;-2;5)$.
Р е ш е н и е:

а) на основании формул (7.34) и (7.35) сразу записываем требуемые уравнения:

$$\begin{cases} x = 1-2t, \\ y = -2+4t, \\ z = 3+t \end{cases}$$

и

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-3}{1};$$

б) используя формулу (7.36), запишем

$$\frac{x-1}{0-1}=\frac{y+2}{-2+2}=\frac{z-3}{5-3},$$

или

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-3}{2}.$$

В последней формуле в знаменателе второго выражения появился нуль. В записи канонических уравнений прямой это допустимо. Нуль в знаменателе говорит о том, что вектор s, координаты которого стоят в знаменателях, перпендикулярен соответствующему базисному вектору. В данном случае это вектор $\boldsymbol{j}$. Поэтому прямая перпендикулярна координате y. Для решения уравнения, содержащего в знаменателе нуль, следует перейти к параметрической форме записи уравнений прямой.

Приравнивая последние уравнения параметру t и избавляясь от знаменателей, получим

$$\begin{cases} x = 1-t, \\ y = -2, \\ z = 3+2t. \end{cases}$$

7.6. Взаимное расположение прямых и плоскостей

Пусть заданы две в общем скрещивающиеся (не обязательно пересекающиеся) прямые:

$$\ell_1\colon \begin{cases} x = x_1+tm_1, \\ y = y_1+tn_1, \\ z = z_1+tp_1; \end{cases} \qquad \ell_2\colon \begin{cases} x = x_2+tm_2, \\ y = y_2+tn_2, \\ z = z_2+tp_2. \end{cases} \tag{7.37}$$

Направления прямых задаются двумя векторами $\boldsymbol{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ **и** $\boldsymbol{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$.

Тогда косинус угла θ между прямыми определится как косинус угла между векторами $\boldsymbol{s}_1$ **и** $\boldsymbol{s}_2$**:**

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2)}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \tag{7.38}$$

Отсюда вытекает условие перпендикулярности двух прямых:

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0. \tag{7.39}$$

Условие параллельности прямых следует из условия параллельности векторов $\boldsymbol{s}_1$ **и** $\boldsymbol{s}_2$**:**

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{7.40}$$

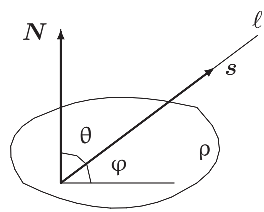


Рис. 7.7. Угол между прямой и плоскостью

Найдем угол φ **между прямой** ℓ **и плоскостью** $\wp$ **(рис. 7.7).**

Этот угол дополняется до $\pi/2$ **углом** θ **между вектором** $\boldsymbol{s}$, **сонаправленным прямой, и вектором** $\boldsymbol{N}$, **ортогональным плоскости.**

Найдем косинус угла θ **между векторами** $\boldsymbol{s}$ **и** $\boldsymbol{N}$, **который равен синусу угла** φ **между прямой и плоскостью:**

$$\cos\theta = \sin\varphi = \frac{(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{s})}{N \cdot s} = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \tag{7.41}$$

Из последней формулы следует *условие параллельности прямой и плоскости* $(\boldsymbol{s} \perp \boldsymbol{N})$**:**

$$Am + Bn + Cp = 0. \tag{7.42}$$

Условию перпендикулярности прямой и плоскости **соответствует параллельность векторов** $\boldsymbol{s}$ **и** $\boldsymbol{N}$**:**

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \tag{7.43}$$

Пример 1. Найти угол между прямыми

$$\frac{x-3}{8} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{5\sqrt{5}} \quad \text{и} \quad \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+4}{0}.$$

Р е ш е н и е Знаменатели уравнений представляют собой направляющие векторы $s_1 = (8; 6; 5\sqrt{5})$ и $s_2 = (3; -4; 0)$. По формуле (7.38) находим

$$\cos\theta = \frac{8\cdot 3 + 6\cdot(-4) + 5\sqrt{5}\cdot 0}{\sqrt{8^2+6^2+(5\sqrt{5})^2}\sqrt{3^2+(-4)^2+0^2}} = \frac{24-24}{15\cdot 5} = 0.$$

Равенство нулю косинуса угла говорит о том, что прямые ортогональны.

Пример 2. Доказать, что прямые $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-1}$ и $\dfrac{x+5}{-3,6} = \dfrac{y-1}{1,2}$ параллельны.

Р е ш е н и е. Используя условие (7.40), найдем

$$\frac{-3,6}{3} = \frac{1,2}{-1} = (-1,2)\ (!).$$

Равенство отношений говорит о параллельности прямых.

Пример 3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку
$A(1; -2; 0)$ и перпендикулярной двум прямым ℓ_1 и ℓ_2, если

$$\ell_1\colon \begin{cases} x = 1+3t, \\ y = 4-2t, \\ z = 2+3t; \end{cases} \qquad \ell_2\colon \begin{cases} x = 2+t, \\ y = -2+2t, \\ z = 1-t. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Уравнение прямой, проходящей через точку A:

$$\frac{x-1}{m} = \frac{y+2}{n} = \frac{z-0}{p}.$$

Вектор $s = (m; n; p)$, определяющий направление этой прямой, должен быть перпендикулярен одновременно двум векторам, сонаправленным заданным прямым: $s_1 = (3; -2; 3)$ и $s_2 = (1; 2; -1)$. Запишем условия перпендикулярности этих векторов:

$$\begin{cases} 3m - 2n + 3p = 0, \\ m + 2n - p = 0. \end{cases}$$

Два уравнения с тремя неизвестными позволяют выразить две неизвестные через третью. Например, $p = -2m$; $n = -\dfrac{3}{2}m$. Подставим полученные значения в ранее записанное уравнение прямой, проходящей через точку A. После умножения полученных уравнений на $m/2$ получим

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-0}{-4}.$$

Для проверки правильности решения следует убедиться в том, что полученное уравнение удовлетворяет условиям задачи. Замечание: вектор s, характеризующий направление искомой прямой, можно было найти как векторное произведение $s_1 \times s_2$.

Пример 4. Заданы координаты вершин треугольника: $A(1;0)$, $B(-2;-3)$, $C(2;-1)$ (рис. 7.8). Требуется: а) записать уравнение медианы, выходящей из вершины A; б) найти координаты точки M, симметричной точке A относительно точки пересечения медианы и стороны BC.

Р е ш е н и е:

а) найдем координаты точки D, середины стороны BC треугольника, используя формулу деления отрезка пополам:

$$D\left(\frac{-2+2}{2}; \frac{-3+(-1)}{2}\right) \implies D(0;-2).$$

Уравнение медианы (прямой, проходящей через точки A и D):

$$\frac{x-1}{0-1} = \frac{y-0}{-2-0} \qquad \implies \qquad y = 2x-2;$$

б) для определения координаты точки M полученное уравнение прямой AD, на продолжении которой лежит точка M, запишем в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = - 2t. \end{cases} \tag{7.44}$$

Найдем параметр t_D, характеризующий расстояние от точки A (именно эта точка зафиксирована в записи последних уравнений прямой AD) до точки D. Для этого в систему уравнений (7.44) вместо координат $(x;y)$ текущей точки прямой подставим координаты точки $D(0;-2)$. Решение обоих уравнений приводит (что естественно) к одному значению параметра: $t_D = 1$.

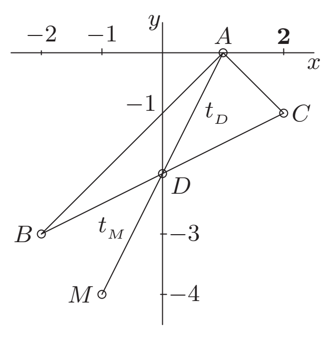


Рис. 7.8. Пример 4

Если параметр t_D определяет расстояние от точки A до точки D, то расстояние до точки M, симметричной точке A относительно D, будет характеризовать параметр t_M, вдвое больший, чем t_D, т.е. $t_M = 2t_D = 2 \cdot 1 = 2$.

Подставляя это значение t в уравнение (7.44), найдем координаты точки M:

$$x_M = 1 - 2 = -1; \quad y_M = -2 \cdot 2 = -4.$$

Таким образом, $M(-1; -4)$.

Замечание 1. Задача нахождения координат точки на прямой в $\Re_3$, симметричной заданной точке, аналогична рассмотренной задаче.

В задаче определения координат точки, симметричной заданной точке относительно некоторой плоскости, необходимо сначала провести через точку прямую, перпендикулярную плоскости, найти точку пересечения прямой с плоскостью, а затем продолжить решение по рассмотренной схеме.

Замечание 2. Описанный в замечании 1 способ определения координат точки на прямой, симметричной заданной, поясняет смысл параметра t. Однако решение этой задачи проще получить, используя формулы деления отрезка пополам. Из них получим (обозначения точек примера 4):

$$x_M = 2x_D - x_A; \quad y_M = 2y_D - y_A; \quad z_M = 2z_D - z_A.$$

Задача нахождения координат точки на прямой в $\Re_3$, симметричной заданной точке, аналогична рассмотренной задаче.

Пример 5. Найти угол между прямой $\dfrac{x+3}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{0}$ и плоскостью $4x + 2y - 5z + 8 = 0$.

Р е ш е н и е. По уравнениям прямой и плоскости определяем вектор, соосный прямой: $\boldsymbol{s} = (-1; 2; 0)$, и вектор, нормальный к плоскости: $\boldsymbol{N} = (4; 2; -5)$.

По формуле (7.41) находим

$$\sin\varphi = \frac{4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + (-5) \cdot 0}{\sqrt{4^2 + 2^2 + (-5)^2}\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2}} = 0.$$

Равенство нулю числителя говорит о том, что прямая и плоскость параллельны.

Пример 6. Предприятие изготавливает на продажу товары трех видов с планом производства в сутки: первого вида $m = 14$ ед.; второго вида $n = 10$ ед. и третьего вида $p = 5$ ед. На момент планирования на складе предприятия имелась продукция: первого вида $x_0 = 40$ ед.; второго вида $y_0 = 120$ ед. и третьего вида $z_0 = 32$ ед.

Определить сколько дней (t) потребуется предприятию для того, чтобы выпустить продукции на P=10 000 д.е., если единица продукции первого вида стоит A=10 д.е.; второго — B=8 д.е. и третьего

— C=20 д.е. **Найти количества товаров, планируемых предприятием для выпуска через t дней его работы.**

Р е ш е н и е. Обозначим x, y, z — количество единиц товаров, планируемых предприятием для продажи через t дней его работы. Тогда выпуск продукции определится из системы уравнений, описывающих прямую в пространстве трех товаров:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \tag{7.45}$$

Общую стоимость планируемого к выпуску товара трех видов можно определить по формуле

$$P = Ax + By + Cz.$$

Подставляя в последнее уравнение неизвестные x, y и z из системы уравнений, выразим из полученного соотношения искомое неизвестное:

$$t_* = \frac{P - Ax_0 - By_0 - Cz_0}{Am + Bn + Cp}.$$

Используя заданные значения входящих в это выражение величин, получим

$$t_* = \frac{10\,000 - 10 \cdot 40 - 8 \cdot 120 - 20 \cdot 30}{10 \cdot 14 + 8 \cdot 10 + 20 \cdot 5} = 25(\text{дней}).$$

Подставляя $t_* = 25$ в систему (7.45), найдем количество планируемых предприятием для продажи товаров:

$$\begin{cases} x_* = 40 + 14{\cdot}25 = 390, \\ y_* = 120 + 10{\cdot}25 = 370, \\ x_* = 32 + 5{\cdot}25 = 157. \end{cases}$$

Алгоритм решения последнего примера может быть использован в общем случае определения координат точки пересечения прямой и плоскости. Алгоритм сводится к следующему.

1. Уравнения прямой приводят к параметрическому виду (7.45).

2. Выраженные через параметр t в явном виде переменные x, y и z этих уравнений подставляют в уравнение плоскости, записанное в общем виде. Из полученного уравнения с одним неизвестным t определяют значение этого параметра, соответствующее точке пересечения прямой и плоскости:

$$t^* = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}. \tag{7.46}$$

3. Найденное значение t^* подставляют в уравнения (7.45). В результате определяют искомые координаты точки $M(x^*; y^*; z^*)$ пересечения прямой и плоскости:

$$\begin{cases} x^* = x_0 + mt^*, \\ y^* = y_0 + nt^*, \\ z^* = z_0 + pt^*. \end{cases} \tag{7.47}$$

7.7. Прямая как геометрическое место точек пересечения плоскостей

Линией пересечения двух непараллельных плоскостей является прямая. Пусть эти плоскости заданы своими общими уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{7.48}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \tag{7.49}$$

Требуется записать параметрические (7.34)

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tp. \end{cases}$$

или канонические (7.35)

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} (= t)$$

уравнения этой прямой.

В оба приведенные уравнения прямой входят координаты x_0, y_0 **и** z_0 **фиксированной точки прямой.**

Координаты такой точки можно получить, рассекая плоскости (7.48) и (7.49) любой третьей плоскостью, не параллельной заданным. Удобнее в качестве такой плоскости выбрать любую координатную плоскость. Пусть это будет плоскость $z = z_0 = 0$. **В этом случае система уравнений (7.48) – (7.49) превратится в два уравнения с двумя неизвестными.**

Пусть в результате решения полученной системы

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + D_2 = 0 \end{cases}$$

найдены значения неизвестных: x_0 **и** y_0. **Вместе с заданным значением** $z_0 = 0$ **эти координаты принадлежат точке** $M_0(x_0, y_0, 0)$, **лежащей на прямой.**

Вторым этапом решения задачи является определение вектора $s = (m,\ n, p)$, **определяющего направление прямой. Этот вектор**

параллелен заданным плоскостям, и следовательно, ортогонален нормалям к ним.

Рассмотрим два варианта определения этого вектора.

а). Векторы, ортогональные к заданным плоскостям:

$$\boldsymbol{N}_1 = (A_1, B_1, C_1) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{N}_2 = (A_2, B_2, C_2).$$

Имея в виду, что длина вектора s произвольная и вспоминая, что векторное произведение векторов равно вектору, ортогональному их плоскости, примем

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{N}_1 \times \boldsymbol{N}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (B_1C_2 - C_1B_2)\boldsymbol{i}_1 + (C_1A_2 - A_1C_2)\boldsymbol{i}_2 + (A_1B_2 - B_1A_2)\boldsymbol{i}_3 = m\boldsymbol{i}_1 + n\boldsymbol{i}_2 + p\boldsymbol{i}_3.$$

После этого, например, каноническое уравнение прямой представится в виде (7.35).

б). Аналогично точке $M_0(x_0, y_0, 0)$ можно найти координаты еще одной точки на прямой. Добавив к уравнениям (7.48) и (7.49) уравнение еще одной плоскости, например, $y = y_1 = 0$ и решив систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + C_1y + D_1 = 0, \\ A_2x + C_2y + D_2 = 0, \end{cases}$$

найдем координаты $M_1(x_1, 0, z_1)$.

В качестве вектора, соосного искомой прямой, примем вектор $\boldsymbol{s} = (x_1 - x_0,\ \ y_1,\ \ -z_0) = (m, n, p)$. После этого уравнение прямой можно представить в каноническом (7.35) или параметрическом (7.34) видах.

7.8. Резюме

Многие математические модели линейной алгебры могут быть наглядно представлены в виде геометрических образов.

Линейное уравнение с n неизвестными (в пространстве $\Re_n$)

$$A_0 + A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = 0$$

представляет собой гиперплоскость — обобщение уравнения плоскости в общем виде пространства $\Re_3$: $Ax + By + Cz + D = 0$.

В пространстве $\Re_2$ уравнение гиперплоскости описывает прямую: $Ax + By + C = 0$.

Уравнения плоскости в пространстве $\Re_3$ (гиперплоскости в $\Re_n$, в частности прямой в $\Re_2$) может быть представлено в различных видах.

В векторном виде:

$$(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{r}) + D = 0,$$

где $\boldsymbol{N} = (A, B, C)$ — вектор нормали к плоскости; $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор произвольной точки плоскости.

В отрезках a, b, c, отсекаемых плоскостью на координатных осях:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

В нормальном виде:

$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}) - p = 0, \quad \textbf{или} \quad n_x x + n_y y + n_z z - p = 0,$$

где $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$ — единичный вектор нормали к плоскости; p — расстояние от начала координат до плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку с координатами (x_0, y_0, z_0):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Кроме записанных уравнений для плоскости прямая на плоскости (гиперплоскость в $\Re_2$) может быть представлена еще несколькими видами характерных уравнений.

Уравнение с угловым коэффициентом (k — тангенс угла между прямой и осью x):

$$y = kx + b,$$

в том числе проходящей через заданную точку:

$$y = y_0 + k(x - x_0).$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

Уравнение прямой в пространстве $\Re_n$ имеет два характерных представления в координатной форме.

Канонические уравнения:

$$\frac{x_1 - x_{10}}{m_1} = \frac{x_2 - x_{20}}{m_2} = \ldots = \frac{x_n - x_{n0}}{m_n}.$$

Здесь $(x_{10}, \ldots, x_{n0})$ — координаты фиксированной точки, через которую проходит прямая. Вектор $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ сонаправлен

прямой. В частности, если в качестве сонаправленного вектора выбрать вектор $m = \big((x_{10}-x_{11}),(x_{20}-x_{21}),\ldots,(x_{n0}-x_{n1})\big)$, то уравнение будет описывать прямую, проходящую через две точки.

Параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x_1 = x_{10} + tm_1, \\ x_2 = x_{20} + tm_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n = x_{n0} + tm_n. \end{cases}$$

Более глубокое изложение основ аналитической геометрии приведено в [5].

7.9. Вопросы

1. **Запишите в векторном виде уравнение прямой на плоскости и уравнение плоскости. Поясните записи соответствующими рисунками.**

2. **Получите из векторного уравнения уравнение прямой (плоскости), проходящей через заданную точку.**

3. **Приведите уравнение прямой (плоскости), проходящей через заданную точку, к уравнению прямой (плоскости) в общем виде.**

4. **Что с геометрической точки зрения представляет собой совокупность коэффициентов, стоящих при переменных в общем уравнении прямой (плоскости)?**

5. **Приведите общее уравнение прямой (плоскости) к уравнению прямой (плоскости) в отрезках. Поясните на рисунках смысл коэффициентов этого уравнения.**

6. **Получите из общего уравнения прямой уравнение прямой с угловым коэффициентом. Поясните смысл коэффициентов.**

7. **Получите уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.**

8. **Определите углы наклона к осям координат вектора нормали к прямой (плоскости).**

9. **Изобразите на координатных плоскостях следы плоскостей, получаемых из общего уравнения при различных вариантах равенства нулю некоторых его коэффициентов.**

10. Что такое гиперплоскость? Запишите уравнение гиперплоскости: в общем виде; в виде уравнения в отрезках; в виде уравнения гиперплоскости, проходящей через заданную точку.

11. Получите формулу для определения угла между плоскостями. Сопроводите запись соответствующим рисунком.

12. Запишите условия параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей.

13. Как найти расстояние от точки до плоскости? до прямой? Ответ сопроводите поясняющим рисунком.

14. Получите уравнение плоскости (прямой) в нормальном виде. Что представляет собой свободный член (p) в уравнении плоскости в нормальном виде?

15. Запишите уравнение прямой в $\Re_3$ в векторном виде. Получите уравнения прямой в $\Re_3$ в параметрическом и каноническом видах.

16. Запишите уравнение прямой в $\Re_3$, проходящей через заданную точку.

17. Что определяет параметр t в уравнениях прямой, записанных в параметрическом виде?

18. Как найти угол между прямыми в пространстве? Запишите условия параллельности и ортогональности прямых в $\Re_3$.

19. Как найти угол между прямой и плоскостью? Запишите условия параллельности и ортогональности прямой и плоскости.

20. Как осуществляется преобразование переноса осей координат на плоскости? Запишите формулы связи старых и новых координат.

21. Как осуществляется преобразование поворота осей координат на плоскости? Запишите формулы связи старых и новых координат.

Вопросы для тестирования

Во всех заданиях, где вопросы и ответы расположены в две колонки, в местах отсутствия соответствия между вопросом и ответом следует поставить цифру 5.

1. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров соответствующих им вопросов (левая колонка) относительно уравнений прямой на плоскости.

1. Проходит через заданную точку	**1.** $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$;
2. В отрезках	**2.** $Ax+By+C=0$;
3. В нормальном виде	**3.** $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$;
4. В общем виде	**4.** $x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0$.

2. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка) в отношении прямых на плоскости.

1. Условие перпендикулярности	**1.** $\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$;
2. Условие параллельности	**2.** $\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}$;
3. Тангенс угла между прямыми	**3.** $A_1B_2=B_1A_2$;
4. Косинус угла между прямыми	**4.** $k_1=-1/k_2$.

3. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка) относительно уравнений плоскости.

1. Параллельна оси z	**1.** $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$;
2. В отрезках	**2.** $Ax+By+C=0$;
3. В нормальном виде	**3.** $Ax+By+Cz+D=0$;
4. В общем виде	**4.** $x\cos\alpha+y\cos\beta+x\cos\gamma-p=0$.

4. Отметьте соотношения, являющиеся уравнениями прямой.

1. $Ax+By+C=0$; **2.** $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{s}t$; **3.** $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$;

4. $\dfrac{x-x_o}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_o}{y_1-y_0}=\dfrac{z-z_o}{z_1-z_0}$; **5.** $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

5. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка), касающихся взаимного расположения прямой l и плоскости ρ.

1. Условие параллельности l и ρ	**1.** $\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$;
2. Условие перпендикулярности l и ρ	**2.** $Am + Bn + Cp = 0$;
3. Синус угла между l и ρ	**3.** $-\dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}$;
4. Параметр t_*, соответствующий точке пересечения l и ρ	**4.** $\dfrac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$.

6. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка) (Тильдой обозначены новые координаты).

1. Преобразование параллельного переноса координат	**1.** $\dfrac{A-C}{2B}$;
2. Катангенс удвоенного угла поворота координат	**2.** $\tilde{x}=x\cos\alpha+y\sin\alpha$, $\tilde{y}=-x\sin\alpha+y\cos\alpha$;
3. Преобразование поворота осей координат	**3.** $\tilde{x}=x-x_0$, $\quad \tilde{y}=y-y_0$;
4. Поворот координат вокруг оси z	**4.** $\tilde{x} = y$, $\quad \tilde{y} = -x$.

7. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка) (прямая l, плоскость ρ).

1. Условие перпендикулярности прямых	**1.** $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$;
2. Условие параллельности прямых	**2.** $\dfrac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$;
3. Условие параллельности l и ρ	**3.** $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$;
4. Синус угла между l и ρ	**4.** $Am + Bn + Cp = 0$.

ТЕМА 7.1
(§ 7.1, 7.4 теории)
Прямая на плоскости

Вопросы

1. **Запишите в векторном виде уравнение прямой на плоскости. Поясните запись рисунком.**
2. **Что с геометрической точки зрения представляет собой совокупность коэффициентов, стоящих при переменных в общем уравнении прямой?**
3. **Запишите уравнение прямой в отрезках. Поясните смысл коэффициентов этого уравнения.**
4. **Запишите уравнение прямой с угловым коэффициентом. Поясните смысл коэффициентов.**
5. **Запишите уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.**
6. **Как найти угол наклона к осям координат вектора нормали к прямой?**
7. **Как найти угол между прямыми (через косинусы и тангенсы)? Запишите условие параллельности прямых и их перпендикулярности.**
8. **Как найти расстояние от точки до прямой?**
9. **Запишите уравнение прямой в нормальном виде. Что представляет собой свободный член (p) в этом уравнении?**

Задачи

1. Изобразить на плоскости прямые, задаваемые уравнениями: а) $x = y$; б) $x - 3 = 0$; в) $y = 1$.

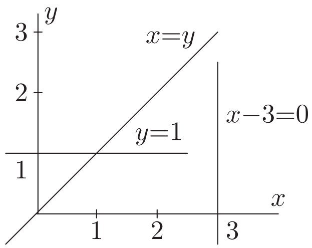
Р е ш е н и е:

а) прямая проходит через начало координат (в уравнении отсутствует свободный член) и равнонаклонена к координатным осям (множители при переменных равны и $\operatorname{tg}(\widehat{l,x}) = 1$);

б) прямая параллельна оси ординат и отсекает на оси абсцисс отрезок, равный 3;

в) прямая параллельна оси абсцисс и отсекает на оси ординат отрезок, равный 1.

Графическое изображение решений показано на левом рисунке 7.9.



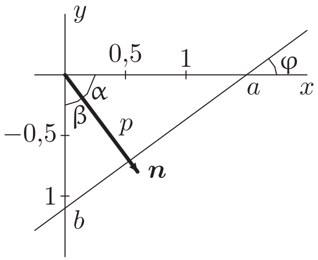


Рис. 7.9. Задачи 1 и 2

2. Уравнение $6x - 8y = 9$ записать: а) в общем виде; б) в отрезках;
в) в нормальном виде; г) в виде уравнения с угловым коэффициентом.

Изобразить прямую и пояснить значения коэффициентов уравнений.

Р е ш е н и е. Переносся все слагаемые исходного уравнения в его левую часть, придем к уравнению прямой в общем виде ($Ax + By + C = 0$):

$$6x - 8y - 9 = 0,$$

где $A = 6$, $B = -8$, $C = -9$. Так что вектор нормали к прямой представляется через его координаты: $\boldsymbol{N} = (A; B) = (6; -8)$.

Для записи уравнения прямой в отрезках $\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1\right)$ следует исходное уравнение поделить на отрицательное значение свободного члена и в числителях его левой части записать переменные с множителями $+1$:

$$\frac{x}{3/2} + \frac{y}{-9/8} = 1.$$

Так что отрезки, отсекаемые прямой на координатных осях x и y, соответственно: $a = \dfrac{3}{2}$; $\quad b = -\dfrac{9}{8}$ (правый рисунок 7.??).

Для записи уравнения в нормальном виде определим модуль вектора нормали к прямой: $N = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10$. Поделив на N уравнение прямой в общем виде, приходим к уравнению прямой в нормальном виде $(x \cos\alpha + y \cos\beta - p = 0)$:

$$0{,}6x - 0{,}8y - 0{,}9 = 0.$$

Отсюда определяем значения косинусов углов α и β наклона нормали к осям координат. Эти величины являются координатами

единичного вектора нормали к прямой:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{N}}{N} = (n_x; n_y) = (\cos\alpha; \cos\beta) = (0{,}6; -0{,}8).$$

Расстояние от начала координат до прямой: $p = 0{,}9$.

Для записи уравнения прямой с угловым коэффициентом ($y = kx+b$**) достаточно из любого вида ее представления выразить в явном виде переменную** y**:**

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{8}.$$

Здесь $k = \dfrac{3}{4}$ **— тангенс угла** φ **наклона прямой к оси** x**.**

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точки с заданными координатами $M_1(1; 2{,}5)$ **и** $M_2(3, 1)$**: 1) в общем виде; 2) в отрезках; 3) в нормальном виде; 4) в виде уравнения с угловым коэффициентом.**

Пояснить на рисунке смысл коэффициентов уравнений. Определить расстояние от начала координат и от точки $A(1, 0)$ **до прямой. Найти углы между нормалью к прямой и осями координат и угол наклона прямой к оси** x**.**

Р е ш е н и е (рис. 7.10). Через две заданные точки проводим вектор $\boldsymbol{l} = \overline{M_1M_2} = (3-1; 1-2{,}5) = (2; -1{,}5) = (m; n)$**.**

Воспользовавшись уравнением прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n},$$

запишем:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2{,}5}{-1{,}5}.$$

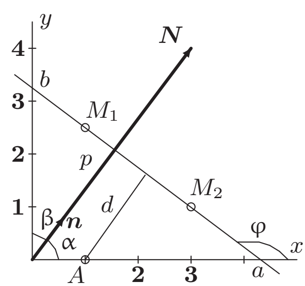


Рис. 7.10. Задача 3

Умножив это уравнение на 6 и перенося все слагаемые в левую часть, получим уравнение прямой в общем виде:

$$3x + 4y - 13 = 0.$$

Множители при x **и** y **в этом уравнении являются координатами вектора нормали к прямой** $\boldsymbol{N} = (3; 4)$ **с модулем** $N = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Поделив уравнение прямой в общем виде на N**, приходим к нормальному уравнению прямой:**

$$0{,}6x + 0{,}8y - 2{,}6 = 0.$$

Отсюда выписываем значения направляющих косинусов:

$$\cos\alpha = 0{,}6; \qquad \cos\beta = 0{,}8$$

и расстояние до прямой от начала координат: $p = 2{,}6$.

Приводя общее уравнение к уравнению прямой в отрезках (делим общее уравнение на свободный член $C = 13$):

$$\frac{x}{13/3} + \frac{y}{13/4} = 1,$$

выписываем значения отрезков, отсекаемых прямой на осях координат:

$$a = \frac{13}{3}; \qquad b = \frac{13}{4}.$$

Угол наклона прямой к оси x можно найти, определив его тангенс из уравнения прямой с угловым коэффициентом (из уравнения прямой выделяем в явном виде переменную y):

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}.$$

Отсюда $\operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{3}{4} = -0{,}75$.

Для определения расстояния от точки $A(1;0)$ до прямой воспользуемся формулой $d = \dfrac{1}{N}|Ax_0 + By_0 + C|$:

$$d = \frac{1}{5}|3\cdot 1 + 4\cdot 0 - 13| = 2.$$

4. Записать в общем виде уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;-3)$ и:

а) параллельной вектору $\boldsymbol{a} = (m;n) = (4;-5)$;

б) перпендикулярной этому вектору.

Р е ш е н и е. Запишем уравнения пучка прямых, проходящих через точку $\big(A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0\big)$:

$$A(x-2) + B(y+3) = 0;$$

а) так как вектор $\boldsymbol{N} = (A;B)$ перпендикулярен прямой, то он перпендикулярен и вектору $\boldsymbol{a}$. Из условия перпендикулярности двух векторов $(mA + nB = 0)$ получим

$$4A - 5B = 0, \quad \text{или} \quad B = 0{,}8A.$$

Подставим полученное выражение для B в уравнение пучка прямых:

$$A(x-2) + 0{,}8A(y+3) = 0.$$

После умножения всех слагаемых уравнения на $5/A$, раскрытия скобок и приведения подобных получим искомое уравнение:

$$5x + 4y + 2 = 0;$$

б) векторы $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{a}$ параллельны. Для определения постоянных A и B воспользуемся условием параллельности векторов $\left(\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n}\right)$:

$$\frac{A}{4} = \frac{B}{-5}. \quad \textbf{Отсюда} \quad A = -0{,}8B.$$

Подставим полученное выражение в уравнение пучка прямых:

$$-0{,}8B(x-2) + B(y+3) = 0.$$

После умножения всех слагаемых уравнения на $5/B$, раскрытия скобок и приведения подобных получим искомое уравнение:

$$4x - 5y - 23 = 0.$$

Для проверки правильности полученных уравнений достаточно использовать исходные данные.

Так, для задачи а):

— прохождение прямой через точку $M(2;-3)$: $5{\cdot}2{+}4{\cdot}({-}3){+}2{=}0$ (!);

— $\boldsymbol{N}\perp\boldsymbol{a}$: $mA + nB = 4\cdot 5 + 5\cdot(-4) = 0$ (!).

Для задачи б):

— прохождение прямой через точку $M(2;-3)$: $4{\cdot}2{+}5{\cdot}({-}3){+}7{=}0$ (!);

— $\boldsymbol{N}\|\boldsymbol{a}$: $\dfrac{4}{4} = \dfrac{-5}{-5}$ (!)

5. Заданы координаты вершин треугольника: $A(-2;1)$, $B(2;2)$, $C(0;-2)$. Записать и представить в общем виде уравнение прямой, проходящей через:

а) точки A и B;

б) медиану, выходящую из вершины A;

в) точку C параллельно медиане;

г) точку C перпендикулярно медиане.

Р е ш е н и е.

а) воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две фиксированные точки $\left(\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} = \dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}\right)$ A и B:

$$\frac{x+2}{2+2} = \frac{y-1}{2-1}, \quad \textbf{или} \quad \frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{1}.$$

Умножая обе части уравнения на 4, раскрывая скобки и приводя подобные, получим

$$x - 4y + 6 = 0;$$

б) найдем координаты точки $D = \left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2}\right)$**, делящей сторону** BC **пополам:**

$$D = \left(\frac{2+0}{2}; \frac{2+(-2)}{2}\right) = (1; 0).$$

Точки A **и** D **медианы принадлежат искомой прямой, поэтому для записи ее воспользуемся тем же уравнением, что и в пункте а):**

$$\frac{x+2}{1+2} = \frac{y-1}{0-1}, \quad \text{или} \quad \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-1}.$$

Умножая обе части уравнения на 3, раскрывая скобки и приводя подобные, получим

$$x + 3y - 1 = 0;$$

в) уравнение пучка прямых, проходящих через точку $C(0, -2)$**:**

$$\frac{x-0}{m} = \frac{y+2}{n}.$$

Так как искомая прямая параллельна медиане AD**, то в качестве ее направляющего вектора можно выбрать** $s_{\text{в}} = (m_{\text{в}}; n_{\text{в}}) = s_{\text{б}} = (3; -1)$. **Тогда уравнение прямой:**

$$\frac{x}{3} = \frac{y+2}{-1}.$$

Приводя уравнение к общему знаменателю, раскрывая скобки и приведя подобные, получим

$$x + 3y + 6 = 0.$$

Это уравнение, как и следовало ожидать, отличается от уравнения параллельной прямой пункта в) только свободным членом, ответственным за расстояние до прямой от начала координат;

г) прямая проходит через ту же точку C**, что и прямая пункта в), поэтому ее уравнение отличается от уравнения пучка прямых, записанного в этом пункте, только значениями знаменателей:**

$$\frac{x-0}{m_{\text{г}}} = \frac{y+2}{n_{\text{г}}}.$$

Из условия ортогональности направляющих векторов ($s_г \perp s_в$) следует

$$m_в m_г + n_в n_г = 0, \quad \textbf{или} \quad 3m_г - n_г = 0.$$

Отсюда находим $n_г = 3m_г$.

Подставляя это выражение в начальное уравнение, умножая на $3m_г$, раскрывая скобки и приводя подобные, получим

$$3x - y - 2 = 0.$$

6. Найти угол между прямыми и координату точки их пересечения, если прямые заданы уравнениями:

а) $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ \;\; x + 2y - 2 = 0. \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2x - 4y + 1 = 0, \\ -\,x + 2y - 3 = 0. \end{cases}$

Р е ш е н и е. В случае представления уравнений прямых в общем виде угол между ними удобно определить, находя косинус угла между векторами нормалей к прямым:

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2)}{N_1 N_2} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}};$$

а) $\cos\theta_{\mathbf{a}} = \dfrac{2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}\sqrt{1^2 + 2^2}} = \dfrac{0}{\sqrt{5}} = 0.$

Поэтому прямые ортогональны и $\theta = \pi/2$. Об ортогональности прямых говорит равенство нулю числителя — скалярного произведения векторов нормалей.

Координаты точки пересечения двух прямых определим, решая систему двух уравнений, описывающих эти прямые:

$$\begin{cases} 2x - \;\; y + 1 = 0, \\ \;\; x + 2y - 2 = 0; \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

Таким образом точка $M(0; 1)$ является точкой пересечения прямых. Ее координаты, в чем можно убедиться, удовлетворяют обоим уравнениям пункта а);

б) $\cos\theta_{\mathbf{б}} = \dfrac{2 \cdot (-1) + (-4) \cdot 2}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}\sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \dfrac{-10}{\sqrt{20}\sqrt{5}} = -1.$

Отсюда $\theta_{\mathbf{б}} = \pi$, т.е. прямые параллельны. В этом убеждает и пропорциональность коэффициентов при переменных.

Задачи для самостоятельного решения

Правильность решения задач этой и других тем главы проверить, подставляя в полученные уравнения исходные данные заданий.

1. Провести прямую через точки $A(1;-2)$ и $B(3,0)$. Записать полученное уравнение:

а) в общем виде;

б) в отрезках;

в) в виде уравнения с угловым коэффициентом.

Найти углы наклона:

г) прямой с осью x;

д) нормали к прямой с осями координат.

2. Записать в общем виде уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2;1)$ и

а) параллельной вектору $\boldsymbol{a} = (3;-2)$;

б) перпендикулярной вектору $\boldsymbol{b} = (1;-3)$.

3. Найти косинус и тангенс угла между прямыми $2x - y + 3 = 0$ и $x + y - 2 = 0$.

4. Заданы точка $M(3;1)$ и уравнение прямой $\ell : 2x - y + 2 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M:

а) параллельной ℓ;

б) перпендикулярной ℓ.

5. Заданы координаты трех точек: $A(-3;2)$, $B(2;1)$, $C(1;-1)$. Требуется

а) записать и представить в общем виде уравнение прямой, проходящей через точки A и C;

б) считая AC диагональю параллелограмма, средствами аналитической геометрии найти координаты его недостающей вершины D;

в) найти угол между диагоналями AC и BD параллелограмма и координаты точки E их пересечения;

г) найти расстояние между сторонами AB и CD.

ТЕМА 7.2
(§ 7.2–7.4 теории)
Плоскость

Вопросы

1. **Запишите в векторном виде уравнение плоскости. Поясните запись рисунком.**
2. **Что с геометрической точки зрения представляет собой совокупность коэффициентов, стоящих при переменных в общем уравнении плоскости?**
3. **Запишите уравнение плоскости в отрезках. Поясните смысл коэффициентов этого уравнения.**
4. **Запишите уравнение плоскости, проходящей через три точки. На основе каких предположений оно получено?**
5. **Как найти углы наклона к осям координат вектора нормали к плоскости?**
6. **Что такое гиперплоскость?**
7. **Как найти угол между плоскостями? Запишите условие параллельности плоскостей. Условие перпендикулярности.**
8. **Запишите уравнение плоскости в нормальном виде. Что представляет собой свободный член в этом уравнении? Как найти расстояние от точки до плоскости?**

Задачи

В задачах 1–3 по заданным уравнениям изобразить на декартовых ортогональных координатах соответствующие плоскости.

1. $Ax + By + Cz = 0$.

Р е ш е н и е. Плоскость проходит через начало координат. Если $A = B = C = 1$, **то плоскость одинаково наклонена ко всем координатам. Вектор нормали к плоскости** $\boldsymbol{N} = (1; 1; 1)$ **совпадает с биссектрисой первого координатного угла.**

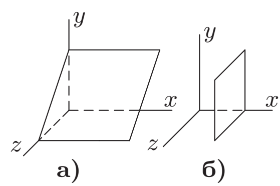


Рис. 7.11. Задачи 2 и 3

2. $By + Cz + D = 0$.

Р е ш е н и е. Плоскость параллельна оси x **(рис. 7.11,а). При**

$B = 0$ ($A \neq 0$, $C \neq 0$) плоскость параллельна оси y. При $C = 0$ — оси z.

3. $Ax + D = 0$;

Р е ш е н и е. Плоскость перпендикулярна оси x (параллельна осям y и z) (рис. 7.11,б).

Если в общем уравнении плоскости $A = 0$ и $B = 0$ $(C \neq 0)$, то плоскость перпендикулярна оси z; при $A = 0$ и $C = 0$ — оси y. Уравнения $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ представляют координатные плоскости, перпендикулярные координатам, равным нулю.

4. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3; -2; 0)$ и ортогональной вектору $\boldsymbol{a} = (4; 3; -1)$:
а) в общем виде;
б) в нормальном виде;
в) в отрезках.

Определить:
г) направляющие косинусы нормали к плоскости;
д) расстояние от начала координат до плоскости;
е) отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат.

Р е ш е н и е. В уравнении плоскости $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, проходящей через фиксированную точку, согласно условию задачи координаты точки: $x_0 = 3$, $y_0 = -2$, $z_0 = 0$; координаты вектора, нормального к плоскости: $A = 4$, $B = 3$, $C = -1$.

Поэтому искомое уравнение представляется в виде

$$4(x - 3) + 3(y + 2) - (z - 0) = 0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных придем к уравнению плоскости в общем виде ($Ax + By + Cz + D = 0$):

$$4x + 3y - z - 6 = 0.$$

Координаты вектора нормали к этой плоскости равны множителям при переменных $\boldsymbol{N} = (4; 3; -1) = \boldsymbol{a}$, но могут отличаться от координат вектора $\boldsymbol{a}$ на постоянный множитель. В частности, вектор нормали может быть единичным:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{N}}{N} = \frac{(4; 3; -1)}{\sqrt{4^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{26}}(4; 3; -1).$$

Чтобы получить уравнение плоскости в нормальном виде ($x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$), необходимо умножить ее общее уравнение на нормирующий множитель $\mu = \dfrac{\mathrm{sign} D}{N}$:

$$\frac{4}{\sqrt{26}}x + \frac{3}{\sqrt{26}}y - \frac{1}{\sqrt{26}}z - \frac{6}{\sqrt{26}} = 0.$$

Множители при переменных этого уравнения являются направляющими косинусами вектора нормали к плоскости:

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{26}}; \quad \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{26}}; \quad \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{26}},$$

а расстояние от начала координат до плоскости определяет отрицательное значение свободного члена нормального уравнения: $p = \dfrac{6}{\sqrt{26}}$.

Чтобы получить уравнение плоскости в отрезках $\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1\right)$**, достаточно перенести свободный член общего уравнения** $C = -6$ **в его правую часть и поделить полученное выражение на** $-C = 6$ **(в правой части уравнения должна стоять положительная единица, а множители при переменных в числителях должны равняться единицам):**

$$\frac{x}{3/2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-6} = 1.$$

Отсюда получаем значения отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях:

$$a = 1{,}5; \quad b = 2; \quad c = -6.$$

5. Записать в общем виде уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(3;-2;0)$, $M_2(1;-1;4)$ **и параллельной вектору** $\boldsymbol{a} = (1;2;-2)$.

Р е ш е н и е. Уравнение плоскости, проходящей через точку M_1**:**

$$A(x-3) + B(y+2) + C(z-0) = 0. \tag{7.50}$$

Так как искомая плоскость должна проходить через точку M_2**, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению искомой плоскости:**

$$A(1-3) + B(-1+2) + C(4-0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2A - B - 4C = 0. \tag{7.51}$$

Это первое уравнение, ограничивающее выбор коэффициентов уравнения (7.50).

Вектор $\boldsymbol{N} = (A;B;C)$ **ортогонален плоскости, а заданный в условии задачи вектор** $\boldsymbol{a} = (1;2;-2)$ **параллелен ей. Следовательно** $\boldsymbol{N}\perp\boldsymbol{a}$**. Из условия ортогональности векторов получим второе уравнение для определения коэффициентов (равенство нулю скалярного произведения векторов):**

$$A + 2B - 2C = 0. \tag{7.52}$$

В результате имеем систему двух уравнений (7.51) и (7.52) с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} -2A + B + 4C = 0, \\ A + 2B - 2C = 0. \end{cases} \tag{7.53}$$

Решая систему, выразим две ее неизвестные через третью (в качестве основных неизвестных могут быть выбраны любые две из трех): $A = 2C$, $B = 0$. **Подставим эти выражения в уравнение (7.50). После деления на** C, **раскрытия скобок и приведения подобных получим**

$$2x + z - 6 = 0.$$

Проверим его адекватность. Уравнение должно удовлетворять трем условиям ($\wp$ **— обозначение плоскости):**

$$\begin{aligned} M_1 \in \wp: &\quad 2\cdot 3 + 0\cdot(-2) + 0 - 6 = 0 \ (!), \\ M_2 \in \wp: &\quad 2\cdot 1 + 0\cdot(-1) + 4 - 6 = 0 \ (!), \\ \boldsymbol{a} \perp \wp: &\quad 2\cdot 1 + 0\cdot 2 + 1\cdot(-2) = 0 \ (!). \end{aligned}$$

Замечания.

1. Вектор нормали к искомой плоскости можно определить как векторное произведение $\overline{M_1M_2} \times \boldsymbol{a}$.

2. Если векторы $\overline{M_1M_2}$ **и** $\boldsymbol{a}$ **параллельны, то задача будет иметь бесчисленное множество решений.**

6. Записать в общем виде уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;0;2)$, **параллельной вектору** $\boldsymbol{a} = (2;0;-2)$ **и оси** z.
Р е ш е н и е. Уравнение плоскости, проходящей через точку M:

$$A(x-3) + By + C(z-2) = 0. \tag{7.54}$$

Так как искомая плоскость параллельна векторам $\boldsymbol{a}$ **и** $\boldsymbol{k} = (0;0;1)$ **(базисный вектор, определяющий направление оси** z**), то нормаль к плоскости** $\boldsymbol{N} = (A, B, C)$ **будет ортогональна этим векторам. Условия ортогональности — равенство вектора** $\boldsymbol{N}$ **векторному произведению векторов** $\boldsymbol{a}$ **и** $\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2j = (0,2,0) = (A,B,C).$$

Подставляя полученные значения координат вектора $\boldsymbol{N}$ **вместо соответствующих коэффициентов в уравнение (7.54) получим**

$$2y = 0, \qquad \text{или} \qquad y = 0.$$

Искомая плоскость — координатная плоскость, ортогональная оси y. При проверке правильности решения этой задачи надо иметь в виду, что $A = B = 0$.

7. Записать в общем виде уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_0(1; 0; -2)$, $M_1(2; 1; 3)$ и $M_2(1; -1; 0)$.
Р е ш е н и е. Воспользуемся уравнением:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставим заданные координаты точек в уравнение:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 0 & z + 2 \\ 2 - 1 & 1 - 0 & 3 + 2 \\ 1 - 1 & -1 - 0 & 0 + 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Longrightarrow \quad \begin{vmatrix} x - 1 & y & z + 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по элементам первой строки:

$$(x - 1)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (z + 2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определители, скобки и приводя подобные, приходим к искомому уравнению:

$$7x - 2y - z - 9 = 0.$$

Проверим правильность полученного уравнения, подставляя в него координаты заданных точек:

$$\begin{aligned} M_1: &\quad 7 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-2) = 0 \ (!); \\ M_2: &\quad 7 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 = 0 \ (!); \\ M_3: &\quad 7 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 = 0 \ (!). \end{aligned}$$

8. Записать в общем виде уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; 1; -3)$ и параллельную плоскости $3x - y + 2z - 4 = 0$. Найти расстояние между плоскостями.
Р е ш е н и е. Следуя первому условию запишем уравнение плоскости, проходящей через точку M:

$$A(x - 2) + B(y - 1) + C(z + 3) = 0. \tag{7.55}$$

Для определения коэффициентов уравнения используем условие параллельности плоскостей (параллельны нормальные векторы):

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{-1} = \frac{C}{2} (= \lambda).$$

Число λ может быть любым, но отличным от нуля. Удобнее всего считать $\lambda = 1$. Тогда $A = 3$, $B = -1$, $C = 2$.

Подставляя эти значения в (7.55), раскрывая скобки и приводя подобные, получим

$$3x - y + 2z + 1 = 0.$$

Для определения расстояния между плоскостями достаточно выбрать на одной из них произвольную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и воспользоваться формулой $d = \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|$.

Так как точка $M(2; 1; -3)$ принадлежит искомой плоскости, то требуемое расстояние можно найти, определив его как расстояние от M до заданной в условии задачи плоскости:

$$d = \frac{1}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}}|3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-3) - 4| = \frac{5}{\sqrt{14}}.$$

9. Записать в общем виде уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0; -1; 3)$ и перпендикулярной плоскостям $\rho_1 : \ x - 2y + 3z - 1 = 0$ и $\rho_2 : \ 2x - y + 3z + 2 = 0$.

Р е ш е н и е. Уравнение плоскости, проходящей через точку M:

$$Ax + B(y + 1) + C(z - 3) = 0. \tag{7.56}$$

При известных координатах векторов нормалей к заданным плоскостям $\boldsymbol{N}_1 = (1, -2, 3)$ и $\boldsymbol{N}_2 = (2, -1, 3)$ определим вектор нормали к этим векторам:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k} = -3(1, -1, -1).$$

Принимаем за вектор нормали к искомой плоскости вектор $\boldsymbol{N} = (A, B, C) = (1, -1, -1)$.

Подставим эти значения в (7.56). После приведения подобных приходим к искомому уравнению:

$$x - y - z + 2 = 0.$$

Заданные условия задачи выполняются, в чем можно убедиться соответствующими проверками.

10. Найти косинус угла между плоскостями

$$3x - 2y + z + 5 = 0 \quad \text{и} \quad x + 2y - 3z - 1 = 0.$$

Р е ш е н и е. Угол между плоскостями равен углу между нормалями $\boldsymbol{N}_1 = (3; -2; 1)$ и $\boldsymbol{N}_2 = (1; 2; -3)$ к этим плоскостям. Найдем косинус угла между векторами:

$$\cos\theta = \frac{3 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot (-3)}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = -\frac{4}{14} = -\frac{2}{7}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Заданы своими координатами в декартовой ортогональной системе координат точка $A(1; 2; -3)$ и вектор в связанном с координатами ортонормированном базисе $\boldsymbol{a} = (3; 3; 1)$.

1. Записать в общем виде уравнение плоскости $\wp$, проходящей через точку A и перпендикулярной вектору $\boldsymbol{a}$.

2. Найти отрезки, отсекаемые плоскостью $\wp$ на осях координат.

3. Определить косинусы углов между нормалью к плоскости $\wp$ и осями координат.

4. Записать уравнение плоскости, проходящей через след пересечения $\wp$ с координатной плоскостью xy и параллельной оси z.

5. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку пересечения $\wp$ с осью y и перпендикулярной этой оси.

6. Найти косинус угла между плоскостями $2x + 3y - z + 3 = 0$ и $x - y + z - 1 = 0$.

7. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; -1; 3)$ и параллельной плоскости $2x - y + 3z - 2 = 0$.

8. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3; 0; -1)$ и перпендикулярной плоскостям $3x - y + 2z - 1 = 0$ и $x + y - 3z + 3 = 0$.

9. Записать уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(-1; 1; 0)$; $M_2(1; 2; -3)$; $M_3(-1; 3; 1)$.

10. Дана плоскость $\wp$: $2x + 3y - 6z + 14 = 0$.

Найти расстояние от $\wp$: а) до точки $A(3; -21; 1)$; б) до начала координат.

ТЕМА 7.3
(§ 7.5–7.6 теории)
Прямая и плоскость
Вопросы

1. **Запишите уравнение прямой в $\Re_3$ в векторном виде. Получите уравнения прямой в $\Re_3$ в параметрическом и каноническом видах. Что определяет параметр t в записанных в параметрическом виде уравнениях прямой?**
2. **Запишите уравнение прямой в $\Re_3$, проходящей через заданную точку.**
3. **Как найти угол между прямыми в пространстве? Запишите условия параллельности и ортогональности прямых в $\Re_3$.**
4. **Как найти угол между прямой и плоскостью? Запишите условия параллельности и ортогональности прямой и плоскости.**

Задачи

1. Прямая проходит через две точки $M_1(1;-2;-1)$ и $M_2(4;-2;3)$. Записать ее канонические и параметрические уравнения. Определить направляющие косинусы прямой.
Р е ш е н и е. Для составления искомых уравнений воспользуемся уравнениями прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}.$$

Подставляя в них координаты заданных точек, получим

$$\frac{x-1}{4-1}=\frac{y+2}{-2+2}=\frac{z+1}{3+1}, \quad \text{или} \quad \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{0}=\frac{z+1}{4}. \tag{7.57}$$

В знаменателях этих представленных в каноническом виде уравнений стоят координаты вектора, сонаправленного прямой: $s=(3;0;4)$.

Направляющие косинусы прямой совпадают с направляющими косинусами вектора s, которые равны координатам единичного вектора:

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{s}}{s}=\frac{(3;0;4)}{\sqrt{3^2+0^2+4^2}}=(0{,}6;0;0{,}8).$$

Отсюда следует: $\cos\alpha=0{,}6$; $\cos\beta=0$; $\cos\gamma=0{,}8$.

Обозначая равенства (7.57) через t **и выражая из них переменные в явном виде, придем к уравнениям прямой в параметрическом виде:**

$$\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = -2; \\ z = -1 + 4t. \end{cases}$$

2. Найти косинус угла между прямыми
$\dfrac{x-1}{12} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{-4}$ **и** $\dfrac{x+3}{0} = \dfrac{y-2}{-8} = \dfrac{z+4}{6}$.
Р е ш е н и е. Знаменатели уравнений представляют собой направляющие векторы прямых $\boldsymbol{s}_1 = (12; 3; -4)$ **и** $\boldsymbol{s}_2 = (0; -8; 6)$.

По формуле $\cos\theta = \dfrac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$ **находим**

$$\cos\theta = \frac{12 \cdot 0 + 3 \cdot (-8) - 4 \cdot 6}{\sqrt{12^2 + 3^2 + (-4)^2}\sqrt{0^2 + (-8)^2 + 6^2}} = \frac{-48}{13 \cdot 10} = -\frac{24}{65}.$$

3. Доказать, что ортогональны прямые:
$\dfrac{x-1}{12} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{-4}$ **и** $\dfrac{x+3}{0} = \dfrac{y-2}{8} = \dfrac{z+4}{6}$**.**
Р е ш е н и е. Повторяем действия предыдущей задачи:

$$\cos\theta = \frac{12 \cdot 0 + 3 \cdot 8 - 4 \cdot 6}{\sqrt{12^2 + 3^2 + (-4)^2}\sqrt{0^2 + (-8)^2 + 6^2}} = \frac{0}{13 \cdot 10} = 0.$$

Равенство нулю косинуса говорит об ортогональности прямых.

4. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; -2; 3)$ **и перпендикулярной прямым:**

$$\begin{cases} x = 4 + 3t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 2 - 3t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 5 + t, \\ y = -3 + 2t, \\ z = -t. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Запишем уравнение прямой, проходящей через заданную точку A**:**

$$\frac{x-2}{m} = \frac{y+2}{n} = \frac{z-3}{p}.$$

Вектор $\boldsymbol{s} = (m, n, p)$, **определяющий направление прямой, параллелен векторному произведению векторов** $\boldsymbol{s}_1 = (3, 2, -3)$ **и** $\boldsymbol{s}_2 = (1, 2, -1)$**:**

$$\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{k} = 4(1, 0, 1).$$

В качестве вектора s принимаем вектор, параллельный найденному: $s = (m, n, p) = (1, 0, 1)$.

Искомые уравнения в каноническом виде:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-3}{1}.$$

Перепишем полученные уравнения в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 2 + t; \\ y = -2; \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

Для проверки правильности решения следует убедиться в том, что полученное уравнение удовлетворяет условиям задачи.

5. Найти координаты точки пересечения прямой

$$\begin{cases} x = 2 + 3t; \\ y = -2t; \\ z = t \end{cases}$$

с плоскостью $3x + y - 2z - 1 = 0$ и угол между ними.

Р е ш е н и е. Для определения параметра $t = t_*$, соответствующего точке пересечения прямой и плоскости, подставим переменные, определяемые параметрическими уравнениями прямой, в уравнение плоскости. Из полученного уравнения с неизвестным t определяем этот параметр:

$$t_* = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp} = -\frac{3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 - 1}{3 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1} = -1.$$

Подставляя это значение параметра t в уравнение прямой, получаем искомые координаты:

$$\begin{cases} x_* = 2 + 3 \cdot (-1) = -1; \\ y_* = -2 \cdot (-1) = 2; \\ z_* = -1. \end{cases}$$

Итак, координаты точки пересечения найдены: $M(-1; 2; -1)$.

Косинус угла между направляющим вектором прямой $s = (3; -2; 1)$ и нормальным к плоскости вектором $N = (3; 1; -2)$ равен синусу угла между прямой и плоскостью. Поэтому

$$\sin\theta = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} =$$

$$= \frac{3 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2}\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{5}{14}.$$

Отсюда $\theta = \arcsin\dfrac{5}{14}$**.**

Значение параметра $t_* = -1$ **говорит о том, что точку** $A(2;0;0)$**, через которую проходит прямая, и точку** $M(-1;2;-1)$ **пересечения прямой и плоскости соединяет вектор** $t_*\boldsymbol{s} = (-1)\cdot(3;-2;1) = (-3;2;-1)$**. Этот вектор (если он найден правильно) должен совпадать с вектором** $\overline{AM} = (-1-2;2-0;-1-0) = (-3;2;-1)$**. Что и подтверждается.**

6. Найти проекцию точки $M_0(5;3;1)$ **на плоскость** $3y+4z+12=0$ **и координаты точки, симметричной точке** M_0 **относительно плоскости.**

Р е ш е н и е задачи будем искать следующим образом. Сначала проведем прямую (составим уравнения прямой), проходящую через точку M_0 **и перпендикулярную плоскости. Затем найдем параметр** t_1**, соответствующий расстоянию от точки** M_0 **до плоскости. По этому параметру найдем координаты точки** M_1 **— проекции точки на плоскость. Удваивая параметр** t_1**, по нему найдем координаты точки** M_2**, расположенной от точки** M_0 **на расстоянии, в 2 раза превышающем расстояние до плоскости. Это и будет точка, симметричная** M_0**.**

Составим уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(5;3;1)$ **и перпендикулярной плоскости (**$\boldsymbol{N}$=$(A;B;C)$=$(0;3;4)$=$(m;n;p)$=$\boldsymbol{s}$**):**

$$\begin{cases} x = 5; \\ y = 3+3t; \\ z = 1+4t. \end{cases}$$

Совместное решение полученных уравнений прямой и заданного уравнения плоскости позволяет найти параметр $t = t_1$**, соответствующий точке пересечения прямой и плоскости:**

$$t_1 = -\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp} = -\frac{0\cdot 5+3\cdot 3+4\cdot 1+12}{0\cdot 0+3\cdot 3+4\cdot 4} = -1.$$

Подставляя значения этого параметра в уравнения прямой, определим координаты точки M_1 **— проекции точки** M_0 **на плоскость:**

$$\begin{cases} x_1 = 5; \\ y_1 = 3+3\cdot(-1) = 0; \\ z_1 = 1+4\cdot(-1) = -3. \end{cases}$$

Таким образом, $Pr_P M_0 = M_1(5;0;-3)$**.**

Удвоим параметр t $(t_2 = 2t_1 = -2)$ **и по уравнениям прямой найдем соответствующие ему координаты точки** M_2**, симметричной** M_0 **относительно плоскости:**

$$\begin{cases} x_2 = 5; \\ y_2 = 3 + 3 \cdot (-2) = -3; \\ z_2 = 1 + 4 \cdot (-2) = -7. \end{cases}$$

Таким образом, $M_2(5; -3; -7)$.

Для проверки правильности определения координат точки найдем векторы $\overline{M_0M_2} = (5 - 5; -3 - 3; -7 - 1) = (0; -6; -8)$ и $-t_2\boldsymbol{s} = -2(0; 3; 4) = (0; -6; -8)$. Векторы равны.

Убедимся в том, что точка M_1 делит отрезок M_0M_2 пополам. Координаты точки M_1 должны равняться полусуммам соответствующих координат точек M_0 и M_2:

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_2+x_0)=\frac{1}{2}(5+5) = 5\ (!),\quad y_1 = \frac{1}{2}(3-3) = 0\ (!),\quad z_1 = \frac{1}{2}(1-7) = -3\ (!).$$

7. Записать параметрическое уравнение прямой, заданной в виде пары пересекающихся плоскостей:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 4 = 0; \\ -x + y - z - 2 = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Выберем на линии пересечения плоскостей произвольную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Для этого достаточно пересечь пару плоскостей третьей, непараллельной им плоскостью, например, плоскостью $x = x_0$. В качестве x_0 может быть выбрано любое число, в том числе нуль (во многих случаях нуль оказывается наиболее удобным числом). Оставшиеся две координаты точки M_0 определятся из решения двух уравнений плоскостей, в которых после задания одной координаты (x_0) останутся неизвестными две координаты y_0 и z_0.

Итак, пусть $x = x_0 = 0$. Тогда уравнения плоскостей преобразуются к виду

$$\begin{cases} -y_0 + 2z_0 - 4 = 0; \\ y_0 - z_0 - 2 = 0. \end{cases}$$

Решая эти уравнения, получим $y_0 = 8$, $z_0 = 6$. Таким образом на линии пересечения плоскостей задана точка $M_0(0; 8; 6)$.

Аналогично можно получить координаты еще одной точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ на линии пересечения плоскостей. Пусть, например, $z_1 = 0$. Перепишем уравнения двух плоскостей с учетом этого предположения:

$$\begin{cases} 3x_1 - y_1 - 4 = 0; \\ -x_1 + y_1 - 2 = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, найдем: $x_1 = 3$, $y_1 = 5$. Таким образом вторая точка на линии пересечения плоскостей: $M_1(3; 5; 0)$.

В качестве направляющего вектора $s = (m; n; p)$ искомой прямой выбираем вектор, соосный $\overline{M_0M_1} = (3-0; 5-8; 0-6) = (3; -3; -6) = 3(1; -1; -2)$. Пусть $s = \frac{1}{3}\overline{M_0M_1} = (1; -1; -2)$.

Для записи искомых уравнений воспользуемся параметрическими уравнениями прямой, проходящей через точку M_0 и имеющей направление вектора s:

$$\begin{cases} x = t; \\ y = 8 - t; \\ z = 6 - 2t. \end{cases}$$

Каноническая форма уравнений:

$$\frac{x}{1} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-6}{-2}.$$

Эти уравнения прямой l удовлетворяют трем условиям сформулированной задачи:

$$\begin{aligned} M_0 \in l: &\quad \frac{0}{1} = \frac{8-8}{-1} = \frac{6-6}{-2}\ (!), \\ l \perp \boldsymbol{N}_0: &\quad 1 \cdot 3 + (-1)\cdot(-1) + (-2)\cdot 2 = 0\ (!), \\ l \perp \boldsymbol{N}_1: &\quad 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 + (-2)\cdot(-1) = 0\ (!). \end{aligned}$$

Замечание. Вместо определения координат второй точки для записи уравнения прямой можно было определить вектор s из условия его ортогональности векторам нормалей двух плоскостей (условие использовано при проверке правильности решения задачи).

Одним из способов определения вектора s в этом случае является приравнивание его векторному произведению векторов нормалей к заданным плоскостям.

8. Найти расстояние от точки $M(3; 1; -5)$ до прямой:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-1}.$$

Р е ш е н и е. Проведем через точку M плоскость, ортогональную заданной прямой. Вектор нормали к этой плоскости $\boldsymbol{N} = (A; B; C)$ приравняем вектору $s = (m; n; p) = (2; 3; -1)$, определяющему направление прямой. Уравнение плоскости:

$$2(x-3) + 3(y-1) - (z+5) = 0, \quad \text{или} \quad 2x + 3y - z - 14 = 0.$$

Найдем параметр t_*, определяющий количество векторов s, укладывающихся в расстояние от точки $A(x_0; y_0; z_0) = A(1; -2; 3)$, находящейся на прямой, до плоскости:

$$t_* = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp} = -\frac{2{\cdot}1{+}2{\cdot}3{-}1{\cdot}3{-}14}{2{\cdot}2{+}3{\cdot}3{+}(-1)\cdot(-1)} = -\frac{-21}{14} = 1{,}5.$$

По найденному параметру из уравнений прямой, представленных в параметрическом виде, находим координаты точки M_* **пересечения прямой и плоскости:**

$$\begin{cases} x_* = 1 + 2t_* = 1 + 2 \cdot 1{,}5 = 4; \\ y_* = -2 + 3t_* = -2 + 3 \cdot 1{,}5 = 2{,}5; \\ z_* = 3 - t_* = 3 - 1{,}5 = 1{,}5. \end{cases}$$

Итак, координаты точки пересечения: $M_*(4; 2{,}5; 1{,}5)$.

Определим вектор $\overline{MM}_* = (4-3; 2{,}5-1; 1{,}5+5) = (1; 1{,}5; 6{,}5)$. **Модуль этого вектора является расстоянием от точки** M **до заданной прямой:**

$$d = |\overline{MM}_*| = \sqrt{1^2 + (1{,}5)^2 + (6{,}5)^2} = \sqrt{45{,}5}.$$

9. Найти проекцию точки $M(x_m, y_m, z_m) = M(2; 1; -1)$ **на плоскость** $Ax + By + Cz = 0$**:** $3x + 2y - z + 5 = 0$ **и координаты точки** $S(x_s, y_s, z_s)$**, симметричной точке** M **относительно плоскости.**

Р е ш е н и е.

Запишем уравнение прямой, проходящей через точку M **и перпендикулярной заданной плоскости. В этом случае в качестве вектора, сонаправленного прямой, можно выбрать вектор** $\boldsymbol{N} = (A, B, C) = (3, 2, -1)$**, нормальный к плоскости. Представим искомое уравнение прямой в параметрическом виде:**

$$\begin{cases} x = x_m + At = 2 + 3t; \\ y = y_m + Bt = 1 + 2t; \\ z = z_m + Ct = -1 - t. \end{cases}$$

Найдем параметр t_p**, соответствующий точке** P **пересечения прямой и плоскости:**

$$t_p = -\frac{Ax_m + By_m + Cz_n + D}{A \cdot A + B \cdot B + C \cdot C} = -\frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 5}{3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1} = -1.$$

По известному параметру t_p **находим координаты точки** P **пересечения найденной прямой и плоскости:**

$$\begin{cases} x_p = x_m + At_p = 2 + 3 \cdot (-1) = -1; \\ y_p == y_m + Bt_p = 1 + 2 \cdot (-1) = -1; \\ z_p = z_m + Ct_p = -1 - 1 \cdot (-1) = 0. \end{cases}$$

Найденные координаты точки $P(-1, -1, 0)$ **— это координаты проекции точки** M **на заданную плоскость.**

Для определения координат точки S достаточно в параметрическое уравнение найденной рямой подставить удвоенное значение параметра t_p: $t_s = 2t_p = 2 \cdot (-1) = -2$:

$$\begin{cases} x_s = x_m + At_s = 2 + 3 \cdot (-2) = -4; \\ y_s = y_m + Bt_s = 1 + 2 \cdot (-2) = -3; \\ z_s = z_m + Ct_s = -1 - 1 \cdot (-2) = 1. \end{cases}$$

Таким образом $S(-4, -3, 1)$.

Заметим, что координаты точки S можно было найти по формулам деления отрезка пополам. Действительно, можно убедиться в том, что координаты точки P равны полусуммам соответствующих координат точек M и S.

10. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2:

$$l_1 : \begin{cases} x = 4t; \\ y = 1 - 2t; \\ z = 3 + t. \end{cases} ; \qquad l_2 : \begin{cases} x = 3 + 2t; \\ y = -2 + t; \\ z = 5 - t. \end{cases} .$$

Р е ш е н и е. Прямая l_1 проходит через точку $M_1(0, 1, 3)$, l_2 — через точку $M_2(3, -2, 5)$. Векторы, определяющие направления этих прямых: $\boldsymbol{s}_1 = (4, -2, 1)$, $\boldsymbol{s}_2 = (2, 1, -1)$.

Вектор $\boldsymbol{N} = (A, B, C)$ ортогонален одновременно векторам $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$ и может быть сопоставлен векторному произведению

$$\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k} = (1, 6, 8).$$

Принимаем $\boldsymbol{N} = (A, B, C) = (1, 6, 8)$,

Расстояние между прямыми l_1 и l_2 равно расстоянию между параллельными плоскостями, содержащими эти прямые и имеющими общую нормаль $\boldsymbol{N}$. Поэтому искомое расстояние равно модулю проекции вектора $\overline{M_1M_2} = (3 - 0, -2 - 1, 5 - 3) = (3, -3, 2)$ на направление вектора $\boldsymbol{N}$:

$$d = \left| Pr_{\boldsymbol{N}} \overline{M_1M_2} \right| = \frac{|1 \cdot 3 - 6 \cdot 3 + 8 \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + 6^2 + 8^2}} = \frac{1}{\sqrt{101}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Записать в каноническом и параметрическом видах уравнения прямой, проходящей через точку $A(1;-1;2)$ и:
а) точку $B(0;-3;1)$;
б) параллельной прямой ℓ: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+3}{0}$;
в) перпендикулярной плоскости $\wp$: $2x-y+3z-1=0$.

Найти:
г) синус угла между ℓ и $\wp$;
д) координаты точки M пересечения ℓ и $\wp$;
е) координаты точки M_*, симметричной A относительно точки M.

2. Заданы координаты вершин треугольника $A(1;2;-1)$, $B(1;0;3)$, $C(3;2;-1)$. Записать уравнения прямых, выходящих из точки A:
а) медианы;
б) параллельной BC;
в) перпендикулярной плоскости треугольника ABC.

3. Заданы уравнения двух плоскостей:

$$\wp_1\colon\ 2x-3y+z+2=0 \quad \text{и} \quad \wp_2\colon\ -x+y-z=0.$$

Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(3;-2;0)$:
а) параллельную плоскостям $\wp_1$ и $\wp_2$;
б) перпендикулярную плоскости $\wp_1$.

4. Найти координаты точки M_*, являющейся проекцией M предыдущей задачи на плоскость $\wp_1$.

5. Составить уравнение прямой, являющейся геометрическим местом точек пересечения плоскостей $\wp_1$ и $\wp_2$ задачи 3.

Глава 8

Кривые и поверхности

8.1. Уравнения второго порядка в $\Re_2$

В отличие от математических моделей прямых и плоскостей, которые представляются в виде уравнений первого порядка, математические модели кривых и поверхностей общего вида описываются уравнениями, содержащими переменные в степенях, превышающих единицу.

Общее уравнение кривой второго порядка в $\Re_2$ (на плоскости):

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{8.1}$$

Переменные x и y — это координаты произвольных точек на плоскости в декартовой ортогональной системе координат. Множитель 2 во втором слагаемом обусловлен тем, что присутствующие в такого рода суммах слагаемые B_1xy и B_2yx для математических моделей геометрических объектов можно объединить, вводя обозначение $2B = B_1 + B_2$.

Преобразуем уравнение (8.1) к новой системе координат $\tilde{x}\tilde{y}$, повернутой относительно исходной системы xy на угол α против часовой стрелки относительно начала координат. Формулы преобразования координат полученны в § 5.7. В нашей задаче требуется выразить координаты исходного базиса через координаты нового базиса — преобразование, обратное по отношению к (5.56). В обозначениях этого параграфа упомянутое преобразование координат:

$$\begin{cases} x = \tilde{x}\cos\alpha + \tilde{y}\sin\alpha, \\ y = -\tilde{x}\sin\alpha + \tilde{y}\cos\alpha. \end{cases} \tag{8.2}$$

Описанное преобразование было проделано в § 5.14. В упомянутом параграфе была получена формула (5.93)

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A-C}{2B}$$

Если систему координат повернуть на угол α, определенный по этой формуле, то слагаемое с произведением координат в квадратичной форме исчезает.

При этом уравнение (8.1) примет вид

$$\tilde{A}\tilde{x}^2 + \tilde{C}\tilde{y}^2 + \tilde{D}\tilde{x} + \tilde{E}\tilde{y} + F = 0, \tag{8.3}$$

где (5.92):

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= A\cos^2\alpha + B\sin 2\alpha + C\sin^2\alpha;\\
\tilde{C} &= A\sin^2\alpha - B\sin 2\alpha + C\cos^2\alpha;\\
\tilde{D} &= D\cos\alpha + E\sin\alpha;\\
\tilde{E} &= E\cos\alpha - D\sin\alpha.
\end{aligned} \tag{8.4}$$

Для дальнейшего преобразования уравнения (8.3) сгруппируем в нем слагаемые с одинаковыми переменными, дополнив их до полных квадратов. Для сохранения равенства «дополнительные» слагаемые запишем и в правой части уравнения, перенеся в нее F :

$$\tilde{A}\left(\tilde{x}^2 + 2\frac{\tilde{D}}{2\tilde{A}}\tilde{x} + \frac{\tilde{D}^2}{4\tilde{A}^2}\right) + \tilde{C}\left(\tilde{y}^2 + 2\frac{\tilde{E}}{2\tilde{C}}\tilde{y} + \frac{\tilde{E}^2}{4\tilde{C}^2}\right) = \frac{\tilde{D}^2}{4\tilde{A}} + \frac{\tilde{E}^2}{4\tilde{C}} - F.$$

При условии $\tilde{F} = \dfrac{\tilde{D}^2}{4\tilde{A}} + \dfrac{\tilde{E}^2}{4\tilde{C}} - F \neq 0$ **поделим полученное уравнение на** $\tilde{F}$, **свернем выражения в скобках до квадратов сумм, а множители при них переведем в знаменатели:**

$$\frac{\left(\tilde{x} + \dfrac{\tilde{D}}{2\tilde{A}}\right)^2}{\tilde{F}/\tilde{A}} + \frac{\left(\tilde{y} + \dfrac{\tilde{E}}{2\tilde{C}}\right)^2}{\tilde{F}/\tilde{C}} = 1.$$

Вводя обозначения для новых переменных и постоянных:

$$\mathrm{x} = \tilde{x} + \frac{\tilde{D}}{2\tilde{A}}; \qquad \mathrm{y} = \tilde{y} + \frac{\tilde{E}}{2\tilde{C}};$$

$$\frac{\tilde{F}}{\tilde{A}} = \pm a^2; \qquad \frac{\tilde{F}}{\tilde{C}} = \pm b^2,$$

перепишем исследуемое уравнение в виде

$$\pm\frac{\mathrm{x}^2}{a^2}\pm\frac{\mathrm{y}^2}{b^2}=1.$$

Понятно, что введение новых переменных x и y равносильно параллельному переносу координатной системы $\tilde{x}\tilde{y}$ в новый центр с координатами $\tilde{x}_0=-\dfrac{\tilde{D}}{2\tilde{A}}$ и $\tilde{y}_0=-\dfrac{\tilde{E}}{2\tilde{C}}$. В зависимости от знаков, стоящих при слагаемых последнего уравнения, из него получаются уравнения:
эллипса

$$\frac{\mathrm{x}^2}{a^2}+\frac{\mathrm{y}^2}{b^2}=1 \tag{8.5}$$

и *гиперболы*

$$\frac{\mathrm{x}^2}{a^2}-\frac{\mathrm{y}^2}{b^2}=1 \qquad \text{или} \qquad -\frac{\mathrm{x}^2}{a^2}+\frac{\mathrm{y}^2}{b^2}=1. \tag{8.6}$$

Если уравнение (8.3) не содержит квадрата одной из переменных ($\tilde{A}$ или $\tilde{C}$ равны нулю), то параллельным переносом координат его можно привести к уравнению *параболы*:

$$\mathrm{x}^2=2q\mathrm{y} \qquad \text{или} \qquad \mathrm{y}^2=2p\mathrm{x}. \tag{8.7}$$

Уравнения (8.5)–(8.7) называются *каноническими уравнениями кривых* соответственно *эллипса, гиперболы* и *параболы.*

Других кривых, описываемых уравнениями второго порядка, не существует.

По виду канонического уравнения легко определить тип кривой второго порядка. Тем не менее это можно сделать, по знаку определителя коэффициентов квадратичной формы общего уравнения (8.1). Уравнение описывает следующие типы кривых

$$\text{если } \Delta=\begin{vmatrix} A & B\\ B & C\end{vmatrix}=AC-B^2 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} >0 & - \text{ эллипс,}\\ <0 & - \text{ гипербола,}\\ =0 & - \text{ парабола.}\end{cases}$$

Пример 1. Привести к каноническому виду уравнение $9x^2+16y^2-54x+64y+1=0$.

Р е ш е н и е. Так как $\Delta=AC-B^2=9\cdot 16-0^2>0$, то заданное уравнение описывает эллипс.

В уравнении отсутствует слагаемое, содержащее произведение переменных. Поэтому его приведение к каноническому виду сведется лишь к параллельному переносу осей координат.

Для осуществления этого переноса сгруппируем слагаемые, зависящие только от одной переменной, дополняя их постоянными слагаемыми до полного квадрата. Чтобы не нарушить равенства, такие же слагаемые добавим в правую часть уравнения, перенося туда же свободный член:

$$9(x^2 - 6x + 9) + 16(y^2 + 4y + 4) = 81 + 64 - 1.$$

Следует обратить внимание на то, что множители, стоящие при квадратах переменных, должны быть обязательно вынесены за скобки. В противном случае будет изменяться масштаб координат (координаты будут сокращаться или удлиняться).

Поделив полученное уравнение на 144$=12^2$, **группируя слагаемые в скобках и переводя множители, стоящие перед скобками, в знаменатели, получим**

$$\frac{(x-3)^2}{4^2} + \frac{(y+2)^2}{3^2} = 1.$$

Это уравнение эллипса, собственные оси координат которого смещены вправо от исходных координат на 3 единицы и вниз — на 2 единицы. Так что новые (собственные) оси координат эллипса выражаются через исходные соотношениями

$$\mathbf{x} = x - 3, \qquad \mathbf{y} = y + 2.$$

Пример 2. Привести к каноническому виду уравнение

$$16x^2 + 24xy + 9y^2 - 140x + 20y - 200 = 0.$$

Р е ш е н и е. Для удобства преобразований выпишем коэффициенты уравнения, следуя обозначениям (8.1): $A = 16,\ 2B = 24,\ C = 9,$ $D = -140,\ E = 20,\ F = -200.$

Найдем определитель коэффициентов квадратичной формы:

$$\Delta = AC - B^2 = 16 \cdot 9 - 12^2 = 0\ -$$

Исходное уравнение описывает параболу.

1. Найдем котангенс удвоенного угла поворота осей координат (5.93):

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{2B} = \frac{19 - 9}{24} = \frac{7}{24}.$$

Для определения коэффициентов уравнения в системе координат, повернутой на угол α, **следует правильно сориентировать «повернутую систему координат» и найти тригонометрические функции, необходимые для вычисления коэффициентов (8.4) нового уравнения кривой (8.3).**

Используя зависимость $\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha}$, **получим из нее квадратное уравнение для определения** $\operatorname{tg} \alpha$**:**

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \operatorname{ctg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha - 1 = 0,$$

или с учетом найденного выше значения для $\operatorname{ctg} 2\alpha$**:**

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{7}{12} \operatorname{tg} \alpha - 1 = 0.$$

Решая уравнение, находим два корня: $\operatorname{tg} \alpha_1 = -4/3$ **и** $\operatorname{tg} \alpha_2 = 3/4$.

Эти значения определяют на плоскости два взаимно ортогональных направления, показанных на рис. 8.1. Выбор любого из них в качестве направления для новой оси координат $\tilde{x}$ **приведет в конечном итоге к одинаковому результату, касающемуся расположения кривой на плоскости. Тем не менее второе значение угла дает положительный угол поворота и только поэтому отдаем ему предпочтение, т.е. принимаем** $\operatorname{tg} \alpha = 3/4$.

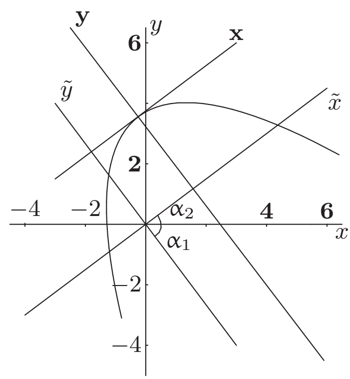


Рис. 8.1. Парабола в трех системах координат

Так как $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$, **то при известном значении** $\operatorname{tg} \alpha$ **отсюда имеем уравнение для определения** $\sin \alpha$**:**

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{3}{4} \implies \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{9}{16}$$

$$\implies \quad \sin^2 \alpha = \left(\frac{3}{5}\right)^2.$$

Из последнего уравнения получаем два решения: $\sin \alpha = \pm \dfrac{3}{5}$.

Для определения косинуса угла α **используем известную из тригонометрии зависимость**

$$\cos \alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} =$$
$$= \pm\sqrt{1 - \left(\pm\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\frac{4}{5}.$$

Из соображений положительности угла α **принимаем:**

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \qquad \cos \alpha = \frac{4}{5}.$$

2. По формулам (8.4) находим коэффициенты

$$\tilde{A} = A\cos^2\alpha + B\sin 2\alpha + C\sin^2\alpha = 16\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2 + 24\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} + 9\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 25,$$

$$\tilde{C} = A\sin^2\alpha - B\sin 2\alpha + C\cos^2\alpha = 16\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 24\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} + 9\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2 = 0,$$

$$\tilde{D} = D\cos\alpha + E\sin\alpha = -140\cdot\frac{4}{5} + 20\cdot\frac{3}{5} = -100,$$

$$\tilde{E} = E\cos\alpha - D\sin\alpha = 20\cdot\frac{4}{5} + 140\cdot\frac{3}{5} = 100.$$

Подставив найденные коэффициенты в (8.3) и поделив полученное уравнение на 25, приходим к уравнению

$$\tilde{x}^2 - 4\tilde{x} + 4\tilde{y} - 8 = 0.$$

3. Для определения положения следующей системы координат прибавим к уравнению и вычтем из него цифру 4 (чтобы получить квадрат разности для переменной $\tilde{x}$). Разделяя переменные, запишем:

$$\tilde{x}^2 - 4\tilde{x} + 4 = -4\tilde{y} + 12,$$

или

$$(\tilde{x} - 2)^2 = -4(\tilde{y} - 3).$$

4. Введем новые координаты xy, параллельные координатам $\tilde{x}\tilde{y}$ с началом отсчета в точке $\tilde{x}_0 = 2$ и $\tilde{y}_0 = 3$:

$$\mathrm{x} = \tilde{x} - 2, \qquad \mathrm{y} = \tilde{y} - 3.$$

В новых координатах уравнение кривой приводится к каноническому виду:

$$\mathrm{x}^2 = -4\mathrm{y}.$$

Это уравнение параболы, симметричной относительно оси y с ветвями, направленными в сторону ее отрицательных значений. На рис. 8.1 изображены исследуемая кривая (парабола) и три координатные системы, каждой из которых соответствуют различные уравнения одной и той же (!) кривой.

8.2. Свойства кривых второго порядка

В предыдущем параграфе говорилось об инвариантности геометрических объектов по отношению к преобразованию координат. Там же приведены канонические уравнения (8.5)–(8.7) всех трех видов кривых второго порядка.

Приведем независимые от вводимых систем координат определения кривых второго порядка и опишем их основные свойства.

8.2.1. Эллипс и его свойства

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2, называемых *фокусами*, есть величина постоянная ($2a$).

Согласно определению сумма модулей векторов $\overline{F_1M} = \boldsymbol{r}_1$ и $\overline{F_2M} = \boldsymbol{r}_2$ (рис. 8.2) равна $2a$ (M — точка, лежащая на эллипсе):

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{8.8}$$

Уравнение (8.8) не привязано ни к какому базису и, следовательно, ни к какой системе координат. Это уравнение эллипса инвариантно по отношению к выбору систем координат.

Для преобразования уравнения к каноническому виду введем *собственную систему координат*. Ось x собственной системы направим по вектору $\overline{F_1F_2}$, ось y проведем через середину отрезка F_1F_2 перпендикулярно оси x.

На рис. 8.2 показан эллипс со связанной с ним *собственной системой координат*.

Обозначим расстояние между фокусами $F_1F_2 = 2c$. Заметим, что два параметра (a и c) полностью характеризуют эллипс с точностью до его расположения в пространстве.

Во введенной собственной (декартовой ортогональной) системе координаты характерных точек: $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, $M(x, y)$. Тогда $\boldsymbol{r}_1 = \overline{F_1M} = (x + c, y)$, $\boldsymbol{r}_2 = \overline{F_2M} = (x - c, y)$.

Подставим значения модулей записанных векторов в уравнение (8.8) и перенесем второе слагаемое в правую часть уравнения:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Чтобы избавиться от радикалов, возведем обе части записанного равенства в квадрат:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2,$$

или

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Чтобы избавиться от корня, повторно возведем равенство в квадрат. После приведения подобных получим

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Вводя новый параметр

$$b^2 = a^2 - c^2 \qquad (a > c),$$

придем к равенству

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Поделив обе части последнего равенства на a^2b^2, приходим к *каноническому уравнению эллипса*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{8.9}$$

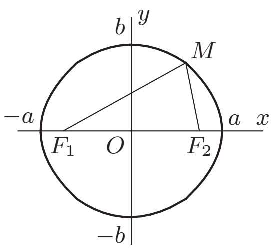


Рис. 8.2. Эллипс

Так как каноническое уравнение (8.9) получено после того как исходное уравнение (8.8) дважды возводилось в квадрат, то (8.9) может содержать лишние корни. В этом случае координаты точек, которые удовлетворяют уравнению (8.9), не будут удовлетворять исходному уравнению.

Убедимся в том, что этого не будет.

Пусть координаты x и y некоторой точки удовлетворяют уравнению (8.9). Подставим найденную из этого уравнения переменную $y^2 = b^2\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$ в выражение

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

После преобразований получим

$$r_1 = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2}.$$

Так как $|x| < a$, что следует из (8.9), и $\dfrac{c}{a} < 1$, то $a + \dfrac{c}{a} > 0$. В этом случае $r_1 = a + \dfrac{c}{a}x$.

Аналогично найдем $r_2 = a - \dfrac{c}{a}x$. Складывая два последних равенства, получаем $r_1 + r_2 = 2a$.

Таким образом, любая точка, удовлетворяющая каноническому уравнению эллипса, принадлежит эллипсу и наоборот.

Опишем некоторые основные характеристики и свойства эллипса.

1. Постоянные a и b называются *полуосями эллипса*.

При $y{=}0$ из уравнения эллипса получим $x{=}\pm a$, а при $x{=}0$ — $y{=}\pm b$. То есть a и b — это отрезки, отсекаемые эллипсом на осях координат.

2. Координаты фокусов $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, где

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

при условии, что a **— бóльшая полуось эллипса. Величина** $2c$ **— расстояние между фокусами.**

3. Можно ввести параметр t**, связанный с переменными** x **и** y **соотношениями**

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \tag{8.10}$$

которые называются параметрическими уравнениями эллипса.

При подстановке (8.10) в каноническое уравнение (8.9) последнее обращается в тождество.

4. Величина

$$e = \frac{c}{a}$$

называется *эксцентриситетом* **эллипса** $e \in [0, 1)$.

При $e = 0$ $(a = b = R)$ **эллипс превращается в окружность:**

$$x^2 + y^2 = R^2;$$

при $e \to 1$ $(b \to 0)$ **эллипс приближается к прямой.**

Читателю предлагается самостоятельно исследовать уравнение эллипса, установив области определения переменных, интервалы возрастания и убывания, симметричность относительно координат. В справедливости проведенных исследований можно убедиться, сопоставляя их с изображенным на рис. 8.2 эллипсом.

8.2.2. Гипербола и ее свойства

Гиперболой называется геометрическое место точек, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек F_1 **и** F_2**, называемых** *фокусами***, есть величина постоянная** $(2a)$.

Если M **— произвольная точка, принадлежащая гиперболе и** $\boldsymbol{r}_1 = \overline{F_1M}$ $\boldsymbol{r}_2 = \overline{F_2M}$**, то уравнение гиперболы, инвариантное по отношению к выбору систем координат**

$$|r_1 - r_2| = 2a. \tag{8.11}$$

Введение собственной системы координат, аналогичной эллипсу, и преобразования, аналогичные проделанным в 8.2.1, приводят к *каноническому уравнению гиперболы***:**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{8.12}$$

На рис. 8.3 изображена гипербола с *собственными осями координат***.**

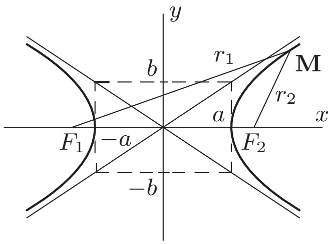


Рис. 8.3. Гипербола

Рассмотрим основные характеристики и свойства гиперболы.

1. Постоянные a **и** b **называются** *полуосями гиперболы***. При** $y = 0$ **имеем** $x = \pm a$**. При** $x = 0$ **получаем мнимые корни** $y = \pm\sqrt{-b^2}$**, т.е. гипербола не пересекает ось** y**, которая называется мнимой осью гиперболы (**x **— действительная ось).**

2. Координаты фокусов: $F_1(-c;0)$**,** $F_2(c;0)$**, где**

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Расстояние между фокусами равно $2c$.

3. Можно ввести параметр t **такой, что**

$$\begin{cases} x = a\ cht = a\left(e^t + e^{-t}\right)/2, \\ y = b\ sht = b\left(e^t - e^{-t}\right)/2. \end{cases} \tag{8.13}$$

При таких значениях переменных x **и** y **уравнение гиперболы превращается в тождество.**

Уравнения (8.13) называются *параметрическими уравнениями гиперболы.*

Функции ch$t$ **и sh**t — *гиперболические косинус* и *синус.* **Их название определило название кривой.**

4. Величина

$$e = \frac{c}{a}$$

называется *эксцентриситетом гиперболы.* **Для гиперболы эксцентриситет**

$$e \in (1;\infty).$$

Эксцентриситет характеризует степень отклонения точек гиперболы от оси x**. При** $e{\to}1$ $(b \to 0)$ **ветви гиперболы стремятся к оси** x**; при** $e{\to}\infty$ $(b \to \infty)$ **– к прямым** $x = \pm a$**, перпендикулярным оси** x**.**

5. Гипербола имеет две асимптоты. Это прямые

$$y = \pm\frac{b}{a}x,$$

проходящие через начало координат и вершины прямоугольника со сторонами $2a$ **и** $2b$**, изображенного пунктиром на рис. 8.3.**

Гипербола

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

для которой ось x **является мнимой, называется сопряженной по отношению к (8.12). Асимптоты у обеих гипербол общие.**

Читателю предлагается самостоятельно исследовать гиперболу, определив интервалы возрастания и убывания, симметричность осям координат, области определения переменных.

8.2.3. Парабола и ее свойства

Параболой называется геометрическое место точек, расстояния от которых до некоторой фиксированной точки F, **называемой** *фокусом параболы*, **равны расстоянию до фиксированной прямой, называемой** *директрисой.*

Выбрав на параболе произвольную точку M **и обозначив проекцию точки** M **на директрису через** D **(рис. 8.4), согласно определению параболы запишем равенство:**

$$|\overline{DM}|=|\overline{FM}|. \tag{8.14}$$

Это и есть уравнение параболы, не зависящее от систем координат.

Введем *собственную* **(декартову)** *систему координат* **параболы таким образом, чтобы ее ось** x **расположилась ортогонально директрисе и проходила через точку** F**. Положительным считаем направление от директрисы к фокусу. Ось** y **проведем перпендикулярно оси** x **через середину отрезка между директрисой и фокусом в направлении, соответствующем правой системе координат.**

Обозначим расстояние между директрисой и фокусом через p **— единственный параметр, который с точностью до ориентации в пространстве определяет параболу. Тогда координаты фокуса** $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, **а уравнение директрисы** $x=-\frac{p}{2}$**. Пусть координаты произвольной точки** $M(x,y)$**.**

Задание координат точек $M(x,y)$, $D\left(-\frac{p}{2},y\right)$ **и** $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, **которые образуют векторы в равенстве (8.14), позволяет записать выражения для этих векторов:**

$$\overline{DM}=\left(x+\frac{p}{2},y-y\right)=\left(x+\frac{p}{2},0\right);\quad \overline{FM}=\left(x-\frac{p}{2},y-0\right)=\left(x-\frac{p}{2},y\right)$$

и найти квадраты их модулей:

$$|\overline{DM}|^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + 0^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2; \qquad |\overline{FM}|^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2.$$

Приравняем, следуя (8.14), полученные выражения:

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2.$$

Отсюда, приводя подобные, приходим к каноническому уравнению параболы:

$$y^2 = 2px. \tag{8.15}$$

На рис. 8.4 изображена парабола с собственными координатами.

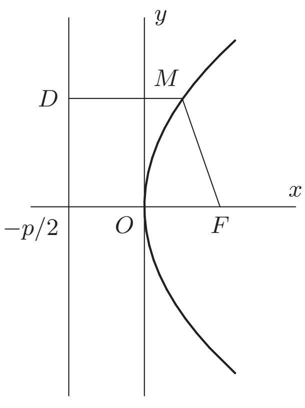


Рис. 8.4. Парабола

Отметим некоторые свойства и характеристики параболы.

1. Парабола проходит через начало координат — точку $O(0;0)$ ($y = 0$ при $x = 0$), называемую *вершиной параболы*.

2. Парабола симметрична относительно оси x.

3. Директрисой является прямая

$$x = -\frac{p}{2},$$

ортогональная оси x и находящаяся от начала собственной системы координат на таком же расстоянии, что и фокус.

4. Эксцентриситет параболы равен единице. Этот факт доказывается, если уравнения кривых второго порядка представить в полярной системе координат (x, α), где α — угловая координата, отсчитываемая от направления оси x.

5. Важным свойством параболы, определяющим ее широкое применение в рефлекторах осветительных и других волновых приборах, является ее оптическое свойство: луч, выходящий из фокуса, отражается от линии параболы в направлении, перпендикулярном директрисе.

Рассмотрим несколько примеров решений задач, основанных на использовании свойств кривых второго порядка.

Пример 1. Составить уравнение кривой второго порядка, если известно, что в ее собственных координатах кривая проходит через две точки (2;2) и (3;1).

Р е ш е н и е. Заметим, что обе точки находятся в первой координатной четверти. Координата x второй точки больше координаты x первой точки $(3 > 2)$, а координата y второй точки меньше координаты y первой точки $(1 < 2)$. Поэтому функция, описывающая кривую, убывающая.

Из трех функций, описывающих кривые второго порядка в собственных координатах, только эллипс обладает таким свойством. Поэтому кривая описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Обозначая $A = 1/a^2$, $B = 1/b^2$ и подставляя в уравнение эллипса последовательно координаты первой и второй точек, придем к системе двух уравнений:

$$\begin{cases} 4A + 4B = 1, \\ 9A + 1B = 1. \end{cases}$$

Решая уравнение, найдем $A = 1/a^2 = 3/32$, $B = 1/b^2 = 5/32$.

Искомое каноническое уравнение эллипса примет вид:

$$\frac{x^2}{(8/\sqrt{6})^2} + \frac{y^2}{(8/\sqrt{10})^2} = 1.$$

Пример 2. Записать уравнение кривой второго порядка, проходящей через точку (1;2) и имеющей асимптоты $y = \pm\frac{1}{2}x$.

Р е ш е н и е. Среди кривых второго порядка только гипербола имеет асимптоты. Гипербола может иметь два вида канонических уравнений в зависимости от того, какая из координат является мнимой:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{или} \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Сравнивая общее уравнение асимптот $y = \pm\frac{b}{a}x$ с заданным, получим $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, или $a = 2b$.

При этих зависимостях между a и b и между координатами заданной точки первое из возможных уравнений гиперболы не имеет решений. Поэтому за исходное принимаем второе из записанных выше уравнений гиперболы. Подставим в него равенство $a = 2b$:

$$-\frac{x^2}{4} + y^2 = b^2.$$

Запишем условие того, что кривая проходит через точку с координатами (1;2): $-\frac{1^2}{4}+2^2=b^2$. **Отсюда** $b^2=15/4$.

Тогда $a^2=4b^2=4\cdot\frac{15}{4}=15$.

Окончательно запишем каноническое уравнение гиперболы:

$$-\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{15/4}=1.$$

Пример 3. Записать каноническое уравнение кривой, расстояние от каждой точки которой до фиксированной точки равно расстоянию до фиксированной прямой. Расстояние от фиксированной точки до прямой равно 8.

Р е ш е н и е. По условию заданная кривая — парабола с параметром $p=8$. **Возможны четыре варианта решения для параболы, представимой в собственных осях координат:**

$$y^2=\pm16x; \qquad x^2=\pm16y.$$

Все четыре уравнения удовлетворяют условиям задачи.

8.3. Поверхности второго порядка

Геометрическими образами квадратных уравнений в пространстве $\Re_3$ **являются поверхности. Количество различных видов поверхностей (как и кривых) второго порядка ограничено. Каждая из поверхностей преобразованием координат (параллельным переносом и поворотами вокруг трех осей) может быть приведена к каноническому виду, где ее математическая модель имеет характерный вид.**

Рассмотрим все типы поверхностей второго порядка. Они изображены на рис. 8.5 вместе с собственными осями координат.

1. Цилиндрические поверхности — это поверхности, образованные параллельным переносом прямой, *образующей цилиндра,* **вдоль некоторой кривой, называемой** *направляющей цилиндра***.**

Так как речь идет о поверхностях второго порядка, то направляющая может быть либо эллипсом (в частном случае окружностью), либо гиперболой, либо параболой. Соответствующие поверхности будут называться *эллиптическим (в частности, круговым)* **(рис. 8.5,а),** *гиперболическим* **(рис. 8.5,б) и** *параболическим* **(рис. 8.5,в)** *цилиндрами***.**

Канонические уравнения соответствующих цилиндрических поверхностей не содержат одну из координат — ту координату,

параллельно которой располагается образующая цилиндрической поверхности. Поэтому уравнения изображенных на рис. 8.5 цилиндрических поверхностей имеют в $\Re_3$ (!), соответственно, вид:

$$\text{а) } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \quad \text{б) } -\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1; \quad \text{в) } z^2=2px. \tag{8.16}$$

2. Поверхности вращения. Характерной особенностью этих поверхностей является наличие в их уравнениях слагаемых с квадратами двух переменных, имеющих одинаковые коэффициенты. В этом случае в сечениях поверхностей плоскостями, перпендикулярными третьей координате (третья координата — постоянная величина), получаются окружности.

Например,
$x^2+y^2-cz=0$ **— поверхность, образованная вращением параболы** $x^2=cz$ **(или** $y^2=cz$**) вокруг оси** z;
$x^2+y^2=cz^2$ **— круговой конус (рис. 8.5,г), образованный вращением прямой** $x=Cz$ ($y=Cz$) **вокруг оси** z $(c=C^2)$.

3. Конические поверхности. Уравнения этих поверхностей, записанных в собственной системе координат, содержат только слагаемые с квадратами трех переменных. Свободный член равен нулю и одно из слагаемых входит в сумму со знаком, противоположным двум другим слагаемым. На рис. 8.5,г изображена коническая поверхность, описываемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{8.17}$$

В сечениях этих поверхностей координатными плоскостями (для поверхности (8.17) $x=0$ **и** $y=0$**) получаются пары прямых типа**

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{z^2}{c^2}, \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{a}=\pm\frac{z}{c}.$$

При $a=b$ **коническая поверхность становится круговой.**

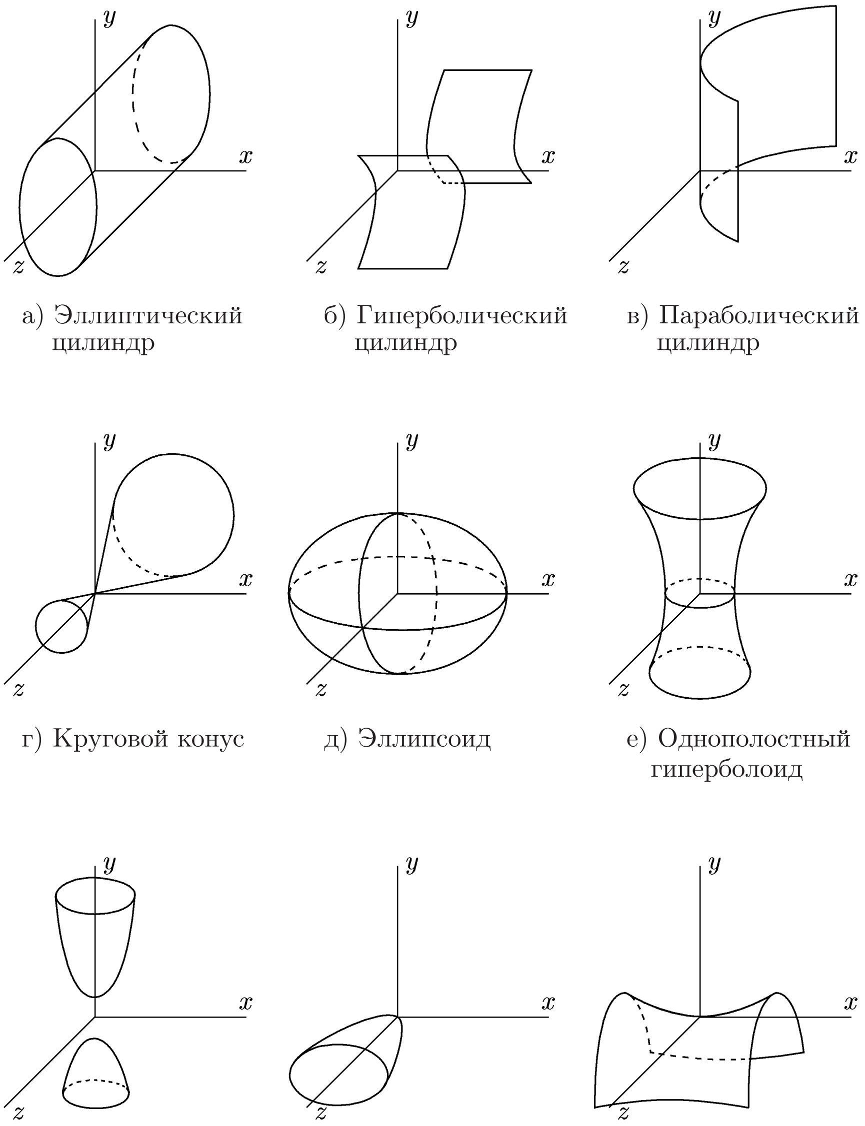
4. Эллипсоид — это геометрическое место точек в $\Re_3$, **удовлетворяющих каноническому уравнению (рис. 8.5,д):**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{8.18}$$

В сечениях этой поверхности плоскостями $x=0$, $y=0$ **и** $z=0$ **получаются эллипсы.**

5. Однополостный гиперболоид — геометрическое место точек в $\Re_3$, **удовлетворяющих каноническому уравнению (рис. 8.5,е):**

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{8.19}$$



а) Эллиптический цилиндр

б) Гиперболический цилиндр

в) Параболический цилиндр

г) Круговой конус

д) Эллипсоид

е) Однополостный гиперболоид

ж) Двухполостный гиперболоид

з) Эллиптический параболоид

и) Гиперболический параболоид

Рис. 8.5. Поверхности второго порядка

Минус в канонических уравнениях однополостных гиперболоидов может стоять только перед одним из слагаемых уравнения. Переменная, перед которой стоит минус, определяет *мнимую ось* **гиперболоида.**

В сечениях поверхности координатными плоскостями $x=0$ и $z=0$ получаются гиперболы; $y = \pm h$ (в том числе $h = 0$) — эллипсы.

6. Двухполостный гиперболоид — геометрическое место точек в $\Re_3$, удовлетворяющих каноническому уравнению (рис. 8.5,ж):

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{8.20}$$

Отрицательные слагаемые этого уравнения определяют координаты плоскости $y = 0$, которую не пересекает поверхность гиперболоида.

В сечениях поверхности координатными плоскостями $x = 0$ и $z = 0$ получаются гиперболы; $y = \pm h$ $(h > b)$ — эллипсы.

7. Эллиптический параболоид — геометрическое место точек в $\Re_3$, удовлетворяющих каноническому уравнению (рис. 8.5,з):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = pz. \tag{8.21}$$

В сечениях поверхности координатными плоскостями $x=0$ и $y=0$ получаются параболы; сечение $z = 0$ определяет точку (0;0;0) — вершину параболоида; $z = h > 0$ — эллипсы.

8. Гиперболический параболоид — геометрическое место точек в $\Re_3$, удовлетворяющих каноническому уравнению (рис. 8.5,и):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = by. \tag{8.22}$$

Для канонического уравнения этой поверхности характерно то, что слагаемые с квадратами координат имеют противоположные знаки, а третья координата входит в уравнение в первой степени.

Для анализа форм поверхностей широко используется метод сечений. Метод в виде сечений координатными плоскостями применялся выше. В общем поверхности можно рассекать плоскостями, параллельными координатным плоскостям, или даже плоскостями общего вида.

Так, при $x = \pm d$ из (8.22) получим

$$z^2 = -2p(y - y_0),$$

где $p = \dfrac{1}{2}bc^2$, $y_0 = \dfrac{d^2}{a^2 b}$.

Полученные в двух сечениях кривые представляют собой параболы, ветви которых направлены в сторону отрицательных y, а вершины смещены в сторону положительных y на величину y_0. Кривые, соответствующие обсуждаемому уравнению параболы, показаны на рис. 8.5,и — это крайние правое и левое сечения.

Других поверхностей второго порядка, кроме перечисленных, не существует.

Записанные в произвольных координатах поверхности второго порядка в $\Re_3$ и гиперповерхности в $\Re_n$ содержат слагаемые с произведениями координат. Существует рассмотренный в § 8.1 метод приведения этих уравнений к каноническому виду (содержащему только квадраты переменных).

Квадратичные формы уравнений поверхностей можно привести к каноническому виду путем их записи в ортогональных координатах, совпадающих по направлению с собственными векторами.

8.4. Резюме

Уравнения аналитической геометрии описывают не только представленные линейные модели, но и поверхности в пространствах различной размерности. Уравнения таких «гиперповерхностей» представляют собой, в частности, полиномы различных степеней с n переменными. Для двух переменных квадратное уравнение

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

описывает в зависимости от коэффициентов три вида кривых: эллипс, гиперболу и параболу (при $A = B = C = 0$ — прямую на плоскости).

Преобразования координат (поворот и параллельное перемещение) позволяют найти собственные координаты кривых, в которых уравнения кривых имеют канонический вид:

эллипс: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1;$

гипербола: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1;$

парабола: $y^2 = 2px.$

Существует универсальный метод приведения квадратных уравнений к каноническому виду. Метод базируется на определении собственных значений и собственных векторов матриц коэффициентов квадратичных форм, входящих в уравнения поверхностей.

Более глубокое изложение основ аналитической геометрии приведено, например, в [5].

8.5. Вопросы

1. **Запишите общее уравнение кривых второго порядка на плоскости. Перечислите все возможные виды кривых второго порядка на плоскости.**
2. **Как определить тип кривой по значению определителя матрицы квадратичной формы?**
3. **Запишите канонические уравнения всех кривых второго порядка на плоскости.**
4. **Изобразите эллипс. Поясните на рисунке значения параметров, определяющих эллипс. Запишите параметрические уравнения. Убедитесь в том, что эти уравнения являются решениями канонического уравнения эллипса.**
5. **Изобразите гиперболу. Поясните на рисунке значения параметров, определяющих гиперболу. Запишите параметрические уравнения гиперболы. Убедитесь в том, что эти уравнения являются решениями канонического уравнения.**
6. **Что определяет эксцентриситет в уравнениях кривых второго порядка? В каких пределах он изменяется для эллипса и гиперболы?**
7. **Изобразите параболу. Поясните на рисунке значения параметров, определяющих параболу. В чем состоит оптическое свойство параболы?**
8. **Перечислите все возможные виды поверхностей второго порядка. Приведите их канонические уравнения. Изобразите поверхности на рисунках. Обратите внимание на согласованность ориентации координат с записью уравнений.**
9. **Как привести к каноническому виду квадратное уравнение, которое содержит линейные слагаемые?**

Вопросы для тестирования

Во всех заданиях необходимо расставить номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка). В местах отсутствия соответствия поставьте цифру 5.

1. По отношению к уравнению $Ax^2+2Bxy+Cy^2=0$ **и** $\Delta = AC-B^2$**:**

1. Эллипс	**1.** $\Delta < 0$;
2. Гипербола	**2.** $\Delta = 0$;
3. Парабола	**3.** $\Delta > 0$;
4. Окружность	**4.** $A = C$.

2. По отношению к признакам кривых и их названиям:

1. Сумма расстояний от точек до фокусов постоянна	**1. Эллипс;**
2. Модуль разности расстояний от точек до фокусов постоянен	**2. Гипербола;**
3. Фокусы совпадают	**3. Парабола;**
4. Расстояния от точек до фокуса равны расстояниям до директрисы	**4. Окружность.**

3. По отношению к названиям кривых и их каноническим уравнениям:

1. Эллипс	**1.** $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$;
2. Гипербола	**2.** $x^2=2py$;
3. Парабола	**3.** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;
4. Пара прямых	**4.** $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

4. По отношению к названиям поверхностей и их каноническим уравнениям:

1. Двухполостный гиперболоид	**1.** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$;
2. Эллиптический конус	**2.** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=pz$;
3. Эллиптический параболоид	**3.** $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$;
4. Цилиндрическая поверхность	**4.** $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$.

ТЕМА 8.1
(§ 8.1–8.2 теории)
Кривые второго порядка
Вопросы

1. Запишите общее уравнение кривых второго порядка на плоскости.

2. По какой формуле и как по значениям коэффициентов общего уравнения кривой второго порядка определить вид кривой?

3. Перечислите все возможные виды кривых второго порядка на плоскости. Запишите их канонические уравнения.

4. Изобразите эллипс. Поясните на рисунке значения параметров, определяющих эллипс.

5. Изобразите гиперболу. Поясните на рисунке значения параметров и характеристик, определяющих гиперболу.

6. Что определяет эксцентриситет в уравнениях кривых второго порядка? В каких пределах он изменяется для эллипса и гиперболы?

7. Изобразите параболу. Поясните на рисунке значение параметра, определяющего параболу. В чем состоит оптическое свойство параболы?

Задачи

Заданные в пунктах 1–3 уравнения второго порядка привести к каноническому виду. Определить характеристики кривых (эксцентриситет, полуоси, асимптоты, координаты фокусов и вершин, уравнение директрисы).

1. $4x^2 + y^2 + 16x - 2y + 1 = 0$.
Решение. Сравнивая заданное уравнение с общим уравнением кривой второго порядка $Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, **определяем входящие в определитель** $\Delta = AC - B^2$ **коэффициенты:** $A = 4$, $B = 0$, $C = 1$.

Значение определителя заданной кривой $\Delta = 4 \cdot 1 - 0^2 = 4 > 0$ **говорит о том, что уравнение описывает эллипс.**

Приведем уравнение к каноническому виду. Для этого сгруппируем слагаемые с одинаковыми переменными и выделим в них полные квадраты суммы или разности:

$$4(x^2+4x+4)-16+(y^2-2y+1)-1+1=0.$$

Следует обратить внимание на следующее. Множитель, стоящий при квадрате переменной, выносится за скобку трехчлена; добавленное в скобках слагаемое, умноженное на вынесенный за скобку коэффициент, вычитается из уравнения.

Свернем выражения в скобках и перенесем свободный член в правую часть уравнения:

$$4(x+2)^2+(y-1)^2=16.$$

Поделив на 16, получим каноническое уравнение эллипса, центр которого находится в точке $O(x_0;y_0)=O(-2;1)$**:**

$$\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{16}=1.$$

Введем новые координаты x= $x+2$**, y=** $y-1$**, получаемые параллельным переносом исходной системы координат. Так что начало координат исходной системы** $O(0;0)$ **в новой системе (xy) имеет координаты** $O(2;-1)$**.**

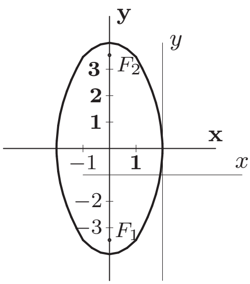


Рис. 8.6. Задача 1

В новых координатах, являющихся собственными координатами эллипса, уравнение примет вид:

$$\frac{\mathrm{x}^2}{4}+\frac{\mathrm{y}^2}{16}=1.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением

$$\frac{\mathrm{x}^2}{a^2}+\frac{\mathrm{y}^2}{b^2}=1,$$

получаем значение полуосей эллипса: $a=2$**;** $b=4$**. Полуось** b **— большая;** a **— малая.**

Расстояние между фокусами эллипса $2c$**, где**

$$c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}.$$

Эксцентриситет: $e=\dfrac{c}{b}=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}<1.$

Координаты фокусов: $F_1(0;-c)=F_1(0;-2\sqrt{3})$**;** $F_2(0;c)=F_2(0;2\sqrt{3})$**.**

Координаты вершин $(\pm a;0)$ **и** $(0;\pm b)$**:**

$$(\pm 2;0) \quad \textbf{и} \quad (0;\pm 4).$$

2. $x^2-4x-6y-14=0.$

Р е ш е н и е. По коэффициентам этого уравнения: $A=1$**,** $B=C=0$

находим $\Delta = AC - B^2 = 1 \cdot 0 - 0^2 = 0$**. Равенство нулю определителя указывает на то, что уравнение описывает параболу.**

Сгруппируем слагаемые при переменной x **с целью выделения квадрата разности:**

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 - 6y - 14 = 0.$$

Преобразуем уравнение:

$$(x - 2)^2 = 6(y + 3).$$

Осуществим параллельный перенос осей координат:

$$\mathrm{x} = x - 2; \qquad \mathrm{y} = y + 3$$

и приведем уравнение к виду:

$$\mathrm{x}^2 = 2p\mathrm{y} = 2{\cdot}3\mathrm{y} \quad \rightarrow \quad \mathrm{x}^2 = 6\mathrm{y}.$$

Отсюда $p = 3$.

Парабола симметрична относительно оси y. Уравнение ее директрисы:

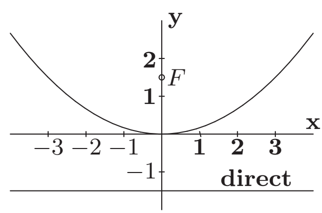


Рис. 8.7. Задача 2

$$\mathrm{y} = -\frac{p}{2} = \frac{-3}{2} = -1{,}5.$$

Фокус: $F(0; p/2) = F(0; 1{,}5)$**.**

3. $2xy = 1$.

Р е ш е н и е. В этом уравнении $A = C = 0, \quad 2B = 2, \quad B = 1$**. Определитель** $\Delta = AC - B^2 = 0 \cdot 0 - 1^2 = -1 < 0$**. Отрицательное значение определителя характерно для гиперболы.**

Исходное уравнение содержит произведение переменных. Чтобы избавиться от произведения, необходимо осуществить поворот координат на угол α**, определяемый из соотношения**

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{2B} = \frac{0 - 0}{2} = 0.$$

Отсюда $2\alpha = \pm\dfrac{\pi}{2}, \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \pm\dfrac{\pi}{4}$**.**

Для определенности выбираем положительное значение α**. Для него** $\sin\alpha = \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$**,** $\sin 2\alpha = 1$**.**

Для определения новых коэффициентов уравнения используем формулы:

$$\tilde{A} = A\cos^2\alpha + B\sin 2\alpha + C\sin^2\alpha = 1,$$

$$\tilde{C} = A\sin^2\alpha - B\sin 2\alpha + C\cos^2\alpha = -1,$$

$$\tilde{D} = D\cos\alpha + E\sin\alpha = 0; \qquad \tilde{E} = E\cos\alpha - D\sin\alpha = 0.$$

Подставляя эти значения в уравнение кривой, полученное после поворота системы координат ($\tilde{D} = 0$):

$$\tilde{A}\mathrm{x}^2 + \tilde{C}\mathrm{y}^2 + \tilde{D}\mathrm{x} + \tilde{E}\mathrm{y} + \tilde{F} = 0,$$

получим

$$\mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2 = 1.$$

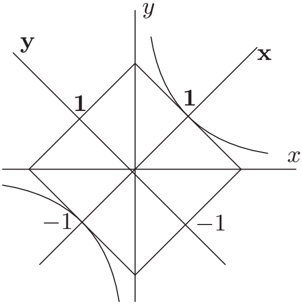


Рис. 8.8. Задача 3

Это каноническое уравнение гиперболы, из которого определяем параметры:

$$a = b = 1; \quad c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2};$$

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{2} > 1.$$

Уравнения асимптот:

$$\mathrm{y} = \pm\frac{b}{a}\mathrm{x}, \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{y} = \pm\mathrm{x}.$$

Координаты вершин: $(\pm 1; 0)$**.**

4. Записать каноническое уравнение кривой второго порядка, если известны координаты двух ее точек $M_1(\sqrt{5}; 4/3)$ **и** $M_2(3/2; \sqrt{3})$ **в собственной системе координат.**

Р е ш е н и е. Предварительно установим, какой кривой принадлежат точки. Для этого сравним заданные координаты точек:

$$x_1 = \sqrt{5}; \quad y_1 = 4/3;$$
$$x_2 = 1{,}5; \quad y_2 = \sqrt{3}.$$

Так как большему значению координаты x $(x_1 > x_2)$ **соответствует меньшее значение координаты** y $(y_1 < y_2)$**, то искомая функция — убывающая в первой координатной четверти. Из трех существующих кривых второго порядка этим свойством обладает только эллипс. Поэтому параметры кривой (**a **и** b**) входят в уравнение эллипса:**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Введем обозначения $A = \dfrac{1}{a^2}$, $B = \dfrac{1}{b^2}$**. После подстановки координат точек в уравнение эллипса придем к системе двух линейных уравнений:**

$$\begin{cases} A(\sqrt{5})^2 + B\left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = 1, \\ A\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + B(\sqrt{3})^2 = 1, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 45A + 16B = 9, \\ 9A + 12B = 4. \end{cases}$$

Решая систему, получим $A = \dfrac{1}{9}$; $B = \dfrac{1}{4}$.

Уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

5. Записать в собственной системе координат каноническое уравнение кривой второго порядка, если известно, что ее эксцентриситет $e = 0{,}8$, расстояние между фокусами $2c = 16$.

Р е ш е н и е. Эксцентриситет $e < 1$ указывает на то, что кривая — эллипс. Его каноническое уравнение в собственной системе координат:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Предположим, что a — большая полуось эллипса. Тогда для определения параметров эллипса имеем два соотношения:

$$e = \frac{c}{a} \quad \textbf{и} \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Из этих формул при $c = 8$ следует:

$$a = \frac{c}{e} = \frac{8}{0{,}8} = 10, \qquad b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6.$$

Подставляя найденные параметры в каноническое уравнение, записываем его в виде

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

6. Записать в собственной системе координат каноническое уравнение кривой второго порядка, модуль разности расстояний от каждой точки которой до двух фиксированных точек равен 6. Кроме того, известно, что кривая проходит через точку $M(6; 2\sqrt{3})$. Определить параметры кривой.

Р е ш е н и е. По определению эта кривая — гипербола. В собственной системе координат ее уравнение имеет канонический вид с двумя вариантами написания:

$$1)\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \text{или} \qquad 2)\ -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

При этом в первом варианте оси гиперболы: x — действительная; y — мнимая; во втором варианте — наоборот.

Рассмотрим первый вариант уравнения.

Определив из условий задачи параметр $a = \dfrac{6}{2} = 3$, перепишем каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Это уравнение с одним неизвестным параметром (b). Для его определения подставим в уравнение координаты точки M:

$$\frac{6^2}{9} - \frac{(2\sqrt{3})^2}{b^2} = 1.$$

Решая уравнение, находим $b^2 = 4$ и записываем уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Найдем параметры, характеризующие гиперболу.

Расстояние от начала координат до фокусов:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

Эксцентриситет: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$.

Уравнения асимптот: $y = \pm\dfrac{b}{a}x \quad \Longrightarrow \quad y = \pm\dfrac{2}{3}x$.

Проведение аналогичных преобразований для второго варианта записи уравнения параболы приводит к результату:

$$-\frac{x^2}{108} + \frac{y^2}{9} = 1; \quad e = \frac{\sqrt{117}}{3}; \quad y = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}x.$$

7. Записать в собственной системе координат каноническое уравнение кривой второго порядка, расстояние от каждой точки которой до некоторой фиксированной точки равно расстоянию до фиксированной прямой, причем расстояние между фиксированными точкой и прямой равно 4.

Р е ш е н и е. По определению эта кривая — парабола. Предполагая, что фокус кривой находится на оси x собственной системы координат параболы, воспользуемся уравнением

$$y^2 = 2px.$$

По определению расстояние от фокуса параболы до ее директрисы определяет параметр $p = 4$.

Каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 8x.$$

Уравнение директрисы $(x = -p/2)$**:** $x = -2$**;**
координаты фокуса $F(\frac{p}{2}; 0)$**:** $F(2; 0)$**.**

8. Определить, будут ли пересекать эллипс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ **прямые:**
а) $x + 2y = 4$**;** **б)** $2x - 3y = 12$.

Р е ш е н и е.

а) Выразим из уравнения прямой переменную $y/2$**, возведем полученное выражение в квадрат** $\frac{y^2}{4} = \frac{x^2}{16} - \frac{x}{2} + 1$ **и подставим в уравнение эллипса. После преобразования придем к квадратному уравнению относительно переменной** x**:**

$$x\left[\left(\frac{25x}{72} - 1\right)\right] = 0.$$

Решениями уравнения являются два корня $x_1 = 0$, $x_2 = 2{,}88$**. Определяя из уравнения прямой (или эллипса) соответствующие значения** y**, запишем координаты двух точек пересечения эллипса с прямой:** $M_1(0; 2)$ **и** $M_2(2{,}88; 0{,}56)$**.**

б) Подстановка найденного из второго уравнения прямой значения $\frac{x}{3} = 2 + \frac{y}{2}$ **в уравнение эллипса приводит к квадратному уравнению** $y^2 + 4y + 6 = 0$**, которое не имеет действительных корней, так как дискриминант уравнения** $D = 4^2 - 4 \cdot 6 = -8$ **— величина отрицательная. Результат указывает на то, что прямая не пересекает эллипса (не имеет с эллипсом общих точек).**

Если совместное решение уравнения прямой и эллипса дает только одну пару координат x **и** y**, то прямая касается эллипса в одной точке. Например, прямая, описываемая уравнением** $y = 2$**, имеет только одну общую точку с эллипсом — это вершина эллипса с координатами (0;2).**

9. Что определяет геометрическое место точек пересечения однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ **плоскостью** $z = c$**?**
Р е ш е н и е. Подставляя в уравнение поверхности вместо z **значение этой переменной, соответствующее уравнению плоскости, приходим к квадратному уравнению на плоскости** $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$**.**

Извлекая квадратный корень из обеих частей полученного уравнения, получаем

$$\frac{x}{a} = \pm\frac{y}{b}.$$

Это уравнения пары прямых. Аналогичный результат можно получить, рассекая заданную поверхность плоскостью $x = a$, параллельной оси y и касающейся эллипса: $-\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$.

Отсюда следует заключение: однополостный гиперболоид может быть образован семейством прямых (например, телевизионная башня в Шаболовке, спроектированная архитектором В.Г. Шуховым).

Задачи для самостоятельного решения

1. Установить, какая кривая определена уравнением $4x^2 - y^2 + 16x + 2y + 6 = 0$ и записать ее каноническое уравнение. Изобразить на одном графике с кривой исходную и ее собственную системы координат.

2. Записать уравнение кривой второго порядка, если в ее собственной системе координат известны координаты двух расположенных на кривой точек $A(5;0)$ и $B(0;-4)$. Найти координаты фокусов и эксцентриситет.

3. Записать уравнение кривой второго порядка, сумма расстояний от которых до двух точек $F_1(-3;1)$ и $F_2(1;1)$ равна $2\sqrt{5}$. Найти эксцентриситет.

4. Записать уравнение кривой второго порядка, если известно, что она проходит через точку $M(5;2{,}25)$ (в собственной системе координат) и имеет эксцентриситет $e = 1{,}25$.

5. Записать уравнение параболы, если известно, что расстояние от ее вершины до фокуса равно 3.

6. Установить, какие типы кривых второго порядка (эллипс, гипербола, парабола) получаются в сечениях эллиптического конуса

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

(конических сечениях) плоскостями а) $y = h$; б) $y = kx + d$ $(d \neq b/a)$; в) $y = \dfrac{b}{a}(x - e)$; г) $x = g$. В задании b, c, d, e, g, h - постоянные величины.

7. Методом сечений построить поверхность

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = py.$$

Задание на расчетную работу. Часть 4 «Аналитическая геометрия»

Пояснения к выполнению и оформлению задания даны на стр. 69.

1. Заданы координаты четырех вершин тетраэдра (повторяются задание части 1 расчетной работы):

$$A(3,5,-2), \quad B(-1,3,2), \quad C(k,-4,3), \quad D(3,-4,-k).$$

В декартовой ортогональной системе координат изобразить тетраэдр.

Средствами аналитической геометрии записать следующие уравнения.

1. Стороны CD (как прямой, проходящей через две точки).

2. Медианы, выходящей из точки C треугольника CBD.

3. Высоты, опущенной из точки C на сторону BD.

4. Плоскостей треугольников ABC и BCD.

5. Стороны CD (как геометрического места точек пересечения двух плоскостей).

6. Нормали, опущенной из точки A на плоскость BCD.

Определить следующие характеристики.

7. Проекцию точки A на плоскость BCD.

8. Координаты точки E, симметричной точке A относительно плоскости BCD.

9. Расстояние от точки A до плоскости BCD.

10. Угол между диагоналями четырехугольника, построенного на сторонах BC и CD.

11. Найти расстояние от точки E до прямой BC.

12. Записать уравнение прямой, проходящей через точку E и параллельной плоскостям ABC и ABD.

2 Задано уравнение второго порядка

$$3x^2 - 2xy + 2(-1)^n ky^2 + kx + y - 2N = 0.$$

Требуется

1. Определить тип кривой, описываемой заданным уравнением.

Привести квадратичную форму уравнения к каноническому виду:

2 преобразованием поворота векторов исходного ортонормированного базиса (определением угла поворота α);

3 переходя к собственным значениям, определенным из характеристического уравнения.

4. Привести квадратное уравнение к каноническому виду, осуществив параллельный перенос осей координат.

5. Построить кривую в удобном масштабе с изображением исходной, промежуточной и собственной систем координат.

6. Найти параметры кривой (координаты вершин, фокусов, уравнения асимптот) во всех координатных системах. Определить эксцентриситет.

По возможности, выполнить проверку правильности полученных результатов (убедиться в выполнении заданий или получив результаты другими методами).

ТИПОВЫЕ БИЛЕТЫ контрольных работ

БИЛЕТ ПО ТЕОРИИ (на 15 мин)

Во всех пяти вопросах билета требуется расставить номера ответов (правые колонки) в порядке следования номеров вопросов (левые колонки). В местах отсутствия соответствия поставить цифру 5.

1. *Прямая на плоскости*

1. В общем виде	1. $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$;
2. В отрезках	2. $y = kx + b$;
3. С угловым коэффициентом	3. $Ax + By + C = 0$;
4. В нормальном виде	4. $x/a + y/b = 1$.

2. *Плоскость*

1. Перпендикулярна оси z	**1.** $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$;
2. В векторном виде	**2.** $x\cos\alpha+y\cos\beta+x\cos\gamma-p=0$;
3. В нормальном виде	**3.** $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$;
4. Проходящей через точку	**4.** $Ax+By+C=0$.

3. *Прямая (ℓ) и плоскость (ρ)*

1. Условие параллельности ℓ **и** ρ	**1.** $\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$;
2. Условие перпендикулярности ℓ **и** ρ	**2.** $Am+Bn+Cp=0$;
3. Синус угла между ℓ **и** ρ	**3.** $-\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}$;
4. Параметр t^***, соответствующий точке пересечения** ℓ **и** ρ	**4.** $\dfrac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$.

4. *Кривые второго порядка*

1. Сумма расстояний от точек до фокусов постоянна	**1. Эллипс;**
2. Модуль разности расстояний от точек до фокусов постоянна	**2. Гипербола;**
3. Фокусы совпадают	**3. Парабола;**
4. Расстояния от точек до фокуса равны расстояниям до директрисы	**4. Окружность.**

5. *Общие уравнения*

1. Уравнение плоскости	1. $NX=C$;
2. Уравнение поверхности	2. $AX=\lambda X$;
3. Характеристическое уравнение	3. $\lvert A-\lambda I\rvert=0$;
4. Свойство собственного вектора	4. $X^TAX+X^TB=C$.

БИЛЕТ ПО ПРАКТИКЕ (на 75 мин)

1. Найти координаты точки пересечения двух прямых $2x+y=1$ **и** $4x-3y=2$ **и угол между ними.**

2. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2,-1,4)$**, перпендикулярной плоскости** $2x-3y+6z=1$ **и параллельной прямой** $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{1}$**.**

3. Найти проекцию точки $M(2;-1;1)$ **на плоскость** $4x-2y+z-8=0$.

4. Записать уравнение кривой второго порядка, если известно, что ее эксцентриситет 0,6, а расстояние между фокусами 6.

5. Привести уравнение $4x^2+2xy+4y^2=1$ **к каноническому виду. Установить тип кривой. Найти полуоси и координаты правого фокуса в собственной и исходной системах координат.**

Глава 9

Линейное программирование

Принятие оптимального решения — основная задача планирования любого процесса, протекающего в зависимости от воздействия на него человека. В экономике многие задачи линейного программирования нацелены, в частности, на разработку таких планов развития фирм и деятельности отдельных лиц и сообществ, которые приводят к получению наибольшей прибыли или наибольшей экономии. Решением этих и сходных неэкономических задач, сформулированных в виде логически обоснованных математических моделей, занимается раздел математики, получивший название линейного программирования (ЛП). Линейное программирование является простейшей из задач, рассматриваемых в разделе математики, называемом математическим программированием или исследованием операций.

9.1. Выпуклые множества точек

Множества, элементами которых являются точки, называют *точечными множествами.*

Множество $\Re_1$ представляет собой точечное множество на неограниченной прямой. Любое подмножество $\Re_1$, например, отрезок прямой, также представляет собой точечное множество.

Точечное множество в $\Re_2$ — это точки неограниченной плоскости или любой части плоскости, например, ограниченные замкнутыми кривыми.

В $\Re_3$ — это точки бесконечного трехмерного пространства или любой его (неограниченной или ограниченной) части.

В общем случае точечное множество может быть представлено в $\Re_n$.

Множество $B \subset \Re_n$ называется *выпуклым,* если для любых x_1 и $x_2 \in B$ выполняется условие

$$\big(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\big) \in B, \quad (\alpha \in [0,1]).$$

Другими словами, множество точек будет выпуклым, если все точки, принадлежащие отрезку, соединяющему две любые точки A и B множества, также принадлежат этому множеству.

На рис. 9.1,а показан пример выпуклого точечного множества в $\Re_2$, на рис. 9.1,б — невыпуклого.

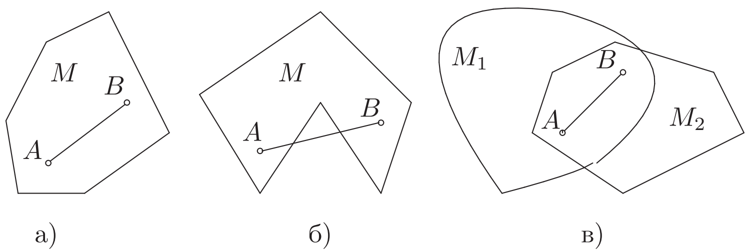


Рис. 9.1. Выпуклые и невыпуклые множества

Теорема. *Пересечение двух выпуклых множеств является выпуклым множеством.*

Справедливость теоремы поясняется рис. 9.1,в. Действительно, если $AB \in M_1 \bigcap M_2$, то $AB \in M_1$ и $AB \in M_2$. Но M_1 и M_2 — выпуклые множества. Следовательно, $M_1 \bigcap M_2$ также выпуклое множество, так как оно состоит из точек, принадлежащих одновременно M_1 и M_2.

Пользуясь методом математической индукции, можно доказать, что пересечение конечного числа выпуклых множеств также является выпуклым множеством.

Ограниченные множества имеют *внутренние точки* и *граничные точки.*

Для любой внутренней точки множества рассматриваемого пространства (например, точка A на рис. 9.2) всегда можно выбрать проходящий через эту точку произвольно направленный отрезок некоторой длины такой, для которого A является внутренней точкой и все точки которого принадлежат множеству.

Для граничных точек множества (например, точка B) проходящий через них отрезок не может иметь, по крайней мере, произвольного направления, все точки отрезка которого лежат или на границе множества, или внутри него.

Точка выпуклого множества называется *угловой точкой,* если через нее нельзя провести ни одного отрезка, состоящего только из точек множества и для которого эта точка была бы внутренней (точки C и D на рис. 9.2).

Следуя введенным определениям, можно говорить о выпуклых многоугольниках, многогранниках и т.д.

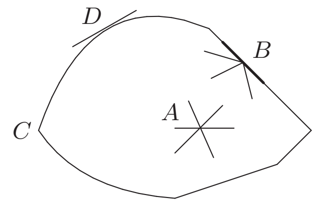


Рис. 9.2. Точки множества

9.2. Интерпретация решений линейных уравнений и неравенств в $\Re_2$

Рассмотрим одно линейное уравнение с двумя переменными (неизвестными) x_1 и x_2:

$$2x_1 + 3x_2 = 6.$$

Это частный вид «системы уравнений» при $m = 1$ и $n = 2$ (§ 2.1).

Найдем множество всех допустимых решений этой «системы», базисные решения и граничные точки.

Напомним, что *допустимыми решениями* называются решения с неотрицательными значениями переменных.

Каждое решение заданного уравнения представляет собой пару чисел, лежащих на неограниченной прямой, показанной на рис. 9.3,а.

Допустимые (неотрицательные) решения этого уравнения лежат на отрезке AB прямой, расположенной в первой координатной четверти и имеющей две граничные точки $A(0; 2)$ и $B(3; 0)$.

Базисным решением будем называть решение уравнения (системы уравнений), в которых основные (базисные) переменные выражены через свободные переменные.

Найдем все возможные варианты записи общих решений уравнения. Если принять x_1 за основную переменную, x_2 — за свобод-

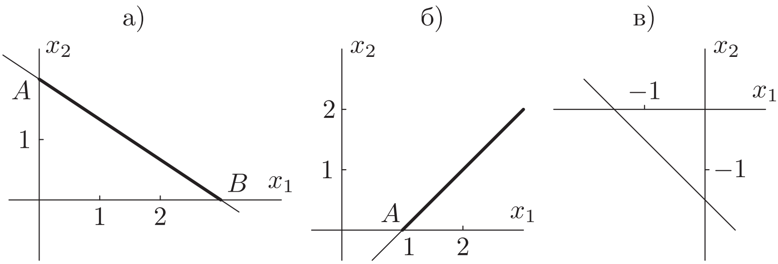


Рис. 9.3. Иллюстрация решений линейных уравнений

ную (неосновную), то общее решение запишется в виде

$$x_1 = 3 - \frac{3}{2}x_2.$$

Полагая $x_2 = 0$, получим частное решение (3;0).

Если за основную переменную принять x_2, то на основе общего решения

$$x_2 = 2 - \frac{2}{3}x_1$$

при $x_1 = 0$ получим частное решение (0;2).

Оба частные решения допустимы. Им соответствуют граничные точки A и B множества решений.

При $x_1 \in [0;3]$ и $x_2 \in [0;2]$ из заданного уравнения можно получить все возможные варианты допустимых решений. Все они представляют собой точки, принадлежащие отрезку AB прямой.

Для уравнения

$$x_1 - x_2 = 1$$

существует единственная граничная точка для допустимых решений — это точка $A(1;0)$. Вторая точка находится в бесконечности (рис. 9.3,б).

Уравнение

$$2x_1 + 2x_2 + 3 = 0$$

вообще не имеет граничных допустимых решений и, следовательно, точек с допустимыми решениями (рис. 9.3,в).

Линейные неравенства для одного уравнения с двумя переменными представляются в двух видах:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + b \geq 0 \tag{9.1}$$

или

$$a_1x_1 + a_2x_2 + b < 0. \tag{9.2}$$

Каждому из бесчисленного множества решений неравенств (9.1) и (9.2) соответствует пара чисел $(x_1; x_2)$, **совокупность которых представляет собой точку на плоскости. Геометрический смысл множества решений этих неравенств устанавливает следующая приводимая без доказательства теорема.**

Теорема. *Множеством решений линейного неравенства* **(9.1)** *служит одна из двух полуплоскостей, на которые всю неограниченную плоскость делит прямая* $a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0$, *включая эту прямую. Вторая полуплоскость без самой прямой является множеством решений строгого неравенства* **(9.2).**

Установить принадлежность точек полуплоскости тому или иному неравенству можно с помощью *пробной точки* **— это произвольная точка, принадлежащая одной из полуплоскостей, но не лежащая на прямой.**

Координаты пробной точки подставляются вместо неизвестных в одно из неравенств (9.1) или (9.2). Если неравенство удовлетворяется, то полуплоскость, которой принадлежит пробная точка, описывается этим неравенством; в противном случае — вторым неравенством. В качестве пробной точки удобно использовать начало координат, если прямая не проходит через него.

Пример. Определить множество допустимых решений, соответствующих неравенству

$2x_1 - 5x_2 + 10 \geq 0.$

Р е ш е н и е. Построим прямую $\frac{x_1}{-5} + \frac{x_2}{2} = 1$, **используя координаты точек пересечения прямых с осями координат** $A(-5; 0)$ **и** $B(0; 2)$.

Для определения множества пар значений координат $(x_1; x_2)$, **удовлетворяющих заданному неравенству, используем любую пробную точку. Подставим, например, координаты точки (0;4), расположенной выше прямой, в левую часть заданного неравенства:**

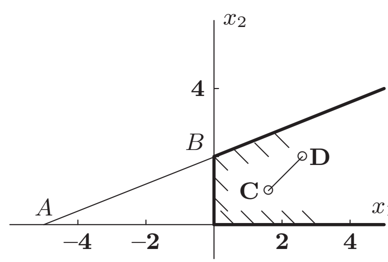


Рис. 9.4. Множество решений неравенства

$$2 \cdot 0 - 5 \cdot 4 + 10 = -10 < 0.$$

Полученное неравенство говорит о том, что координаты точки (0;4), как и координаты всех других точек, лежащих выше прямой, не удовлетворяют заданному неравенству. Следовательно, неравенству будут отвечать координаты точек, лежащих ниже

прямой, например, координаты точки (0;0):

$$2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 10 > 0 \ (!).$$

Если говорить о допустимых значениях x_1 **и** x_2, **то они будут лежать под и справа от изображенной на рис. 9.4 прямой в части плоскости, ограниченной дополнительными неравенствами:**

$$x_1 \geq 0; \qquad x_2 \geq 0.$$

Область допустимых значений заданного неравенства отмечена на рисунке штриховыми линиями.

Отметим, что полученное решение (в том числе допустимое решение) является выпуклым множеством — все его граничные точки удовлетворяют уравнениям $2x_1 - 5x_2 + 10 = 0$, $x_1 = 0$ **или** $x_2 = 0$, **а точки любого отрезка, соединяющего внутренние точки** C **и** D **множества, удовлетворяют неравенству** $2x_1 - 5x_2 + 10 > 0$.

9.3. Системы неравенств на плоскости

Рассмотрим систему двух неравенств с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \geq 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \geq 0. \end{cases} \tag{9.3}$$

Знаки неравенств могут иметь противоположное направление, или быть строгими.

В общем случае множеством решений системы m **неравенств в** $\Re_2$ **(если система соответствующих уравнений совместна) являются точки, принадлежащие пересечению полуплоскостей множеств решений всех неравенств. Это множество имеет конечное число угловых точек. Система двух неравенств имеет не более одной угловой точки. Это точка пересечения двух прямых, описываемых уравнениями, следующими из (9.3).**

Границами трех неравенств на плоскости являются в общем случае три прямые. Угловыми точками таких выпуклых множеств являются точки пересечения прямых.

Множеством решений системы m **совместных линейных неравенств с двумя переменными является выпуклый многоугольник на плоскости, количество угловых точек в котором не превосходит** m.

Пример. Определить и изобразить на координатной плоскости множество решений системы линейных неравенств и найти координаты угловых точек границы этого множества:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3 \leq 0; \\ x_1 + x_2 - 1 \geq 0; \\ x_1 - x_2 \geq 0; \\ x_1 \leq 2{,}5; \\ 0 < x_2 < 1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

1. Строим прямую, соответствующую первому из заданных неравенств ① $\dfrac{x_1}{3} + \dfrac{x_2}{3} = 1$. **Эта прямая проходит через точки (0;3) и (3;0) (рис. 9.5).**

Подставим в первое неравенство координаты контрольной точки (0;0): $0+0-3 \leq 0$ (!). **Результат подтверждает справедливость первого из заданных неравенств. То есть начало координат принадлежит искомому множеству. Поэтому множеством решений этого неравенства является полуплоскость, расположенная ниже и левее прямой ①, включая саму прямую.**

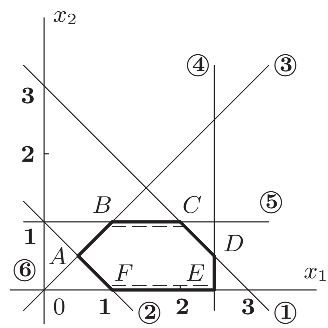


Рис. 9.5. Множество решений

2. Строим прямую ② $\dfrac{x_1}{1} + \dfrac{x_2}{1} = 1$. **Она проходит через точки (0;1) и (1;0). Для пробной точки (0;0) получим:** $0+0-1<0$. **Это противоречит второму заданному неравенству — начало координат не входит в множество решений второго неравенства. Множеством решений являются точки, находящиеся выше и правее прямой ②, включая саму прямую.**

3. Строим прямую ③ $x_1 = x_2$. **Она является биссектрисой первого координатного угла.**

Начало координат не может быть контрольной точкой для определения множества решений неравенства, так как координаты точки $(0, 0)$ **обращают в тождество уравнение, но не дают возможности проверить выполнимость неравенства. Выберем в качестве пробной точку (1;0), и подставим ее координаты в третье неравенство:** $1 - 0 > 0$.

Неравенство выполняется. Поэтому множество решений расположено в нижней полуплоскости.

4. Прямая ④ $x_1 = 2{,}5$ параллельна оси ординат. Начало координат принадлежит области решений четвертого неравенства $(0 < 2{,}5)$. **Поэтому полуплоскость, лежащая слева от прямой ④ , определяет множество решений четвертого неравенства.**

5. Последнее двойное неравенство определяет область, заключенную между горизонтальными прямыми ⑤ $x_2 = 0$ и ⑥ $x_2 = 1$. Пробная точка $(0; 0{,}5)$ принадлежит множеству решений. В отличие от прямых ① – ④ прямые ⑤ и ⑥ не входят в множество решений — неравенства строгие, равенства в них отсутствуют.

Прямые, не входящие в множество решений неравенств, отмечены на рис. 9.5 пунктирными линиями, расположенными около этих прямых со стороны области допустимых решений.

В результате построения прямых и анализа множеств решений заданных неравенств делаем заключение о том, что множество решений системы неравенств ограничено шестиугольником $ABCDEF$. **Точки всех прямых, определяющих границы шестиугольника, за исключением** BC **и** EF, **также входят в множество решений заданных неравенств.**

Координаты угловых точек определим, решая пары систем уравнений, описывающих прямые, на пересечении которых стоят угловые точки:

$$\begin{cases} x_1+x_2-1=0, \\ x_1-x_2=0; \end{cases} \Longrightarrow A(0{,}5; 0{,}5); \qquad \begin{cases} x_1-x_2=0, \\ x_2=1; \end{cases} \Longrightarrow B(1; 1);$$

$$\begin{cases} x_1+x_2-3=0, \\ x_2=1; \end{cases} \Longrightarrow C(2; 1); \qquad \begin{cases} x_1+x_2-3=0, \\ x_1=2{,}5; \end{cases} \Longrightarrow D(2{,}5; 0{,}5);$$

$$\begin{cases} x_1=2,5, \\ x_2=0; \end{cases} \Longrightarrow E(2{,}5; 0); \qquad \begin{cases} x_1+x_2-1=0, \\ x_2=0; \end{cases} \Longrightarrow F(1; 0).$$

В математической литературе доказывается, что множеством решений m **линейных неравенств с** n **переменными являются выпуклые многогранники в пространстве** $\Re_n$. **Границами таких многогранников (гранями) будут гиперплоскости пространства** $\Re_{n-1}$.

9.4. Оптимизационные задачи

Пусть вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \Re_n$ **определяет совокупность** n **переменных** $x_j \quad (j = \overline{1, n})$, **а** $F(X) \in \Re$ **— функция, определенная на множестве** Ω, **состоящем из этих** n **переменных.**

Оптимизационная задача $(F; \Omega)$ **сводится к отысканию максимального или минимального значений** $F(X)$ **на множестве значений** Ω. **При этом** $F(X)$ **называется** *целевой функцией,* **а** Ω – *множеством допустимых решений* (*допустимым множеством*) **оптимиза-**

ционной задачи. *Допустимым множеством* в экономике называют множество с неотрицательными элементами ($X \geq \Theta$).

Решением оптимизационной задачи называется такое значение вектора переменных $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)^T$, при котором для любых $X \in \Omega$ выполняется условие $F(X^*) \leq F(X)$ для задачи отыскания минимального значения функции и $F(X^*) \geq F(X)$ – для максимального значения.

Если задача оптимизации не имеет решения, то она называется *неразрешимой*. Задача не разрешима, в частности, если целевая функция не ограничена на допустимом множестве Ω.

Задача отыскания максимума $(F; \Omega)$ легко сводится к задаче отыскания минимума сменой знака целевой функции, т.е. к задаче $(-F; \Omega)$.

Задачу отыскания оптимального решения можно осуществить *методами математического программирования* (термин «программирование» относится к выработке некоторой программы действий по отысканию оптимальных значений функции).

В зависимости от вида целевой функции и множества допустимых решений математическое программирование включает в себя частные виды задач, в том числе:

— линейное программирование (ЛП);

— целочисленное программирование (ЦП);

— нелинейное, в частности, выпуклое программирование (ВП);

— динамическое программирование (ДП).

Решением оптимизационных задач занимаются и такие разделы математики, как вариационное исчисление, теория оптимального управления, теория игр и др.

9.5. Математическая модель задачи ЛП

Оптимизационная задача $(F; \Omega)$, в которой целевая функция F является линейной и множество допустимых решений ограничено кусочно-линейными функциями, называется *задачей линейного программирования*. Упомянутые кусочно-линейные функции представляют собой систему линейных неравенств. Среди них могут быть и равенства.

В *классической* постановке математическая модель задачи ЛП представляет собой группу соотношений:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \Longrightarrow \max(\min); \tag{9.4}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m; \end{cases} \tag{9.5}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}). \tag{9.6}$$

Соотношение (9.4) определяет *целевую функцию,* **выраженную через искомые переменные** x_j **и** *весовые коэффициенты* c_j. **Знак** $\Longrightarrow$ $\max(\min)$ **означает, что целевая функция после завершения решения задачи должна принять максимальное (минимальное) значение. Система неравенств (9.5) – это** *ограничения,* **накладываемые на изменения некоторых показателей задачи ЛП. Неравенства (9.6) выражают требование: переменные задачи не должны выходить за пределы области допустимых значений (должны быть неотрицательными).**

Если вместо знаков $\leq$ **(или** $<$**) в сформулированной задаче ЛП стоят** $\geq$ **(или** $>$**), то для изменения знаков на противоположные, т.е преобразования неравенств к виду (9.5), достаточно умножить их на** -1. **Такие же действия, как говорилось в предыдущем параграфе, следует применить к целевой функции, чтобы изменить ее предельное значение с** *max* **на** *min*.

Записанная в виде соотношений (9.4)–(9.6) задача ЛП может быть представлена в более компактном виде с использованием символа суммирования:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Longrightarrow \max(\min); \tag{9.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \quad (i = \overline{1,m}); \tag{9.8}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}). \tag{9.9}$$

Введем обозначения:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Матрица A называется *матрицей условий*, *технологической матрицей*, **или** *матрицей норм расхода*, **в зависимости от того, какой смысл вложен в совокупность ее элементов; B — вектор ограничений; X — вектор переменных; C — вектор весовых коэффициентов.**

Тогда математическая модель задачи линейного программирования представится в матричной форме:

$$F = \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{X} \quad \Longrightarrow \quad \max(\min); \tag{9.10}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{B}; \tag{9.11}$$

$$\boldsymbol{X} \geq \boldsymbol{\Theta}. \tag{9.12}$$

В матрицу A входят подматрицы

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

называемые *векторами условий*. **Матрицу условий можно выразить через эти векторы:**

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{A}_2 \ldots \boldsymbol{A}_n)\,.$$

Ограничения (9.8) или (9.11) можно записать, используя векторы условий:

$$\boldsymbol{A}_1 x_1 + \boldsymbol{A}_2 x_2 + \ldots + \boldsymbol{A}_n x_n \leq \boldsymbol{B}. \tag{9.13}$$

Свойства задач линейного программирования

1. Допустимое множество Ω решений задачи ЛП либо пусто, либо является выпуклым множеством пространства $\Re_n$.

2. Если допустимое множество Ω задачи ЛП не пусто, а целевая функция F ограничена на Ω, то задача ЛП имеет оптимальное решение.

3. Оптимальные решения задачи ЛП (если они существуют) всегда находятся на границе множества Ω.

9.6. Примеры задач ЛП

Задача о рационе

На ферме имеется n видов кормов, каждый из которых содержит m разновидностей питательных веществ. Одна единица j-го

вида кормов ($j = \overline{1, n}$) содержит a_{ij} единиц i-го питательного вещества ($i = \overline{1, m}$) и имеет стоимость c_j.

Требуется составить такой рацион, который удовлетворял бы всем потребностям в питательных веществах b_i ($i = \overline{1, m}$) и имел бы минимальную стоимость. Минимально необходимые количества питательных веществ b_i известны.

Обозначим через x_j количество j-го корма в рационе, а через F – стоимость всего рациона потребных кормов. Тогда

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Longrightarrow \min .$$

Рацион должен удовлетворять всем потребностям в питательных веществах. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = \overline{1, m}).$$

Вместе с ограничениями

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n})$$

выписанные соотношения образуют задачу ЛП.

З а д а ч а п л а н и р о в а н и я п р о и з в о д с т в а

Предприятие располагает m видами ресурсов и может выпускать некоторую продукцию n различными способами. За единицу времени использования j-го способа производства ($j = \overline{1, n}$) расходуется a_{ij} единиц i-го ресурса ($i = \overline{1, m}$) и выпускается c_j единиц продукции.

Требуется составить такой план производства предприятия, который позволит ему выпускать наибольшее количество продукции при условии, что количество ресурсов i-го вида на предприятии равно b_i (большего количества предприятие не имеет возможности израсходовать).

Пусть x_j – время использования предприятием j-го способа производства. Если F – общее количество выпускаемой продукции, то

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Longrightarrow \max .$$

Работая по этому плану, предприятие израсходует $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ единиц i-го ресурса, ограниченного величиной b_i. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i.$$

Вместе с ограничениями

$$x_j \ge 0$$

выписанные соотношения образуют задачу ЛП.

Транспортная задача

Пусть каждое из m предприятий изготавливает однотипную продукцию в количествах a_i $(i = \overline{1,m})$. Продукция поставляется каждому из n потребителей в количествах b_j $(j = \overline{1,n})$. Известны стоимости c_{ij} перевозки единицы продукции от i-го производителя j-му потребителю. Требуется определить план перевозок – количества товаров x_{ij}, которые следует переправить от i-го производителя j-му потребителю и при этом расходование средств будет минимальным.

Суммарные затраты на перевозку всех производимых товаров потребителям представляет собой целевую функцию, которую необходимо минимизировать:

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \Longrightarrow \min\,. \tag{9.14}$$

Количество продукции, производимой i-м производителем и поставляемой всем n потребителям:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad (i = \overline{1,m}).$$

Количество продукции, получаемой j-м потребителем от всех m производителей:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad (j = \overline{1,n}).$$

При равенстве количеств производимой и потребляемой продукции можно составить уравнения баланса:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Целевая функция (9.14) вместе с соотношениями баланса, которые в транспортной задаче играют роль ограничений, представляют собой модель задачи ЛП.

В первых двух задачах ограничения записывались в виде неравенств, хотя часть из них могут быть равенствами; в последней задаче ограничения представляют собой строгие равенства в случае, если количество производимых товаров равно количеству потребляемых. Следует заметить, что упомянутое различие несущественно для задач ЛП. Действительно, любое равенство для суммы двух и более функций $f(X)+g(X)=0$ можно представить в виде двух неравенств: $f(X)\geq 0$ и $g(X)<0$. С другой стороны, к любому неравенству можно прибавить некоторое слагаемое, которое превратит его в равенство.

9.7. Графический метод решения задач ЛП

Рассмотрим задачу ЛП в пространстве $\Re_2$, то есть задачу, в которую входят только две переменные x_1 и x_2:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \Longrightarrow \max; \tag{9.15}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m; \end{cases} \tag{9.16}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0. \tag{9.17}$$

Каждое из неравенств (9.16) определяет на координатной плоскости x_1x_2 некоторую полуплоскость. Допустимое множество Ω решений задачи представляет собой пересечение конечного числа m полуплоскостей (9.16) и ограничено выпуклым многоугольником.

Предположим, что область Ω, ограниченная неравенствами (9.16), построена (ограничена жирными линиями на рис. 9.1,а).

Отметим, что вектор

$$\boldsymbol{c} = (c_1;\ c_2)$$

перпендикулярен прямой $c_1x_1 + c_2x_2 = const$ ($const$ (константа) — произвольная постоянная величина). При положительных c_1 и c_2 вектор направлен в сторону возрастания F.

Проведем на плоскости прямые, перпендикулярные $\boldsymbol{c} = (c_1; c_2)$, для различных значений целевой функции: F_0, F_{AE}, F_C, ... Первая

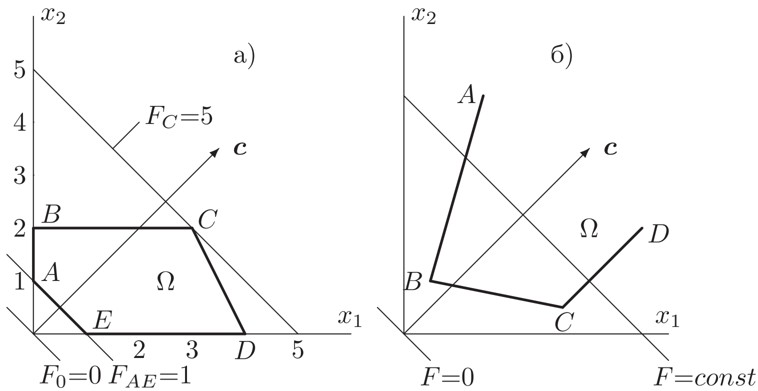


Рис. 9.1 Графическое изображение задачи ЛП

из них не пересекает область Ω (проходит через начало координат), вторая совпадает с границей области AE, третья касается границы области только в одной угловой точке C.

В точке C, являющейся общей точкой для целевой функции и области Ω, F имеет максимальное из возможных значений. Координаты x_{1C} и x_{2C} точки C удовлетворяют одновременно уравнению $c_1x_1 + c_2x_2 = F_C$, и системе неравенств (9.16). Это точка удалена на максимально возможное для области Ω расстояние от начала координат в направлении вектора $\boldsymbol{c}$.

Если требуется отыскать минимальное значение целевой функции F, удовлетворяющей неравенствам (9.16), то это значение $F = F_{AE}$ будет соответствовать наименьшему удалению прямой $c_1x_1 + c_2x_2 = const$ от начала координат.

Отметим, что для задачи, геометрический образ которой изображен на рис. 9.1,а, максимальному значению целевой функции соответствует единственная пара значений координат $(x_{1C}; x_{2C})$, тогда как минимальному значению функции – любые координаты точек прямой $c_1x_1 + c_2x_2 = F_{AE}$, лежащие на отрезке AE границы Ω.

Если область допустимых значений Ω не ограничена в направлении возрастания вектора $\boldsymbol{c}$ $\big($рис. 9.1,б$\big)$, то целевая функция не ограничена сверху. Ее максимальное значение стремится к бесконечности.

Пример. Решить задачу ЛП:

$$F = x_1 + x_2 \Longrightarrow \max(\min);$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_2 \le 2; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0.$$

Область допустимых значений Ω, соответствующая системе приведенных неравенств, показана на рис. 9.1,а. Координаты точек пересечения прямых, ограничивающих Ω, легко определяются из решения соответствующих пар прямых из выписанных в условии задачи неравенств:

$$A(0;1), \quad B(0;2), \quad C(3;2),$$

$$D(4;0), \quad E(1;0).$$

Определим значения целевой функции F в каждой из угловых точек области Ω (в граничных точках, и только в них, может находиться экстремальное значение целевой функции):

$$F_A = F(0;1) = 1; \quad F_B = F(0;2) = 2; \quad F_C = F(3;2) = 5;$$
$$F_D = F(4;0) = 4; \quad F_E = F(1;0) = 1.$$

Сравнение значений F для всех угловых точек позволяет выбрать из них максимальное и минимальное:

$$F_{max} = F_C = 5; \qquad F_{min} = F_A = F_{AE} = F_E = 1.$$

Как видно из рис. 9.1,а, точка C, которой в области Ω соответствует наибольшее значение целевой функции, находится на прямой $x_1 + x_2 = 5$, наиболее удаленной от начала координат в направлении вектора $\boldsymbol{c}$. Что касается минимального значения F, то оно находится на прямой $x_1 + x_2 = 1$, которая проходит через точки A и E и удалена от начала координат на минимальное расстояние в направлении c. Координаты любой точки, лежащей на границе области Ω, соединяющей угловые точки A и E, будут определять минимальное значение F. Например, для точки (0,5; 0,5), лежащей на AE, $F(0{,}5;\ 0{,}5) = 1 = F_{min}$.

9.8. Геометрическая интерпретация решения задач ЛП для $\Re_3$

Обобщим геометрическое представление задачи ЛП, данное в предыдущем разделе, на случай трехмерного пространства $\Re_3$.

В случае $\Re_3$ ограничения типа $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$ представляют собой плоскости, а $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \le b_i$ — выпуклое трехмерное полупространство.

На рис. 9.2 изображены следы двух пересекающихся по линии AB плоскостей, соответствующих двум ограничениям

P_1**:** $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$ **и**

P_2**:** $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$.

Плоскости $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$, ограничивающие пространство первого координатного угла ($x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$), пересекаются с плоскостями P_1 и P_2 по следующим прямым.
P_1**: по прямой AC с плоскостью $x_1 = 0$; по прямой BD с плоскостью $x_2 = 0$ и по прямой CD с плоскостью $x_3 = 0$.**
P_2**: по прямой AE с плоскостью $x_1 = 0$ и по прямой BE с плоскостью $x_2 = 0$.**

Выпуклый пятигранник $OCDBEA$ образует область (множество) допустимых решений задачи.

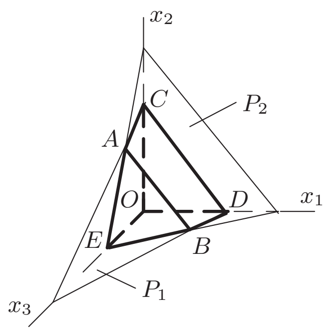


Рис. 9.2 Задача ЛП в $\Re_3$

Что касается функции $F{=}c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$, то при ее фиксированном значении $F = const$ получаемое уравнение описывает плоскость P, перпендикулярную вектору $\boldsymbol{c} = (c_1; c_2; c_3)$. При $F{=}0$ эта плоскость проходит через начало координат (точку O). Для задачи отыскания максимума целевой функции значение F_{max} при положительных коэффициентах c_1, c_1 и c_3 будет соответствовать плоскости P, наиболее удаленной от начала координат в направлении вектора $\boldsymbol{c}$ и имеющей общую точку (общие точки) с областью допустимых решений Ω.

В зависимости от направления вектора $\boldsymbol{c}$ это может быть одна из угловых точек O, A, B, C, D, E, одно из ребер многогранника $OCDBEA$ (OC, CD, AB, ...) или одна из граней, например $ABDC$ (в случае, если вектор $\boldsymbol{c}$ перпендикулярен плоскости P_1). В последнем случае будут пропорциональны координаты векторов нормалей к плоскостям P и P_1, т.е. будут выполняться условия: $\dfrac{c_1}{a_{11}} = \dfrac{c_2}{a_{12}} = \dfrac{c_3}{a_{13}}$.

Обобщение сказанного на пространство $\Re_n$ очевидно. Для этого достаточно рассмотренные плоскости заменить на гиперплоскости и записать их уравнения $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$ в пространстве с n взаимно ортогональными координатными плоскостями $x_j = 0$ $(j = \overline{1, n})$.

9.9. Каноническая форма задачи ЛП

Для простоты рассуждений будем считать, что ограничения представляют собой только неравенства. Случаи, когда среди неравенств имеются уравнения, будут рассмотрены на примерах решения частных задач ЛП.

Каноническая форма задачи ЛП отличается от соотношений (9.4)-(9.6) тем, что в ней неравенства (9.5) путем введения дополнительных переменных преобразуются в равенства.

Добавим к первому неравенству системы (9.5) новую переменную x_{n+1} **такую, которая превращает неравенство в равенство. Аналогично — ко второму неравенству — переменную** x_{n+2}, **. . . , к последнему неравенству переменную** x_{n+m}.

В *классической постановке* **задачи ЛП при** $F \implies \max$ **неравенства (9.5) имеют знак** $\leq$**. Поэтому все добавляемые переменные будут неотрицательны. Кроме того, новые переменные фиктивные, поэтому в целевую функцию они входить не будут (войдут с нулевыми множителями).**

В результате придем к *канонической форме* **задачи ЛП:**

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \Longrightarrow \max; \tag{9.18}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m; \end{cases} \tag{9.19}$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1, (n+m)}\right) \tag{9.20}$$

Систему уравнений (9.19) представим в матричной форме;

$$AX = B,$$

где

$$\underset{m\times(n+m)}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \ldots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{1} \end{pmatrix};$$

$$\underset{(n+m)\times 1}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix}; \qquad \underset{(m\times 1)}{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Полученная путем добавления фиктивных переменных система уравнений (9.19) линейно независима потому, что подматрица коэффициентов, стоящих при введенных фиктивных переменных (второе равенство для матрицы A), является единичной матрицей порядка m, равного количеству уравнений.

Пример.

Привести к каноническому виду систему ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4, \\ 2x_1 - \ x_2 \le 2, \\ \qquad\quad x_2 \le 3. \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Р е ш е н и е. Приведенная система состоит из трех неравенств (без ограничений допустимости) и включает в себя две неизвестные.

К каждому из неравенств добавим по одной положительной переменной такой, чтобы неравенства превратились в равенства:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ \qquad\quad x_2 + x_5 = 3. \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, \quad (i = \overline{1,5}).$$

Фигурными скобками выделена система трех ($m = 3$) уравнений с пятью неизвестными. Решение этой системы можно найти методом Гаусса-Жордана.

Составим расширенную матрицу системы уравнений:

$$P = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & -1 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & \textbf{св} \end{array} \end{array}.$$

Элементарных преобразований над строками матрицы осуществлять не требуется, так как векторы A_3, A_4 и A_5 образуют единичную матрицу и, следовательно, соответствующие им переменные x_3, x_4 и x_5 следует принять за основные, а x_1 и x_2 – за свободные. Перенося векторы A_1 и A_2 в правую часть матрицы P, получим общее решение системы уравнений канонической формы ограничений задачи ЛП:

$$X = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -x_1 & -2x_2 \\ 2 & -2x_1 & +x_2 \\ 3 & & -3x_2 \end{pmatrix}.$$

Определим частное решение системы уравнений, соответствующее равенству нулю свободных переменных. При $x_1 = x_2 = 0$ частное решение системы уравнений примера:

$$X^0 = (x_3^0, x_4^0, x_5^0)^T = (4, 2, 3)^T.$$

Проведенные преобразования позволили выделить базисный минор, состоящий из векторов-столбцов условий

$$A^0 = (A_3^0, A_4^0, A_5^0)$$

и представить расширенную матрицу в виде

$$P^0 = (A_3^0, A_4^0, A_5^0 | B, -A_1^0, -A_2^0).$$

Векторы условий A_3^0, A_4^0 и A_5^0 линейно независимы и поэтому являются *базисом* **системы ограничений.**

Выбор базиса системы ограничений определил соответствующие базисные переменные: x_3^0, x_4^0, x_5^0, а переменные x_1^0 и x_2^0 при таком выборе базиса играет роль свободных переменных.

9.10. Свойства решений задач ЛП

Неравенства (9.5) системы ограничений для случая приведения задачи ЛП к каноническому виду превращаются в систему уравнений (9.19).

Чтобы задача ЛП имела решение, система ее ограничений (9.19) должна быть совместной. Совместность уравнений будет обеспечена, если ранг r матрицы ее коэффициентов не меньше ранга расширенной матрицы (теорема Кронекера-Капелли). В частном случае, если в задаче ЛП все ограничения представлены в виде неравенств (равенства в исходной системе отсутствуют), то количество линейно независимых уравнений приведенной к каноническому виду системы ограничений будет равно рангу матрицы коэффициентов (количеству уравнений или равному ему количеству добавочных неизвестных m). В то же время общее количество неизвестных равно $n + m$. То есть, если система уравнений системы ограничений совместна, то она в общем случае будет иметь бесчисленное множество решений.

Запишем ограничения приведенной к каноническому виду задачи ЛП в виде, соответствующем (9.13):

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_n A_n + x_{n+1} A_{n+1} + \ldots + x_{n+m} A_{n+m} = B. \qquad (9.21)$$

Здесь $A_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^T \quad (j = \overline{1, n+m})$ **— векторы-столбцы матрицы коэффициентов системы ограничений.**

Из системы векторов A_1**,...,** A_n**,** A_{n+1}**, ...,** A_{n+m} **можно выбрать совокупность максимального количества линейно независимых векторов, образующих базис. Базисов может быть несколько. Для простоты дальнейших рассуждений будем считать, что номера векторов** $A_j \quad (j = \overline{1, m+n})$ **упорядочены так, что последние** m **из них** A_{n+1}**, ...,** A_{n+m} **образуют базис. Нумерация соответствует тому, что исходная базисная матрица коэффициентов во многих задачах линейного программирования будет единичной. Выбранному базису соответствуют базисные переменные (9.21)** $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$**. Тогда оставшиеся переменные** x_1**,** x_2**,...,** x_n **будут относиться к свободным переменным.**

Выражая базисные переменные через свободные, получим общее решение системы ограничений. Одним из частных решений системы ограничений является решение, полученное при условии равенства нулю всех свободных переменных.

Опорным решением **задачи ЛП называется вектор ее допустимого решения при условии, что все свободные переменные равны нулю. Опорное решение представляет собой совокупность неотрицательных координат в разложении (9.21), стоящих множителями при линейно независимых векторах** A_{n+1}**,** A_{n+2}**, ...,** A_{n+m} **(базисных векторах):**

$$X = (x_1 = 0; \ldots; x_m = 0; x_{m+1}; \ldots; x_{m+n})^T.$$

Пример. Рассмотрим систему ограничений задачи ЛП, приведенную к каноническому виду:

$$\begin{cases} \;\; x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 4x_1 + \;\; x_2 + x_4 = 8; \end{cases} \tag{9.22}$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, 4}).$$

Система ограничений задачи может быть представлена в виде

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}. \tag{9.23}$$

Векторы $X^1 = (0; 2; 0; 6)^T$ **и** $X^2 = (1; 1; 1; 3)^T$**, как легко в этом убедиться, являются допустимыми решениями системы ограничений.**

Индексами сверху обозначений векторов решений и векторов ограничений здесь и в дальнейшем будем обозначать варианты решений.

Проверим, будут ли векторы X^1 **и** X^2 **опорными решениями задачи ЛП.**

В случае решения X^1 система ограничений (9.23) превратится в тождества:

$$2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

В этом случае имеем два вектора условий (векторов коэффициентов при неизвестных x_2 и x_4 в ограничениях):

$$A_2^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A_4^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Эти векторы линейно независимы. Утверждение справедливо потому, что для них нельзя подобрать такие коэффициенты λ_1 и λ_2, одновременно не равные нулю, чтобы выполнялось условие

$$\lambda_1 A_2^1 + \lambda_2 A_4^1 = 0.$$

Линейная независимость векторов следует и из того, что ранг матрицы

$$A^1 = (A_2^1, A_4^1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

составленной из двух векторов, равен двум (определитель матрицы не равен нулю).

Для вектора решения X^2 имеем четыре вектора условий:

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad A_2^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A_4^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Эти векторы линейно зависимы. Утверждение справедливо хотя бы потому, что векторы A_1^2 и A_2^2 могут быть представлены в виде линейных комбинаций векторов A_3^2 и A_4^2:

$$A_1^2 = A_3^2 + 4A_4^2;$$

$$A_2^2 = 2A_3^2 + A_4^2.$$

Пара векторов A_2^1 и A_4^1 образует базис в системе четырех векторов условий, а четыре вектора A_1^2, A_2^2, A_3^2 и A_4^2 — не образуют. Согласно приведенному определению, вектор X^1 является опорным решением задачи, а X^2 таковым не является.

Теорема 1. *Решение X^i задачи ЛП будет опорным в том случае, если в разложении* **(9.21)** *вектора ограничений $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$ по векторам базиса A_1^i, A_2^i,* **. . . ,** *A_m^i все коэффициенты (переменные x_j) неотрицательны.*

Утверждение теоремы следует из условий неотрицательности переменных задачи.

Вектор $X^3 = (0; 8; -12; 0)^T$ удовлетворяет системе уравнений (9.22) и имеет базис линейно независимых векторов:

$$A_2^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

но вектор ограничений $B = (4; 8)$ раскладывается по этому базису, имея отрицательный коэффициент при A_3^3:

$$B = 8A_2^3 - 12A_3^3$$

или

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 12 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому вектор X^3 не может рассматриваться в качестве опорного решения.

Для рассмотренного примера матрица коэффициентов системы ограничений с помощью элементарных преобразований может быть приведена к единичной матрице второго порядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, ранг матрицы и количество базисных векторов условий равны 2.

Опорное решение называется *невырожденным,* **если число его ненулевых координат точно равно рангу матрицы коэффициентов, и** *вырожденным* **— в противном случае. В рассмотренном примере X^1 и X^3 — векторы невырожденных решений, а X^2 — вектор вырожденного решения.**

Задача ЛП может иметь несколько (но ограниченное количество) опорных решений. Одно из опорных решений будет оптимальным. Поэтому оптимальное решение следует искать среди опорных решений.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Если совокупность векторов условий $A_1, A_2, \ldots, A_{n+m}$ содержит m линейно независимых векторов, $A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots, A_{n+m}$, то опорный план*

$$X = (x_1 = 0, \ldots, x_m = 0, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n})^T$$

соответствует крайней точке области допустимых решений Ω**.**

В справедливости теоремы убедимся на примере задачи ЛП в $\Re_2$.

В этом случае ограничения сводятся к системе двух неоднородных линейно независимых уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Решением системы уравнений являются две координаты x_1 и x_2 точки пересечения двух прямых, представленных системой уравнений. Это — угловая точка выпуклой области допустимых решений задачи.

Для $\Re_3$ система ограничений сводится к системе трех уравнений с тремя неизвестными. Решение системы дает в общем случае три координаты угловой точки пересечения трех плоскостей.

Обобщение рассуждений на пространство $\Re_n$ убеждает в справедливости теоремы.

Еще одну теорему, определяющую свойство решения задач ЛП, приведем без доказательства.

Теорема 3. *Если задача ЛП имеет решение, то целевая функция F достигает своего экстремального значения хотя бы в одной из крайних точек области Ω.*

9.11. Улучшение решения. Признаки оптимальности

Рассмотрим два примера решения задач ЛП, исходные соотношения для которых приведены к каноническому виду.

Пример 1.

$$F = 5 - x_1 + x_2 \implies \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 8; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,4}).$$

Запишем уравнения системы ограничений в матричном виде и преобразуем полученное выражение, выделив в нем единичную матрицу коэффициентов при основных переменных:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \end{array} \implies \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 8 & -4 & -1 \end{array}\right). \\ \begin{array}{ccccc} x_3 & x_4 & & x_1 & x_2 \end{array} \end{array}$$

Отсюда получаем общее решение системы ограничений:

$$x_3 = 4 - x_1 - 2x_2, \tag{9.24}$$

$$x_4 = 8 - 4x_1 - x_2. \tag{9.25}$$

В приведенных преобразованиях в качестве опорного решения в нулевом приближении выбран вектор $X^0 = (0, 0, x_3, x_4)^T$, единичные базисные векторы для которого $A_3 = (1, 0)^T$ и $A_4 = (0, 1)^T$ линейно независимы и образуют единичную матрицу.

Свободные переменные x_1 и x_2 будем считать равными нулю. Тогда частным решением системы ограничений (решением в нулевом приближении) будет вектор $X^0 = (0, 0, 4, 8)^T$. При найденных значениях координат вектора решения X^0 целевая функция

$$F^0 = 5 - 0 + 0 = 5.$$

Возникает вопрос: можно ли уменьшить значение F, приблизив его к минимальному, и если да, то каким образом?

Для ответа на этот вопрос обратимся к исходному выражению для целевой функции. Переменная x_1 входит в выражение для F с коэффициентом -1. Так как все переменные задачи — неотрицательные величины, то уменьшить значение целевой функции можно, увеличивая значение переменной x_1. Такое утверждение не подходит к переменной x_2, которая в нулевом приближении принята равной нулю, а ее увеличение приведет к росту функции цели.

Если в решениях (9.24) и (9.25) переменную x_2 оставить равной нулю (этого требует условие минимизации F), то из условия неотрицательности переменных x_3 и x_4 следует, что в выражении (9.24) x_1 может достичь максимального значения $x_1 = 4$ (x_3 при этом станет равной нулю), а в выражении (9.25) может достичь максимального значения при $x_1 = \dfrac{8}{4} = 2$.

Из двух предельных величин для x_1 следует выбрать меньшее: $x_1 = 2$ (при $x_1 = 4$ переменная x_4 в выражении (9.25) становится отрицательной, что недопустимо):

$$x_1 = \min\left\{\frac{4}{1}; \frac{8}{4}\right\} = 2.$$

Требуемое значение x_1 получено из (9.25). Из этого же равенства выразим новую основную переменную:

$$x_1 = 2 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_4. \tag{9.26}$$

Выражение для второй основной переменной получается из (9.24) заменой x_1 на (9.26):

$$x_3 = 4 - (2 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_4) - 2x_2 = 2 - \frac{7}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_4. \tag{9.27}$$

Запишем выражение для функции цели в первом приближении:

$$F^1 = 5 - (2 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_4) + x_2 = 3 + \frac{5}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_4 \implies min. \tag{9.28}$$

При равенстве нулю свободных переменных x_2 и x_4 получаем

$$F^1 = 3.$$

Это значение целевой функции является минимальным, так как в выражении (9.28) у обеих переменных коэффициенты положительные. Их увеличение не может привести к уменьшению значения F.

Пример 2.

$$F = -x_1 - x_2 \implies \min;$$

$$\begin{cases} -x_1 + \ x_2 + x_3 = 1, \\ \ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,4}).$$

Запишем уравнения системы ограничений в матричном виде и преобразуем полученные выражения, выделив в них единичную матрицу коэффициентов при основных переменных:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \implies \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right).$$
$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \end{array}$$

Отсюда получаем общее решение системы ограничений:

$$x_3 = 1 + x_1 - x_2, \tag{9.29}$$

$$x_4 = 2 - x_1 + 2x_2. \tag{9.30}$$

Свободные переменные будем считать равными нулю. Тогда опорным решением системы ограничений (решением в нулевом приближении) будет вектор $X^0 = (0 \ 0 \ 1 \ 2)^T$. При этих значениях координат вектора решения целевая функция

$$F^0 = -0 - 0 = 0.$$

Исходное выражение для целевой функции таково, что рост обеих входящих в него переменных x_1 и x_2 будет приближать F к минимуму. Увеличение переменной x_1 ограничено величиной 2, что следует из равенства (9.30), а переменной x_2 — значением 1,

получаемом из (9.29). При $x_1 > 2$ и $x_2 > 1$ переменные x_4 и x_3 становятся отрицательными (недопустимыми).

Так как $x_1 = 2$ больше, чем $x_2 = 1$, а эти переменные входят в выражение для целевой функции с одинаковыми коэффициентами ($c_1 = c_2 = -1$), то в качестве новой основной переменной выбираем x_1, а свободной переменной станет x_4.

Из (9.30) следует

$$x_1 = 2 + 2x_2 - x_4. \tag{9.31}$$

В выражении (9.29) заменим x_1:

$$x_3 = 1 + (2 + 2x_2 - x_4) - x_2 = 3 + x_2 - x_4. \tag{9.32}$$

Функция цели при новых свободных переменных (в первом приближении):

$$F^1 = -(2 + 2x_2 - x_4) - x_2 = -2 - 3x_2 + x_4$$

равна -2 при $x_2 = x_4 = 0$.

Переменную x_4 в выражении для F^1 увеличивать нельзя (функция цели будет расти). Что касается переменной x_2, то она может возрастать неограниченно, ибо в выражения (9.31) и (9.32) она входит с положительными коэффициентами.

Оптимального решения не существует:

$$minF \to -\infty.$$

Пример 3.

Задачи, рассмотренные в примерах 1 и 2, обобщим, ограничиваясь четырьмя переменными и двумя уравнениями условий:

$$F = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \implies \min; \tag{9.33}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = b_2; \end{cases} \tag{9.34}$$

$$x_i \geq 0, \quad (i = \overline{1, 4}).$$

Представление системы ограничений в виде (9.34) (с единичной матрицей при переменных x_3 и x_4) позволяет выбрать простейший исходный базис $A^0 = (A_3, A_4)$ (базис нулевого приближения) в виде единичных векторов-столбцов при переменных x_3 и x_4:

$$A_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \implies \quad A^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = I.$$

В этом случае общее решение системы уравнений (9.34) примет вид

$$x_3 = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2, \tag{9.35}$$

$$x_4 = b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2. \tag{9.36}$$

При нулевых значениях свободных переменных ($x_1 = x_2 = 0$) из выражений (9.35)–(9.36) получается частное решение для основных переменных: $x_3 = b_1$, $x_4 = b_2$. Вектор опорного решения в нулевом приближении

$$X^0 = (0; 0; x_3; x_4)^T = (0; 0; b_1; b_2)^T,$$

и целевая функция

$$F^0 = c_0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 = c_0.$$

Вопрос о необходимости дальнейшего улучшения решения зависит от коэффициентов при переменных в целевой функции и в ограничениях. При этом возможны три случая.

Случай 1. *Все коэффициенты при свободных переменных в функции цели F не отрицательны*: $c_1 \geq 0$; $c_2 \geq 0$.

В этом случае для любого неотрицательного решения $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$ системы (9.34) $c_1x_1 \geq 0$, $c_2x_2 \geq 0$ имеем $F = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 \geq c_0$, т.е $minF = c_0$ и полученное решение оптимально.

Случай 2. *В выражении для F имеется хотя бы одна свободная переменная x_j, коэффициент при которой отрицателен* ($c_j < 0$), *и среди коэффициентов a_{1j}, a_{2j} при переменной x_j в системе ограничений имеется хотя бы один отрицательный.*

Случай соответствует примеру 1. Для него одну из переменных x_j (x_1 или x_2) с отрицательным коэффициентом a_{1j} или a_{2j} переводят в основную. В число свободных переводится та из основных переменных, которая выражается через x_j с отрицательным коэффициентом. Если оба коэффициента отрицательны, то в свободные переменные переводится та, для которой отношение $\dfrac{b_i}{a_{ij}}$ $(i = \overline{1,2})$ будет минимальным.

«Рокировка» основной и свободной переменных позволяет увеличить значение переменной x_j, входящей с отрицательным коэффициентом в целевую функцию, тем самым уменьшить F, приблизив ее к минимуму.

Случай 3. *В выражении для F имеется свободное неизвестное, коэффициент при котором отрицателен, а все коэффициенты при этом неизвестном в ограничениях* **(9.34)** *— не отрицательны.*

Случай соответствует примеру 2. Задача не имеет решения, так как $minF \to -\infty$.

9.12. Симплексный метод

В предыдущем параграфе рассматривались различные случаи улучшения решения задачи ЛП. Использованные приемы относятся к простейшему, так называемому *симплексному методу* **или** *симплекс-методу* **(английское «simple» — простой) отыскания решения задачи ЛП. Суть симплексного метода заключается в следующем.**

Если известна какая-нибудь крайняя точка области Ω и значение функции цели F (при стремлении ее, например, к максимуму) в этой точке, то все точки, в которых значение F меньше найденного, в дальнейших улучшениях решения не рассматриваются. Алгоритм симплексного метода позволяет на последующих шагах переходить только к тем точкам границы Ω, в которых значение F ближе к экстремальному. Решение в симплексном методе заканчивается при условии, что найденное значение целевой функции не может быть улучшено.

Симплексный метод базируется на следующем:
— умение задавать начальный опорный план;
— умение переходить к лучшему опорному плану;
— существование признака оптимальности решения.

Рассмотрим подход к организации симплексного метода решения задачи ЛП, приведенной к каноническому виду. Будем для определенности находить максимальное значение функции цели F:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \Longrightarrow \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1k}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{l1}x_1 + \ldots + a_{lk}x_2 + \ldots + a_{ln}x_n + x_{n+l} = b_l, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mk}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m; \end{cases} \tag{9.37}$$

$$x_j \geq 0 \ \big(j = \overline{1, (n+m)}\big).$$

Представим исходные данные в виде табл. 9.1.

В последней строке (*индексной***) стоят** *индексы* **— взятые с обратным знаком коэффициенты при неизвестных в целевой функции. Смысл умножения коэффициентов c_j на -1 состоит в том, что в этом случае при преобразованиях Гаусса-Жордана в последней строке матрицы в столбце со свободными членами b_i получается значение целевой функции F.**

В качестве базисных в исходном (нулевом) приближении удобно выбрать векторы условий, стоящие при переменных $x_{n+1}, \ldots,$

Таблица 9.1. Исходные данные задачи ЛП

A_j $\underline{A}_i$	$\downarrow$ $A_1 \ldots A_k \ldots A_n$ $(x_1)\ldots(x_k)\ldots(x_n)$	$A_{n+1} \ldots A_{n+l} \ldots A_{n+m}$ $(x_{n+1})\ldots(x_{n+l})\ldots(x_{n+m})$	b_i	Q_i
A_{n+1}	$a_{11} \ldots a_{1k} \ldots a_{1n}$	$1 \quad \ldots \quad 0 \quad \ldots \quad 0$	b_1	b_1/a_{1k}
$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\leftarrow A_{n+l}$	$a_{l1} \ldots a_{lk} \ldots a_{ln}$	$0 \quad \ldots \quad 1 \quad \ldots \quad 0$	b_l	b_l/a_{lk}
$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_{n+m}	$a_{m1} \ldots a_{mk} \ldots a_{mn}$	$0 \quad \ldots \quad 0 \quad \ldots \quad 1$	b_m	b_m/a_{mk}
$-c_j$	$-c_1 \ldots -c_k \ldots -c_n$	$0 \quad \ldots \quad 0 \quad \ldots \quad 0$	$F^0 = 0$	

x_{n+m}, множители при которых равны единицам и поэтому базис $A^0 = (A_{n+1}, \ldots, A_{n+m}) = I$ представляет собой единичную матрицу.

Если среди координат вектора коэффициентов $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ имеются положительные (отрицательные значения индексов $-c_j$), то согласно признаку оптимальности в базис A^0, выбранный в качестве исходного, следует ввести новый вектор A_k, которому соответствует максимальное значение весового коэффициента c_k.

Введение в базис нового вектора A_k (над ним в верхней строке стоит стрелка) должно сопровождаться выводом из этого базиса вектора A_{n+l} (перед ним в левой колонке стоит стрелка), которому соответствует минимальное положительное значение отношения

$$Q_l = \frac{b_l}{a_{lk}} = \min_i \frac{b_i}{a_{ik}}, \qquad a_{ik} > 0 \qquad (i = \overline{1, m}). \tag{9.38}$$

Строку с номером l, столбец с номером k и элемент a_{lk} принято называть *направляющими.*

Элементы вводимой строки, заменяющей в таблице направляющую строку, вычисляются по формуле

$$a'_{lj} = \frac{a_{lj}}{a_{lk}}, \qquad \left(j = \overline{1, (n+m)}\right).$$

Что касается элементов всех других, i-х строк ($i \neq l$), то для определения их новых значений используется зависимость

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{lj}\frac{a_{ik}}{a_{lk}} \qquad \left(j = \overline{1, (n+m)}, \quad i = \overline{1, m}\right).$$

Значения координат вектора ограничений нового опорного решения можно определить из выражений:

для $i = l$

$$b'_l = \frac{b_l}{a_{lk}};$$

для $i \neq l$

$$b'_i = b_i - b_l \frac{a_{ik}}{a_{lk}}.$$

Элементы индексной строки $-c_j$ преобразуются по формуле

$$-c'_j = -c_j + \Delta_j,$$

где

$$\Delta_j = c_l \frac{a_{lj}}{a_{lk}}.$$

Если наименьшее значение Q не единственное, то для избежания «зацикливания», которое может иметь место при произвольном выборе базисных векторов, поступают следующим образом.

Вычисляются величины a'_{ij}, которые сопоставляются по столбцам слева направо, включая нулевые и отрицательные значения. Отбрасываются строки с бо́льшими значениями a'_{ij}, и из базиса исключается соответствующий вектор.

Для использования описанной процедуры симплекс-метода в задаче ЛП на отыскание минимума целевой функции можно эту функцию умножить на -1 и затем отыскивать максимум для вновь полученной целевой функции.

9.13. Пример решения задачи ЛП

Пусть заданы целевая функция

$$F = 40x_1 + 20x_2 \longrightarrow \max$$

и система ограничений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 200, \\ 2x_1 + x_2 \leq 250; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,2}).$$

Требуется найти такой вектор решения, который обеспечит максимальное значение функции цели.

Р е ш е н и е. Приведем задачу к каноническому виду, добавляя к каждому неравенству системы по дополнительной положительной неизвестной x_3 и x_4 и превращая тем самым неравенства в равенства:

$$F = 40x_1 + 20x_2 + 0x_3 + 0x_4 \longrightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 = 200, \\ 2x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 250; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}).$$

Представим данные задачи и ее дальнейшее решение в виде табл. 9.2–9.4.

Таблица 9.2. Исходная таблица задачи

$A_i \backslash A_j$	$\downarrow$ A_1	A_2	A_3	A_4	b_i	Q_i	
A_3	1	2	1	0	200	200	$-N2/2$
$\leftarrow A_4$	$\boxed{2}$	1	0	1	250	$\underline{125}$	:2
$-c_j$	$-\underline{40}$	-20	0	0	$F^0 = 0$		$+20N2$

В исходном (нулевом) приближении базисными векторами условий задачи (векторами, координаты которых образуют единичную подматрицу в матрице коэффициентов) являются $A_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$**;** $A^0 = (A_3, A_4)$.

В этом случае опорным решением задачи в нулевом приближении будет вектор $X^0 = (x_1^0; x_2^0; x_3^0; x_4^0)^T = (0; 0; 200; 250)^T$.

Этому решению соответствует значение целевой функции:

$$F^0 = c_1 x_1^0 + c_2 x_2^0 + 0x_3^0 + 0x_4^0 = 40 \cdot 0 + 20 \cdot 0 + 0 \cdot 200 + 0 \cdot 250 = 0.$$

Так как среди весовых коэффициентов c_j $(j = \overline{1,4})$ **имеются положительные (отрицательные значения индексной строки таблицы), то должно существовать большее, чем** $F^0 = 0$**, значение целевой функции.**

Новый базисный вектор должен соответствовать максимальному значению весового коэффициента. Это значение $(c_1 = 40)$**, и ему соответствует вектор условий** $A_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$**. Для определения вектора условий, который необходимо удалить из базиса, найдем минимум отношений** b_i/a_{i1}**, то есть отношений координат вектора ограничений к координатам вектора** A_1**:**

$$Q = \min\left(\frac{b_1}{a_{11}}; \frac{b_2}{a_{21}}\right) = \min\left(\frac{200}{1}; \frac{250}{2}\right) = \frac{250}{2} = \frac{b_2}{a_{21}}.$$

Значению $a_{21} = 2$**, взятому в таблице в рамку и находящемуся на второй строке матрицы коэффициентов, соответствует единичное значение находящейся на этой же строке координаты базисного вектора** A_4**, который и требуется удалить из числа базисных.**

Этот факт отмечен стрелкой, стоящей перед вектором A_4 в левом столбце таблицы.

Далее используем преобразования Гаусса-Жордана (действия над строками указаны в правом столбце таблицы) для преобразования нового базисного вектора к виду $A_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ и превращению в нуль весового коэффициента c_1.

Таблица коэффициентов матрицы условий преобразуется к виду, приведенному в табл. 9.3 (первая итерация симплекс-метода).

Таблица 9.3. Таблица задачи, итерация 1

$A_i \backslash A_j$	A_1	A_2	A_3	A_4	b_i
A_3	0	3/2	1	−1/2	75
A_1	1	1/2	0	1/2	125
$\Delta_j - c_j$	0	0	0	20	$F^1 = 5000$

Базисом первого приближения является пара векторов условий A_1 и A_3, образующих в совокупности единичную матрицу:

$$A^1 = (A_1 \; A_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты, стоящие в последней строке таблицы, позволяют представить выражение для целевой функции в виде

$$F^1 = 5000 - 20x_4,$$

и при равенстве нулю свободной переменной x_4: $F^1 = 5000$.

Опорное решение задачи на этой итерации соответствует вектору $X^1 = (x_1^1;\ x_2^1;\ x_3^1;\ x_4^1)^T = (125;\ 0;\ 75;\ 0)^T$, что позволяет определить значение целевой функции по ее первоначальному виду:

$$F^1 = c_1x_1^1 + c_2x_2^1 + 0x_3^1 + 0x_4^1 = 40{\cdot}125 + 20{\cdot}0 + 0{\cdot}75 + 0{\cdot}0 = 5000.$$

Значение совпадает с полученным выше.

Среди весовых коэффициентов целевой функции (последняя, индексная строка табл. 9.3) в результате проделанного преобразования не оказалось отрицательных (среди коэффициентов функции F отсутствуют положительные). Поэтому дальнейшее улучшение решения невозможно.

На основании признака оптимальности делаем заключение:

$$F_{max} = F^1 = 5000.$$

Замечание. Наличие одного «лишнего» нуля в строке индексов (больше двух для ранга матрицы коэффициентов, равного двум) говорит о неоднозначности опорного решения. Действительно, если в качестве базиса для определения опорного решения выбрать векторы A_1 и A_2 $\left(A^2 = (A_1, A_2)\right)$, то табл. 9.2 преобразуется в табл. 9.4.

Таблица 9.4. Решение задачи, итерация 2

$\underline{A}_i \backslash A_j$	A_1	A_2	A_3	A_4	b_i
A_2	0	1	$2/3$	$-1/3$	50
A_1	1	0	$-1/3$	$2/3$	100
$\Delta_j - c_j$	0	0	0	20	$F^2 = 5000$

Опорное решение задачи, представленной в табл. 9.4, соответствует вектору

$$X^2 = (x_1^2;\ x_2^2;\ x_3^2;\ x_4^2)^T = (100;\ 50;\ 0;\ 0)^T,$$

что позволяет определить значение целевой функции:

$$F^2 = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + 0x_3^2 + 0x_4^2 =$$
$$= 40 \cdot 100 + 20 \cdot 50 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 5000 = F_{max}.$$

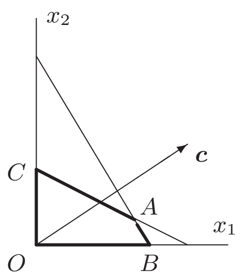


Рис. 9.6. Графическое решение

Так как среди индексов отсутствуют отрицательные, то целевая функция равна своему максимальному значению, которое совпадает с полученным значением для первой итерации.

Решение задачи неоднозначно. Разные варианты вектора решения приводят к одному значению целевой функции.

Если решить эту задачу графическим методом (наличие только двух переменных позволяет это сделать), то в результате построений приходим к изображению, показанному на рис. 9.6.

Прямые, соответствующие постоянным значениям функции цели при различных значениях целевой функции, будут параллельны AB.

Значение F_{max} **соответствует наибольшему удалению прямой** $40x_1 + 20x_2 = const$ **от начала координат в направлении нормали** $\boldsymbol{c} = (40, 20)$ **при условии, что эта прямая принадлежит множеству** Ω **допустимых значений (четырехугольнику** $CABO$**).**

Таким условиям удовлетворяет прямая, совпадающая с AB**. Координаты любой точки, лежащей на отрезке** AB, **будут соответ-**

ствовать $F_{max} = 5000$. Действительно, точка $B(125; 0)$ соответствует решению задачи на первой итерации (табл. 9.3), т.е вектору $X^1 = (125; 0;\ 75; 0)^T$, а точка $A(100; 50)$ — решению задачи во втором приближении (табл. 9.4), т.е вектору $X^2 = (100; 50; 0; 0)^T$.

Решение в нулевом приближении соответствует значению функции цели в начале координат: $F^0 = F(0, 0) = 0$.

9.14. Метод искусственного базиса

Добавление фиктивных положительных переменных $x_{n+1}, \ldots,$ x_{n+m} к ограничениям $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad (i = \overline{1, m},\ b_i \ge 0)$ превращало эти ограничения в систему линейных алгебраических уравнений (9.37) с единичным опорным базисом и положительными правыми частями. Характерной особенностью таких уравнений является то, что их правые части — положительные величины, и исходное опорное решение равно правым частям уравнений: $X^0 = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})^T = (b_1, \ldots, b_m)^T = B$. В этом случае говорят, что ограничения задачи ЛП имеют *предпочтительный вид.*

Ограничения будут иметь *непредпочтительный вид***, если перед коэффициентами их правой части (b_i) стоят знаки, противоположные знакам при фиктивных переменных.**

Для решения задач ЛП с ограничениями, имеющими непредпочтительный вид, применяют метод *искусственного базиса* **(***M-метод***). Суть его заключается в следующем.**

Пусть задача ЛП представляется в виде математической модели:

$$F = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \quad \to \quad \max(\min); \tag{9.39}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n + x_{n+k} = b_k; \end{cases} \tag{9.40}$$

$$\begin{cases} a_{k+1,1}x_1 + \ldots + a_{k+1,n}x_n - x_{n+k+1} = b_{k+1}, \\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m; \end{cases} \tag{9.41}$$

$$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1, n{+}m}). \tag{9.42}$$

Часть базисных векторов опорного решения имеют отрицательные координаты — множители при фиктивных неизвестных в системе уравнений (9.41) равны -1. Система ограничений имеет непредпочтительный вид.

Прибавим к левым частям ограничений (9.41) положительные переменные $w_1,\ \ldots,\ w_{m-k}$.

$$\begin{cases} a_{k+1,1}x_1 + \ldots + a_{k+1,n}x_n - x_{n+k+1} + w_1 = b_{k+1}, \\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n - x_{n+m} + w_{m-k} = b_m. \end{cases} \tag{9.43}$$

Вместе с переменными $x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$ они дают возможность представить базис исходного опорного решения в виде единичной матрицы.

Переменные $w_1,\ \ldots,\ w_{m-k}$ добавляются к целевой функции с коэффициентами $\pm M$ ($-M$ — при отыскании максимума и $+M$ — при отыскании минимума):

$$\begin{aligned} &F = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n - M(w_1 + \ldots + w_{m-k}) \quad \to \quad \max \\ &F = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + M(w_1 + \ldots + w_{m-k}) \quad \to \quad \min\,. \end{aligned} \tag{9.44}$$

Множитель M в целевых функциях — это достаточно большая постоянная, настолько большая, что если хотя бы одна из переменных $w_i \neq 0 \ \ (i = \overline{1, m-k})$, то в функции цели можно пренебречь слагаемыми $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i$. Отсюда следует, что приемлемое решение задачи ЛП будет иметь место только в случае, когда переменные $w_i = 0 \ \ (i = \overline{1, m-k})$.

Заметим, что в силу произвольности множителя M наряду с целевой функцией F можно получить оптимальное решение задачи, добиваясь выполнения условий экстремальности функции

$$\begin{aligned} &\tilde{F} = -M(w_1 + \ldots + w_{m-k}) \quad \to \quad \max, \\ &\tilde{F} = M(w_1 + \ldots + w_{m-k}) \quad \to \quad \min\,. \end{aligned} \tag{9.45}$$

Пример. Найти решение задачи ЛП:

$$F = 2x_1 + x_2 \quad \to \quad \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ x_1,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Дополнительные переменные будем обозначать для наглядности различными буквами. Для превращения неравенств системы ограничений в равенства из их левых частей необходимо вычесть положительные переменные v_1 и v_2. Однако базис опорного решения получаемой при этом системы уравнений не

Таблица 9.5. Симплекс-таблицы

	x_1	x_2	v_1	v_2	w_1	w_2	b_i	Q_i	
w_1	1	1	-1	0	1	0	6	3	$-N_2/3$
$\leftarrow w_2$	1	$\boxed{3}$	0	-1	0	1	12	2	$:3$
$-c_j{=}-M$					$-M$	$-M$			$+M(N_1{+}N_2)$
$\Delta_j{-}c_j$	$2M$	$\underline{4M}$	$-M$	$-M$	0	0	$18M$		$-4MN_2/3$
$\leftarrow w_1$	$\boxed{2/3}$	0	-1	$1/3$	1	$-1/3$	2	3	$\cdot 3/2$
x_2	$1/3$	1	0	$-1/3$	0	$1/3$	4	12	$-N_1/2$
$\Delta_j{-}c_j$	$\underline{2M/3}$	0	$-M$	$M/3$	0	$-4M/3$	$2M$		$-MN_1$
x_1	1	0	$-3/2$	$1/2$	$3/2$	$-1/2$	3		
x_2	0	1	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	3		
$\Delta_j{-}c_j$	0	0	0	0	$-M$	$-M$	0		

образует единичной матрицы (перед переменными стоит минус). Используем для решения метод искусственного базиса. Следуя ему, представим математическую модель задачи в виде

$$\tilde{F} = Mw_1 + Mw_2 \to \quad \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - v_1 + w_1 = 6, \\ x_1 + 3x_2 - v_2 + w_2 = 12, \\ x_1, x_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \geq 0. \end{cases} .$$

Решение проведем с использованием симплекс-таблиц. При первом преобразовании табл. 9.5 индексная строка, состоящая только из взятых с обратным знаком множителей M при переменных w_1 и w_2, преобразуется так, чтобы на местах этих множителей стояли нули. Необходимые для этого преобразования над строками таблицы показаны в последнем столбце напротив строки индексов $-c_j = -M$. В результате преобразований получена следующая за упомянутой строка индексов $\Delta_j - c_j$.

После трех итераций, потребовавшихся для решения задачи, процесс определения оптимального опорного решения завершается. Признаком оптимальности полученного решения

$$X^* = (x_1^*,x_2^*,v_1^*,v_2^*,w_1^*,w_2^*)^T = (3,3,0,0,0,0)^T$$

является равенство коэффициентов индексной строки соответствующим коэффициентам исходной симплекс-таблицы.

Подставляя значения координат оптимального решения в функцию цели, найдем ее минимальное значение:

$$F_{min} = 2 \cdot 3 + 3 + M(0+0) = 9.$$

9.15. Двойственность в задачах ЛП. Задача торга

Пусть работа предприятия характеризуется векторами удельных прибылей (весовых или ценовых коэффициентов, определяющих стоимость единиц продукции) $C = (c_1; c_2; \ldots; c_n)^T$ и запасов ресурсов $B = (b_1; b_2; \ldots; b_m)^T$. Кроме того, известна технологическая матрица $A = (a_{ij})$ $(i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n})$, где a_{ij} – количество i-го ресурса, идущего на производство единицы j-й продукции. Рациональная организация работы предприятия сводится к задаче ЛП, оптимизирующей план производства $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)^T$, который делает прибыль максимальной:

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \Longrightarrow \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases} \tag{9.46}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

Некоторая заинтересованная фирма предложила руководству предприятия продать ей сырье B по цене, определяемой вектором $Y = (y_1; y_2;\ \ldots; y_m)^T$, такой, что за все сырье фирма предлагает выплатить предприятию сумму, составляющую $\Phi(Y) = Y^TB = y_1b_1 + y_2b_2 + \ldots + y_mb_m$. Если $\Phi(Y)$ будет не меньше суммы $F(X)$, получаемой предприятием от производства продукции, то предприятие согласится с предложением фирмы.

В процессе торга предприятие будет стремиться к тому, чтобы выручка от продажи сырья, идущего на производство j-го вида продукции, была не меньше стоимости c_j этого вида продукции, т.е:

$$y_1a_{1j} + y_2a_{2j} + \ldots + y_ma_{mj} \ge c_j,\ (j = \overline{1, n}).$$

Что касается фирмы (покупателя сырья), то она в процессе торга будет стараться добиться того, чтобы $\Phi(Y)$ была как можно меньше.

Удовлетворить запросы фирмы с учетом интересов предприятия можно, решив задачу ЛП:

$$\Phi(Y) = y_1b_1 + y_2b_2 + \ldots + y_mb_m \Longrightarrow \min;$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n; \end{cases} \tag{9.47}$$

$$y_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,m}).$$

Задача (9.47) называется двойственной задачей ЛП по отношению к задаче (9.46). Вместе эти две задачи образуют задачу торга.

Вводя обозначения

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

перепишем (9.46) и (9.47) в матричном виде:

$$\begin{array}{ll} F(X) = C^T X \Rightarrow \max; & \Phi(Y) = B^T Y \Rightarrow \min; \\ AX \le B; & A^T Y \ge C; \\ X \ge \Theta. & Y \ge \Theta. \end{array} \tag{9.48}$$

Соотношения (9.48) представляют собой *симметричную пару двойственных задач*. Эти соотношения имеют общий вид для любых задач ЛП, не обязательно относящихся к задачам торга.

Отметим особенности пары двойственных задач.

1. Тип экстремума меняется на противоположный при переходе от одной задачи к другой.
2. Типы неравенств в системах ограничений двух взаимно двойственных задач противоположны.
3. Свободные члены вектора B исходной задачи становятся коэффициентами при переменных в целевой функции двойственной задачи.
4. Коэффициенты при переменных целевой функции исходной задачи становятся свободными членами в неравенствах системы ограничений двойственной задачи.
5. Каждый j-й столбец коэффициентов a_{ij} $(i = \overline{1,m})$ в системе ограничений исходной задачи формирует коэффициенты j-й строки системы ограничений двойственной задачи. Строки матрицы A исходной задачи становятся столбцами матрицы A^T двойственной задачи.Поэтому в матричной записи исходной задачи стоит матрица A, а в двойственной задаче — A^T.

6. **Каждой переменной вектора X исходной задачи ставится в соответствие переменная вектора Y двойственной задачи по схеме:**

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n & x_{n+1} & \dots & x_{n+m} \\ \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow \\ y_{m+1} & y_{m+2} & & y_{m+n} & y_1 & \dots & y_m \end{array}$$

Аналогично пунктам 1–6 формулируются свойства перехода от двойственной задачи к исходной. Поэтому две записанные в виде (9.48) задачи являются взаимно двойственными. Любую их них можно принять за исходную, тогда вторая задача будет двойственной по отношению к исходной.

Отметим, что при формулировке исходной и двойственной задач неравенства $\geq$ в системе ограничений должно соответствовать задаче отыскания минимума целевой функции, а $\leq$ — максимума. Если в каком-то из ограничений знак неравенства отличен от требуемого, то это неравенство следует умножить на -1, после чего поменять знак неравенства на противоположный.

Пример. Для задачи ЛП:

$$5x_1 + 2x_2 - 3x_3 \Rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 4, \\ 1 - 3x_1 + 2x_3 \leq 0, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}) \end{cases}$$

составить двойственную задачу.

Р е ш е н и е. В исходной задаче целевая функция стремится к минимуму. Поэтому во всех ограничениях делаем неравенства со знаком $\geq$:

$$5x_1 + 2x_2 - 3x_3 \Rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 4, \\ 3x_1 - 2x_3 \geq 1, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}). \end{cases}$$

Теперь, следуя требованиям пунктов 1-6, составляем двойственную задачу:

$$4y_1 + y_2 \Rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 \leq 5, \\ -y_1 \leq 2, \\ -2y_2 \leq -3, \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в том, что записанная исходная задача является двойственной по отношению к полученной.

9.16. Теоремы двойственности

Рассмотрим пару двойственных задач (9.48). Используя представленные в них соотношения, запишем последовательные неравенства:

$$F(X) = C^T X \le (Y^T A)X = Y^T(AX) \le Y^T B = \Phi(Y).$$

Выписанная цепочка неравенств позволяет записать соотношение между целевыми функциями исходной и двойственной задач ($F \to \max,\ \Phi \to \min$):

$$F(X) \le \Phi(Y). \tag{9.49}$$

Это соотношение называют *основным неравенством теории двойственности.*

С экономической точки зрения неравенство (9.49) можно трактовать следующим образом. С точки зрения производителя доход, который он может получить от продажи ресурсов, идущих на изготовление единицы продукции, должен быть не меньше, чем выручка от реализации единицы произведенной продукции. Ни один допустимый план производства не может извлечь из запасенных ресурсов больше, чем они того стоят.

Существует критерий оптимальности допустимых решений. *Для того чтобы допустимые решения X_* и Y_* исходной и двойственной задач* **(9.48)** *были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы целевые функции этих задач были равны.*

Сформулируем без доказательства две теоремы двойственности.

Теорема 1. *Если одна из двойственных задач ЛП имеет оптимальное решение, то и другая задача имеет оптимальное решение. При этом экстремальные значения целевых функций будут равны.*

По отношению к задаче планирования эта теорема утверждает, что только оптимальный план извлекает из ресурсов точно столько, сколько они стоят.

Теорема 2. *Для того чтобы допустимые решения X_* исходной и Y_* двойственной задач ЛП были оптимальными, необходимо и достаточно выполнения соотношений:*

$$1.\ Y_*^T(B - AX_*) = 0 \quad \text{и} \quad X_*^T(C - A^T Y_*) = 0.$$

Или в координатно-индексной форме:

$$2.\ \sum_{i=1}^{m} y_i^* \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*\right) = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{n} x_j^* \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i^*\right) = 0.$$

Последние две пары соотношений будут выполнены, если выполняются соотношения:

3. Для всякого $i = \overline{1, m}$, **если** $y_i^* > 0$, **то** $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$;

для всякого $j = \overline{1, n}$, **если** $x_j^* > 0$, **то** $\sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i^* = c_j$.

Равнозначность исходной и двойственной задач ЛП иногда дает возможность быстрее и проще получить решение задачи ЛП, заменяя ее на двойственную.

Пример. Найти решение задачи ЛП:

$$4x_2 - 8x_3 \Rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1, \\ -x_1 - x_3 \leq 2, \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

В этой задаче три переменных, поэтому решить ее графическим способом на плоскости нельзя. Перейдем к двойственной задаче:

$$y_1 + 2y_2 \Rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} y_1 - y_2 \geq 0, \\ y_1 \geq 4, \\ -y_2 \geq -8, \\ y_1 \geq 0, \ \ y_2 \geq 0. \end{cases}$$

В двойственную задачу входят две переменные. Ее решение, которое может быть найдено графическим методом: $y_1 = 4$, $y_2 = 0$ **и** $\Phi(4; 0) = 4$.

Используя теорему 2 двойственных задач, определим решение исходной задачи. Соотношения третьей группы говорят о том, что если оптимальное значение некоторой переменной задачи строго больше нуля, то соответствующее ограничение двойственной задачи должно быть равенством на компонентах ее оптимального решения.

И обратно: если ограничение исходной задачи является строгим неравенством на компонентах оптимального решения, то оптимальное значение двойственной переменной должно быть равно нулю.

Так как первое и третье ограничения двойственной задачи есть строгие неравенства, то $x_1 = 0$ и $x_3 = 0$. Так как $y_1 > 0$, то это значит: $x_1 + x_2 = 1$. Поэтому $x_2 = 1$.

9.17. Резюме

Возникший в ответ на потребности оптимизировать экономические процессы аппарат линейного программирования в настоящее время повсеместно применяется в различных областях человеческой деятельности.

Мировая практика создала комплексы вычислительных программ, построенных на основе методов линейного программирования и широко используемых для решения многих оптимизационных задач.

Основными компонентами математической модели задачи ЛП являются:
— функция цели, которая в процессе решения задачи должна принять минимальное или максимальное из возможных значений;
— ограничения, которые в пространстве переменных задачи образуют выпуклый многогранник.

Совокупность координат вектора решения задачи ЛП образует план решения.

Оптимальное решение обязательно должно находиться на границе области ограничений (условий).

При решении задач ЛП, в математические модели которых входят только две переменные, эффективным является графический метод. При количестве неизвестных, большем двух, для отыскания решения обычно используется симплексный метод.

Важным подспорьем при анализе решения задач ЛП является использование свойств задач, двойственных по отношению к исходным.

Разработанный подход к решению задач ЛП в настоящее время распространен на задачи нелинейные (нелинейное программирование).

9.18. Вопросы

1. **Как определить множество решений одного неравенства с двумя переменными?**
2. **Что такое пробная точка?**
3. **Что представляет собой система неравенств на плоскости?**
4. **Как определить угловые точки на множестве решений неравенств с двумя переменными?**
5. **Что собой представляет задача ЛП?**
6. **Как выглядит математическая модель задачи ЛП в общем виде? в классической постановке? в канонической форме?**
7. **Что такое целевая функция? ограничения? допустимые решения?**
8. **Как перейти от классической к канонической форме задачи ЛП?**
9. **Что такое опорное решение (план) задачи ЛП?**
10. **Что собой представляет базис для системы ограничений и как удобно его формировать на исходной итерации?**
11. **Как выглядит и какими свойствами обладает ОДЗ системы ограничений на плоскости? функция цели?**
12. **В каких точках Ω следует искать экстремальные значения функции цели?**
13. **В каких случаях задача ЛП не имеет решения?**
14. **Как определить вектор условий, который на очередной итерации следует вывести из разряда базисных? ввести в разряд базисных?**
15. **По каким признакам можно установить оптимальность целевой функции?**
16. **На задаче торга поясните смысл двойственности в задачах ЛП.**
17. **Перечислите правила формирования двойственной задачи ЛП по отношению к исходной:**
    — как изменяются, и изменяются ли, знаки неравенств и экстремума?
    — что происходит с матрицей коэффициентов?
    — как определить число переменных в двойственной задаче? число ограничений?

— какую функцию в двойственных задачах выполняют постоянные правых частей системы ограничений исходной задачи? коэффициенты при неизвестных?
— какое соответствие имеется между переменными исходной и двойственной задач?

18. **Как связаны между собой экстремальные значения целевых функций двойственной и исходной задач?**

ТЕМА 9.1
(§ 9.1–9.3 теории)
Неравенства
Семинарское занятие
Вопросы

1. **Что собой представляет область допустимых решений?**
2. **Как определить, будет ли множество допустимых решений выпуклым?**
3. **Как определить множество решений одного неравенства с двумя переменными?**
4. **Что такое пробная точка?**
5. **Что представляет собой система неравенств на плоскости?**
6. **Как определить угловые точки на множестве решений неравенств с двумя переменными? с тремя переменными?**
7. **Что собой представляют границы множеств решений системы неравенств в пространстве $\Re_n$?**
8. **Как в формуле изменить знак неравенства на противоположный?**

Задачи

Определить, принадлежат ли пробные точки, в частности начало координат, полуплоскостям (полугиперплоскостям), задаваемым неравенствами.

1. $2x_1 + x_2 - 1 > 0$.

Р е ш е н и е. Подставим координаты точки $O(0{,}0)$ **в левую часть неравенства:** $2\cdot 0+0-1 < 0$. **Изменение знака исходного неравенства**

на противоположное говорит о том, что начало координат не принадлежит полуплоскости, описываемой заданным неравенством.

2. $3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 0$**.**

Р е ш е н и е. В левую часть неравенства подставим координаты точки $O(0,0,0,0)$**:** $3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 0 = 0$. **Точка** O **удовлетворяет исходному неравенству и потому принадлежит полугиперплоскости, определяемой этим неравенством.**

Начало координат принадлежит границе области, задаваемой однородной функцией и определяемой нестрогим неравенством, так как нулевые координаты обращают неравенство в равенство.

*Определить и изобразить на графиках области допустимых значений систем неравенств***.**

3. $\begin{cases} 2x + \ y \leq 4, \\ 2x + 5y < 10. \end{cases}$

Р е ш е н и е. На координатной плоскости строим прямые $2x+y=4$ **и** $2x+5y=10$**.**

Подставим в заданные неравенства координаты пробной точки $O(0,0)$**:**

$$2 \cdot 0 + 0 < 4 \ (!), \qquad 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 < 10 \ (!).$$

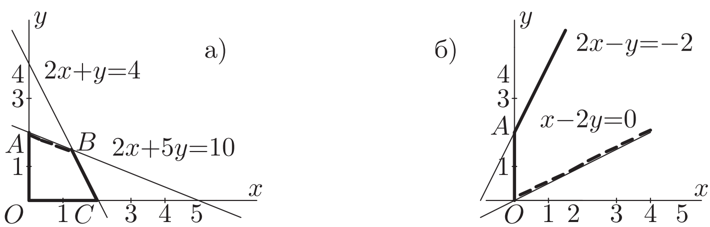


Рис. 9.7. Графики решений: а) задача 3; б) задача 4

Неравенства удовлетворяются, поэтому начало координат входит в область значений переменных, определяемую ими.

Если речь идет о *допустимых* **значениях переменных, то к исходным неравенствам необходимо добавить условия их неотрицательности:**

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0.$$

Проведенный анализ позволяет выделить область допустимых значений переменных. Эта область ограничена на на рис. 9.7,а жирным четырехугольником. Одна из границ (та, которая не вхо-

дит в область определения переменных) помечена на рисунке пунктиром.

Координаты угловых точек построенного четырехугольника определяются в результате совместного решения уравнений, описывающих пересекающиеся прямые:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \ O(0;0); \qquad \begin{cases} 2x + y = 4, \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \ C(2;0);$$

$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 2x + 5y = 10 \end{cases} \rightarrow \ B(1{,}25;1{,}5); \qquad \begin{cases} x = 0, \\ 2x + 5y = 10 \end{cases} \rightarrow \ A(0;2).$$

4. $\begin{cases} 2x - \ y \geq -2, \\ \ x - 2y < \ \ 0. \end{cases}$

Р е ш е н и е. К заданным неравенствам добавляем неравенства неотрицательности переменных:

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0.$$

Строим прямые, описываемые уравнениями:

$$2x - y = -2 \quad \text{и} \quad x - 2y = 0.$$

Подставим координаты начала координат в неравенства:

$$2 \cdot 0 - 0 > -2, \qquad 0 - 2 \cdot 0 = 0.$$

Второе неравенство не удовлетворяется — начало координат лежит на прямой $x - 2y = 0$, но сама прямая не входит в область допустимых неравенствами значений переменных.

Для пробной точки $A(0;2)$ второе неравенство удовлетворяется $(0 - 2 \cdot 2 < 0)$, следовательно, ОДЗ лежит выше прямой $x - 2y < 0$.

Еще одной особенностью области допустимых значений задачи является то, что эта область, ограниченная на рис. 9.7,б жирными линиями и пунктиром, не ограничена.

Угловая точка области допустимых решений — это точка $A(0,2)$ пересечения прямых $2x - y = -2$ и $x = 0$ (ось ординат). Точка $O(0;\ 0)$ не входит в ОДЗ.

5. $x + y \leq -2$.

Р е ш е н и е. Характерной особенностью задачи является то, что координаты точки $O(0,0)$ (рис. 9.10,а) не входят в полуплоскость, определяемую исходным неравенством: $0 + 0 > -2$, но не ≤ -2.

Область, описываемая условиями положительности переменных ($x \geq 0$ и $y \geq 0$), не лежит в полуплоскости $x + y \leq -2$. Поэтому

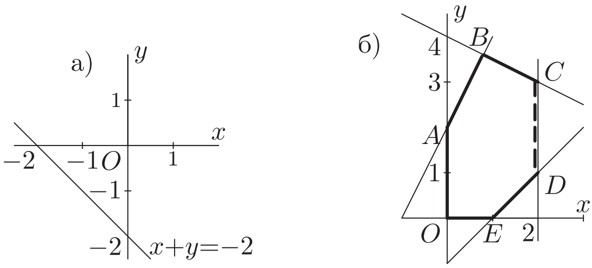


Рис. 9.8. Графики решений: а) задача 5; б) задача 6

допустимых решений исходное неравенство не имеет.

6. $\begin{cases} 2x - \ y & \geq & -2, \\ x + 2y & \leq & 8, \\ x - \ y & \leq & 1, \\ x & < & 2. \end{cases}$

Р е ш е н и е. К записанным неравенствам прибавляем условия положительности переменных: $x \geq 0, \qquad y \geq 0.$

На рис. 9.10,б изображены прямые, соответствующие уравнениям:

$$\begin{array}{llll} AB: & 2x - y = -2, & DE: & x - y = 1, \\ BC: & x + 2y = 8, & EO: & y = 0, \\ CD: & x = 2, & OA: & x = 0. \end{array}$$

Пробная точка — начало координат — позволяет определить полуплоскости для всех неравенств. Образованная область допустимых значений переменных, удовлетворяющих всем неравенствам, очерчена жирными линиями многоугольника $OABCDE$. **Прямая** CD, **соответствующая строгому неравенству, не входит в область значений переменных и на рисунке отмечена пунктиром.**

Угловые точки области, получаемые в результате совместного решения пар уравнений для пересекающихся прямых, имеют координаты:

$$A(0;2), \quad B(0{,}8;3{,}6), \quad E(1;0), \quad O(0;0).$$

К точкам $C(2;3)$ **и** $D(2;1)$ **ОДЗ только стремится, но не включает их.**

Задачи для самостоятельного решения

Найти и изобразить на координатной плоскости множество решений систем неравенств. Выделить из этих систем множества допустимых решений. Определить координаты угловых точек.

1. $x_1 < 3$; $x_2 \geq 2$. **2.** $x_1 + 2x_2 < 4$. **3.** $2x_1 + x_2 < 0$.

4. $\left\{ \begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq 1, \\ x_1 &< 3. \end{aligned} \right.$ **5.** $\left\{ \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 6 &> 0, \\ x_1 - 2x_2 &\geq 0, \\ x_1 &< 2. \end{aligned} \right.$

ТЕМА 9.2
(§ 9.4–9.11 теории)

Свойства и геометрическая интерпретация задач ЛП

Семинарское занятие

Вопросы

1. **Что собой представляет задача ЛП?**
2. **Как выглядит математическая модель задачи ЛП в общем виде? в классической постановке? в канонической форме?**
3. **Что такое целевая функция? ограничения? допустимые решения?**
4. **Как перейти от классической к канонической форме задачи ЛП?**
5. **Как установить факт линейной независимости системы ограничений?**
6. **Что такое опорное решение (план) задачи ЛП?**
7. **Что собой представляет базис для системы ограничений и как удобно его формировать на исходной итерации?**
8. **Как выглядит и какими свойствами обладает ОДЗ системы ограничений на плоскости? функция цели?**
9. **В каких точках ОДЗ системы ограничений следует искать экстремальные значения функции цели?**
10. **В каких случаях задача ЛП не имеет решения?**

Задачи

1. Предприятие изготавливает два вида продукции: A и B. Для их производства используются три вида сырья: органическое (О), неорганическое (Н) и краситель (К). Данные о наличии сырья на предприятии, его нормы расхода и цены готовой продукции представлены в таблице.

Тип сырья	Расх. сырья		Запас сырья
	A	B	
О	**30**	**25**	**4500**
Н	**40**	**30**	**3500**
К	**5**	**3**	**100**
Цена	**250**	**300**	

Не принимая во внимание спрос, составить математическую модель задачи ЛП по определению плана выпуска продукции, приносящего предприятию максимальную прибыль.

Р е ш е н и е. Обозначим через x_1 количество выпускаемой продукции типа A; x_2 – типа B.

Целевая функция равна сумме произведений цены товара на объем ее выпуска. Эта величина должна стремиться к максимуму:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 = 250x_1 + 300x_2 \quad \Longrightarrow \quad \max .$$

Центральная часть таблицы представляет собой данные расхода сырья на единицу выпускаемой продукции. Например, на выпуск единицы продукции типа B расходуется $a_{12} = 25$ единиц органического (О) сырья. Суммарный расход сырья (О) на производство продукции типов A и B не должен превышать запасов этого сырья $b_1 = 4500$. Поэтому

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1,$$

или

$$30x_1 + 25x_2 \le 4500.$$

Аналогичные неравенства запишем для ограничений по расходу сырья (Н) и (К):

$$40x_1 + 30x_2 \le 3500,$$

$$5x_1 + 3x_2 \le 100.$$

Выписанные соотношения вместе с условиями неотрицательности количеств выпускаемой продукции

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

составляют математическую модель задачи.

2. Математическая модель задачи ЛП представлена в виде соотношений:

$$F = x_1 + x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \geq -1, \\ 2x_1 + x_2 \leq 2; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Требуется:

а) записать уравнения в классическом и каноническом видах;

б) определить ранг системы ограничений;

в) записать выражения для всех возможных базисных векторов.

Р е ш е н и е.

а) Для классической формы задачи ЛП характерно то, что целевая функция стремится к максимуму (минимуму), а в системе ограничений соответственно должны стоять знаки $\leq$ $(\geq)$ или $<$ $(>)$. Если в каком-либо соотношении это требование не выполняется, то все слагаемые умножаются на -1, что приводит к смене знаков неравенств и (или) экстремумов на противоположные. Следуя сказанному, запишем задачу ЛП в классической форме:

$$F = x_1 + x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \leq 1, \\ 2x_1 + x_2 \leq 2; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Для приведения задачи ЛП к каноническому виду достаточно к неравенствам системы ограничений классической формы задачи ЛП прибавить недостающие до равенств положительные неизвестные:

$$F = x_1 + x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 2; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,4}).$$

б) Сформируем матрицу коэффициентов системы ограничений:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен двум, так как она включает в себя единичную подматрицу второго порядка (два последних столбца), определитель которой отличен от нуля.

Векторы условий матрицы A:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Любые два из этих векторов (таких сочетаний 6):

$$A^1 = (A_1, A_2), \quad A^2 = (A_1, A_3), \quad A^3 = (A_1, A_4),$$

$$A^4 = (A_2, A_3), \quad A^5 = (A_2, A_4), \quad A^6 = (A_3, A_4)$$

линейно независимы, так как определители составленных из них матриц отличны от нуля:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_5 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_6 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Следовательно, любые приведенные пары векторов могут быть выбраны в качестве исходного базиса. Тем не менее удобнее всего в качестве исходного базиса выбрать $A^6 = (A_3 \ A_4)$. Его матрица единичная и соответствующее этому базису опорное решение (опорный план): $X^6 = (0, 0, x_3, x_4)^T = (0, 0, 1, 2)^T$.

Ненулевые значения векторов этого опорного решения равны правым частям уравнений ограничений.

Графическим методом решить задачи ЛП

3. Для задачи пункта 2 найти максимальное и минимальное значения функции цели.

Р е ш е н и е. Построим на плоскости с декартовыми координатами x_1 и x_2 прямые, соответствующие неравенствам ограничений и описываемые уравнениями в отрезках (рис. 9.9):

$$(1)\ \frac{x_1}{1/3} + \frac{x_2}{-1} = 1, \quad (2)\ \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} = 1.$$

Используя пробную точку $O(0, 0)$ и неравенства $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$, определяем ОДЗ (выделена на рисунке жирными линиями).

При фиксированном значении $F = C$ уравнение $C = x_1 + x_2$ представляет собой прямую с вектором $\boldsymbol{c} = (1, 1)$, перпендикулярным к ней. При положительных множителях при переменных вектор $\boldsymbol{c}$ направлен в сторону возрастания функции F.

Значение функции F зависит от удаленности прямой $x_1 + x_2 = C$ от начала координат в направлении вектора $\boldsymbol{c}$. Координаты x_1 и x_2, удовлетворяющие прямой $F = C$, должны принадлежать Ω, в частности, лежать на ее границе. Точкой из Ω, максимально удаленной от начала координат в направлении $\boldsymbol{c}$, является точка A с координатами (0, 2). Поэтому

$$F_{max} = F_A = 0 + 2 = 2.$$

Еще одна угловая точка многоугольника ОДЗ совпадает с началом координат. В этой точке функция цели имеет минимум:

$$F_{min} = F_O = 0 + 0 = 0.$$

В оставшихся угловых точках границы Ω, как, впрочем, и в любой внутренней точке ОДЗ, функция цели будет принимать промежуточные между F_{min} и F_{max} значения. Так, в угловой точке $B(0{,}6;\ 0{,}8)$: $F_B = 0{,}6 + 0{,}8 = 1{,}4$; во внутренней точке $M(0{,}5; 1)$: $F_B = 0{,}5 + 1 = 1{,}5$.

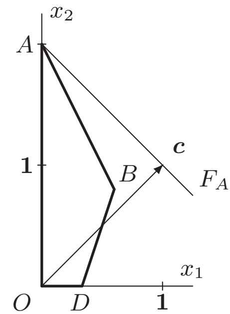


Рис. 9.9. Задача 3

4.

$$F = 2x_1 + x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 - x_2 \le 1; \end{cases}$$

$$x_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,2}).$$

Р е ш е н и е. Построим прямые, описываемые уравнениями:

$$\frac{x_1}{-1/2} + \frac{x_2}{1} = 1, \qquad \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{-1} = 1; \qquad x_i = 0 \quad (i = \overline{1,2})$$

и вектор $\mathbf{c} = (2; 1)$.

На рис. 9.10,а ОДЗ, полученная методом пробных точек, выделена жирными линиями. Эта область безгранична. При неограниченном удалении от начала координат в направлении вектора c прямая $2x_1 + x_2 = const$, перпендикулярная c, будет пересекать ОДЗ на бесконечности. Поэтому $F_{max} \to \infty$.

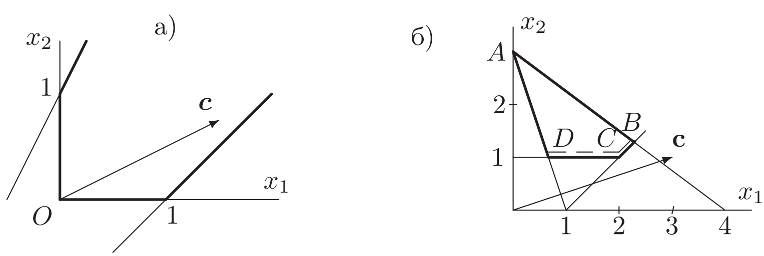


Рис. 9.10. Графики решений: а) задача 4; б) задачи 5-7

5. Найти экстремальные значения функции цели, если

$$F = 3x_1 + x_2;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ 3x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 - x_2 < 1; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 > 1.$$

Р е ш е н и е. Построим прямые, ограничивающие ОДЗ:

$$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{3} = 1 \ (AB); \quad \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{3} = 1 \ (AD);$$

$$x_1 - x_2 = 1 \ (CB); \quad x_2 = 1 \ (DC); \quad x_1 = 0 \ (\text{ось } x_2).$$

На рис. 9.10,б ОДЗ выделена жирными линиями.

Максимального значения функция цели достигает в точке, стремящейся к $B\left(2\frac{2}{7}; 1\frac{2}{7}\right)$**, где** $AB \cap BC$**:** $F_{max} = F_B - \varepsilon = 3 \cdot 2\frac{2}{7} + 1\frac{2}{7} - \varepsilon = 8\frac{2}{7} - \varepsilon \quad (\varepsilon \to 0)$**. Что касается минимального значения функции цели, то оно достигается в любой точке прямой** AD**, перпендикулярной вектору** $\boldsymbol{c} = (3,\ 1)$ **и совпадающей с прямой** $F_{AD} = 3x_1 + x_2$**.**

Например, в точке $D\left(\frac{2}{3};\ 1\right)$**:** $F_D = 3 \cdot \frac{2}{3} + 1 = 3 = F_{min}$**. То же значение имеет функция цели в точке** $A(0;\ 3)$**:** $F_A = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 3 = 3$.

6. Решить задачу пункта 5 при условии, что в математической модели знак неравенства $<$ **заменен на равенство:**

$$x_2 = 1.$$

Р е ш е н и е. При строгом равенстве в одном из ограничений точки ОДЗ обязательно должны лежать на соответствующей прямой. Поэтому решение задачи необходимо искать в граничных точках отрезка DC**.**

В точке D **значение функции найдено в задаче 5 (**$F_D = F_{min} = 3$**). Максимального значения функция цели достигнет в точке** $C(2, 1)$**:** $F_C = F_{max} = 3 \cdot 2 + 1 - \varepsilon = 7 - \varepsilon$ **(Сама точка** C **не входит в ОДЗ).**

7. Решить задачу пункта 5 при условии, что знаки неравенств в первом и втором ограничениях изменены на противоположные:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ 3x_1 + x_2 \leq 3. \end{cases}$$

Остальные зависимости остаются без изменения.

Р е ш е н и е. Анализ области пересечения полуплоскостей приводит к заключению, что в ОДЗ входит только точка $A(0, 3)$. Поэтому

$$F_A = F_{max} = F_{min} = 3 \cdot 0 + 3 = 3.$$

Если в первом ограничении этой задачи изменить знак $\geq$ на строгое неравенство $(>)$, то ОДЗ будет пустым множеством и задача станет неразрешимой.

Задачи для самостоятельного решения

Привести к каноническому виду, определить ранг системы ограничений, сформировать векторы условий, выделить базисные векторы и соответствующие им опорные решения. Геометрическим методом решить задачи или убедиться в их неразрешимости.

1. $F = x_1 - 2x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 + 2x_2 < 4; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

2. $F = 2x_1 + x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 < 2, \\ x_1 - 2x_2 \geq 2; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

3. $F = 3x_1 + 2x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 - 4x_2 > 4; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

4. $F = x_1 - x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 = 1; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

5. $F = x_1 + x_2 \to \min(\max);$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 - 2x_2 < 1, \\ x_1 + x_2 \leq 4; \end{cases}$$
$$0 \leq x_1 \leq 3,\ 0 \leq x_2 \leq 2.$$

ТЕМА 9.3
(§ 9.12–9.14 теории)

Симплексный метод решения задач ЛП

Семинарское занятие

Вопросы

1. **Как с точки зрения удобства решения задач ЛП выбрать базис условий в исходном приближении?**
2. **Как по знакам коэффициентов функции цели определить, какую свободную переменную на очередной итерации следует перевести в основные?**
3. **Как определить вектор условий, который на очередной итерации следует вывести из разряда базисных? ввести в разряд базисных?**
4. **По каким признакам можно определить, что полученное значение целевой функции является оптимальным?**
5. **Что представляет собой M-метод решения задач ЛП?**
6. **Для решения каких задач рационально использовать метод искусственного базиса?**

Задачи

Найти решения задач ЛП симплексным методом

1.

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \max; \tag{9.50}$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 20; \tag{9.51}$$

$$x_j \geq 0, \ (j = \overline{1,3}). \tag{9.52}$$

Р е ш е н и е. Условия, накладываемые на изменения переменных задачи, состоят из одного уравнения (9.51) и трех неравенств (9.52), указывающих на допустимость (неотрицательность) переменных.

В качестве независимой переменной в исходной итерации выбираем переменную, перед которой в целевой функции (9.50) стоит максимальный положительный коэффициент. Такой переменной

является x_3. Выразим эту переменную в явном виде из ограничения (9.51):

$$x_3 = 5 - 0{,}5x_1 - 0{,}25x_2. \tag{9.53}$$

Так как $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$, то максимального значения x_3 достигнет при $x_1 = x_2 = 0$ (перед этими переменными в условии (9.53) стоят отрицательные коэффициенты). Принимая свободные переменные равными нулю, получим вектор X^1 опорного решения первой итерации:

$$X^1 = (0;\ 0;\ x_3) = (0;\ 0;\ 5).$$

Подставим выражение для x_3 (9.53) в целевую функцию (9.50):

$$F^1 = 2x_1 - 2x_2 + 3(5 - 0{,}5x_1 - 0{,}25x_2) = 15 + 0{,}5x_1 - 2{,}75x_2. \tag{9.54}$$

При $x_1 = x_2 = 0$: $F^1 = 15$.

Отметим, что полученное значение F^1 может быть найдено и при непосредственной подстановке координат вектора опорного решения в выражение для целевой функции:

$$F^1 = 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 15.$$

Наличие в F^1 (9.54) слагаемого с положительным коэффициентом при положительной переменной говорит о том, что функция цели будет увеличиваться с ростом x_1. Из выражения (9.53) видно, что при $x_2 = 0$ переменная x_1 может возрастать до значения $x_2 = \dfrac{5}{0{,}5} = 10$. Такая ситуация имеет место, если постоянная величина (число 5) в правой части (9.53) положительна, а коэффициент при переменной (в рассматриваемом случае $-0{,}5$ перед x_1) отрицателен.

Переведем x_1 из свободных переменных в основные, а единственную основную переменную x_3 (в данной задаче выбора нет) — в свободные. Из (9.51) получим

$$x_1 = 10 - 0{,}5x_2 - 2x_3.$$

Вектор опорного решения для этого выбора базиса:

$$X^2 = (x_1;\ 0;\ 0)^T = (10;\ 0;\ 0)^T.$$

Используя полученное выражение для x_1, заменим эту переменную в формуле для целевой функции (9.54):

$$F = 15 + 0{,}5(10 - 0{,}5x_2 - 2x_3) - 2{,}75x_2 = 20 - 3x_2 - x_3.$$

При равных нулю свободных переменных $x_2 = x_3 = 0$ получаем значение целевой функции:

$$F^2 = 20.$$

Отрицательные коэффициенты при всех переменных в последнем выражении для целевой функции говорят о том, что резерв ее увеличения исчерпан. Поэтому

$$F_{max} = F^2 = 20.$$

2.

$$F = x_1 + 4x_2 \quad \longrightarrow \quad \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -20, \\ x_1 - 2x_2 \geq -10, \\ x_1 \leq 30; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Требуется найти такой план распределений (вектор решения), который обеспечивает максимальное значение функции цели.

Р е ш е н и е. Приведем задачу к каноническому виду, умножая первые два неравенства системы ограничений на -1 и добавляя к каждому неравенству по дополнительной положительной неизвестной (x_3, x_4 и x_5), превратив тем самым неравенства в равенства:

$$F = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 20, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 10, \\ x_1 + x_5 = 30; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Представим данные сформулированной задачи и дальнейшее решение в виде табл. 9.6–9.8.

Таблица 9.6. Исходная таблица задачи

$A_i \backslash A_j$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i	Q_i	
A_3	-1	1	1	0	0	20	20	$-N2/2$
$\leftarrow A_4$	-1	$\boxed{2}$	0	1	0	10	$\underline{5}$	:2
A_5	1	0	0	0	1	30	∞	
$-c_j$	-1	$-\underline{4}$	0	0	0	$F^0 = 0$		$+2N2$

В последней (индексной) строке стоят коэффициенты функции цели, взятые с противоположными знаками. Это сделано для того,

чтобы в последней строке в столбце со свободными членами b_i стояло значение целевой функции F.

В исходном (нулевом) приближении базисными векторами условий задачи (векторами, координаты которых образуют в матрице коэффициентов единичную подматрицу) являются: $A_3 = (1;\ 0;\ 0)^T$, $A_4 = (0;\ 1;\ 0)^T$ и $A_5 = (0;\ 0;\ 1)^T$.

В этом случае опорным решением задачи в нулевом приближении будет служить вектор $X^0 = (x_1^0; x_2^0; x_3^0; x_4^0; x_5^0)^T = (0; 0; 20; 10; 30)^T$.

Этому решению соответствует значение целевой функции:

$$F^0 = c_1x_1^0 + c_2x_2^0 + 0x_3^0 + 0x_4^0 + 0x_5^0 = 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 20 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 30 = 0.$$

Так как среди весовых коэффициентов $c_j \ \ (j = \overline{1,5})$ имеются положительные (отрицательные значения индексов $-c_j$), то должно существовать большее, чем $F = 0$, значение целевой функции.

Новый базисный вектор должен соответствовать максимальному значению коэффициента $c_j \ (j = \overline{1,5})$. Это значение $c_2 = 4 \ \ (-c_2 = -4)$ соответствует вектору $A_2 = (1;\ 2;\ 0)^T$.

Для определения вектора, который необходимо удалить из базиса, найдем минимум отношений b_i/a_{i2}, то есть отношений координат вектора ограничений к координатам вектора A_2:

$$Q_i = min\left(\frac{b_1}{a_{12}}; \frac{b_2}{a_{22}}; \frac{b_3}{a_{32}}\right) = min\left(\frac{20}{1}; \frac{10}{2}; \frac{30}{0}\right) = \frac{10}{2} = \frac{b_2}{a_{22}} = Q_2.$$

Значению $a_{22} = 2$, взятому в таблице в рамку и находящемуся на второй строке матрицы коэффициентов, соответствует единичное значение находящейся на этой же строке координаты базисного вектора A_4, который и требуется удалить из числа базисных. Этот факт отмечен стрелкой $\leftarrow$ в колонке A_i, стоящей перед вектором A_4.

Далее используем преобразования Гаусса-Жордана (действия над строками указаны справа от таблицы) для преобразования нового базисного вектора к виду $A_1 = (0;\ 1;\ 0)^T$ и превращению в нуль весового коэффициента, стоящего в целевой функции перед переменной x_2.

Таблица коэффициентов матрицы условий преобразится к виду, приведенному в табл. 9.7 (первая итерация симплекс-метода).

Базисом первого приближения являются три вектора условий A_3, A_2 и A_5, в совокупности образующих единичную матрицу:

$$A^1 = (A_3 \ A_2 \ A_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таблица 9.7. Таблица задачи, итерация 1

$A_i \backslash A_j$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i	
A_3	$-1/2$	0	1	$-1/2$	0	15	$+N3/2$
A_2	$-1/2$	1	0	$1/2$	0	5	$+N3/2$
$\leftarrow A_5$	$\boxed{1}$	0	0	0	1	30	
$\Delta_j - c_j$	$-\underline{3}$	0	0	2	0	$F^1 = 20$	$+3N3$

Опорное решение задачи на этой итерации соответствует вектору $X^1 = (x_1^1;\ x_2^1;\ x_3^1;\ x_4^1; x_5^1)^T = (0;\ 5;\ 15;\ 0;\ 30)^T$, **что позволяет определить значение целевой функции (для проверки правильности полученного в таблице значения):**
$F^1 = c_1 x_1^1 + c_2 x_2^1 + 0x_3^1 + 0x_4^1 + 0x_5^1 = 1 \cdot 0 + 4 \cdot 5 + 0 \cdot 15 + 0 \cdot 0 = 20.$

Среди индексов целевой функции в результате проделанного преобразования осталось одно отрицательное значение. Оно соответствует вектору условий A_1. **Сомнений по поводу того, какой вектор условий следует перевести в основные, нет. Единственный неотрицательный коэффициент из** a_{i1} **в столбце** A_1 **стоит в третьей строке, соответствующей вектору** A_5. **Вычислять отношения** Q_i **не требуется — множители при** a_{11} **и** a_{21} **отрицательные!**

После преобразований, отмеченных в последнем столбце табл. 9.7, получим табл. 9.8.

Таблица 9.8. Таблица задачи, итерация 2

$A_i \backslash A_j$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i
A_3	0	0	1	$-1/2$	$1/2$	30
A_2	0	1	0	$1/2$	$1/2$	20
A_1	1	0	0	0	1	30
$\Delta_j - c_j$	0	0	0	2	3	$F^2 = 110$

Отсутствие отрицательных значений индексов (положительных коэффициентов в целевой функции) говорит о том, что дальнейшее улучшение решения невозможно.

На основании признака оптимальности делаем заключение:

$$F_{max} = F^2 = 110.$$

Опорное решение задачи, представленной в табл. 9.8, соответствует вектору $X^2 = (x_1^2; x_2^2; x_3^2; x_4^2; x_5^2)^T = (30;\ 20;\ 30;\ 0;\ 0)^T$, **т.е функция цели достигает максимума при** $x_1 = 30$; $x_2 = 20$. **Величина** $x_3 = 30$ **не имеет значения — переменная** x_3 **не входит в функцию цели. Подставляя эти значения в исходное выражение для**

целевой функции, убедимся в правильности ее нахождения:

$$F = 1 \cdot 30 + 4 \cdot 20 = 110 = F_{max}.$$

Проиллюстрируем полученное решение графическими построениями (рис. 9.11).

Решению в нулевом приближении соответствует значение функции цели в начале координат: $F^0 = F(O) = 0$; **в первом приближении — точка** $A(0; 5)$: $F^1 = F(A) = 20$; **во втором приближении — точка** $D(30; 20)$: $F^2 = F(D) = 110$.

В записанной системе ограничений первое неравенство оказалось лишним, так как полуплоскость, описываемая вторым уравнением, при положительных значениях переменных принадлежит полуплоскости, описываемой первым неравенством.

Координаты точки $C(30; 50)$ **пересечения двух граничных прямых (первой и третьей) не удовлетворяют второму неравенству.**

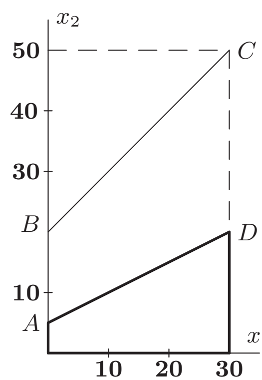


Рис. 9.11. Графическое решение

3. (Задача оптимального использования ресурсов) Для выпуска трех видов продукции P_1, P_2, P_3 **на предприятии используются два вида сырья** S_1 **и** S_1. **Запасы сырья** b_i, **нормы расхода сырья** a_{ij} (**i-й вид сырья на единицу j-го вида продукции) и прибыль от реализации единицы готовой продукции** c_i **приведены в табл. 9.9.**

Таблица 9.9. Исходные данные

Вид сырья	Запасы сырья	Вид продукции		
		P_1	P_2	P_3
S_1	40	4	2	3
S_2	50	3	1	2
Прибыль c_1		15	10	12

Требуется спланировать выпуск продукции таким образом, чтобы прибыль предприятия была максимальной.

Р е ш е н и е. Составим математическую модель исходной задачи, приняв за неизвестные x_j **объемы выпускаемой продукции**

вида $P_j \quad (j = \overline{1,3})$:

$$15x_1 + 10x_2 + 12x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 40, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 50; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,3}).$$

Перейдем к каноническому виду в системе ограничений, добавив к каждому из неравенств дополнительную переменную:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 40, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 50; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,5}).$$

Составим симплекс-таблицу исходного приближения (табл. 9.10)

Таблица 9.10. Нулевая итерация

$A_i \backslash A_j$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i	Q_i	
$\leftarrow A_4$	$\boxed{4}$	2	3	1	0	40	$\underline{10}$	$:4$
A_5	3	1	2	0	1	50	$50/3$	$-3N_1/4$
$-c_j$	$-\underline{14}$	-10	-12	0	0	$F_0 = 0$		$+14N_1/4$

Все индексы в последней строке отрицательны. Выбираем наименьший из них. Это $-c_1 = -14$ (значение подчеркнуто). Следовательно, на следующей итерации вектор A_1 вводим в число основных.

Чтобы определить, какой вектор следует вывести из числа основных (A_4 или A_5), сравним соответствующие им отношения b_i/a_{i1} и выберем наименьшее из них:

$$Q_i = min\left\{\frac{b_1}{a_{11}};\ \frac{b_2}{a_{21}}\right\} = min\left\{\frac{40}{4};\ \frac{50}{3}\right\} = \frac{b_1}{a_{11}} = Q_1 = 10.$$

Минимальному значению отношения соответствует коэффициент $a_{11} = 4$ (выделен квадратом). Так как этот коэффициент стоит на первой строке, то из базисных векторов выводим вектор условий A_4 (x_4 — из основных переменных). Перед базисным вектором A_4 этой переменной стоит знак $\leftarrow$.

Дальнейшие преобразования сводятся к тому, чтобы сделать единичным вектор A_1. Приводящие к этому действия над строками таблицы показаны в правом столбце табл. 9.10.

В результате преобразований приходим к табл. 9.11 первой итерации.

Дальнейшие преобразования указаны в таблице. Колонка с величиной Q_i отсутствует, так как выбора в коэффициенте a_{i2} нет — единственный положительный коэффициент: $a_{12} = 1/2$.

Таблица 9.11. Первая итерация

$A_i \backslash A_j$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i	
$\leftarrow A_1$	1	$\boxed{1/2}$	3/4	1/4	0	10	$\cdot 2$
A_5	0	$-1/2$	$-1/4$	$-1/4$	1	20	$+N_1$
$\Delta_j - c_j$	0	$-\underline{3}$	$-3/2$	7/2	0	$F^1 = 140$	$+6N_1$

После преобразований над строками приходим к табл. 9.12.

Таблица 9.12. Вторая итерация

$A_i \backslash A_j$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i
A_2	2	1	3/2	1/2	0	20
A_5	1	0	1/2	0	1	30
$\Delta_j - c_j$	6	0	3	5	0	$F_2 = 200$

Среди коэффициентов $-c_j$ нет отрицательных. Этот факт говорит о том, что дальнейшее улучшение плана невозможно. Поэтому

$$F_{max} = F^2 = c_2 x_2 = 10 \cdot 20 = 200.$$

Оптимальный выпуск продукции предприятия сводится к тому, что оно должно выпускать только продукцию P_2 в количестве 20 единиц.

Вытекающие из данных таблицы соотношения:

$$x_2 = 20 - 2x_1 - \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4;$$
$$x_5 = 30 - x_1 - \frac{1}{2}x_3$$

В этом случае в функцию цели

$$F = 15x_1 + 10\left(20 - 2x_1 - \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}\right) = 200 - 5x_1 - 15x_3 - 5x_4$$

входит единственная нефиктивная переменная x_1 с отрицательным коэффициентом -5.

В оптимальном решении переменные x_1, x_2 и x_4 приняты равными нулю (это свободные переменные). Если они будут возрастать, то это повлечет за собой уменьшение прибыли из-за роста переменной x_1.

4. Используя метод искусственного базиса, решить задачу ЛП:

$$F = x_1 + 3x_2 \;\to\; \min; \tag{9.55}$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 \geq 2, \\ \;\; x_1 + 2x_2 \geq 4. \\ \;\; x_1,\; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Таблица 9.13. M-метод решения задачи **4**

	x_1	x_2	v_1	v_2	z_1	z_2	b_i	
$\leftarrow z_1$	-1	$\boxed{4}$	-1	0	1	0	2	$:4$
z_2	1	2	0	-1	0	1	4	$-N_1/2$
$-c_j$	—	—	—	—	M	M	$\tilde{F}=0$	$-M(N_1+N_2)$
$\Delta_j - c_j$	0	$-\underline{6M}$	M	M	0	0	$-6M$	$+3MN_1/2$
x_1	$-1/4$	1	$-1/4$	0	$1/4$	0	$1/2$	$+N_2/6$
$\leftarrow z_2$	$\boxed{3/2}$	0	$1/2$	-1	$-1/2$	1	3	$\cdot 2/3$
$\Delta_j - c_j$	$-\underline{3M/2}$	0	$-M/2$	M	$3M/2$	0	$-3M$	$+MN_2$
x_1	0	1	$-1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	1	
x_2	1	0	$1/3$	$-2/3$	$-1/3$	$2/3$	2	
$\Delta_j - c_j$	0	0	0	0	M	M	0	

Р е ш е н и е. Чтобы неравенства системы ограничений превратить в равенства, необходимо из каждого из них вычесть положительные переменные v_1 и v_2. Эти переменные не образуют базис векторов с единичной матрицей (коэффициенты при новых переменных — отрицательные единицы). Для образования единичной матрицы базисных векторов прибавим к каждому из полученных равенств ограничений фиктивные переменные z_1 и z_2. К функции цели переменные v_1 и v_2 добавляются с нулевыми коэффициентами, а z_1 и z_2 с множителем M настолько большим, что значением функции цели (9.55), по сравнению с $M(z_1+z_2)$, можно пренебречь.

С учетом сказанного перепишем задачу ЛП:

$$\tilde{F} = Mz_1 + Mz_2 \;\to\; \min; \tag{9.56}$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - v_1 + z_1 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - v_2 + z_2 = 4, \\ x_j, v_j, z_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,2}). \end{cases}$$

Решим задачу симплекс-методом (табл. 9.13). Для наглядности в первых строке и столбце запишем не обозначения базисных векторов, а переменные, им соответствующие. В первой строке индексов первой таблицы стоят множители M при z_1 и z_2 функции $\tilde{F}$ (9.56), а во второй — коэффициенты, обращающие эти множители в нуль.

Из последней таблицы следует оптимальное решение:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad F_{min} = F(1,2) = 1 + 3 \cdot 2 = 7.$$

Задание на дом: **выполнить часть расчетной работы, касающуюся графического и симплексного методов решения задачи линейного программирования (с. 380).**

ТЕМА 9.4
(§ 9.15–9.16 теории)
Двойственность в задачах ЛП
Семинарское занятие
Вопросы

1. **На задаче торга поясните смысл двойственности в задачах ЛП.**
2. **Перечислите правила формирования двойственной задачи ЛП по отношению к исходной:**
   — Изменяются ли и, если да, то как знаки неравенств и экстремума?
   — Что происходит с матрицей коэффициентов?
   — Как определить число переменных в двойственной задаче? число ограничений?
   — Какую функцию в двойственных задачах выполняют свободные члены системы ограничений исходной задачи? коэффициенты при неизвестных?
   — Какова связь между ограничениями двойственной задачи и переменными исходной задачи?
   — В чем состоит соответствие переменных исходной и двойственной задач?

3. Как связаны между собой экстремальные значения целевых функций двойственной и исходной задач?

Задачи

1. Найти решение задачи ЛП:

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ x_1 - x_2 \geq -1; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0.$$

Сформулировать математическую модель двойственной задачи и найти ее решение.

Сравнить результаты. Сделать выводы.

Р е ш е н и е. Задача описывается двумя переменными, поэтому ее можно решить графическим методом. Построим на плоскости область Ω (выделена жирными линиями на рис. 9.12), ограниченную прямыми:

$$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{2} = 1; \qquad \text{и} \qquad \frac{x_1}{-1} + \frac{x_2}{1} = 1.$$

На рисунке показан вектор $\boldsymbol{c} = (3;\ 2)$, ортогональный прямым $3x_1 + 2x_2 = const$.

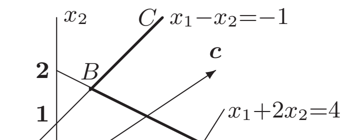


Рис. 9.12. Исходная задача

Минимальное значение целевой функции F находится в точке границы ОДЗ, наименее удаленной от начала координат в направлении вектора $\boldsymbol{c}$. Судя по построению, такой точкой является точка B, где $AB \cap BC$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 - \ x_2 = -1; \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad B\left(\frac{2}{3};\ \frac{5}{3}\right).$$

Следовательно,

$$F_{min} = F_B = 3 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{16}{3}.$$

Что касается максимального значения функции, то его не существует, ОДЗ не ограничена.

Составим двойственную задачу. Последовательно сформируем ее соотношения.

1. Количество переменных y_i двойственной задачи равно количеству ограничений исходной задачи ($i = 1,\ 2$).

2. Коэффициентами функции цели Φ двойственной задачи служат правые части ограничений исходной задачи:

$$\Phi = b_1 y_1 + b_2 y_2 = 4y_1 - y_2.$$

3. $\Phi \to \max$**, если** $F \to \min$**.**

4. Векторы условий исходной задачи становятся коэффициентами соответствующих неравенств двойственной задачи. Знаки неравенств меняются на противоположные. В правых частях двойственной задачи стоят соответствующие коэффициенты функции цели исходной задачи:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \le 3, \\ 2y_1 - y_2 \le 2. \end{cases}$$

Матрица коэффициентов системы ограничений двойственной задачи равна транспонированной матрице коэффициентов системы ограничений исходной задачи.

5. Условия допустимости решения сохраняются и для переменных двойственной задачи:

$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0.$$

Построим на плоскости прямые:

$$\frac{y_1}{3} + \frac{y_2}{3} = 1, \qquad \text{и} \qquad \frac{y_1}{1} + \frac{y_2}{-2} = 1$$

и определим по неравенствам ОДЗ (выделена на рис. 9.13 жирными линиями). На этом же рисунке показано направление вектора $\boldsymbol{b} = (4; -1)$

Наиболее удаленной от начала координат в направлении вектора $\boldsymbol{b}$ (находим максимальное значение функции цели) оказывается точка D, где $AD \cap DE$. Координаты точки находим из совместного решения соответствующих уравнений:

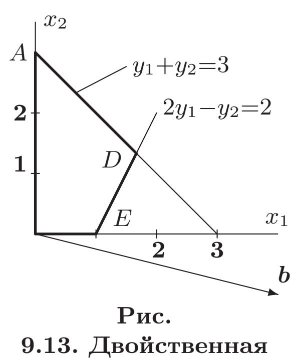


Рис. 9.13. Двойственная задача

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 3, \\ 2y_1 - y_2 = 2; \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad D\left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

Подставляя координаты точки D в выражение для целевой функции, найдем ее максимальное значение:

$$\Phi_{max} = \Phi_D = 4 \cdot \frac{5}{3} - 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{3}.$$

Как следовало ожидать, согласно теореме о взаимно двойственных задачах, минимальное значение целевой функции исходной задачи равно максимальному значению целевой функции двойственной задачи:

$$F_{min} = \Phi_{max}.$$

2. Дана задача ЛП:

$$F = 2x_1 + x_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 - 2x_2 \leq 4; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Требуется:
— решить задачу графическим и симплексным методами;
— построить двойственную задачу и решить ее симплекс-методом.

Р е ш е н и е. Построим на плоскости с декартовыми ортогональными координатами x_1 и x_2 прямые, соответствующие неравенствам записанных в условии ограничений:

$$x_1 - x_2 = 1, \quad (1) \qquad \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{5} = 1, \quad (2) \qquad \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{-2} = 1. \quad (3)$$

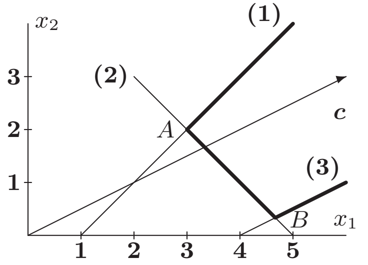


Рис. 9.14. Исходная задача 2

Положительные координаты точек пересечения выписанных прямых: $A(3;\ 2)$, $B\left(4\dfrac{2}{3};\ \dfrac{1}{3}\right)$**.**

На рис. 9.14 ОДЗ выделена жирными линиями. Там же построен вектор $\boldsymbol{c} = (2;\ 1)$.

При определении минимального значения F имеем в виду, что оно должно находиться в точке ОДЗ, наименее удаленной от начала координат в направлении вектора $\boldsymbol{c}$. Из рисунка видно, что таковой является точка $A(3;\ 2)$. Поэтому

$$F_{min} = F_A = 2 \cdot 3 + 2 = 8.$$

Для решения задачи симплексным методом приведем исходную математическую модель к каноническому виду, пригодному для использования метода искусственного базиса:

$$\tilde{F} = Mz_1 + Mz_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - v_1 + z_1 = 1, \\ x_1 + x_2 - v_2 + z_2 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + v_3 = 4; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Составим симплекс-таблицу исходной итерации:

Таблица 9.14. Решение задачи **2**

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	z_1	z_2	b_i	
$\leftarrow z_1$	$\boxed{1}$	-1	-1	0	0	1	0	1	
z_2	1	1	0	-1	0	0	1	5	$-N_1$
v_3	1	-2	0	0	1	0	0	4	$-N_1$
$-c_j$	–	–	–	–	–	M	M	$\tilde{F} = 0$	$-M(N_1+N_2)$
$\Delta_j - c_j$	$-\underline{2M}$	0	M	M	0	0	0	$-6M$	$2MN_1$
x_1	1	-1	-1	0	0	1	0	1	$+N_2/2$
$\leftarrow z_2$	1	$\boxed{2}$	0	-1	0	0	1	5	$:2$
v_3	1	-2	0	0	1	0	0	4	$+N_2/2$
$\Delta_j - c_j$	0	$-\underline{2M}$	$-M$	M	0	$2M$	0	$-4M$	$+MN_2$
x_1	1	0	$-1/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$1/2$	3	
x_2	0	1	$1/2$	$-1/2$	0	$-1/2$	$1/2$	2	
v_3	0	0	$3/2$	$-1/2$	1	$-3/2$	$1/2$	5	
$\Delta_j - c_j$	0	0	0	0	0	M	M	0	

В итоге представленных в табл. 9.14 преобразований по методу искусственного базиса получено решение, совпадающее с графическим:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2; \qquad F = 2 \cdot 3 + 2 = 8 = F_{min}.$$

Вектор переменных, соответствующий оптимальному решению:

$$X^* = (x_1^*; x_2^*; v_1^*; v_2^*; v_3^*)^T = (3; 2; 0; 0; 5)^T.$$

Система уравнений, в которой основные неизвестные $(x_1;\ x_2;\ v_3)$ выражаются через свободные $(v_1;\ v_2)$:

$$x_1 = 3 + \frac{1}{2}(v_1 + v_2); \qquad x_2 = 2 + \frac{1}{2}(-v_1 + v_2);$$

$$v_3 = 5 + \frac{1}{2}(-3v_1 + v_2),$$

обращает в тождество исходную систему ограничений, представленную в каноническом виде. Проверим, будет ли выполняться

это утверждение ($z_1 = z_2 = 0$):

$$(1)\colon\ 3 + \frac{1}{2}(v_1 + v_2) - 2 + \frac{1}{2}(v_1 - v_2) - v_1 = 1 \quad (!);$$

$$(2)\colon\ 3 + \frac{1}{2}(v_1 + v_2) + 2 - \frac{1}{2}(v_1 - v_2) - v_2 = 5 \quad (!);$$

$$(3)\colon\ 3 + \frac{1}{2}(v_1 + v_2) - 2 \cdot 2 - 2\frac{1}{2}(v_1 - v_2) + 5 + \frac{1}{2}(-3v_1 + v_2) = 4 \quad (!).$$

Переходим к составлению и решению двойственной задачи. Построим модель двойственной задачи, основываясь на соответствиях между коэффициентами:

$$\Phi = y_1 + 5y_2 - 4y_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - y_3 \le 2, \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 \le 1; \end{cases}$$

$$y_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,3}).$$

В канонической форме:

$$\Phi = y_1 + 5y_2 - 4y_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - y_3 + w_1 = 2, \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 + w_2 = 1; \end{cases}$$

$$y_i \ge 0,\ w_k \ge 0 \quad (i = \overline{1,3},\ k = \overline{1,2}).$$

Составим симплекс-таблицу нулевого приближения и далее преобразуем ее (табл. 9.15).

Таблица 9.15. Решение двойственной задачи

	y_1	y_2	y_3	w_1	w_2	b_i	
w_1	1	1	-1	1	0	2	$-N_2$
$\leftarrow w_2$	-1	$\boxed{1}$	2	0	1	1	
$-c_j$	-1	$-\underline{5}$	4	0	0	$\Phi^0 = 0$	$+5N_2$
$\leftarrow w_1$	$\boxed{2}$	0	-3	1	-1	1	$\cdot 1/2$
y_2	-1	1	2	0	1	1	$+N_1/2$
$\Delta_j - c_j$	$-\underline{6}$	0	14	0	5	$\Phi^1 = 5$	$+3N_1$
y_1	1	0	$-3/2$	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	
y_2	0	1	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$3/2$	
$\Delta_j - c_j$	0	0	5	3	1	$\Phi^2 = 8$	

Вектор оптимального плана двойственной задачи:

$$Y = Y^2 = (y_1;\ y_2;\ 0;\ 0;\ 0)^T = \frac{1}{2}(1;\ 3;\ 0;\ 0;\ \ 0)^T.$$

При таких значениях координат вектора решения функция цели обращается в максимум:

$$\Phi(Y) = y_1 + 5y_2 - 4y_3 = \frac{1}{2}(1 + 5 \cdot 3) = 8 = \Phi_{max}.$$

Система уравнений, в которой основные неизвестные $(y_1;\ y_2)^T$ **выражаются через свободные** $(y_3;\ y_4;\ y_5)^T$**:**

$$y_1 = \frac{1}{2}(1 + 3y_3 - y_4 + y_5);$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(3 - y_3 - y_4 - y_5).$$

Можно, в качестве проверки, убедиться в том, что подстановка последних соотношений обращает в тождество исходную систему ограничений двойственной задачи, представленную в каноническом виде.

Задачи для самостоятельного решения

Решить симплексным или геометрическим методом задачи ЛП. Составить двойственные задачи и решить их симплексным или геометрическим методом. Сопоставить результаты решения взаимно двойственных задач.

1. $F = x_1 + 2x_2 \ \rightarrow \ \min;$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4; \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0.$$

2. $F = x_1 + x_2 \ \rightarrow \ \max;$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq -2, \\ x_1 - 2x_2 \geq -13, \\ 3x_1 - x_2 \leq 6; \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0.$$

3. $F = 10x_1 - 3x_2 \ \rightarrow \ \min;$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 \geq 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 3; \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0.$$

4. $F{=}4x_1{+}18x_2{+}30x_3{+}5x_4 \ \rightarrow \ \min;$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 \leq -3, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \geq 3, \\ x_j \geq 0,\ (j = \overline{1,4}). \end{cases}$$

Задание на расчетную работу. Часть 5 «Линейное программирование»

Пояснения к выполнению и оформлению задания даны на странице 69.

Задание. **Дана математическая модель задачи ЛП:**

$$F = \frac{2}{k}x_1 + kx_2 \Rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 - kx_2 \geq 1, \\ kx_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 - 2x_2 \leq 4k; \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Требуется Найти решение задачи:

1. графическим методом;

2. симплексным методом.

3. Свести исходную задачу к двойственной и решить двойственную задачу симплекс-методом.

4. Сравнить результаты. Сделать выводы.

О Т В Е Т Ы

Ответы к вопросам для тестирования

Глава 1. Определители. Матрицы
1: 1,5; 2: 2,4; 3: 2,3,5; 4: 1,5; 5: 1,4; 6: 1,2,3,4;
7: 2,3,5; 8: 2,4; 9: 1,3,4; 10: 5. 11: $\overline{4,3,1,2}$**.**

Глава 2. Системы уравнений
: 2,4; 2: 1,4; 3: 2,3; 4: 1,3.

Глава 3. Векторы
1: 1,3,5; 2: $\overline{2,3,4,1}$**; 3:** $\overline{2,5,3,5}$**; 4: 3,5; 5: 1,3,5;**
6: 1,5; 7: 1,2,3; 8: 1,2,4,5; 9: $\overline{2,1,3,4}$**; 10:** $\overline{3,4,2,1}$**.**

Глава 4. Комплексные числа
1: $\overline{2,1,3,5}$**; 2:** $\overline{5,2,1,4}$**; 3: 2,3; 4: 2,4; 5: 1,2,3.**

Глава 5. Преобразования векторов и матриц
1: 4; 2: 3,4; 3: 5; 4: 1,3,4; 5: 1,2,4; 6: 2,3;
7: 4; 8: 2,3; 9: 2,3; 10: $\overline{2,3,4,1}$**.**

Глава 6. Алгебра тензоров

1: $\overline{2,4,0,1}$ **; 2:** $\overline{1,2,4,3}$**.**

Глава 7. Прямая и плоскость
1: $\overline{3,1,4,2}$**; 2:** $\overline{4,3,2,1}$**; 3:** $\overline{2,1,4,3}$**; 4:** $1,2,4$**;**
5: $\overline{2,1,4,3}$**; 6:** $\overline{3,1,2,4}$**; 7:** $\overline{3,1,4,2}$**.**

Глава 8. Кривые и поверхности
1: $\overline{3,1,2,4}$**; 2:** $\overline{1,2,4,3}$**; 3:** $\overline{3,4,2,1}$**; 4:** $\overline{1,4,2,3}$**.**

Глава 9. Линейное программирование
1: 4-3-2-1; 2: 5-1-2-3; 3: 3-2-1-4; 4: 2, 3; 5: 2; 6: 4; 7: 3-2-1-5.

Ответы к упражнениям

Тема 1.1. Определители

1: $-2{,}3$; **2: 5; 3:** x^2+y^2; **4:** -44; **5: 0; 6: 1; 7:** -125; **8: 0;**
9: -123; **10:** $abcd(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$.

Тема 1.2. Матрицы

1: $AB=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -8 & -2 & -2 \\ 11 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

$$A+B^T=(A^T+B)^T=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2: $AB=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & -6 \\ 0 & -6 & 5 \end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix} 14 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$;

$$A+B^T=(A^T+B)^T=(A+B^T)^T=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3: $AB=(6)$; $BA=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $(A^T+B)^T=(A+B^T)^T=(2\ 4\ {-2})$.

6: $A^2=\begin{pmatrix} -1 & -3 & -15 \\ -6 & 4 & -27 \\ 18 & -5 & 101 \end{pmatrix}$; $A^{-1}=\begin{pmatrix} -13 & -19 & -7 \\ -6 & -8 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

10: $\mathbf{rang}\, A=2$.

Тема 2.1. Матричные методы решения систем уравнений

1, 2: $(x;y)=(1;-1)$ **и** $(x_1;x_2;x_3)=(1;-2;0)$. **4: (200;200). 5. 2.**

Тема 2.2. Системы уравнений

1: Система несовместна. 2: $x_1=-0{,}2-2{,}8x_2$, $x_3=-0{,}8-2{,}2x_2$.
3: $x_1=4x_3$, $x_2=-x_3$. **4:** $\lambda=4$, $x_1=x_2=1$.

5: $\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} -9 & 8 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Тема 3.1. Векторы. Линейные зависимость и независимость системы векторов

2: -10. **3:** -8. **4: 2.** **5:** $\pi/3$. **7:** $(5;-4;1)$. **8:** $\frac{1}{3}(4;5)$. **9: Да.** **10: Да.**

Тема 3.2. Операции над векторами в ортонормированном базисе

1: $\overline{AB}=2(1;-3;1)$; $|\overline{AB}|=2\sqrt{11}$. **2:** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=5(1;0;1)$; $\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}=(-1;3;5)$.

3: $-1/\sqrt{6}$. **4:** $\arccos\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{7}}\right)$. **5:** $m=n=2$. **6:** $m_1=m_2=-1$. **7:** $\alpha=\pi/2$.

8: $a=7$; $\cos\alpha=\frac{3}{7}$; $\cos\beta=-\frac{6}{7}$; $\cos\gamma=\frac{2}{7}$.

Тема 3.3. Векторное и смешанное произведения векторов

1: 10,5; **2:** $14\sqrt{30}$; **3: нет, т.к.** $\boldsymbol{abc}=-28\neq 0$;
4: да, т.к. $\boldsymbol{abc}=28\neq 0$; **5: правый, т.к.** $\boldsymbol{abc}=28>0$;
6: $\sqrt{149}$; **7.** $14/3$; **8:** $14/\sqrt{149}$; **9:** $M\left(\frac{10}{3};\frac{5}{3};\frac{4}{3}\right)$; **10:** $C(1;3;3)$.

Тема 4.1. Комплексные числа

1: -4. 2: 2,2+0,4i. 3: (2, 3). 4: -1. 7: $z=12\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.
8: $\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i$. **9: -2. 10:** , $\sqrt[10]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{20}+\frac{2\pi k}{5}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{20}+\frac{2\pi k}{5}\right)\right]$ $(k=\overline{0,4})$.

Тема 5.1. Преобразование базисов

1: $0{,}5\tilde{e}_1-1{,}5\tilde{e}_2-2\tilde{e}_3$. **2: Не является:** $\boldsymbol{e}_k$ **— линейно зависимы.**

3: $S_{12}^T=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}-82 & 6 & 25\\ 212 & -19 & -64\\ -230 & 20 & 92\end{pmatrix}$. **4:** $-(1+t^2)-2(2t+t^2)+2(1+t)$.

5: $S=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$. **Обратное преобразование невозможно.**

6: $A''=-\begin{pmatrix}2 & 8\\ 2{,}5 & -3\end{pmatrix}$. **7:** $S^T=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1\\ -1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{i}_1=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\tilde{\boldsymbol{i}}_1-\tilde{\boldsymbol{i}}_2)$, $\boldsymbol{i}_2=\frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{i}}_1+\sqrt{3}\tilde{\boldsymbol{i}}_2)$.

8: $\boldsymbol{r}=\frac{\sqrt{2}}{2}(5\tilde{\boldsymbol{i}}_1+\tilde{\boldsymbol{i}}_2+5\tilde{\boldsymbol{i}}_3)$. **9:** $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 8\\ 5 & -6\end{pmatrix}$.

Тема 4.2. Преобразование матриц

2: $LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

3: $LP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$ **4:** $QU = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

5: $\Im_P = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Im_Q = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$

В ответах 3–5 могут быть другие варианты. Это зависит от того, какую строку (столбец) при ортогонализации принять за исходную.

Тема 5.3. Собственные значения и векторы матриц

Для матрицы A.

2: $\lambda_1 = -4, \ \lambda_2 = 9;$ **3:** $E^1 = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(-2, 3)^T, \ E^2 = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(3, 2)^T;$

4: $S = \dfrac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = S^T = S^{-1}; \quad \Lambda = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$

Для матрицы B.

2: $\lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = 6, \ \lambda_3 = 9; \quad \sigma_1 = 3, \ \sigma_2 = -6, \ \sigma_3 = -8;$

3: $E^1 = \dfrac{1}{3}(-2, -2, 1)^T, \quad E^2 = \dfrac{1}{3}(1, -2, -2)^T, \quad E^3 = \dfrac{1}{3}(-2, 1, -2)^T;$

4: $S = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}; \quad S^{-1} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = S^T;$

$$\Lambda = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

6: $\tilde{K} = 16\tilde{x}_1 + 36\tilde{x}_2;$ **7:** $S^T = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$

Тема 6.1. Алгебра тензоров

1: а) $AB^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{ab});$

$BC^T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{bc}).$

б) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -8; \quad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_3;$

$\boldsymbol{ab} \cdot \boldsymbol{c} = 6\boldsymbol{a} = 6(2\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_2 - 3\boldsymbol{i}_3;$

$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{ab} = -7\boldsymbol{c} = -7(-\boldsymbol{i}_1 + 2\boldsymbol{i}_3);$

$$\boldsymbol{ab}\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{i}_1\ \ \boldsymbol{i}_2\ \ 3\boldsymbol{i}_3)\begin{pmatrix}-4 & 16 & -2\\ -2 & 8 & -1\\ 6 & -24 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}_1\\ \boldsymbol{i}_2\\ \boldsymbol{i}_3\end{pmatrix};\qquad \boldsymbol{ab}:\boldsymbol{ca}=84.$$

Тема 7.1. Прямая на плоскости

1: а) $x-y-3=0$**; б)** $\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{-3}=1$**; в)** $y=x-3$**; г)** 45^o**; д)** 45^o**,** 135^o**.**

2: а) $2x+3y+1=0$**; б)** $x-3y+5=0$**.** **3:** $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$**;** $\operatorname{tg}\theta=-3$**.**

4: а) $2x-y-5=0$**; б)** $x+2y-5=0$**.**

5: а) $3x+4y+1=0$**; б)** $D(-4;0)$**;**

в) $E(-1;0{,}5)$**,** $\cos\alpha=-\dfrac{21}{5\sqrt{37}}$**; г)** $\dfrac{11}{\sqrt{26}}$**.**

Тема 7.2. Плоскость

1: $3x+3y+z-6=0$**.** **2:** $a=b=2$**;** $c=6$**.**

3: $\cos\alpha=\cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{19}}$**;** $\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{19}}$**.**

4: $x+y-2=0$**.** **5:** $y=2$**.** **6:** $\cos\theta=-\dfrac{2}{\sqrt{42}}$**.**

7: $2x-y+3z-14=0$**.** **8:** $x+11y+4z+1=0$**.**

9: $7x-2y+4z+9=0$**.** **10:** $d_A=7$**;** $d_0=2$**.**

Тема 7.3. Прямая и плоскость

1: а) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ **и** $\begin{cases}x=\ \ 1+\ t,\\ y=-1+2t,\\ z=\ \ 2+\ t;\end{cases}$

б) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{0}$**;** **и** $\begin{cases}x=\ \ 1+2t,\\ y=-1+3t,\\ z=\ \ 2;\end{cases}$;

в) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$**;** **и** $\begin{cases}x=\ \ 1+2t,\\ y=-1-\ t,\\ z=\ \ 2+3t.\end{cases}$

г) $\sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{182}}$**; д)** $M(17,\ 24,\ -3)$**; е)** $M_*(33,\ 48,\ -3)$**.**

2: а) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$**; б)** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$**;**

в) $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$**.**

3: а) $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{-1}$**; б)** $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{1}$.

4: $M_*=(1;1;-1)$**.** **5:** $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$**.**

Тема 8.1. Кривые второго порядка

1: Гипербола $\dfrac{(x+2)^2}{(3/2)^2} - \dfrac{(y-1)^2}{3^2} = 1.$

2: Эллипс $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$**;** $F_1(-3;1)$**;** $F_2(1;1)$**;** $e = 0{,}6$**.**

3: Эллипс $\dfrac{(x+1)^2}{5} + \dfrac{y^2}{1} = 1$**;** $e = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$**.** **4: Гипербола** $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$**.**

5: Парабола $y^2 = \pm 12x$ **или** $x^2 = \pm 12y$**.**

Тема 9.1. Неравенства

1: (0;2), (3;2). 2: (0;0), (0;2), (4;0). 3: $\emptyset$**.**
4: (3;0), (1;0), (3;2). 5: (0;0), (2;0), (2;1).

Тема 9.2. Симплексный метод решения задач ЛП

1: $r = 2$**,** $F_{min} = F(0;2) = -4$**. 2:** $r = 2$**,** $\Omega \in \emptyset$**.**
3: $r = 2$**,** $F_{max} \to \infty$**. 4:** $r = 2$**,** $F_{min} = F(1;0) = 1$**.**
5: $r = 2$**,** $F_{min} = F(0;0) = 0$ $F_{max} = F(2;2) = F(3;1) = 4$**.**
6: а), б) — эллипсы; в) — парабола; г) — гипербола.
7: Гиперболический параболоид.

Тема 9.3. Двойственные задачи ЛП

1: $F(0{,}8;\ 2{,}4) = \Phi(0;1) = 4.$ **2:** $F(5;9) = \Phi(0;0{,}8;\ 0{,}6) = 14.$
3: $F(1{,}4;0;0{,}2) = \Phi(2;4) = 14.$ **4:** $F(0;9/17;15/17;0) = \Phi(6;6) = 36.$

Предметный указатель

Библиографический список

1. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* **Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. — М.: Наука, 1980.**
2. *Горлач Б.А.* **Математика. — М.: ЮНИТИ, 2006.**
3. *Горлач Б.А.* **Тензорная алгебра. — Самара: Изд. СГАУ, 1998.**
4. *Лаптев Г.Ф.* **Элементы векторного исчисления. — М.: Наука, 1975.**
5. *Рублев А.Н.* **Курс линейной алгебры и аналитической геометрии. — М.: Высш. шк., 1972.**
6. *Солодовников А.С. и др.* **Математика в экономике, часть 1. — М.: «Финансы и сиатистика», 2001.**
7. *Фихтенгольц Г.М.* **Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Наука, 1966. Т. 1.**
8. *Сборник* **задач по высшей математике для вузов / Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. — М.: Наука, 1981.**

Учебное издание

Горлач Борис Алексеевич

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебный комплекс

Компьютерный набор и верстка автора

Подписано в печать Формат 112,4x167,8 1/32.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. Усл. кр.-отт. Уч.-изд. л.
Тираж экз. Заказ Арт. С-

Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА»
(Национальный исследовательский университет)

Б.А. Горлач

Л И Н Е Й Н А Я
А Л Г Е Б Р А

Конспект лекций

Самара, 2013

ЛЕКЦИЯ 1

ВВЕДЕНИЕ

История развития математики свидетельствует о том, что ее разделы появлялись и формировались под давлением потребностей развивающегося общества. Но построению математических моделей и методов непременно предшествовало установление закономерностей развития соответствующих направлений человеческой деятельности.

Серьезный анализ процессов физических и общественных явлений не может обойтись без знаний по многим разделам математики, в том числе без линейной алгебры. Конечно, обучить студентов всем существующим разделам математики на ее современном уровне невозможно — слишком глубоки и обширны математические дисциплины. Тем не менее изучение основ математики дает надежду на то, что обучаемые смогут в дальнейшем углубить свои математические знания при изучении предусмотренных учебными планами специальных дисциплин или самостоятельно.

При изучении математики не следует рассматривать эту науку только с точки зрения потребителя и пытаться изучать только те ее разделы, которые непосредственно решают прикладные задачи. Математика признана научным миром как самая могущественная из всех наук. Математике человечество обязано всеми величайшими открытиями, осуществленными человечеством за время своего сознательного существования.

Можно отметить три особенности математики, которые делают эту науку первой и важнейшей из всех наук.

1. Подходы, используемые математикой к построению моделей базируются на строгой аксиоматике с применением доказательств адекватности этих моделей описываемым явлениям. Математика представляет собой самостоятельную науку, которая может развиваться автономно, познавать свой собственный абстрактный мир. Удивительно то, что построенные математиками логически стройные абстрактные модели многомерного мира находят все более широкое приложение в реальном мире.

2. Методы реализации математических моделей (получение решений) позволяют проводить исследования различных процессов.

3. Язык математики, используемый в моделировании реальных процессов, универсален и позволяет выявить общие закономерности

развития природы, естествознания, техники, экономики, общественных отношений.

Знание математики, освоение ее основных методов и моделей — признак образованного человека, приобщенного к культуре мировой цивилизации.

«Природа — открытая книга. Но только тот может прочесть эту книгу, кто изучит язык, на котором она написана. А написана она на языке математики». Эти мудрые слова адресовал Галилей своим ученикам еще в 17 столетии.

МАТРИЦЫ

Матрица размера $m \times n$ – это прямоугольная таблица чисел или других математических объектов, состоящая из m строк и n столбцов:

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}).$$

m — количество строк, n — столбцов; a_{ij} $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ — *элементы матрицы*. Первый индекс (i) — номер строки; второй (j) — столбца.

Представленная матрица называется *прямоугольной* матрицей размера $m \times n$.

Если $m = n$ матрица *квадратная* порядка n.

Матрица, имеющая только одну строку, называется *матрицей-строкой*; только один столбец — *матрицей-столбцом*.

Элементы квадратной матрицы, имеющие одинаковые индексы, образуют *главную диагональ*.

Квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные выше (ниже) главной диагонали нулевые, называется *нижней* (*верхней*) *треугольной*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица, имеющая ненулевые элементы только на главной диагонали, называется *диагональной*:

$$\lceil a_{11},\ a_{22}, \ldots, a_{nn} \rfloor = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица, все элементы главной диагонали которой равны единицам, называется *единичной*:

$$\underset{n\times n}{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Прямоугольная (в общем случае) матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*:

$$\underset{m\times n}{\Theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица A^T, у которой по отношению к матрице A элементы строк и столбцов поменялись местами, называется *транспонированной* по отношению к A:

$$\underset{m\times n}{A^T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} = \underset{n\times m}{A'}.$$

$$\left(A^T\right)^T = A.$$

Матрица, для которой справедливо равенство $A = A^T$, называется *симметричной.* Симметричной может быть только квадратная матрица.

При введении *символа Кронекера*:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

определение видов матриц сводится к следующим выражениям.

Матрица A, у которой

$$\begin{cases} a_{ik}=0 \text{ при } i>k, & \text{– верхняя треугольная;}\\ a_{ik}=0 \text{ при } i<k, & \text{– нижняя треугольная;}\\ a_{ik}=a_i\delta_{ik}, & \text{– диагональная;}\\ a_{ik}=\delta_{ik}, & \text{– единичная;}\\ a_{ik}=0, & \text{– нулевая;}\\ a_{ik}=a_{ki}, & \text{– симметричная.} \end{cases}$$

$$\underset{m\times 1}{A} = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1})^T.$$

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Определитель (*детерминант*), — число, характеризующее квадратную матрицу.

Определителем матрицы первого порядка $A = (a_{11})$ является число, равное значению ее единственного элемента:

$$\Delta_A = \det A = |a_{11}| = a_{11}.$$

Определителем матрицы второго порядка является число, равное разности произведений элементов ее главной и побочной диагоналей:

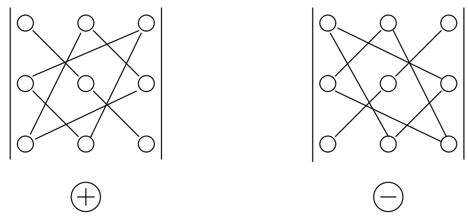
$$\Delta_A = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определителем матрицы третьего порядка является число, определяемое выражением:

$$\Delta_A = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Правило треугольников:



Общая формула для вычисления определителя n-го порядка:

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\sum_{\pi} (-1)^{i(\pi)} a_{1k_1} a_{1k_2} \dots a_{1k_n}.$$

Здесь π — общее количество возможных перестановок (инверсий) n индексов по отношению к натуральному ряду чисел $123\dots$; $i(\pi)$ — количество инверсий пар индексов, приведшее к рассматриваемому (конкретному) произведению. Для определения знака слагаемого имеет только значение индекса i: четное или нечетное.

Количество слагаемых в сумме равно $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Свойства определителей рассмотрим на примере определителя второго порядка

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

1. Определитель не изменится, если в нем строки и столбцы поменять местами:

$$\Delta A = \Delta A^T, \quad \text{или} \quad |A| = |A|^T.$$

Убедимся в справедливости свойства

$$\Delta A_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \Delta A.$$

Свойство указывает на равнозначность строк и столбцов в определителе.

2. Если в определителе поменять местами две произвольные строки (или в определителе матрицы n-ного порядка произвести нечетную перестановку строк), то знак определителя сменится на противоположный:

$$\Delta A_2 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -\Delta A.$$

3. Общий множитель всех элементов какой-либо строки можно вынести за знак определителя:

$$\Delta A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{11}a_{22} - \lambda a_{12}a_{21} = \lambda\Delta.$$

Из свойства следует, что при умножении определителя на число элементы только одной из его строк (любой) умножаются на это число.

4. Определитель равен нулю, если среди его строк имеются строки с пропорциональными элементами:

$$\Delta A_4 = \begin{vmatrix} \lambda a_{12} & \lambda a_{22} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{12}a_{22} - \lambda a_{22}a_{12} = 0.$$

Свойство является следствием свойств 2 и 3. Оно справедливо, в частности, при $\lambda = 1$ (две строки одинаковы) и при $\lambda = 0$ (имеется строка с нулевыми элементами).

5. Если элементы какой-либо строки определителя представить в виде суммы двух слагаемых, то определитель можно представить в виде суммы двух определителей следующим образом:

$$\Delta A_5 = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$(a_{11} + b_{11})a_{22} - (a_{12} + b_{12})a_{21} =$$

$$=(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (b_{11}a_{22} - b_{12}a_{21})=$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

6. Определитель не изменится, если к элементам какой-либо его строки прибавить элементы другой строки, умноженные на произвольный множитель.

$$\Delta A_6 = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta A.$$

7. Определитель треугольной (в частности, диагональной) матрицы равен произведению элементов ее главной диагонали:

$$\Delta A_7 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot 0 = a_{11} a_{22}.$$

В частности, определитель единичной матрицы равен единице, нулевой квадратной матрицы — нулю.

РАЗЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя Δ n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, получаемый из Δ вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя Δ n-го порядка называется произведение его минора M_{ij} на $(-1)^{i+j}$.

Теорема 1. *Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо из его строк (столбцов) на их алгебраические дополнения*:

$$\Delta = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad (i = \overline{1, n}).$$

Убедимся в справедливости теоремы на примере определителя третьего порядка, разложив его, например, по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} -$$

$$a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} +$$

$$a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}.$$

Выражение с точностью до порядка слагаемых совпадает с формулой для вычисления определителя третьего порядка.

Теорема 2. *Сумма произведений элементов какой-либо строки (какого-либо столбца) определителя на алгебраические дополнения элементов другой его строки (другого столбца) равна нулю.*

Выражение, получаемое в результате такого разложения, равно определителю с двумя равными строками (столбцами). Обобщенная формула:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} A_{jk} =$$

$$\delta_{ik}\Delta = \begin{cases} \Delta & \text{при} \quad i = k; \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k. \end{cases}$$

Следствие. Если в определителе имеется строка только с одним ненулевым элементом, то определитель равен произведению этого элемента на его алгебраическое дополнение.

Утверждение следствия очевидно: в разложении такого определителя по элементам упомянутой строки все слагаемые разложения, кроме одного, обратятся в нуль, так как алгебраические дополнения нулевых элементов умножаются на нули.

Рассмотренные ранее свойства определителей и сформулированные теоремы позволяют понизить порядок $n \geq 4$ определителей до третьего и второго и затем найти их значения.

Л Е К Ц И Я 2

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одной размерности $m \times n$ *равны*, если равны их соответствующие элементы:

$$\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times n}{B} \quad \Longleftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij}.$$

Линейными операциями над математическими объектами называют две операции: сложение объектов и умножение их на число.

Суммой двух матриц A и B одной размерности $m \times n$ называется матрица C размерности $m \times n$, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B:

$$\underset{m\times n}{A} + \underset{m\times n}{B} = \underset{m\times n}{C} \quad \Longleftrightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Для суммы матриц справедливы следующие свойства.
Коммутативность (перестановочность):

$$A + B = B + A.$$

Ассоциативность (сочетательность):

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

Справедливость указанных свойств для матриц следует из справедливости этих свойств для чисел — элементов матриц:

$$a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij},$$

$$a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}.$$

Произведением матрицы A размера $m \times n$ на число $\lambda \in \Re$ называется матрица B размера $m \times n$, элементы которой равны произведению соответствующих элементов матрицы A на λ:

$$\underset{m\times n}{B} = \lambda\underset{m\times n}{A} \quad \Longleftrightarrow \quad b_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

По отношению к произведению и сумме матриц A и B $(\lambda, \mu \in \Re)$ справедливы свойства *дистрибутивности* (распределительности):

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B,$$

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A;$$

коммутативности и *ассоциативности*:

$$\lambda A = A\lambda;$$

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) = \lambda(A\mu).$$

ПРОИЗВЕДЕНИЕ МАТРИЦ

Произведением матрицы A размера $m \times k$ на матрицу B размера $k \times n$ называется матрица C размера $m \times n$. Элементы c_{ij}, стоящие на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы C, равны сумме произведений элементов a_{is} i-й строки матрицы A на элементы b_{sj} j-го столбца матрицы B $(s = \overline{1, k})$:

$$\underset{m\times n}{C} = \underset{m\times k}{A} \cdot \underset{k\times n}{B} \iff c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} b_{sj}.$$

Произведение возможно, если число столбцов матрицы, стоящей в произведении первой (слева), равно числу строк второй матрицы. Число строк матрицы произведения равно числу строк первой из стоящих в произведении матриц, а число столбцов — числу столбцов второй из них.

Пример 1. Найти произведение матриц:

$$\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} 2\cdot 4 + 0\cdot 3 + (-1)\cdot 0 \\ 0\cdot 4 + (-2)\cdot 3 + 2\cdot 0 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}}.$$

Свойства произведений матриц.

1. *Некоммутативность*:

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Пример 2.

$$\underset{2\times 1}{A} \cdot \underset{1\times 2}{B} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} (-2\ 1) =$$

$$\begin{pmatrix} (-2)\cdot(-2) & (-2)\cdot 1 \\ 1\cdot(-2) & 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\underset{1\times 2}{B} \cdot \underset{2\times 1}{A} =$$

$$(-2\ 1)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \big((-2)\cdot(-2) + 1\cdot 1\big) = (5).$$

Сравнение двух последних результатов говорит о том, что произведения одних и тех же, но расположенных в обратном порядке матриц не совпадают. Они отличаются в том числе размерами результирующих матриц.

Если произведение матриц не изменяется при их перестановке, то матрицы называются *коммутирующими*, или *перестановочными* по отношению к произведению. В частности, единичная матрица является коммутирующей по отношению к любой квадратной матрице, имеющей одинаковый с единичной матрицей порядок:

$$I \cdot A = A \cdot I = A.$$

2. *Ассоциативность*:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

3. *Дистрибутивность*:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

4. Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц:

$$\det\,(A \cdot B) = \det\,A \cdot \det\,B.$$

Пример 3. Записать в координатной форме (в виде соотношений между элементами матриц) матричное уравнение $AX = B$, если

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \underset{m\times 1}{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \underset{n\times 1}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Используя свойства произведений матриц и определение равных матриц, получим

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Таким образом, заданное в условии задачи матричное уравнение равносильно системе линейных алгебраических уравнений.

Произведение двух одинаковых квадратных матриц называется *квадратом матрицы*. Произведение квадрата матрицы на ту же матрицу приводит к кубу матрицы и т.д. *Матрица степени* n образуется из матрицы степени $(n-1)$ умножением ее на ту же матрицу в первой степени. То есть

$$A^2 = A \cdot A; \quad A^3 = A^2 \cdot A; \quad \ldots \quad A^n = A^{n-1} \cdot A.$$

Произведение одинаковых матриц разных степеней коммутативно:

$$A^m A^n = A^n A^m = A^{m+n}.$$

При транспонировании произведения матриц каждая из них транспонируется, а порядок матриц в произведении меняется:

$$(AB)^T = B^T A^T,$$

$$(A_1 A_2 \ldots A_n)^T = A_n^T \ldots A_2^T A_1^T.$$

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Обратной матрицей по отношению к квадратной матрице A порядка n называется квадратная матрица A^{-1} порядка n, удовлетворяющая условию:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$

где I — единичная матрица порядка n.

Неособенная (или *невырожденная матрица*) — это квадратная матрица, определитель которой не равен нулю.

Теорема. *Для каждой неособенной матрицы существует, и при том единственная, обратная матрица.*

Докажем справедливость теоремы.

Пусть задана квадратная неособенная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad \Delta = |A| \neq 0.$$

Присоединенной (союзной) матрицей A^c называется транспонированная матрица алгебраических дополнений A_{ij} элементов a_{ij} матрицы A. То есть

$$A^c = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{i1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{i2} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1j} & A_{2j} & \dots & A_{ij} & \dots & A_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{in} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

У элементов матрицы A^c первый индекс определяет, как и положено для транспонированной матрицы, номер столбца, а второй — номер строки исходной матрицы.

Рассмотрим и преобразуем произведение A^cA. При преобразовании воспользуемся правилами разложения определителя по элементам строк и произведения матрицы на числовой множитель:

$$A^cA = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} A_{k1}a_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} A_{k1}a_{k2} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} A_{k1}a_{kn} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} A_{k2}a_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} A_{k2}a_{k2} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} A_{k2}a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} A_{kn}a_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} A_{kn}A_{k2} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} A_{kn}a_{kn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \Delta I.$$

Приравняем левую и правую части записанных равенств и поделим полученное равенство на определитель (на число) Δ:

$$\frac{1}{\Delta}A^cA = I.$$

Сравнивая записанное соотношение с исходным равенством, получим формулу для вычисления обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} A^c. \tag{1}$$

Эту же формулу можно получить, рассматривая произведение AA^c. То есть матрицы A и A^c коммутативны по отношению к произведению, как коммутативны матрицы A и A^{-1}.

Доказательство единственности обратной матрицы следует из совпадения результатов следующих двух путей преобразований.

Предположим противное, т.е. что матрица A имеет две обратные матрицы A_1^{-1} и A_2^{-1}. Тогда с учетом свойства ассоциативности произведения матриц и определения обратной матрицы запишем:

$$A_1^{-1} A A_2^{-1} = \begin{cases} A_1^{-1}(AA_2^{-1}) = A_1^{-1} I = A_1^{-1} \\ (A_1^{-1}A)A_2^{-1} = IA_2^{-1} = A_2^{-1} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad A_1^{-1} = A_2^{-1}.$$

Результат противоречит исходному предположению о существовании двух обратных матриц.

Для обратной матрицы справедливы соотношения:

$$(A^{-1})^{-1} = A; \qquad (A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}.$$

Матрицы, удовлетворяющие условию

$$S^{T} = S^{-1},$$

называются *ортогональными*.

НОРМЫ МАТРИЦ

Неравенства

$$A \leq B \quad \text{или} \quad A \geq B$$

между матрицами одинакового размера $m \times n$ говорят о том, что между всеми соответствующими элементами этих матриц должны существовать неравенства

$$a_{ij} \leq b_{ij} \text{ или } a_{ij} \geq b_{ij} \quad (i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}).$$

В этом случае можно утверждать, что матрица A меньше или больше матрицы B. Если неравенства не выполняются для всех элементов матриц, то сравнение матриц по этому признаку невозможно.

Пусть
$$|A| = (|a_{ij}|)$$
матрица, состоящая из абсолютных величин элементов матрицы A.

В качестве *нормы матрицы* $A = (a_{ij})$ (и B) можно принять понимать число $||A||$ (не модуль определителя матрицы A), удовлетворяющее условиям (аксиомам):

$$1.\ ||A|| \geq 0; \qquad 2.\ ||\lambda \cdot A|| = |\lambda| \cdot ||A||;$$

$$3.\ ||A + B|| \leq ||A|| + ||B||; \quad 4.\ ||A \cdot B|| \leq ||A|| \cdot ||B||.$$

Равенство в первом соотношении возможно только если $A = \Theta$.

Выполнение аксиом не гарантирует единственности определения нормы матрицы. Для оценки матриц существуют различные нормы. Приведем некоторые из них.

1. $||A||_m = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$

По этой норме, называемой *m-нормой*, выбирается максимальная из сумм абсолютных значений элементов строк матрицы.

2. $||A||_n = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}|.$

По этой норме, называемой *n-нормой*, выбирается максимальная из сумм абсолютных значений элементов столбцов матрицы.

3. $||A||_k = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} (a_{ij})^2}.$

Формулой определяется *k-норма — квадратичная* норма.

Пример. Определить m-, n- и k-нормы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & -3 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е.

$$||A||_m = \max\{2 + 3 + |-4| + |-3|,\ 4 + |-2| + |-1|$$
$$+1, |-2| + 1 + 5 + 8\} = \max\{12, 8, 16\} = 16;$$

$$||A||_n = \max\{2+4+|-2|,\ 3+|-2|+1,\ |-4|+|-1|$$
$$+5, |-3|+1+8\} = \max\{8,6,10,12\} = 12;$$
$$||A||_k = \sqrt{2^2+3^2+(-4)^2+(-3)^2+\ldots+1^2+5^2+8^2} =$$
$$\sqrt{154} \approx 12{,}4.$$

Неудобство перечисленных норм матриц состоит в том, что при увеличении порядка матриц их значения возрастают. На практике чаще используются осредненные нормы. Для их получения нормы пунктов 1–3 делят на количества элементов, входящих в суммы. Например,

$$||\overline{A}||_m = \frac{1}{n}||A||_m.$$

$$||\overline{A}||_n = \frac{1}{m}||A||_n.$$

$$||\overline{A}||_k = \sqrt{\frac{1}{mn}}||A||_k.$$

Применение осредненных показателей норм для матрицы, рассматриваемой в примере, дают следующие значения:

$$||\overline{A}||_m = \frac{1}{4}||A||_m = 4; \quad ||\overline{A}||_n = \frac{1}{3}||A||_n = 4;$$

$$||\overline{A}||_k = \frac{1}{\sqrt{12}}||A||_k \approx 3,6.$$

РАНГ МАТРИЦЫ

К элементарным преобразованиям над матрицами относят:

— изменение порядка следования строк (и, конечно, столбцов) матрицы;

— умножение строк на отличные от нуля множители;

— добавление к элементам строк соответствующих элементов других строк, умноженных на произвольные числа;

— удаление из матрицы строк, пропорциональных другим строкам. В частности строки, состоящие только из нулевых элементов, пропорциональны любым другим строкам;

— транспонирование матриц.

Путем элементарных преобразований любую матрицу можно привести к единичной матрице. Определитель такой матрицы равен единице, т.е отличен от нуля.

Рассмотрим прямоугольную ненулевую матрицу размера $m \times n$.

Минором k-го порядка матрицы называется определитель, состоящий из элементов матрицы, стоящих на пересечении k любых его строк с k любыми его столбцами.

Минор матрицы, состоящий из элементов ее k первых строк и k первых столбцов, называется *k-м главным минором* матрицы.

Рангом матрицы называется наибольший порядок k отличного от нуля минора матрицы.

Порядок единичной матрицы будет, очевидно, равен рангу этой матрицы.

Теорема 1. *Любую ненулевую матрицу можно с помощью элементарных преобразований привести к единичной матрице, порядок которой будет равен рангу исходной матрицы.*

Ранг нулевой матрицы равен нулю.

Проведение преобразований, соответствующих условию теоремы, можно осуществить следующим образом.

Переставим строки и столбцы исходной матрицы (это не изменит ее ранг) таким образом, чтобы на месте элемента a_{11} оказался ненулевой элемент. Поделим элементы первой строки матрицы на a_{11}. Умножая первую строку полученной матрицы на значение элемента матрицы, стоящего на месте a_{21}, вычтем все ее полученные элементы из соответствующих элементов второй строки. В результате на месте элемента a_{21} появится нуль. Описанным способом можно получить нули во всех элементах первого столбца, кроме первого.

Аналогично образуем нули во всех, кроме первого, элементах первой строки.

Оставляя далее «в покое» элементы первой строки и первого столбца, описанную операцию проделаем с элементом a_{22}, получив на его месте единицу и обращая в нуль остальные элементы второго столбца и второй строки. Затем переходим к третьим столбцу и строке и т.д.

Если при преобразовании матрицы образуются нулевые строки или столбцы, их вычеркиваем. В итоге придем к единичной матрице, порядок которой определит ранг исходной матрицы.

Порядок преобразования матрицы к единичной может быть произвольным.

Пример. Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Вычтем из первой строки вторую для получения единицы на месте a_{11}:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Умножим первую строку на -2 и прибавим полученные значения ее элементов ко второй строке. Затем умножим первую строку на -5 и прибавим значения полученных элементов к третьей строке. В результате получим:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & 9 & -7 \end{pmatrix}.$$

Вычтем элементы первого столбца из соответствующих элементов второго, затем эти же элементы, умноженные на -2, из элементов третьего и, наконец, умноженные на 2, из элементов четвертого столбца:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & 9 & -7 \end{pmatrix}.$$

Вычтем элементы второго столбца, умноженные на 9, из соответствующих элементов третьего столбца и элементы этого же столбца, умноженные на -7, из элементов четвертого столбца:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Два последних столбца полученной матрицы состоят только из нулевых элементов. Эти столбцы вычеркиваем.

Вычитая элементы второй строки из элементов третьей строки и вычеркивая из полученной матрицы последнюю строку как состоящую только из нулевых элементов, приходим к единичной матрице:

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полученная единичная матрица имеет второй порядок. Это максимальный порядок матрицы, порожденной исходной матрицей, с определителем, отличным от нуля. Следовательно,

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A_5 = 2.$$

Л Е К Ц И Я   3

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СЛАУ

Рассмотрим систему n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n. \end{cases}$$

В матричном виде:

$$AX = B,$$

где

$$\underset{n\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

$$\underset{n\times 1}{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}; \quad \underset{n\times 1}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Считая матрицу A невырожденной, умножим обе части матричного уравнения **слева** на матрицу A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Имея в виду соотношения

$$A^{-1}AX = \left(A^{-1}A\right)X = IX = X,$$

запишем решение матричного уравнения в виде

$$X = A^{-1}B \qquad (\neq BA^{-1}).$$

Решение СЛАУ получено *матричным методом* или *методом обратной матрицы*. Использование его возможно только в случае, если матрица A неособенная (невырожденная).

Представим решение исходного уравнения в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix},$$

где

$$\Delta_i = \sum_{k=1}^{n} A_{ki} b_k \qquad (i = \overline{1,n}).$$

Из последнего соотношения следует, что Δ_i — это определитель, образованный путем замены в Δ элементов i-го столбца на свободные члены.

Таким образом,

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \qquad (i = \overline{1,n}).$$

Записанное решение называют *формулами Крамера,* а метод решения СЛАУ — *методом Крамера* или *методом определителей.*

Как и при использовании матричного метода, формулы Крамера применимы только в случае, когда $\Delta \neq 0$.

МЕТОД ГАУССА-ЖОРДАНА РЕШЕНИЯ СЛАУ

Рассмотрим системы m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

Коэффициенты a_{ij} $(i{=}\overline{1,m}; j{=}\overline{1,n})$ образуют матрицу A размера $m{\times}n$ коэффициентов системы уравнений; правая часть уравнений — величины b_i — матрицу-столбец B *свободных членов* размера $m \times 1$;

неизвестные x_j — матрицу-столбец X неизвестных размера $m \times 1$:

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

$$\underset{m\times 1}{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}; \quad \underset{n\times 1}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

С учетом введенных обозначений систему уравнений представим в матричном виде:

$$\underset{m\times n}{A} \; \underset{n\times 1}{X} = \underset{m\times 1}{B}.$$

Если матрица $B = \Theta$ (все элементы правой части нулевые), то уравнения называются *однородными.*

Неотрицательные решения x_j, удовлетворяющие системе уравнений, в экономике называют *допустимыми.*

Из школьного курса алгебры известно, что решение системы уравнений не изменится, если: к любому ее уравнению прибавить другое уравнение, умноженное на любое число; какие-либо уравнения в системе поменять местами; умножить любое уравнение на отличный от нуля множитель; исключить из системы уравнений тождества.

Перечисленные действия над уравнениями системы перекликаются с элементарными преобразованиями над матрицами

Решение системы полностью определяется ее коэффициентами и свободными членами и не зависит от того, каким образом обозначить неизвестные. Поэтому вместо исходной СЛАУ можно рассмотреть *расширенную матрицу* P. Предположим первоначально, что количество уравнений и неизвестных совпадают $(m = n)$, тогда

$$\underset{n\times(n+1)}{P} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right).$$

Преобразования расширенной матрицы будем осуществлять, следуя описанным допустимым действиям над уравнениями. Это будет соответствовать элементарным преобразованиям строк (но не столбцов!) расширенной матрицы.

Образовав на месте элемента a_{11} единицу, с ее помощью получим нули во всех остальных элементах первого столбца расширенной матрицы. Для этого первую строку матрицы P (с единицей на месте элемента a_{11}) умножим на $-a_{21}$ и прибавим ее элементы к соответствующим элементам второй строки матрицы (второму уравнению системы); ту же первую строку умножим на $-a_{31}$ и добавим ее элементы к элементам третьей строки и т.д. до последней строки. В результате в первом столбце расширенной матрицы (коэффициенты при x_1 в уравнениях) будут стоять: единица в первой строке и нули во всех остальных строках (уравнениях):

$$P_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a'_{12} & \dots & a'{}_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{array} \right).$$

Образуем далее единицу на месте коэффициента a'_{22} и нули в оставшихся элементах второй строки. И так далее до тех пор, пока матрица коэффициетов не превратится в единичную:

$$P_2 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b''_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b''_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b''_n \end{array} \right).$$

Возвращаясь к матрице P, вспомним, что первый столбец матрицы P_2 образуют коэффициенты, стоящие в системе при x_1, второй — при x_2 и т.д. В результате описанных преобразований система уравнений примет вид

$$\begin{cases} 1{\cdot}x_1 + 0{\cdot}x_2 + \dots + 0{\cdot}x_n = b''_1, \\ 0{\cdot}x_1 + 1{\cdot}x_2 + \dots + 0{\cdot}x_n = b''_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ 0{\cdot}x_1 + 0{\cdot}x_2 + \dots + 1{\cdot}x_n = b''_n \end{cases} \implies$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b''_1 \\ b''_2 \\ \vdots \\ b''_n \end{pmatrix}.$$

В результате преобразований получено решение системы уравнений. Изложенный метод называется *методом Гаусса–Жордана.*

ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛИ

Задана система m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Пусть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

$$P=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Теорема (Кронекера–Капелли).

Система линейных алгебраических уравнений будет совместной тогда и только тогда, когда ранг матрицы A ее коэффициентов и ранг расширенной матрицы P равны.

Относительно заданной системы уравнений справедливы вытекающие из теоремы Кронекера–Капелли, утверждения. *Система линейных алгебраических уравнений в случаях, если:*

1) $\text{rang } A = \text{rang } P = n$, *имеет единственное решение;*

2) $\text{rang } A = \text{rang } P < n$, *имеет бесчисленное множество решений;*

3) $\text{rang } A < \text{rang } P$, *не имеет решений (несовместна).*

Случай 1 ($\text{rang } A = \text{rang } P = n$) рассмотрен в предыдущем параграфе. Для него преобразования Гаусса–Жордана приводят к единственному решению системы уравнений.

Ранг расширенной матрицы в этом случае совпадает с рангом матрицы коэффициентов. Действительно, с помощью единственных единиц (остальные нули) в столбцах матрицы P_2 в расширенной матрице обращается в нуль и отбрасывается столбец свободных членов. Этим доказывается равенство рангов матрицы коэффициентов и расширенной матрицы.

Случай 2 ($\text{rang } A = \text{rang } P = k < n$).

Элементарные преобразования над строками расширенной матрицы P в этом случае преобразуют ее к виду

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1,k+1} & a'_{1,k+2} & \dots & a'_{1,n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2,k+1} & a'_{2,k+2} & \dots & a'_{2,n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{k,k+1} & a'_{k,k+2} & \dots & a'_{k,n} & b'_k \end{array}\right).$$

Матрица содержит k строк, если $\operatorname{rang} P = k$. Оставшиеся $m-k$ строк, ставшие нулевыми, отбрасываются.

Переменные x_1, x_2, $\dots$, x_k, коэффициенты при которых в результате преобразований стали равными единице, называют *основными переменными,* а единичная матрица — базисной матрицей или базисным минором. Остальные переменные системы уравнений, а именно x_{k+1}, $x_{k+2}, \dots$, x_n — *неосновными*, или *свободными переменными.*

Возвращаемся к системе уравнений:

$$\begin{array}{l} x_1 = b'_1 - a'_{1,k+1}x_{k+1} - a'_{1,k+2}x_{k+2} - \dots - a'_{1,n}x_n, \\ x_2 = b'_2 - a'_{2,k+1}x_{k+1} - a'_{2,k+2}x_{k+2} - \dots - a'_{2,n}x_n, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_k = b'_k - a'_{k,k+1}x_{k+1} - a'_{k,k+2}x_{k+2} - \dots - a'_{k,n}x_n. \end{array}$$

Полученное *общее решение* системы уравнений неоднозначно. Оно зависит от произвольности выбора свободных переменных.

При любых фиксированных значениях переменных x_{k+1}, $x_{k+2}, \dots$, x_n получаются *частные решения.* Одним из частных решений является решение при нулевых значениях свободных переменных. Это решение назовем *базисным:*

$$x_1 = b'_1, \quad x_2 = b'_2, \quad \dots, \quad x_k = b'_k.$$

Базисное решение зависит от выбора основных переменных.

Случай 3 ($\operatorname{rang} A = k < \operatorname{rang} P$).

Преобразование расширенной матрицы P по методу Гаусса–Жордана приводит в этом случае к следующей ее форме:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b'_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b'_{k+1} \end{array}\right).$$

В рассматриваемом случае $\operatorname{rang} P = k + 1 > \operatorname{rang} A = k$.

Не равный нулю коэффициент b'_{k+1} (в случае равенства его нулю ранги матриц A и P были бы равными) в правой части уравнения приравнен нулю (левая часть последнего уравнения). Это противоречит условию рассматриваемого случая. Следовательно, система уравнений противоречива (несовместна, не имеет решения).

ОДНОРОДНЫЕ СЛАУ

Задана однородная система m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \ldots + & a_{2n}x_n & = & 0, \\ \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \ldots + & a_{mn}x_n & = & 0. \end{cases}$$

Ранг расширенной матрицы однородной системы уравнений всегда равен рангу матрицы коэффициентов, так как правый столбец матрицы P нулевой и его можно отбросить при определении ранга матрицы. Поэтому для однородной системы уравнений условия существования и единственности решения могут быть сформулированы следующим образом.

Однородная система линейных алгебраических уравнений в случаях, если:

1) $\operatorname{rang} A = n$, *имеет единственное решение, причем это решение нулевое (тривиальное)*;

2) $\operatorname{rang} A < n$, *имеет бесчисленное множество решений.*

Случай 1. Чтобы убедиться в справедливости утверждения пункта 1 теоремы, достаточно сослаться на решение СЛАУ методом Крамера. В этих решениях $\Delta \neq 0$ (так как $\operatorname{rang} A = n \leq m$) и определитель Δ должен определяться по коэффициентам тех уравнений, которые при преобразованиях Гаусса–Жордана не обращаются тождественно в нуль.

Что касается определителей Δ_i, то они обратятся в нули, так как в каждом из них хотя бы один столбец представляет собой столбец нулевых свободных членов системы уравнений.

Случай 2 совпадает со случаем 2 теоремы Кронекера-Капелли и в дополнительном доказательстве не нуждается.

Пример. Определить множитель λ, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 2x & + & 3y & - & z & = & 0, \\ x & - & 2y & + & 2z & = & 0, \\ 3x & + & y & + & \lambda z & = & 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальные решения. Найти эти решения.

Р е ш е н и е. Однородная система уравнений имеет ненулевые решения только в случае, если ранг ее коэффициентов меньше количества неизвестных. В заданной системе количество неизвестных равно трем и ранг матрицы коэффициентов должен быть не больше двух. Поэтому определитель матрицы коэффициентов должен быть равен нулю. Это условие используем для определения λ:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & \lambda \end{vmatrix}_{-N1-N2} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 1.$$

Расширенную матрицу однородной системы уравнений составлять не имеет смысла, так как преобразования Гаусса с нулевыми элементами столбца свободных членов в любом случае оставят их нулевыми. Составим матрицу коэффициентов системы с учетом полученного для λ значения и преобразуем ее по методу Гаусса:

$$\left(\begin{array}{rrr} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ {\scriptstyle +N1} \\ {\scriptstyle -N1-N2} \end{array} \quad \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrr} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} {\scriptstyle +N2} \\ \\ \\ \end{array} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr} 5 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} {\scriptstyle :4} \\ {\scriptstyle -N1/4} \end{array} \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr} 5/4 & 1 & 0 \\ 7/4 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Выбрав в качестве основных переменных y и z (множители перед этими переменными равны единицам и образуют единичную матрицу), выразим их через свободную переменную x :

$$y = -\frac{5}{4}x; \qquad z = -\frac{7}{4}x.$$

Это решение часто удобно представить в параметрическом виде, обозначая, например, $x = t$. Тогда

$$x = t, \qquad y = -\frac{5}{4}t; \qquad z = -\frac{7}{4}t.$$

Таким образом, получено зависящее от значения параметра t общее решение заданной однородной системы уравнений при $\lambda = 1$.

При $\lambda \neq 1$ возможны только нулевые решения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ МЕТОДОМ ГАУССА

Предположим, что требуется найти матрицу A^{-1}, обратную по отношению к невырожденной квадратной матрице A.

Сопоставим с матрицей A единичную матрицу I: $A|I$.

Проделаем над строками расширенной матрицы $A|I$ такие преобразования Гаусса, которые обратят матрицу A в единичную. Это равнозначно умножению матрицы A на матрицу A^{-1}. Но при одновременном преобразовании матриц A и I единичная матрица превратится в $IA^{-1} = A^{-1}$. То есть в расширенной матрице на месте единичной матрицы будет образована матрица A^{-1}, обратная по отношению к A.

Пример. Найти матрицу, обратную по отношению к

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Составим расширенную матрицу, присоединяя к A единичную матрицу I, и проделаем над строками полученной матрицы описанные преобразования Гаусса:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ {\scriptstyle -3N3} \\ {\scriptstyle \times(-1)} \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} {\scriptstyle +N2} \\ {\scriptstyle :(-2)} \\ \\ \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 3/2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} {\scriptstyle \times(-1)} \\ \\ {\scriptstyle -N1} \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

В правой части расширенной матрицы стоит обратная по отношению к A матрица:

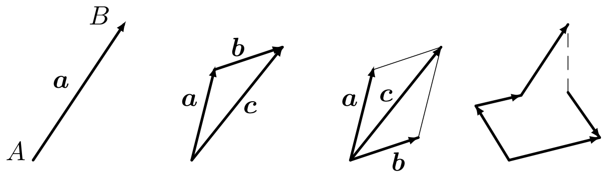
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Замечание. При получении обратной матрицы с помощью преобразования Гаусса нельзя менять местами строки в матрице $A|I$.

Л Е К Ц И Я 4

ВЕКТОР КАК ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ОБЪЕКТ

Вектором с геометрической точки зрения называется отрезок в пространстве (на плоскости), направленный от точки A (начало вектора) к другой точке B (конец вектора).



Обозначение: вектор $\overline{AB}$ или $\boldsymbol{a}$.

Модуль вектора это его длина $a = |\boldsymbol{a}| = |\overline{AB}|$.

Вектор, начало которого совпадает с его концом, называют *нулевым.*

Произведением вектора $\boldsymbol{a}$ на число $\lambda \in \Re$ – это вектор $\lambda\boldsymbol{a}$, модуль которого равен $|\lambda|a$, параллельный вектору $\boldsymbol{a}$ и направленный в сторону $\boldsymbol{a}$ при $\lambda > 0$ и в противоположную вектору $\boldsymbol{a}$ сторону при $\lambda < 0$.

Для нулевого вектора направление не определено.

Суммой двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\boldsymbol{a}$, а конец — с концом вектора $\boldsymbol{b}$ при условии, что начало вектора $\boldsymbol{b}$ совмещено с концом вектора $\boldsymbol{a}$. Вектор $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ можно представить как диагональ параллелограмма, сторонами которого служат векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Суммой n векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ называется вектор $\boldsymbol{b}$, соединяющий начало первого вектора с концом последнего при условии, что конец каждого предыдущего из суммируемых векторов является началом последующего вектора.

Сложение и умножение на число — *линейные операции* над векторами.

Справедливы свойства ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ — векторы; $\lambda \in \Re$):

1) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ — коммутативность;

2) $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$ — ассоциативность;

3) $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$ — дистрибутивность.

Разность двух векторов $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ — это сумма вектора $\boldsymbol{a}$ с вектором $\boldsymbol{b}$, умноженным на -1.

ЛИНЕЙНОЕ (ВЕКТОРНОЕ) ПРОСТРАНСТВО

Множество элементов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots$ образуют *векторное* (*линейное пространство*) L, если для его элементов выполняются следующие условия — *аксиомы линейных пространств.*

1) Любым двум элементам $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in L$ можно поставить в соответствие элемент $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \in L$, называемый суммой $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

2) Коммутативность по отношению к сумме: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

3) Ассоциативность по отношению к сумме: $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$.

4) Разрешимость: для любых $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b} \in L$ существует элемент $\boldsymbol{x}$ такой, что $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$.

5) Для любого $\boldsymbol{a} \in L$ и действительного числа $\lambda \in \Re$ существует элемент $(\lambda \boldsymbol{a}) \in L$.

6) Ассоциативность по отношению к произведению на действительные числа λ и ν: $(\lambda\nu)\boldsymbol{a}=\lambda(\nu\boldsymbol{a})$.

7) Для любого $\boldsymbol{a} \in L$ справедливо $1 \cdot \boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

8) Существует нулевой элемент $\boldsymbol{\Theta} \in L$ такой, что $\boldsymbol{\Theta}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

9) Дистрибутивность по отношению к произведению действительного числа на сумму элементов из L: $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

10) Для любого вектора $\boldsymbol{a}$ существует противоположный элемент $(-\boldsymbol{a})$ такой, что $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{\Theta}$.

Элементы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots$ множеств, для которых выполняются аксиомы 1-10, называют *векторами.*

Примеры векторных пространств.

1. Пространство векторов как геометрических объектов.

2. Пространство L совокупностей конечного (n) числа элементов $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) = (a_i)$ $(i=\overline{1,n})$.

Для двух произвольных элементов $\boldsymbol{a}=(a_i)$ и $\boldsymbol{b}=(b_i)$ пространства L справедливы линейные операции (λ – действительное число):

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_i)+(b_i)=(a_i+b_i)=(c_i)=\boldsymbol{c} \in L;$$

$$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda(a_i) = (\lambda a_i) = (d_i) = \boldsymbol{d} \in L.$$

3. Пространство L многочленов

$$P_n(a_k, x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Для двух произвольных элементов $P_n(a_k, x) \in L$ и $P_n(b_k, x) \in L$ справедливы линейные операции:

$$P_n(a_k, x) + P_n(b_k, x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k =$$

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k = P_n(c_k, x) \in L;$$

$$\lambda P_n(a_k, x) = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) x^k =$$

$$\sum_{k=0}^{n} d_k x^k = P_n(d_k, x) \in L.$$

4. Пространство L функций, непрерывных на некотором интервале изменения переменной x.

Если функции $f(x) \in L$ и $g(x) \in L$, то

$$f(x) + g(x) \in L.$$

$$\lambda \cdot f(x) \in L.$$

ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

Задана система n векторов $\boldsymbol{e}_i \in L$ $(i = \overline{1, n})$: $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и совокупность n чисел $a_i \in \Re$: $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Вектор типа

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_n\boldsymbol{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{e}_i$$

называется *линейной комбинацией векторов* $\boldsymbol{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$ (вектор $\boldsymbol{a}$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{e}_i$ или разлагается по этим векторам).

Система векторов $\boldsymbol{e}_i$ $(i = \overline{1,n})$ называется *линейно зависимой,* если существуют такие числа λ_i $(i = \overline{1,n})$, не равные одновременно нулю, что выполняется равенство

$$\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{\Theta}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\Theta}$ – нулевой вектор.

Если два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны (параллельны), направлены в противоположные стороны и известно, что модуль вектора $\boldsymbol{a}$ в 5 раз больше модуля вектора $\boldsymbol{b}$, то линейная комбинация

$$\boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\Theta}.$$

Поэтому векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и вообще любые коллинеарные векторы линейно зависимы.

Система векторов $\boldsymbol{e}_i$ $(i = \overline{1,n})$ называется *линейно независимой*, если равенство (2) выполняется только в том случае, когда $\lambda_i = 0$ для всех $i = \overline{1,n}$, т.е. все числовые множители в линейной комбинации векторов равны нулю.

Свойства системы линейно зависимых векторов.

Свойство 1. Одиночный ненулевой вектор представляет собой линейно независимую «систему векторов», а нулевой вектор — линейно зависимую.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приравняем нулевому вектору линейную комбинацию одного вектора $\boldsymbol{a}$ (λ — число):

$$\lambda \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\Theta}.$$

Из равенства следует, что линейная комбинация векторов (одного вектора) равна нулю при $\lambda \neq 0$ только в случае, когда вектор $\boldsymbol{a}$ нулевой. Если же $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{\Theta}$, то $\lambda = 0$.

Свойство 2. Если среди системы векторов имеется хотя бы один такой, который является линейной комбинацией остальных векторов, то система векторов линейно зависима.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть среди n векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\ldots$, $\boldsymbol{e}_n$ имеется вектор $\boldsymbol{e}_i$, который линейно выражается через $n-1$ остальных векторов:

$$\boldsymbol{e}_i = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \lambda_{i-1} \boldsymbol{e}_{i-1} +$$

$$\lambda_{i+1} \boldsymbol{e}_{i+1} + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n.$$

Прибавляя к обеим частям равенства вектор $-\boldsymbol{e}_i$, противоположный $\boldsymbol{e}_i$ $(-\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{\Theta})$, получим:

$$\lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \lambda_{i-1}\boldsymbol{e}_{i-1} + (-1)\boldsymbol{e}_i +$$

$$\lambda_{i+1}\boldsymbol{e}_{i+1} + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{\Theta}.$$

Равенство нулю линейной комбинации векторов в случае, когда не все множители входящих в нее векторов равны нулю (множитель при $\boldsymbol{e}_i$ равен -1), указывает на линейную зависимость векторов.

Справедливо обратное свойству 2 утверждение: если система векторов линейно зависима, то среди входящих в нее векторов найдется хотя бы один такой, который может быть представлен в виде линейной комбинации остальных векторов.

Свойство 3. Если часть некоторой совокупности векторов представляет собой линейно зависимую систему, то вся совокупность векторов линейно зависима.

В частности, если система векторов содержит нулевой вектор, то она линейно зависима.

Свойство 4. Если система векторов линейно независима, а при добавлении к ней другого вектора становится линейно зависимой, то добавленный вектор можно представить как линейную комбинацию векторов исходной системы.

Если векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ в их линейной комбинации известны и не изменяются в рассматриваемом процессе, то вектор $\boldsymbol{a}$ характеризуется только коэффициентами разложения. В этом случае вектор принято представлять в виде совокупности коэффициентов разложения:

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T.$$

$\boldsymbol{a}$ — *n-мерный вектор*, или *вектор размерности n*.

Прямоугольную матрицу размера $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

можно рассматривать как совокупность векторов-столбцов $(j = \overline{1,n})$:

$$A_j = (a_{1j} \ \ldots \ a_{ij} \ \ldots \ a_{mj})^T .$$

В этом случае

$$A = (A_1 \ \dots \ A_j \ \dots \ A_n)\,.$$

Если ввести в рассмотрение векторы-строки ($i = \overline{1,m}$)

$$B_i = (a_{i1} \ \dots \ a_{ij} \ \dots \ a_{in})\,,$$

то матрицу A можно представить в виде совокупности векторов-строк:

$$A = (B_1 \ \dots \ B_i \ \dots \ B_m)^T\,.$$

Ранг матрицы, представленной в виде совокупности векторов, указывает на число линейно независимых векторов в рассматриваемой совокупности.

Линейные операции над строками (столбцами) матриц отождествляются с линейными операциями над ее векторами-строками (векторами-столбцами). Например, для векторов-строк:

$$\lambda B_i = (\lambda a_{i1} \ \dots \ \lambda a_{ij} \ \dots \ \lambda a_{in})\,,$$

$$B_i + B_j = ((a_{i1} + a_{j1}) \ \dots \ (a_{ik} + a_{jk}) \ \dots (a_{in} + a_{jn}))\,.$$

Строка B_i называется линейной комбинацией k других строк матрицы ($k < m$, $i \notin \overline{1,k}$), если она равна сумме произведений этих строк на произвольные числа λ_r $(r = \overline{1,k})$:

$$B_i = \lambda_1 B_1 + \ldots + \lambda_k B_k.$$

Строки $B_1, \ldots, B_k$ матрицы *линейно зависимы*, если их линейная комбинация равна нулевому вектору:

$$\lambda_1 B_1 + \ldots + \lambda_r B_r + \ldots + \lambda_k B_k = \mathbf{\Theta}$$

при условии, что хотя бы один из k числовых множителей λ_r отличен от нуля.

Линейная зависимость строк матрицы означает, что хотя бы одна из строк является линейной комбинацией остальных строк.

Теорема. *Ранг матрицы равен минимальному из двух значений:*
— максимальному числу ее линейно независимых строк;
— максимальному числу ее линейно независимых столбцов.

Линейно независимые строки (столбцы) матрицы называют *базисными*, а миноры, построенные на максимально возможном для данной матрицы количестве линейно независимых строк и столбцов называются *базисными минорами.*

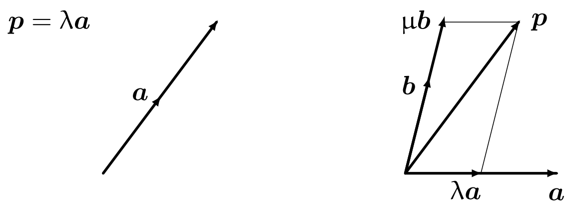
БАЗИС В ПРОСТРАНСТВАХ $L_1 - L_3$

Любой вектор можно представить в пространствах L_1, L_2, L_3 в виде линейной комбинации линейно независимых векторов соответствующих пространств.

В L_1 только один вектор $\boldsymbol{a}$ может быть линейно независимым. Любой другой вектор $\boldsymbol{p}$ будет отличаться от $\boldsymbol{a}$ скалярным множителем: $\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{a}$.

Базисом в пространстве L_1 называется вектор $\boldsymbol{a}$ этого пространства такой, что любой другой вектор этого пространства будет отличаться от $\boldsymbol{a}$ числовым множителем.

В пространстве L_2 существуют не более двух линейно независимых векторов ($\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Любой вектор $\boldsymbol{p}$ может быть представлен в виде линейной комбинации этих векторов:



$$\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}.$$

Базисом в пространстве L_2 называется пара двух линейно независимых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ этого пространства таких, что любой другой вектор $\boldsymbol{p}$ этого пространства будет представляться в виде их линейной комбинации.

Базисом в пространстве L_3 называется тройка линейно независимых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ этого пространства таких, что любой другой вектор $\boldsymbol{p}$ этого пространства будет представляться в виде линейной комбинации:

$$\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} + \nu\boldsymbol{c}.$$

Для геометрических векторов базисные векторы в L_2 не должны быть коллинеарными (параллельными), в L_3 — не должны быть компланарными (не должны лежать в одной плоскости).

Слагаемые в формулах разложения называются *составляющими* вектора $\boldsymbol{p}$ по базисным векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, а множители λ, μ и ν — его *координатами*, или *компонентами* в базисе.

БАЗИС В ПРОСТРАНСТВЕ L_n

Базисом в пространстве L_n называется совокупность n векторов $\boldsymbol{e}_i$ $(i = \overline{1,n})$ этого пространства при выполнении условий:

1) векторы $\boldsymbol{e}_i$ линейно независимы;

2) любой другой вектор $\boldsymbol{p}$ из L_n является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{e}_i$:

$$\boldsymbol{p} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{e}_n$$

Здесь λ_i $(i = \overline{1,n})$ — координаты вектора $\boldsymbol{p}$ в базисе $\boldsymbol{e}_i$.

Примером базиса в L_n — система n векторов:

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \\ \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1). \end{cases}$$

Определение. *Если $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\ldots$, $\boldsymbol{e}_n$ — система n линейно независимых векторов некоторого пространства и любой другой вектор этого пространства может быть представлен в виде линейной комбинации этой системы векторов, то пространство называется n-мерным (L_n), а совокупность векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\ldots$, $\boldsymbol{e}_n$ — его базисом.*

Теорема 1. *В пространстве L_n любая система, состоящая из m векторов, при $m > n$ линейно зависима.*

Теорема 2. *Пусть векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ представлены в одном базисе $\boldsymbol{e}_k$ $(k{=}\overline{1,n})$: $\boldsymbol{a} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\boldsymbol{e}_k$ и $\boldsymbol{b} = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k\boldsymbol{e}_k$. Тогда, если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, то $a_k = b_k$.*

Утверждение теоремы следует из равенства $\boldsymbol{a}{-}\boldsymbol{b} = (a_k{-}b_k)\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{\Theta}$.

Так как $\boldsymbol{e}_k$ — базисные, следовательно, линейно независимые векторы, то последнее равенство будет выполняться только при условии $a_k - b_k = 0$, т.е при $a_k = b_k$.

Пример. Установить, могут ли три вектора: $\boldsymbol{a}{=}(-2, 3, 1)$, $\boldsymbol{b}{=}(1, -2, -1)$ и $\boldsymbol{c} = (-5, 7, 2)$ образовать базис в пространстве L_3.

Р е ш е н и е. Три заданных вектора можно считать базисными, если они линейно независимы, т.е. если хотя бы один из числовых множителей в приравненной нулю линейной комбинации этих векторов будет отличен от нуля.

Составим и приравняем нулевому вектору $\mathbf{\Theta} = (0, 0, 0)$ линейную комбинацию векторов:

$$\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} + \nu \boldsymbol{c} = \mathbf{\Theta}.$$

Векторное уравнение можно заменить аналогичными ему скалярными уравнениями, записанными для каждой (по порядку следования соответствующих векторов) координаты вектора.

$$\begin{cases} -2\lambda + \mu - 5\nu = 0, \\ 3\lambda - 2\mu + 7\nu = 0, \\ \lambda - \mu + 2\nu = 0. \end{cases}$$

Записанная система имеет бесчисленное множество ненулевых решений при $\lambda = -3\nu$ и $\mu = -\nu$. В частности, ее решением будут значения $\lambda = 3$, $\mu = 1$ и $\nu = -1$.

Не равные нулю значения множителей в приравненной нулю линейной комбинации векторов:

$$3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = \mathbf{\Theta}$$

говорят о линейной зависимости векторов. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ не могут образовать базис в L_3.

Л Е К Ц И Я 5

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Скалярным произведением $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ (или $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$) двух векторов $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, заданных совокупностью своих координат в пространстве L_n, называется **число** c, равное сумме произведений соответствующих координат векторов:

$$c = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Если, например, $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ — вектор количества товаров, а $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ — вектор их цен, то скалярное произведение выражает суммарную стоимость товаров.

Если $\boldsymbol{a}$ — вектор силы, а $\boldsymbol{b}$ — вектор перемещения, то скалярное произведение — работа силы на перемещении.

Понятие скалярного произведения векторов для пространства L_n базируется на четырех аксиомах:

1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ — коммутативность;

2) $\big((\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}), \boldsymbol{c}\big) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ — дистрибутивность;

3) $\lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b})$ — возможность внесения под (вынесения за) знак скалярного произведения числового множителя;

4) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = a^2 > 0$ (скалярный квадрат), если $(\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{\Theta})$ и $(\boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\Theta}) = 0$.

Линейное (векторное) n-мерное пространство, на котором определено скалярное произведение, называется *евклидовым* (пространство E_n).

Норма (длина, модуль) вектора $\boldsymbol{a}$ в пространстве E_n:

$$|\boldsymbol{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}.$$

Нулевой вектор — единственный вектор, норма которого равна нулю.

Неравенством Коши–Буняковского называется соотношение

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 \leq (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}).$$

Для доказательства найдем скалярный квадрат вектора $\boldsymbol{c} = k\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, где k — скалярный множитель:

$$(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}) = (k\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, k\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) =$$

$$k^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) + 2k(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) \geq 0.$$

В левой части равенства стоит неотрицательная величина — скалярный квадрат вектора $\boldsymbol{c}$, поэтому правая часть записанного равенства, представляющая собой квадратный трехчлен относительно k, также неотрицательна. Последнее утверждение говорит о том, что четверть дискриминанта

$$D/4 = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2 - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) \leq 0.$$

Отсюда следует исследуемое неравенство.

Неравенство Коши–Буняковского позволяет ввести формально понятие косинуса угла между векторами в евклидовых пространствах любой размерности:

$$\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}) = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{ab}.$$

$$\cos^2(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}) \leq 1, \qquad 0 \leq (\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}) < \pi.$$

Пример 1. Установить связь между неравенством Коши–Буняковского и областью допустимых значений функции $\cos\varphi$.

Р е ш е н и е. Пусть $\varphi = (\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$ — угол между двумя векторами.

Запишем неравенство Коши–Буняковского в виде

$$\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2}{a^2b^2} \leq 1.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей последнего равенства, получим:

$$-1 \leq \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{ab} \leq 1.$$

В центре полученного неравенства стоит косинус угла между двумя векторами. Поэтому:

$$-1 \leq \cos\varphi \leq 1.$$

То есть: *Скалярное произведение* равно произведению модулей векторов на косинус угла между ними:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = ab\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}).$$

Формула может служить определением скалярного произведения векторов для трехмерного пространства. При этом аксиомы 1–4 скалярного произведения становятся его свойствами — они следуют из формулы.

Векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ пространства E_n, имеющие единичную норму, образуют *ортонормированный базис*, если эти векторы попарно ортогональны. Математическая формулировка определения ортонормированного базиса сводится к равенству $(i, j = \overline{1, n})$:

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

ПРОЕКЦИИ ВЕКТОРА

Проекцией точки на ось является основание перпендикуляра, опущенного на эту ось из рассматриваемой точки.

Направленный отрезок прямой, который представляет собой вектор как геометрический объект, является геометрическим местом точек. Поэтому *проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на ось, направление которой определяется некоторым вектором $\boldsymbol{c}$* ($Pr_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}$), представляет собой геометрическое место проекций всех точек вектора $\boldsymbol{a}$ на эту ось, т.е.

$$Pr_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a} = a\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{c}).$$

Из формулы видно, что знак проекции определяется знаком косинуса угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$. Проекция положительна, если угол меньше $\pi/2$, и отрицательна, если угол заключен между $\pi/2$ и π.

Вектор $\boldsymbol{a}_c = \dfrac{\boldsymbol{c}}{c} Pr_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}$, имеющий направление $\boldsymbol{c}$ (при $\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{c}) > 0$) или противоположное $\boldsymbol{c}$ (при $\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{c}) < 0$), называется *составляющей* вектора $\boldsymbol{a}$ по направлению вектора $\boldsymbol{c}$.

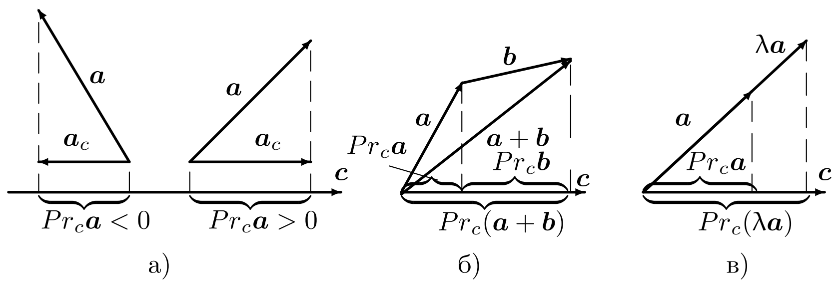


Рис. 0.1. Проекции векторов и их свойства

Свойства проекций.

1. Проекция суммы двух векторов на направленную ось равна сумме проекций векторов на эту ось (рисунок).

2. При умножении вектора на число λ его проекция увеличивается в λ раз.

Справедливость свойства следует из подобия треугольников, изображенных на рисунке.

Скалярное произведение выражается через проекцию векторов:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = aPr_a\boldsymbol{b} = bPr_b\boldsymbol{a}.$$

Если направление оси определяется единичным вектором $\boldsymbol{e}$ ($e = 1$), то

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}) = Pr_e\boldsymbol{a}.$$

ОРТОНОРМИРОВАННЫЙ БАЗИС

Ортонормированным базисом пространства L_n называется совокупность n попарно ортогональных единичных векторов $\boldsymbol{i}_k$.

Модули базисных векторов равны единице, а скалярное произведение пары любых из них, но различных, равно нулю:

$$|\boldsymbol{i}_k| = 1, \qquad (\boldsymbol{i}_k, \boldsymbol{i}_r) = \delta_{kr} \quad (k, r = \overline{1, n}).$$

δ_{kr} — символ Кронекера.

Для *упорядоченной* тройки векторов пространством L_3 ортонормированного базиса справедливы соотношения:

$$|\boldsymbol{i}_1| = |\boldsymbol{i}_2| = |\boldsymbol{i}_3| = 1;$$

$$(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_1) = (\boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_2) = (\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2) = (\boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3) = 0.$$

Упорядоченность ортонормированных базисных векторов имеет два варианта:

Правый базис, для которого кратчайший поворот от направления вектора $\boldsymbol{i}_1$ к направлению вектора i_2 совершается против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\boldsymbol{i}_3$. Для *левого базиса* аналогичный поворот осуществляется по часовой стрелке.

Ортонормированный базис в пространстве L_2 состоит из двух ортогональных единичных векторов $\boldsymbol{i}_1$ и $\boldsymbol{i}_2$.

В аналитической геометрии для ортонормированных базисных векторов евклидова пространства E_3 чаще используются обозначения $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

С направлением векторов ортонормированного базиса обычно связывается ортогональная декартова (прямолинейная) система координат x_1, x_2, x_3 (x, y, z). Координаты определяют в единицах измерения

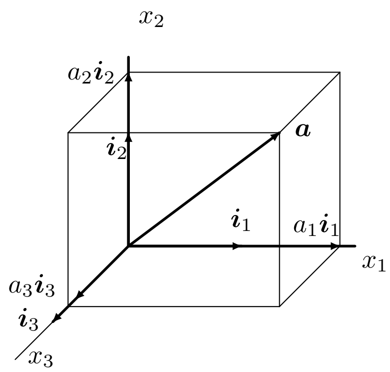


Рис. 0.2. Разложение вектора в ортонормированных базисах

базисных векторов расстояния от начала координат до рассматриваемой точки по направлениям базисных векторов.

В разложении вектора $\boldsymbol{a}$ по ортонормированному базису:

$$[\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i}_1 + a_2\boldsymbol{i}_2 + a_3\boldsymbol{i}_3, \tag{3}$$

a_1, a_2, a_3 координаты конца вектора и одновременно проекции вектора на направления единичных базисных векторов $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$. Действительно, умножая (3) скалярно, например, на базисный вектор $\boldsymbol{i}_1$, получим

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}_1) = a_1(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_1) + a_2(\boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_1) + a_3(\boldsymbol{i}_3, \boldsymbol{i}_1) =$$

$$a_1 = Pr_{\boldsymbol{i}_1}\boldsymbol{a}.$$

Аналогично $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}_2) = a_2 = Pr_{\boldsymbol{i}_2}\boldsymbol{a}$ и $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}_3) = a_3 = Pr_{\boldsymbol{i}_3}\boldsymbol{a}$.

С другой стороны, по определению скалярного произведения

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}_k) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{i}_k| \cos\alpha_k = a\cos\alpha_k$$

и $\cos\alpha_k = a_k/a \quad (k = \overline{1,3})$;

α_k $(k = \overline{1,3})$ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и базисным $\boldsymbol{i}_k$.

Поделим соотношение (3) на a (модуль вектора $\boldsymbol{a}$):

$$\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{a}}{a} = \boldsymbol{i}_1\cos\alpha_1 + \boldsymbol{i}_2\cos\alpha_2 + \boldsymbol{i}_3\cos\alpha_3.$$

$\boldsymbol{n_a}$ — единичный вектор, сонаправленный вектору $\boldsymbol{a}$. Т.е. координатами единичного вектора при его разложении по векторам ортонормированного базиса являются направляющие косинусы и

$$a_k = a\cos\alpha_k \qquad (k = \overline{1,3}).$$

Используя теорему Пифагора для L_3, найдем скалярный квадрат вектора $\boldsymbol{a}$:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = a \cdot a\cos 0 = a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Модуль вектора $\boldsymbol{a}$:

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Модуль единичного вектора

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1.$$

Для пространства L_2

$$\cos^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_1 = 1.$$

ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ В КООРДИНАТНОЙ ФОРМЕ

С пространством L_2, свяжем ортонормированный базис $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2$.

Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ представлены в этом базисе своими составляющими:

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i}_1 + a_2\boldsymbol{i}_2, \qquad \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i}_1 + b_2\boldsymbol{i}_2.$$

Если произвольные векторы представлены в виде разложения по базисным векторам, то эти векторы могут быть охарактеризованы полностью своими координатами.

Вектор, выходящий из начала координат, называют *радиусом-вектором.*

Радиусы-векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ представим в виде совокупности их координат:

$$\boldsymbol{a} = (a_1; a_2); \qquad \boldsymbol{b} = (b_1; b_2).$$

Введем новый вектор

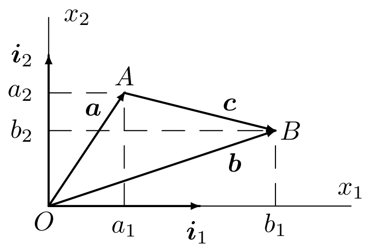
$$\boldsymbol{c} = (c_1; c_2),$$

равный разности радиусов-векторов ($\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$). Для него

$$\boldsymbol{c} = b_1\boldsymbol{i}_1 + b_2\boldsymbol{i}_2 - a_1\boldsymbol{i}_1 - a_2\boldsymbol{i}_2 =$$

$$(b_1 - a_1)\boldsymbol{i}_1 + (b_2 - a_2)\boldsymbol{i}_2 = \big((b_1 - a_1); (b_2 - a_2)\big).$$

Справедливость равенства следует из рисунка.



Чтобы получить разность двух радиусов-векторов, представленных в фиксированном базисе, связанном с декартовой ортогональной системой координат, достаточно составить вектор, координатами которого будут разности соответствующих координат этих векторов. При этом первой в разности должна стоять координата конца вектора. Если вектор $\overline{AB}$ направлен от точки $A(a_1, a_2)$ к точке $B(b_1, b_2)$, то

$$\overline{AB} = (b_1 - a_1)\boldsymbol{i}_1 + (b_2 - a_2)\boldsymbol{i}_2 = \big((b_1 - a_1); (b_2 - a_2)\big).$$

Модуль вектора

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Условием равенства двух векторов $\overline{OA} = \overline{OB}$ или $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ является равенство их координат:

$$a_1 = b_1; \qquad a_2 = b_2.$$

Линейные операции над векторами сводятся к линейным операциям над их координатами. Например,

$$\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b} = \big((a_1 + \lambda b_1); (a_2 + \lambda b_2)\big).$$

Скалярное произведение векторов:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \big((a_1\boldsymbol{i}_1 + a_2\boldsymbol{i}_2), (b_1\boldsymbol{i}_1 + b_2\boldsymbol{i}_2)\big) =$$

$$= a_1b_1(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_1) + a_1b_2(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2) +$$

$$a_2b_1(\boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_1) + a_2b_2(\boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_2) = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Если $\overline{OA} = \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\overline{OB} = \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ то

$$\overline{AB} = \big((b_1 - a_1), (b_2 - a_2), \ldots, (b_n - a_n)\big).$$

Модуль этого вектора

$$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2}.$$

Скалярное произведение:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

Косинус угла между векторами:

$$\cos(\boldsymbol{a} \hat{,} \boldsymbol{b}) = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{ab}$$

представляется в виде

$$\cos(\boldsymbol{a} \hat{,} \boldsymbol{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}}.$$

Условие ортогональности векторов:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = 0.$$

Условие параллельности

$$\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b}.$$

В координатной форме:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} (= \lambda).$$

Для пространства L_2 из последних отношений в равенстве остается только первое.

Л Е К Ц И Я 6

ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

С геометрической точки зрения *векторным произведением* вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{c}$, обладающий следующими свойствами:

1) модуль вектора $\boldsymbol{c}$ равен произведению модулей векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ на синус угла между ними:

$$c = ab\sin(\widehat{\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}}) \qquad (\widehat{\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}}) \leq \pi;$$

2) вектор $\boldsymbol{c}$ ортогонален плоскости векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;

3) векторы, входящие в векторное произведение, образуют правую тройку векторов в порядке их расположения $\boldsymbol{cab}$ ($\boldsymbol{abc}$).

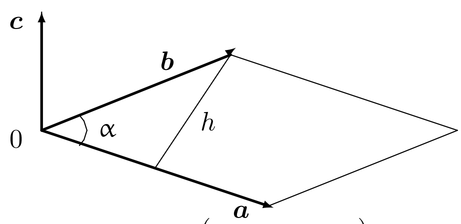
Для обозначения векторного произведения приняты записи

$$\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \qquad \text{или} \qquad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}.$$

С в о й с т в а векторного произведения.

1. Геометрически векторное произведение $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ по модулю равно площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, как на сторонах (рисунок):

$$c = ab\sin\alpha = ah.$$



2. При перестановке векторов (коммутации) знак векторного произведения меняется на противоположный:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}.$$

3. Дистрибутивность по отношению к произведению вектора на сумму векторов: $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$.

4. Постоянный множитель можно выносить за знак произведения: $\lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\lambda \boldsymbol{b})$.

В $\Re_2$ ввести понятие векторного произведения векторов невозможно.

Обратимся к векторам ортонормированного базиса в пространстве L_3 и рассмотрим их векторные произведения:

$$\boldsymbol{i_1} \times \boldsymbol{i_2} = -\boldsymbol{i_2} \times \boldsymbol{i_1} = \boldsymbol{i}_3,$$

$$\boldsymbol{i_2} \times \boldsymbol{i_3} = -\boldsymbol{i_3} \times \boldsymbol{i_2} = \boldsymbol{i}_1,$$

$$\boldsymbol{i_3} \times \boldsymbol{i_1} = -\boldsymbol{i_1} \times \boldsymbol{i_3} = \boldsymbol{i}_2;$$

$$\boldsymbol{i_1} \times \boldsymbol{i_1} = \boldsymbol{i_2} \times \boldsymbol{i_2} = \boldsymbol{i_3} \times \boldsymbol{i_3} = \boldsymbol{\Theta}.$$

С использованием *символа Леви-Чивита*:

$$e_{klm} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad klm = 123,\ 231,\ 312; \\ -1, & \text{если} \quad klm = 321,\ 213,\ 132; \\ 0, & \text{в остальных случаях}: \end{cases}$$

$$\boldsymbol{i_k} \times \boldsymbol{i_l} = \sum_{m=1}^{3} e_{klm} \boldsymbol{i}_m \quad (\text{к}, l = \overline{1,3}).$$

Равенство нулю векторного произведения двух векторов указывает на то, что эти векторы линейно зависимы (параллельны).

Пусть заданы два вектора в виде их разложения по ортонормированному базису $\boldsymbol{i}_k$ $(k = \overline{1,3})$:

$$\boldsymbol{a} = a_1 \boldsymbol{i}_1 + a_2 \boldsymbol{i}_2 + a_3 \boldsymbol{i}_3, \qquad \boldsymbol{b} = b_1 \boldsymbol{i}_1 + b_2 \boldsymbol{i}_2 + b_3 \boldsymbol{i}_3.$$

Тогда

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_1 \boldsymbol{i}_1 + a_2 \boldsymbol{i}_2 + a_3 \boldsymbol{i}_3) \times (b_1 \boldsymbol{i}_1 + b_2 \boldsymbol{i}_2 + b_3 \boldsymbol{i}_3) =$$

$$= \boldsymbol{i}_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) + \boldsymbol{i}_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + \boldsymbol{i}_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2).$$

Выражение представляет собой разложение определителя третьего порядка

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

по элементам первой строки — совокупности трех векторов ортонормированного базиса.

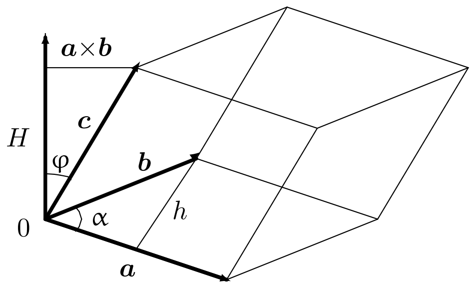
СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Смешанным (векторно-скалярным) произведением трех векторов называется число, равное скалярному произведение одного вектора на векторное произведение двух других:

$$\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).$$

Свойства смешанного произведения.

1. Модуль смешанного произведения векторов равен объему параллелепипеда, построенного на входящих в него векторах как на сторонах.



Свойство очевидно, так как векторное произведение — это вектор $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, ортогональный плоскости векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и модуль которого равен площади параллелограмма. Что касается скалярного произведения вектора $\boldsymbol{c}$ на единичный вектор в направлении вектора $\boldsymbol{d}$, то оно равно проекции $\boldsymbol{c}$ на этот вектор. А это высота H параллелепипеда.

2. Знак смешанного произведения не изменится, если в нем произвести четную перестановку векторов:

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).$$

При нечетной перестановке векторов знак произведения изменится на противоположный:

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=-\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})=-\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})=-\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}).$$

3. Значение смешанного произведения не изменится, если поменять местами знаки скалярного и векторного произведений:

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c},$$

поэтому смешанное произведение часто изображают в виде совокупности расположенных в определенном порядке векторов:

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{abc}.$$

Для записи формулы вычисления смешанного произведения векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе, умножим векторное произведение

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \big((a_1b_2 - a_2b_1), (a_3b_1 - a_1b_3), (a_2b_3 - a_3b_2)\big)$$

скалярно на вектор $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$:

$$\boldsymbol{abc} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1$$
$$-a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3,$$

или

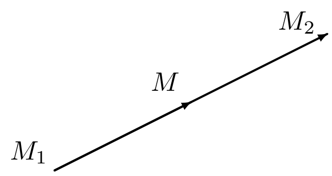
$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Если смешанное произведение $\boldsymbol{abc}$ трех векторов в L_3 отлично от нуля, то эти векторы можно принять за базисные в L_3. Если $\boldsymbol{abc} > 0$, то тройка векторов образует правый базис; при $\boldsymbol{abc} < 0$ — левый базис. Чтобы левый базис превратить в правый, достаточно направление одного из векторов сменить на противоположное (умножить вектор на -1).

Равенство нулю смешанного произведения векторов указывает на их линейную зависимость. Линейно зависимые векторы лежат в одной плоскости и не могут образовать объемную фигуру с неравным нулю объемом.

ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ЗАДАННОМ ОТНОШЕНИИ

Пусть требуется определить координаты точки M, делящей отрезок M_1M_2 прямой в отношении $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2}$.



В векторной форме отношение может быть представлено в виде равенства

$$\overline{M_1M} = \lambda\overline{MM_2}.$$

Если координаты перечисленных точек в ортогональной декартовой системе координат в L_2 известны: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M(x, y)$, то

$$(x - x_1; y - y_1) = \lambda(x_2 - x; y_2 - y).$$

Приравняем соответствующие координаты равных векторов и из полученных равенств выразим координаты точки M:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Если точка M делит отрезок M_1M_2 пополам, то $M_1M = MM_2$, $\lambda = 1$ и

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Для пространства E_n Координаты точки M :

$$x_i = \frac{x_i^1 + \lambda x_i^2}{1 + \lambda}.$$

Л Е К Ц И Я   7

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Решениями квадратного уравнения

$$z^2 - 4z + 13 = 0.$$

являются два корня:

$$z_1 = 2 - 3i, \qquad z_2 = 2 + 3i,$$

где $i = \sqrt{-1}$ называется *мнимой единицей.*

В общем случае

$$z = x + iy$$

называется *ко́мплексным числом*, а записанное выражение — *алгебраической формой комплексного числа.* Если x и y переменные, то z — переменная комплексная величина.

Первое слагаемое $x = \mathrm{Re}\ z$ называется *действительной частью* z. Множитель $y = \mathrm{Im}\ z$ при i называется *мнимой частью* z. Так что

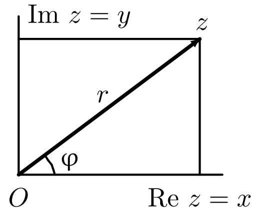
$$z = \mathrm{Re}\ z + i\ \mathrm{Im}\ z.$$

Комплексное число

$$\overline{z} = x - iy$$

называют *сопряженным* по отношению к z.

Комплексные числа не принадлежат множеству действительных (рациональных и иррациональных) чисел.



Геометрически комплексное число можно изобразить точкой на плоскости со связанной с этой плоскостью ортогональной декартовой системой координат (x, y): координату $x = \text{Re}\ z$ принимают за абсциссу и называют *действительной осью*, $y = \text{Im}\ z$ — за ординату числа z и называют *мнимой осью*.

Такое представление дает право отождествить комплексное число с вектором (x, y) в L_2. Базисом в представлении $z = x + yi$ является пара линейно независимых векторов 1 и i.

Для комплексных чисел определены линейные операции сложение:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) =$$

$$= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$

и умножение на действительное число:

$$\lambda z = \lambda(x + yi) = \lambda x + \lambda yi = (\lambda x, \lambda y).$$

Можно убедиться в том, что комплексные числа удовлетворяют всем аксиомам линейного векторного пространства.

Произведение двух комплексных чисел равно в общем случае комплексному числу, состоящему из действительной и мнимой частей (исключение — произведение комплексно-сопряженных чисел):

$$z = z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) =$$

$$(x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i;$$

$$\text{Re}\ z = x_1 x_2 - y_1 y_2, \qquad \text{Im}\ z = x_1 y_2 + x_2 y_1.$$

Произведение комплексно-сопряженных чисел равно действительному числу:

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2.$$

Комплексное число z, удовлетворяющее равенству $z_2 z = z z_2 = z_1$, называется *частным от деления* чисел z_1 на z_2: $z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

Для представления частного от деления комплексных чисел в алгебраической форме следует числитель и знаменатель дроби умножить на комплексное число, сопряженное знаменателю:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} =$$

$$\text{Re}\ z + i\ \text{Im}\ z.$$

Здесь

$$\text{Re } z = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \qquad \text{Im } z = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

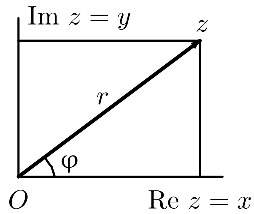
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ И ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФОРМЫ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Действительное число,

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\text{Re z})^2 + (\text{Im z})^2},$$

определяющее длину вектора $\overline{Oz}$, называется *модулем* комплексного числа z.

$$r = \sqrt{z\overline{z}}.$$



Направление радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ определяет угол φ, отсчитываемый против часовой стрелки от положительного направления координаты x. Для этого угла ($n \in Z$):

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\varphi + 2\pi n) = \frac{\text{Im } z}{\text{Re } z} = \frac{y}{x}.$$

Всякое решение уравнения называется *аргументом* комплексного числа z:

$$\text{Arg } z = \text{Arctg } \frac{y}{x} = \varphi + 2\pi n, \qquad (n \in Z).$$

Угол $\varphi = \arg z \in [0; 2\pi)$ называется *главной частью* аргумента числа z.

Из приведенных соотношений следует:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

При подстановке этих зависимостей в алгебраическую форму $z = x + iy$ получим *тригонометрическую форму* комплексного числа:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Еще одну форму комплексного числа получим, используя известные в математике формулы Эйлера зависимости тригонометрических функций от экспонент с мнимыми показателями:

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}), \qquad i\sin\varphi = \frac{1}{2}(e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}).$$

Суммируя два последних соотношения, получим

$$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Аналогично, операция вычитания второго соотношения из первого приводит к выражению

$$e^{-\varphi i} = \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

Подставляя последние выражения в тригонометрическую форму комплексного числа, получим его *показательные формы*:

$$z = re^{\varphi i} \qquad \overline{z} = re^{-\varphi i}.$$

Показательная форма комплексного числа зачастую облегчает процесс его вычисления. Так, произведение и частное от деления двух комплексных чисел:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{\varphi_1 i} e^{\varphi_2 i} = r_1 r_2 e^{(\varphi_1 + \varphi_2) i};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\frac{e^{\varphi_1 i}}{e^{\varphi_2 i}} = \frac{r_1}{r_2} e^{(\varphi_1 - \varphi_2) i}.$$

Для квадрата комплексного числа получим

$$z^2 = z \cdot z = r^2 e^{2\varphi i},$$

для n-й степени:

$$z^n = z^{n-1} z = r^n e^{n\varphi i}.$$

В тригонометрическом представлении последняя формула, называемая *формулой Муавра*, имеет вид

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Пусть $a = re^{\varphi i} = re^{(\varphi+2\pi n)i}$ — комплексное число. Тогда уравнение $z^n = a \quad (n \in N)$ имеет ровно n решений $z_k \quad (k = \overline{0, n-1})$, получаемых по формуле

$$z_k = \sqrt[n]{r}e^{i(\varphi+2\pi k)/n} =$$
$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right).$$

Здесь $\sqrt[n]{r}$ — положительное действительное число. Решения z_k $(k = \overline{0, n-1})$ называются *корнями n-й степени* из комплексного числа a.

КОМПЛЕКСНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Пусть в n-мерном векторном пространстве задан вектор своими координатами: $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$.

Будем считать, что координаты $x_k \quad (k = \overline{1, n})$ — комплексные числа:

$$x_k = \mathrm{Re}\ x_k + i\ \mathrm{Im}\ x_k = \alpha_k + i\beta_k.$$

Введем сопряженные величины

$$\overline{x}_k = \alpha_k - i\beta_k,$$

так что

$$x_k\overline{x}_k = \alpha_k^2 + \beta_k^2 = |x_k|^2.$$

Наряду с вектором $\boldsymbol{x}$ рассмотрим вектор $\boldsymbol{y} = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$, координаты которого $y_k = \eta_k + i\nu_k$.

Скалярным произведением двух векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, заданных в n-мерном комплексном пространстве, называется число, определяемое выражением

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k\overline{y}_k.$$

То есть, скалярное произведение равно сумме произведений координат первого вектора на сопряженные координаты второго вектора.

Скалярное произведение обладает свойством положительной определенности, заключающемся в выполнении неравенства

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} x_k\overline{x}_k = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \geq 0.$$

Свойства скалярных произведений векторов комплексного пространства, отличные от скалярных произведений действительных векторов:

1. Для векторов с комплексными координатами справедливо свойство *эрмитовой симметрии*: если скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ комплексного пространства равно комплексному числу $a = Re\ a + iIm\ a$, то при перестановке множителей в скалярном произведении получится число $\overline{a} = Re\ a - iIm\ a$, сопряженное с a.

Покажем, что это так.

Пусть $\boldsymbol{x} = (x_k) = (\alpha_k + i\beta_k)$, $\quad \boldsymbol{y} = (y_k) = (\eta_k + i\nu_k) \quad (k = \overline{1, n})$.

Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ равно сумме произведений координат первого вектора x_k на соответствующие сопряженные координаты $\overline{y}_k$ второго вектора:

$$a = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k =$$

$$\sum_{k=1}^{n} [\alpha_k\eta_k + \beta_k\nu_k + i(\beta_k\eta_k - \alpha_k\nu_k)] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k\eta_k + \beta_k\nu_k) + i\sum_{k=1}^{n} (\beta_k\eta_k - \alpha_k\nu_k) =$$

$$Re\ a + i\ Im\ a;$$

$$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} y_k \overline{x}_k =$$

$$\sum_{k=1}^{n} [\alpha_k\eta_k + \beta_k\nu_k - i(\beta_k\eta_k - \alpha_k\nu_k)] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k\eta_k + \beta_k\nu_k) - i\sum_{k=1}^{n} (\beta_k\eta_k - \alpha_k\nu_k) =$$

$$Re\ a - i\ Im\ a = \overline{a}.$$

Сравнение двух полученных величин указывает на то, что они — сопряженные комплексные числа. Отсюда следует эрмитова симметрия

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}$$

2. Скалярный множитель (не вектор, а комплексная скалярная величина), стоящий перед первым множителем скалярного произведения, можно выносить за знак скалярного произведения. Скалярный множитель, стоящий перед второй комплексной величиной в скалярном

произведении, можно выносить за знак скалярного произведения, заменяя его на соответствующий сопряженный множитель:

$$(a\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \qquad (\boldsymbol{x}, b\boldsymbol{y}) = \overline{b}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Зависимость подтверждается преобразованием:

$$(\boldsymbol{x}, b\boldsymbol{y}) = \overline{(b\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})} = \overline{b}\ \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})} = \overline{b}\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Свойства 1 и 2, рассмотренные выше, справедливы для векторов действительного пространства, получаемых из векторов комплексного пространства в предположении, что $\mathrm{Im}\ \boldsymbol{x} = 0$. В этом случае $\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$.

Л Е К Ц И Я   8

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАТРИЦ ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИИ БАЗИСА

Пусть $\boldsymbol{e}_k$ и $\tilde{\boldsymbol{e}}_k$ $(k = \overline{1,n})$ — базисные векторы одного и того же линейного пространства L_n и пусть известно правило преобразования векторов одного базиса в другой:

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_k = s_{1k}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + s_{nk}\boldsymbol{e}_n = \sum_{i=1}^{n} s_{ik}\boldsymbol{e}_i \qquad (k = \overline{1,n}). \tag{4}$$

Введем векторы $\tilde{\boldsymbol{E}} = (\tilde{\boldsymbol{e}}_1\ \tilde{\boldsymbol{e}}_2\ \ldots\ \tilde{\boldsymbol{e}}_n)^T$, $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \ldots\ \boldsymbol{e}_n)^T$ и матрицу

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \ldots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \ldots & s_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n1} & s_{n2} & \ldots & s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Так как в (4) суммирование идет по первому индексу у s_{ik}, то матричный вид этого преобразования:

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = S^T\boldsymbol{E}. \tag{5}$$

Любой вектор $\boldsymbol{x}$ из L_n может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{e}_k$ или $\tilde{\boldsymbol{e}}_k$:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e}_i = X^T\boldsymbol{E};$$

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{x}_k\tilde{\boldsymbol{e}}_k = \tilde{X}^T\tilde{\boldsymbol{E}}.$$

X^T и $\tilde{X}^T$ — матрицы-строки координат вектора $\boldsymbol{x}$ в базисах $\boldsymbol{E}$ и $\tilde{\boldsymbol{E}}$.

Приравняем правые части равенств записанных равенств, после чего подставим в полученное равенство вместо $\tilde{\boldsymbol{E}}$ соотношение (5):

$$X^TE = \tilde{X}^TS^TE.$$

Это равенство выполняется при условии

$$X^T = \tilde{X}^TS^T \quad \Longrightarrow \quad X = S\tilde{X}.$$

Зависимость выражает правило преобразования матрицы вектора (вектора-столбца) при известном правиле (5) преобразования базисных векторов.

Если базисные векторы $\boldsymbol{e}_k$ $(\tilde{\boldsymbol{e}}_k)$ $\quad (k = \overline{1, n})$ линейно независимы, то матрица S невырожденная и можно получить матрицу S^{-1}, обратную к S. В этом случае запишем обратное преобразование:

$$\tilde{X} = S^{-1}X. \tag{6}$$

Так как $(S^{-1})^T = (S^T)^{-1}$, то $\tilde{X}^T = X^T(S^T)^{-1}$.

Запись $X^T\boldsymbol{E}$ для вектора $\boldsymbol{x}$ сохраняет свой вид при переходе к новому базису. Действительно,

$$\tilde{X}^T\tilde{\boldsymbol{E}} = X^T(S^T)^{-1}S^T\boldsymbol{E} = X^T\boldsymbol{E}.$$

Равенство указывает на то, что вектор $\boldsymbol{x} = \tilde{X}^T\tilde{\boldsymbol{E}} = X^T\boldsymbol{E}$ — инвариантная по отношению к выбору базиса величина. Свойство инвариантности — это свойство независимости от выбора базиса.

Рассмотрим пару векторов, заданных в базисе $\boldsymbol{E}$: $\boldsymbol{x} = X^T\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{y} = Y^T\boldsymbol{E}$.

Пусть квадратная невырожденная матрица A преобразует векторы-столбцы X в Y:

$$Y = AX. \tag{7}$$

Зададим новый базис $\tilde{\boldsymbol{E}}$, который связан с $\boldsymbol{E}$ преобразованием (5) и в котором $\boldsymbol{x} = \tilde{X}^T\tilde{\boldsymbol{E}}$ и $\boldsymbol{y} = \tilde{Y}^T\tilde{\boldsymbol{E}}$.

Векторы — объекты, инвариантные по отношению к изменению базисов. Поэтому зависимость (7) в новом базисе должна перейти в аналогичную зависимость:

$$\tilde{Y} = \tilde{A}\tilde{X}. \tag{8}$$

При известным преобразовании (**??**) векторов-столбцов установим правило преобразования матрицы A при переходе к новому базису. Для этого подставим в (8) вместо $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ выражения, вытекающие из (6):

$$S^{-1}Y = \tilde{A}S^{-1}X.$$

Матрица S невырожденная, поэтому $S = S^{-1}$ и

$$Y = S\tilde{A}S^{-1}X.$$

Сравнивая полученную зависимость с (7) получим правило преобразования матриц при переходе от нового базиса к исходному:

$$A = S\tilde{A}S^{-1}.$$

Отсюда приходим к формуле преобразования матриц, заданных в исходном (без тильды) базисе, к матрицам, заданным в новом базисе (с тильдой):

$$\tilde{A} = S^{-1}AS.$$

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

Пусть $\boldsymbol{i}_i$ и $\tilde{\boldsymbol{i}}_k$ — векторы двух ортонормированных базисов в L_n $(i, k = \overline{1, n})$. В этом случае

$$(\boldsymbol{i}_i, \boldsymbol{i}_j) = \delta_{ij}, \qquad (\tilde{\boldsymbol{i}}_i, \tilde{\boldsymbol{i}}_j) = \delta_{ij}. \tag{9}$$

Пусть известно правило преобразования базисных векторов :

$$\tilde{\boldsymbol{i}}_k = \sum_{i=1}^{n} s_{ik}\boldsymbol{i}_i. \tag{10}$$

Умножим (10) скалярно на $\boldsymbol{i}_j$:

$$(\tilde{\boldsymbol{i}}_k, \boldsymbol{i}_j) = \sum_{i=1}^{n} s_{ik}(\boldsymbol{i}_i, \boldsymbol{i}_j) = \sum_{i=i}^{n} s_{ik}\delta_{ij} = s_{jk}. \tag{11}$$

Так как s_{jk} представляет собой скалярное произведение единичных векторов двух ортонормированных базисов, то по смыслу — это косинусы углов между единичными векторами $\tilde{\boldsymbol{i}}_k$ и $\boldsymbol{i}_j$:

$$s_{jk} = \cos(\tilde{\boldsymbol{i}}_j \hat{,} \boldsymbol{i}_k) = s_{kj}, \tag{12}$$

т.е. матрица S симметрична $(S = S^T)$.

Подставим (10) во второе соотношение (9). С учетом (12) получим:

$$(\tilde{\boldsymbol{i}}_i, \tilde{\boldsymbol{i}}_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} s_{ki}\boldsymbol{i}_k, \sum_{r=1}^{n} s_{rj}\boldsymbol{i}_r\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} s_{ki}s_{rj}(\boldsymbol{i}_k, \boldsymbol{i}_r) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} s_{ik}s_{rj}\delta_{kr} = \sum_{k=1}^{n} s_{ik}s_{kj} = \delta_{ij}. \tag{13}$$

Последнее равенство говорит о следующем.

1) Сумма квадратов направляющих косинусов преобразования ортонормированных базисов равна единице;

2) Приведенная последняя сумма есть правило вычисления произведения матриц (количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй матрицы);

3) Первую матрицу, представленную в последней сумме элементами s_{ik}, можно считать транспонированной по отношению к матрице S, представленной элементами s_{ki} (δ_{ij} — элементы единичной матрицы).

Поэтому

$$S^T S = I$$

и из определения обратной матрицы следует

$$S^T = S^{-1}.$$

Обобщим полученный результат.

Квадратная невырожденная матрица A называется *ортогональной*, если для нее справедливо соотношение

$$A^T = A^{-1},$$

или

$$A^T A = AA^T = I.$$

Пусть

$$A = (a_{ij}), \qquad A^T = (a_{ij})^T = (a_{ji}) = A^{-1}.$$

Приведем основные свойства ортогональных матриц.

1. Векторы, представляющие строки (столбцы) ортогональной матрицы, попарно ортогональны. Действительно, так как $A^T A = I$, то по аналогии с (13)

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj} = \delta_{ij},$$

и при $i \neq j$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{jk} = 0.$$

Равенство нулю последних двух сумм указывает на то, что векторы, которые определяются элементами i-й строки и j-го столбца (i-го столбца и j-й строки), ортогональны. Сумма произведений их координат — это скалярное произведение векторов.

2. Сумма произведений элементов каждой i-й строки (k-го столбца) ортогональной матрицы на соответствующие элементы i-го столбца (k-й строки) равна единице.

3. Определитель ортогональной матрицы равен ± 1. Действительно, из равенств

$$\det\, I = \det\, (A^T A) = \det\, A^T \cdot \det\, \mathrm{A} = (\det\, A)^2 = 1$$

следует

$$\det\, A = \pm 1.$$

4. Матрицы транспонированная и обратная по отношению к ортогональной матрице также являются ортогональными.

МАТРИЦА КАК ОПЕРАТОР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЕКТОРОВ

В математике под преобразованием понимают действие, которое переводит элементы одного пространства в элементы другого пространства.

Если преобразование переводит элементы некоторого пространства в элементы этого же пространства, то объект, который осуществляет преобразование, называют *оператором*.

Если оператор $\boldsymbol{A}$ переводит некоторый вектор $\boldsymbol{x}$ в вектор $\boldsymbol{y}$ того же пространства то

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

Последнее преобразование можно обобщить:

$$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^0 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}. \tag{14}$$

Если ввести в рассматриваемом пространстве базис, в котором векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ представляются своими координатами $X = (x_1\ x_2\ \ \ldots x_n)^T$, $Y = (y_1\ y_2\ \ \ldots y_n)^T$, а оператор матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

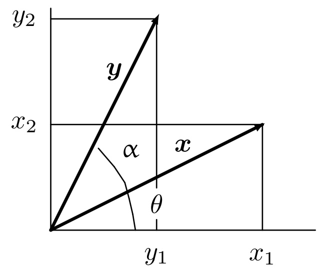
то инвариантное по отношению к выбору базиса соотношение (14) превратится в матричное соотношение

$$Y - Y^0 = AX. \tag{15}$$

Элементы матриц этого соотношения зависят от выбора базиса. Матрица A с совокупностью образующих ее элементов представляет оператор $\boldsymbol{A}$ так же, как совокупности элементов векторов-столбцов X и Y представляют векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$.

В развернутом виде (15) представляет собой n соотношений:

$$\begin{cases} y_1 - y_1^0 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 - y_2^0 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n - y_n^0 = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{cases}$$



Пример. Составить оператор преобразования, который переводит на плоскости радиус-вектор $\boldsymbol{x}$ с матрицей $X = (x_1 \ x_2)^T$ в радиус-вектор $\boldsymbol{y}$ с матрицей $Y = (y_1 \ y_2)^T$, равный по модулю вектору $\boldsymbol{x}$.

Пусть α — угол между векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Принято считать угол между векторами положительным, если поворот от первого вектора ко второму осуществляется против часовой стрелки.

Пусть $x = |\boldsymbol{x}|, \quad y = |\boldsymbol{y}|$ – модули векторов. По условию примера $x = y$.

Запишем соотношения, вытекающие из условия примера.

Проекции вектора $\boldsymbol{y}$:

$$\begin{aligned} y_1 &= y\cos(\alpha+\theta) = y(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta); \\ y_2 &= y\sin(\alpha+\theta) = y(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta). \end{aligned} \tag{16}$$

Проекции вектора $\boldsymbol{x}$ с учетом равенства модулей векторов $x = y$:

$$x_1 = x\cos\theta = y\cos\theta;$$

$$x_2 = x\sin\theta = y\sin\theta.$$

Подставим последние соотношения в (16):

$$\begin{cases} y_1 = x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha, \\ y_2 = x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha. \end{cases} \tag{17}$$

Таким образом, преобразование поворота линейное ($\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ — числа). Оно осуществляется матрицей линейного оператора

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрица A ортогональная ($A^{-1} = A^T$).

Соотношения (17) определяют «жесткий поворот» в преобразованиях декартовой ортогональной системы координат в $\Re_2$. Если наряду с поворотом осуществляется параллельный перенос системы координат, определяемый вектором $\boldsymbol{y}^0$, то соотношения, определяющие преобразование системы координат, запишутся в виде

$$y_1 - y_1^0 = x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha,$$

$$y_2 - y_2^0 = x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha.$$

Перечислим основные свойства линейных операторов (A, B — матрицы операторов; X, Y — векторы-столбцы; a — число).

1) Постоянный множитель можно выносить за знак оператора:

$$A(aX) = aAX.$$

2) Оператор от суммы векторов равен сумме операторов от этих векторов

$$A(X+Y) = AX + AY.$$

3) $(A+B)X = AX + BX$.

4) $(aA)X = a(AX)$.

5) $(AB)X = A(BX)$.

Перечисленные действия не изменяют характера линейности операторов.

Если в соотношении

$$Y - Y^0 = AX.$$

матрица оператора A квадратная и невырожденная, то можно осуществить обратное преобразование:

$$X = A^{-1}(Y - Y^0).$$

Если же матрица A вырожденная ($\det A = 0$), то формула осуществляет преобразование вектора $X \in L_n$ в вектор $Y \in L_m$ $(m < n)$.

Л Е К Ц И Я 9

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МАТРИЦЫ

Пусть с помощью квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ n-го порядка осуществляется линейное преобразование векторов-столбцов X в Y, заданных в n-мерном пространстве:

$$Y = AX. \tag{18}$$

Если преобразование (18) превращает некоторый вектор X в параллельный ему вектор

$$AX = \lambda X, \tag{19}$$

то вектор $X \neq \Theta$ называется *собственным вектором* матрицы A, а число λ — *собственным значением* этой матрицы.

Рассмотрим и сформулируем в виде теоремы важное свойство собственных значений квадратной матрицы.

Теорема 1. *В линейном пространстве матрица оператора линейного преобразования имеет по меньшей мере одно действительное или пару комплексных собственных значений.*

Доказательство. Собственные векторы являются ненулевыми решениями матричного уравнения (19). Перепишем это уравнение в виде

$$(A - \lambda I)X = \Theta. \tag{20}$$

Матрица $A - \lambda I$ называется *характеристической матрицей.* Система линейных однородных уравнений, которая представлена матричным уравнением (20) будет (согласно теореме Кронекера-Капелли) иметь ненулевые решения только в случае если определитель характеристической матрицы равен нулю:

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{21}$$

Уравнение (21) называется *характеристическим* уравнением матрицы A. Запишем его в развернутом виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{22}$$

Раскрывая определитель придем к уравнению n-го порядка относительно неизвестного λ:

$$\lambda^n - \sigma_1\lambda^{n-1} + \sigma_2\lambda^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}\lambda +$$
$$(-1)^n\sigma_n = 0. \qquad (23)$$

Коэффициенты $\sigma_k \quad (k = \overline{1,n})$ *характеристического полинома* (левая часть уравнения) определяются следующим образом.

$$\sigma_1 = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} \qquad (24)$$

называется *следом* матрицы A.

$$\sigma_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \ \ldots \ + \begin{vmatrix} a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} +$$
$$\begin{vmatrix} a_{nn} & a_{n1} \\ a_{1n} & a_{11} \end{vmatrix}. \qquad (25)$$

То есть, коэффициент σ_2 равен сумме всех диагональных миноров второго порядка матрицы A. *Диагональным* называют минор, элементы главной диагонали которого являются рядом стоящими упорядоченными элементами главной диагонали матрицы. Минор последней суммы образован элементами, стоящими на пересечении n-й и первой строк с n-м и первым столбцами матрицы A.

Вообще, коэффициенты $\sigma_k \quad (k = \overline{1,n})$ равны суммам всех диагональных миноров k-го порядка матрицы A, главными диагоналями которых являются упорядоченные соседствующие элементы главной диагонали матрицы.

Свободный член характеристического полинома равен определителю матрицы A (минору порядка n):

$$\sigma_n = \det A. \qquad (26)$$

Уравнение (23) с многочленом степени n в левой части имеет, следуя основной теореме алгебры, ровно n корней. Среди этих корней могут быть равные и комплексно сопряженные. Тем не менее наверное можно утверждать, что это уравнение имеет по меньшей мере один действительный или одну пару комплексно-сопряженных корней.

Различные корни характеристического уравнения называются *собственными значениями* или *характеристическими числами* матрицы, а совокупность всех различных значений корней называют *спектром* матрицы.

Максимальное по абсолютной величине собственное значение матрицы A называется *спектральным радиусом* матрицы:

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|,\ |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|\}.$$

Спектральный радиус является одной из норм матрицы.

Пусть корнями уравнения являются числа λ_k $(k = \overline{1, n})$, среди которых могут быть равные и комплексно сопряженные. Следуя формулам Вье́та коэффициенты уравнения n-го порядка (19) выразим через его корни:

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n,\\
&\sigma_2 = \lambda_1\lambda_2 + \ldots + \lambda_{n-1}\lambda_n + \lambda_n\lambda_1 =\\
&= \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} + \ \ldots \begin{vmatrix} \lambda_n - 1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{vmatrix},\\
&\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots\\
&\sigma_n = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Сравним формулы (24)–(26) с формулами (27). И в первых и во вторых формулах одни и те же коэффициенты σ_k характеристического уравнения представляются в виде сумм главных миноров k-го порядка $(k = \overline{1, n})$. В отличие от первых, в определителях вторых формул на месте недиагональных элементов стоят нули.

Подчеркнем еще раз тот факт, что одни и те же коэффициенты σ_k характеристического уравнения выражаются различным образом через элементы матрицы A. Оказывается можно осуществить такие преобразования матрицы A, которые превратят определители (24)–(26) в диагональные (27). Неизменяемость значений σ_k позволяет назвать их *главными инвариантами* матрицы A.

СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ

Представив соотношение

$$(A - \lambda I)X = \Theta.$$

в компонентной форме, подставим в него одно из собственных значений λ_k матрицы A. В результате придем к однородной системе линейных уравнений для определения координат x_i^k $(i = \overline{1,n})$ вектора X^k, соответствующего собственному значению λ_k:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_k)x_1^k + a_{12}x_2^k + \ldots + a_{1n}x_n^k = 0, \\ a_{21}x_1^k + (a_{22} - \lambda_k)x_2^k + \ldots + a_{2n}x_n^k = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1^k + a_{n2}x_2^k + \ldots + (a_{nn} - \lambda_k)x_n^k = 0. \end{cases} \tag{28}$$

Так как определитель этой системы уравнений

$$det(A - \lambda_k I) = 0,$$

то согласно теореме Кронекера-Капелли система уравнений имеет ненулевые решения. Эти решения являются собственными векторами матрицы A.

Если $\operatorname{rang}(A - \lambda_k I) = r$ $(r < n)$, то существуют $n - r \geq 1$ линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственным значениям λ_k матрицы A. То есть, существует хотя бы один собственный вектор, соответствующий конкретному значению λ_k. Координаты x_i^k этих векторов (этого вектора) находятся из системы (28), например, методом Гаусса-Жордана.

В математической литературе доказываются две теоремы, касающиеся собственных векторов.

Теорема 1. *Собственные векторы матрицы, соответствующие попарно различным собственным значениям этой матрицы, линейно независимы.*

Теорема 2. *Если все собственные значения квадратной действительной матрицы порядка n попарно различны, то соответствующие им n собственных векторов матрицы образуют базис в n-мерном пространстве. Векторы этого базиса попарно ортогональны.*

СВОЙСТВА СИММЕТРИЧНЫХ МАТРИЦ

Сформулируем в виде теорем некоторые основные свойства симметричных матриц.

Теорема 1. *Собственные значения действительных симметричных матриц — действительные числа.*

Теорема 2. *Собственные векторы действительной симметричной матрицы, соответствующие ее различным собственным значениям, попарно ортогональны.*

Теорема 3. *Всякую действительную симметричную матрицу можно при помощи преобразования подобия привести к диагональному виду.*

Теорема была сформулирована ранее.

Приведем два следствия, вытекающие из теоремы 3.

Следствие 1. Для всякого линейного преобразования действительной симметричной матрицы A существует ортогональный базис, состоящий из собственных векторов матрицы и для которого матрица A — диагональная.

Следствие 2. Каждому k-кратному собственному значению действительной симметричной матрицы соответствует k линейно независимых векторов.

Теорема 4 (экстремальное свойство собственных значений). *Для действительной симметричной матрицы A справедливо соотношение*

$$\lambda_{\min}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \leq (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \leq \lambda_{\max}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}),$$

где $\lambda_{\min}$ — минимальное; $\lambda_{\max}$ — максимальное из всех возможных значений матрицы A:

$$\lambda_{\min} = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\};$$

$$\lambda_{\max} = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}.$$

Процесс приведения квадратной матрицы A к диагональному виду можно осуществить с помощью матрицы преобразования произвольного вектора $\boldsymbol{x} = X^T \boldsymbol{I}$ к собственному вектору $\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{X}^T \boldsymbol{I}$ матрицы A. Считаем, что оба вектора представлены в одном базисе $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_k)$.

Так как квадратичная форма $(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})$ — величина, инвариантная по отношению к выбору базиса, то справедливо равенство

$$X^T A X = \tilde{X}^T \Lambda \tilde{X}. \tag{29}$$

Считаем, что тильдой отмечены собственные векторы-столбцы матрицы A, а Λ — приведенная к диагональному виду матрица A с собственными значениями на главной диагонали.

Так как $X^T = \tilde{X}^T S^{-1}$ и $X = S\tilde{X}$, то левая часть равенства (29) преобразится к виду

$$\tilde{X}^T S^{-1} A S \tilde{X}.$$

Сравнивая это выражение с правой частью (29), получим формулу для преобразования матрицы A к диагональной матрице Λ собственных значений:

$$\Lambda = S^{-1}AS.$$

ЗНАКООПРЕДЕЛЕННЫЕ КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Действительная симметричная матрица A называется *положительно (отрицательно) определенной*, если положительна (отрицательна) квадратичная форма:

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0 \quad (< 0).$$

Если в последнем выражении строгие неравенства заменить на нестрогие $\geq$ $(\leq)$, то квадратичная форма называется *положительно (отрицательно) полуопределенной*.

Теорема 1. *Действительная симметричная матрица является положительно определенной тогда и только тогда, когда все ее собственные значения положительны.*

Теорема 2 (*условие Сильвестра*). *Для положительной определенности действительной симметричной матрицы $A = (a_{ik})$ необходимо и достаточно, чтобы все ее главные миноры были положительными.*

Если все собственные значения симметричной действительной матрицы меньше нуля, то такая матрица будет, очевидно, *отрицательно определенной*.

Для перехода от положительной к отрицательной определенности достаточно матрицу умножить на -1.

Если положительно определенную матрицу умножить на -1, то знаки ее нечетных главных миноров станут отрицательными. Поэтому можно сформулировать критерий отрицательной определенности действительной симметричной матрицы A.

Если знаки (sign) главных миноров M_k (k-го порядка) матрицы A определяются соотношением

$$\operatorname{sign} M_k = (-1)^k,$$

то матрица A отрицательно определенная.

Пример. Определить знак квадратичной формы $K(X) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$, не приводя ее к базису собственных значений.

Р е ш е н и е. Составим матрицу коэффициентов квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Главные миноры этой матрицы:

$$M_1{=}4{>}0, \qquad M_2{=}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0.$$

Так как оба главных минора матрицы положительны, то квадратичная форма определена положительно. Образуем из $K(X)$ отрицательную квадратичную форму: $-K(X) = -4x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$.

Главные миноры матрицы этой квадратичной формы:

$$M_1{=}{-4}{<}0, \qquad M_2 = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 > 0.$$

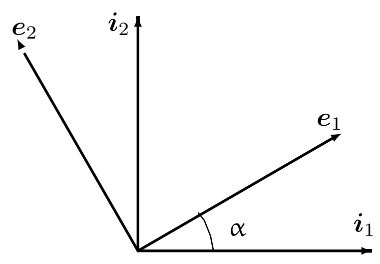
Так как знаки главных миноров матрицы чередуются, причем знак первого минора отрицательный, то квадратичная форма $-K(X)$ определена отрицательно.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ В $\Re_2$

Пусть вектор $X = (x_1 \ x_2)^T$ вместе с действительной симметричной матрицей $Q = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ образуют квадратичную форму $K = X^TQX$.

Предположим, что вектор X и матрица Q заданы своими координатами в ортонормированном базисе $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2)^T$.

Так как матрица Q действительная и симметричная, то ее собственные векторы взаимно ортогональны. Обозначим нормированный базис собственных значений матрицы Q через $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1 \ \boldsymbol{e}_2)^T$ и предположим, что базис $\boldsymbol{E}$ образован поворотом базиса $\boldsymbol{I}$ на угол α.



Рассматриваемое преобразование равносильно «жесткому повороту» базиса на угол α. Принято угол поворота считать положительным, если он отсчитывается от положительного направления оси $\boldsymbol{i}_1$ против часовой стрелки.

В силу того, что векторы $\boldsymbol{i}_k$ и $\boldsymbol{e}_r$ $(k, r = \overline{1,2})$ ортонормированные, их проекции на направления других векторов равны косинусам углов между этими векторами. Тогда

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i}_1 \cos\alpha + \boldsymbol{i}_2 \sin\alpha, \\ \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{i}_1 \sin\alpha + \boldsymbol{i}_2 \cos\alpha, \end{cases}$$

или

$$\boldsymbol{E} = S^T \boldsymbol{I}:$$

Коэффициенты разложения базисных векторов $\boldsymbol{E}$ по базисным векторам $\boldsymbol{I}$ образуют ортогональную матрицу преобразования базисов

$$S^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = S^{-1}.$$

Используя S^T выразим вектор X переменных исходной декартовой ортогональной системы координат через вектор $\tilde{X} = (\tilde{x}_1 \tilde{x}_2)^T$ новой системы координат, «соосной» с ортонормированным базисом $\boldsymbol{E}$:

$$X = S\tilde{X},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}.$$

При переходе к новому базису матрица Q преобразуется в $\tilde{Q}$:

$$\tilde{Q} = S^{-1} Q S =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Или

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{B} & \tilde{C} \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\tilde{A} = A\cos^2\alpha + B\sin 2\alpha + C\sin^2\alpha;$$

$$\tilde{B} = (-A\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha + C\sin^2\alpha)/2;$$

$$\tilde{C} = A\sin^2\alpha - B\sin 2\alpha + C\cos^2\alpha.$$

В последних соотношениях угол α выберем таким, чтобы коэффициент $\tilde{B}$ обратился в нуль, т.е.

$$-A\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha + C\sin^2\alpha = 0.$$

Отсюда следует

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A-C}{2B}.$$

Если угол поворота базиса выбрать таким, чтобы выполнялось последнее условие, то в матрице $\tilde{Q} = \Lambda$ диагональные элементы обратятся в нуль. А это означает, что матрица приведена к диагональному виду и на ее главной диагонали стоят собственные значения $\lambda_1 = \tilde{A}$, $\lambda_2 = \tilde{C}$. При этом квадратичная форма примет вид

$$\tilde{K} = \tilde{X}^T\Lambda\tilde{X} = (\tilde{x}_1\ \tilde{x}_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}.$$

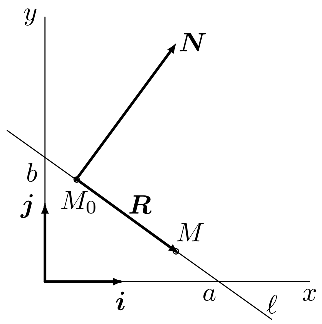
Или

$$\tilde{K} = \lambda_1\tilde{x}_1^2 + \lambda_2\tilde{x}_2^2.$$

Л Е К Ц И Я 10

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Проведем из фиксированной точки M_0 прямой ℓ, принадлежащей пространству $\Re_2$, вектор $\boldsymbol{N}$, перпендикулярный этой прямой. Соединим точку M_0 с произвольной точкой M прямой радиусом-вектором $\overline{M_0M} = \boldsymbol{R}$.



Так как векторы $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{R}$ перпендикулярны, их скалярное произведение равно нулю:

$$(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{R}) = 0. \tag{30}$$

Равенство, справедливое только для точек M, лежащих на прямой, представляет собой уравнение прямой на плоскости, записанное в *векторной форме.*

Для представления уравнения в координатной форме введем в рассматриваемом пространстве ортонормированный базис $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ со связанной с ним декартовой ортогональной системой координат x, y.

Пусть A и B являются проекциями вектора $\boldsymbol{N}$ на направления базисных векторов, x_0 и y_0 — координаты фиксированной точки M_0 прямой ℓ, а x и y — координаты ее произвольной точки M.

Введенные векторы представим в виде совокупности их координат:

$$\boldsymbol{N} = (A; B), \qquad \boldsymbol{R} = \overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0).$$

Подставим записанное соотношение в (30). Так как что скалярное произведение векторов,представленных в ортонормированном базисе, равно сумме произведений их соответствующих координат, то

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{31}$$

Это *уравнение прямой, проходящей через заданную точку,* или *уравнение пучка прямых.* Если прямая проходит через точку с координатами $x = x_0$, $y = y_0$, то при этих значениях координат уравнение (31) обращается в тождество.

Раскрыв в (31) скобки, приводя подобные члены и обозначая $C = -Ax_0 - By_0$, придем к *уравнению прямой в общем виде*:

$$Ax + By + C = 0. \tag{32}$$

Уравнение, называемое *уравнением прямой в отрезках,* получается из (32), если в нем перенести C в правую часть равенства и поделить полученное уравнение на $-C$ (при условии, что $C \neq 0$, т.е. прямая не проходит через начало координат):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{33}$$

Здесь $a = -C/A$, $b = -C/B$.

При $x = 0$ из (33) находится координата $y = b$ пересечения прямой с осью y, а координата $x = a$ пересечения прямой с осью x определяется из уравнения при $y = 0$. Отсюда следует, что a и b — это отрезки, отсекаемые прямой на координатных осях.

Найдем модуль вектора $\boldsymbol{N} = (A, B)$:

$$N = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

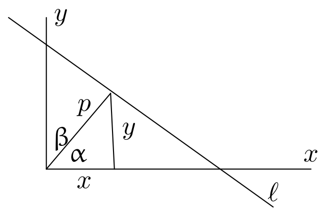
Деление вектора на его модуль приводит к единичному вектору, совпадающему по направлению (сонаправленному) с исходным вектором. При этом координатами единичного вектора будут его направляющие косинусы:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{N}}{N} = \left(\frac{A}{N}, \frac{B}{N}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta).$$

Отмеченное свойство единичных векторов позволяет получить еще один вид уравнения прямой. Для его записи умножим все слагаемые уравнения (32) на *нормирующий множитель* $\mu = -\dfrac{\mathrm{sign} C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. В результате получим

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0. \tag{34}$$

В этом уравнении $p = \mu C$ — расстояние от начала координат до прямой. В этом можно убедиться, обратившись к рисунку. Из рисунка видно, что $p = x\cos\alpha + y\cos\beta$. Следует иметь в виду, что в уравнении (34) перед параметром p должен стоять знак «минус».



Если уравнение (33) умножить на b и ввести обозначение $k = -b/a$, то придем к известному из школьного курса математики *уравнению прямой с угловым коэффициентом:*

$$y = kx + b. \tag{35}$$

Предположим, что прямая ℓ проходит через две точки: $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$. Тогда уравнение (31) при подстановке в него координат точки M_1 должно обратиться в тождество:

$$A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) = 0.$$

Перенесем в (31) и в полученном уравнении слагаемые с множителем B в правые части равенств. Поделив почленно полученные равенства, придем к *уравнению прямой, проходящей через две заданные точки*:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \tag{36}$$

Если ввести обозначения для координат вектора $\overline{M_0M_1}$: $x_1 - x_0 = m$, $y_1 - y_0 = n$, то последнее уравнение можно переписать в виде

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

Координаты m и n отличаются от единичного вектора, соосного вектору $\overline{M_0M_1}$, только множителем — модулем этого вектора. Поэтому в частном случае в качестве координат m и n можно принять направляющие косинусы прямой.

К *уравнению прямой с угловым коэффициентом, проходящей через заданную точку*, можно прийти, потребовав, чтобы уравнение (35) обратилось в тождество при подстановке в него координат точки $(x_0; y_0)$, т.е. $y_0 = kx_0 + b$. Вычитая последнее равенство из (35), получим:

$$y = y_0 + k(x - x_0). \tag{37}$$

Обобщая сказанное, отметим, что *любое линейное уравнение в* $\Re_2$, *т.е. уравнение, связывающее переменные* x *и* y (*в первых степенях* !), *представляет собой уравнение прямой.*

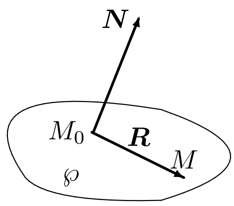
УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

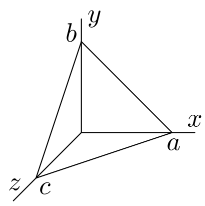
Рассмотрим в пространстве $\Re_3$ плоскость $\wp$.

Пусть из некоторой фиксированной точки M_0 плоскости восстановлен перпендикуляр к $\wp$, параллельный (может, и совпадающий) с некоторым вектором $\boldsymbol{N}$.

Соединим выбранную точку M_0 с произвольной точкой M плоскости радиусом-вектором $\overline{M_0M} = \boldsymbol{R}$. Так как векторы $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{N}$ перпендикулярны, то их скалярное произведение должно быть равно нулю:

$$\big(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{R}\big) = 0. \tag{38}$$





Это векторное уравнение плоскости, совпадающее по написанию с векторным уравнением прямой на плоскости.

Введем ортонормированный базис $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ со связанной с ним декартовой ортогональной системой координат x, y, z. Пусть в этом базисе векторы $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{R}$ представлены своими координатами:

$$\boldsymbol{N} = (A, B, C), \;\; \boldsymbol{R} = \overline{M_0M} = (x{-}x_0, y{-}y_0, z{-}z_0).$$

Расписывая скалярное произведение (38), придем к уравнению *плоскости, проходящей через заданную точку.*

$$A(x{-}x_0) + B(y{-}y_0) + C(z{-}z_0) = 0. \tag{39}$$

Раскрывая скобки и вводя обозначение постоянной величины

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0,$$

придем к *уравнению плоскости в общем виде*:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{40}$$

Перенесем постоянную D в правую часть уравнения и поделим полученное уравнение на $-D$ при условии, что $D \neq 0$ (плоскость не проходит через начало координат). Вводя обозначения $a = -D/A$, $b = -D/B$, $c = -D/C$, перепишем (40) в виде *уравнения плоскости в отрезках*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{41}$$

При $y = z = 0$ из этого уравнения получаем $x = a$; при $z = x = 0$: $y = b$; при $x = y = 0$: $z = c$, т.е. a, b, c — отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат.

Модуль вектора $\boldsymbol{N}$: $N = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Деление вектора на его модуль приводит к единичному вектору, совпадающему по направлению с вектором $\boldsymbol{N}$. Координатами единичного вектора будут его направляющие косинусы:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{N}}{N} = \left(\frac{A}{N}, \frac{B}{N}, \frac{C}{N}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Как и в случае прямой на плоскости умножим все слагаемые уравнения (40) на *нормирующий множитель*

$$\mu = -\frac{\mathrm{sign} D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

В результате получим *уравнение плоскости в нормальном виде*:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \tag{42}$$

В этом уравнении $p = \mu D$ — расстояние от начала координат до плоскости. Перед параметром p должен стоять знак «минус».

Частные виды общего уравнения (40).

При $D = 0$ плоскость проходит через начало координат, так как обращается в тождество при $x = y = z = 0$.

Равенство $A = 0$ (или $B = 0$, или $C = 0$) делает уравнение (40) не зависящим от координаты x (или y, или z). Отсутствие координаты x (или y, или z) в уравнении указывает на то, что плоскость параллельна оси x (или y, или z).

Равенство нулю двух постоянных, стоящих при независимых переменных (например, $A = B = 0$ при $C \neq 0$), приводит к уравнению плоскости, перпендикулярной третьей координате (z).

Равенство постоянных $A = B = C$ определяет плоскость, равнонаклоненную к осям координат.

Сравнение уравнений различных видов для плоскости с соответствующими уравнениями прямой указывает на их идентичность и одинаковую природу с точки зрения векторной алгебры.

Обобщение на многомерные пространства с переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют *гиперплоскостями.* Так, для уравнения гиперплоскости в общем виде имеем:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n + D = 0.$$

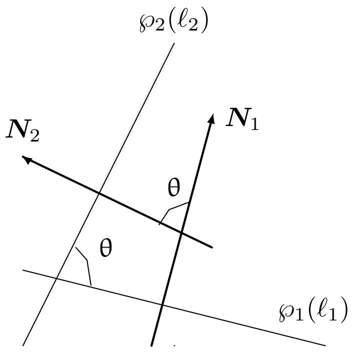
Подходя с этих позиций, например к уравнению (38), можно назвать его уравнением гиперплоскости в векторной форме, а уравнения прямой на плоскости — уравнениями гиперплоскости в пространстве $\Re_2$. Характерной особенностью гиперплоскости (в том числе прямой) является то, что все переменные входят в ее уравнение в первой степени.

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ

Рассмотрим две плоскости $\wp_1$ и $\wp_2$, заданные в общем виде:

$$\wp_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$

$$\wp_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$



Восстановим к плоскостям $\wp_1$ и $\wp_2$ нормали $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$.

Угол θ между плоскостями равен углу между векторами нормалей к ним. Поэтому $\cos\theta$ может быть определен по скалярному произведению векторов $\boldsymbol{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\boldsymbol{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$:

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2)}{N_1 N_2} =$$

$$= \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Полученное выражение позволяет записать условие ортогональности двух плоскостей ($\cos\theta = 0$):

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Условие параллельности плоскостей вытекает из условия параллельности ортогональных им векторов ($\boldsymbol{N}_1 = \lambda\boldsymbol{N}_2$):

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} (= \lambda).$$

Угол между двумя прямыми

$$\ell_1{:}A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 = 0; \quad \ell_2{:}A_2x_2 + B_2y_2 + C_2 = 0$$

может быть изображен тем же рисунком, что и угол между плоскостями.

Что касается определения угла θ, записи условий ортогональности и параллельности прямых, то формулы для них получаются из выражений для плоскостей путем отбрасывания в них членов, содержащих коэффициенты C_1 и C_2:

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2)}{N_1N_2} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}};$$

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \qquad (\ell_1 \perp \ell_2);$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad (\ell_1 \parallel \ell_2).$$

В школьном курсе математики предлагался еще один вариант определения угла между прямыми на плоскости (но не между плоскостями).

Пусть θ_1 и θ_2 — углы наклона прямых ℓ_1 и ℓ_2 к координатной оси x и $k_1 = \operatorname{tg}\theta_1$; $k_2 = \operatorname{tg}\theta_2$ — угловые коэффициенты, входящие в уравнения прямых с угловым коэффициентом:

$$\ell_1\colon\ y = k_1x + b_1; \qquad \ell_2\colon\ y = k_2x + b_2.$$

Тогда тангенс угла между прямыми

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}.$$

Условие ортогональности и параллельности соответственно

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}, \qquad\qquad k_1 = k_2.$$

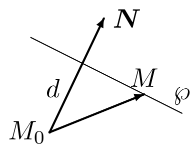
Л Е К Ц И Я 11

РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

Пусть заданы плоскость $\wp$ своим общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

и точка M_0, не лежащая на плоскости. На рисунке показаны след этой плоскости, расположенной для удобства перпендикулярно плоскости листа, и точка. Требуется найти расстояние d от точки до плоскости.



Выберем на плоскости произвольную точку M и построим вектор $\overline{M_0M}$.

Проекция вектора $\overline{M_0M}$ на направление вектора нормали $\boldsymbol{N}$ к плоскости будет искомым расстоянием:

$$d = |Pr_N \overline{M_0M}| = \frac{|(\boldsymbol{N}, \overline{M_0M})|}{N}.$$

Если в рассматриваемом пространстве ввести ортонормированный базис и декартову ортогональную систему координат, в которых $\boldsymbol{N}{=}(A{,}B{,}C)$, $\overline{M_0M} = \big((x{-}x_0), (y{-}y_0), (z{-}z_0)\big)$, $N{=}\sqrt{A^2{+}B^2{+}C^2}$, то

$$d = \frac{1}{N}\big|A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)\big|.$$

Раскроем скобки под знаком модуля. Изменив знак на противоположный в общем уравнении плоскости и получаемую из этого уравнения постоянную $D = -Ax - By - Cz$, придем к формуле:

$$d{=}\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\big|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\big|.$$

Отметим, что под знаком модуля получается знак минус (как в рассматриваемом случае), если точка M_0 и начало координат лежат по одну сторону от плоскости, и знак плюс, если по разные стороны.

В частном случае расстояние от точки до прямой на плоскости:

$$d = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \left| Ax_0 + By_0 + C \right|.$$

Если точка M_0 совпадает с началом координат, то $\overline{M_0M} = \overline{OM} = (x; y; z)$ и $(\boldsymbol{N}, \overline{OM}) = Ax + By + Cz$. В этом случае

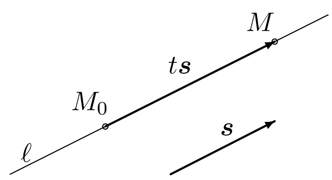
$$d = p = \frac{1}{N} |Ax + By + Cz|.$$

Так как $A/N = \cos\alpha$, $B/N = \cos\beta$, $C/N = \cos\gamma$, то последнее равенство приводит к уравнению плоскости в нормальном виде

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

ПРЯМАЯ В $\Re_3$

Рассмотрим в $\Re_3$ прямую ℓ с фиксированной на ней точкой M_0.



Выберем на ℓ произвольную точку M и построим вектор $\boldsymbol{L} = \overline{M_0M}$.

Направление прямой зададим некоторым параллельным ℓ (можно совпадающим с ℓ) вектором $\boldsymbol{s}$.

Условием того, что любая точка $M \in \ell$, будет условие параллельности векторов $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{s}$:

$$\boldsymbol{L} = t\boldsymbol{s}.$$

Это уравнение прямой в $\Re_3$, представленное в векторной форме. Модуль параметра t определяет разделенное на модуль вектора $\boldsymbol{s}$ расстояние от фиксированной точки M_0 прямой до ее произвольной точки M. Если $|\boldsymbol{s}| = 1$, то $|t|$ равно этому расстоянию.

Векторная запись уравнения прямой не накладывает никаких ограничений на размерность пространства. Уравнение справедливо и для $\Re_n$, и, в частности, для $\Re_2$. Введем в рассматриваемое пространство ортонормированный базис с декартовой ортогональной системой координат, в которых

$$\boldsymbol{s} = (m, n, p); \quad \boldsymbol{L} = \overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0).$$

Подставляя записанные равенства в векторное уравнение прямой и приравнивая соответствующие координаты, придем к *уравнениям прямой в параметрической форме.*

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + \ tn, \\ z = z_0 + \ tp. \end{cases}$$

Выразим из каждого уравнения параметр t. Приравняв полученные выражения, получим *канонические уравнения прямой*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} (= t).$$

Если прямая проходит через две заданные точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и $M_1(x_1; y_1; z_1)$, то в качестве вектора, определяющего направление прямой, можно выбрать $\boldsymbol{s} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0; \ z_1 - z_0)$. Тогда канонические уравнения прямой можно представить в виде *уравнений прямой, проходящей через две точки:*

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

Из трех канонических уравнений прямой только два линейно независимы.

В частном случае для пространства $\Re_2$ (отсутствует координата z) из трех уравнений останется одно:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0},$$

совпадающее с ранее полученным уравнением прямой на плоскости.

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

Пусть заданы две в общем скрещивающиеся (не обязательно пересекающиеся) прямые:

$$\ell_1\colon \begin{cases} x \ = \ x_1 + tm_1, \\ y \ = \ y_1 + tn_1, \\ z \ = \ z_1 + tp_1; \end{cases} \qquad \ell_2\colon \begin{cases} x \ = \ x_2 + tm_2, \\ y \ = \ y_2 + tn_2, \\ z \ = \ z_2 + tp_2. \end{cases}$$

Направления прямых задаются двумя векторами

$$\boldsymbol{s}_1 = (m_1; n_1; p_1); \quad \boldsymbol{s}_2 = (m_2; n_2; p_2).$$

Косинус угла θ между прямыми определится как косинус угла между векторами $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$:

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2)}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

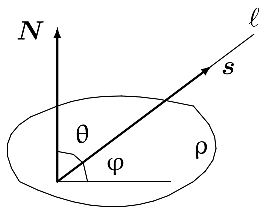
Отсюда вытекает условие перпендикулярности двух прямых:

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0.$$

Условие параллельности прямых следует из условия параллельности векторов $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Найдем угол φ между прямой ℓ и плоскостью $\wp$.



Этот угол дополняется до π/2 углом θ между вектором $\boldsymbol{s}$, сонаправленным прямой, и вектором $\boldsymbol{N}$, ортогональным плоскости.

Найдем косинус угла θ между векторами $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{N}$, который равен синусу угла φ между прямой и плоскостью:

$$\cos\theta = \sin\varphi = \frac{(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{s})}{N \cdot s} =$$

$$\frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Из последней формулы следует *условие параллельности прямой и плоскости* ($\boldsymbol{s} \perp \boldsymbol{N}$):

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

Условию перпендикулярности прямой и плоскости соответствует параллельность векторов $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{N}$:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

ПРЯМАЯ КАК ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ

Линией пересечения двух непараллельных плоскостей является прямая. Пусть эти плоскости заданы своими общими уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Требуется записать параметрические

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + \ tn, \\ z = z_0 + \ tp. \end{cases}$$

или канонические

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} (= t)$$

уравнения этой прямой.

В оба приведенные уравнения прямой входят координаты x_0, y_0 и z_0 фиксированной точки прямой.

Координаты такой точки можно получить, рассекая заданные плоскости любой третьей плоскостью, не параллельной заданным. Удобнее в качестве такой плоскости выбрать любую координатную плоскость. Пусть это будет плоскость $z = z_0 = 0$. В этом случае исходная система уравнений превратится в два уравнения с двумя неизвестными.

Пусть в результате решения полученной системы

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + D_2 = 0 \end{cases}$$

найдены значения неизвестных: x_0 и y_0. Вместе с заданным значением $z_0 = 0$ эти координаты принадлежат точке $M_0(x_0, y_0, 0)$, лежащей на прямой.

Вторым этапом решения задачи является определение вектора $\boldsymbol{s} = (m,\ n, p)$, определяющего направление прямой. Этот вектор параллелен заданным плоскостям, и следовательно, ортогонален нормалям к ним.

Рассмотрим два варианта определения этого вектора.

а). Векторы, ортогональные к заданным плоскостям:

$$\boldsymbol{N}_1 = (A_1, B_1, C_1) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{N}_2 = (A_2, B_2, C_2).$$

Имея в виду, что длина вектора s произвольная и вспоминая, что векторное произведение векторов равно вектору, ортогональному их плоскости, примем

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{N}_1 \times \boldsymbol{N}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i_1} & \mathbf{i_2} & \mathbf{i_3} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (B_1C_2 - C_1B_2)\boldsymbol{i}_1 + (C_1A_2 - A_1C_2)\boldsymbol{i}_2 +$$

$$(A_1B_2 - B_1A_2)\boldsymbol{i}_3 = m\boldsymbol{i}_1 + n\boldsymbol{i}_2 + p\boldsymbol{i}_3.$$

После этого уравнение прямой представится в канонической форме.

б). Аналогично точке $M_0(x_0, y_0, 0)$ можно найти координаты еще одной точки на прямой. Добавив к исходным уравнениям уравнение еще одной плоскости, например, $y = y_1 = 0$ и решив систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

найдем координаты $M_1(x_1, 0, z_1)$.

В качестве вектора, соосного искомой прямой, примем вектор $\boldsymbol{s} = (x_1 - x_0,\ -y_0,\ z_1) = (m, n, p)$. После этого уравнение прямой можно представить в канонической или параметрической формах.

Л Е К Ц И Я 12

УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В $\Re_2$

Математические модели кривых и поверхностей общего вида описываются уравнениями, содержащими переменные в степенях, превышающих единицу.

Общее уравнение кривой второго порядка в $\Re_2$ (на плоскости):

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Переменные x и y — это координаты произвольных точек на плоскости в декартовой ортогональной системе координат. Множитель 2 во втором слагаемом обусловлен тем, что присутствующие в такого рода суммах слагаемые B_1xy и B_2yx для математических моделей геометрических объектов можно объединить, вводя обозначение $2B = B_1 + B_2$.

Преобразуем уравнение к новой системе координат $\tilde{x}\tilde{y}$, повернутой относительно исходной системы xy на угол α против часовой стрелки относительно начала координат. Формулы преобразования координат:

$$\begin{cases} x = \tilde{x}\cos\alpha + \tilde{y}\sin\alpha, \\ y = -\tilde{x}\sin\alpha + \tilde{y}\cos\alpha. \end{cases}$$

При выводе формул приведения квадратичных форм к каноническому виду была получена формула

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{2B}.$$

Если систему координат повернуть на угол α, определенный по этой формуле, то слагаемое с произведением координат в квадратичной форме исчезает.

При этом исходное уравнение примет вид

$$\tilde{A}\tilde{x}^2 + \tilde{C}\tilde{y}^2 + \tilde{D}\tilde{x} + \tilde{E}\tilde{y} + F = 0,$$

где:

$$\tilde{A} = A\cos^2\alpha + B\sin 2\alpha + C\sin^2\alpha;$$

$$\tilde{C} = A\sin^2\alpha - B\sin 2\alpha + C\cos^2\alpha;$$

$$\tilde{D} = D\cos\alpha + E\sin\alpha;$$

$$\tilde{E} = E\cos\alpha - D\sin\alpha.$$

Для дальнейшего преобразования уравнения сгруппируем в нем слагаемые с одинаковыми переменными, дополнив их до полных квадратов. Для сохранения равенства «дополнительные» слагаемые запишем и в правой части уравнения, перенеся в нее F :

$$\tilde{A}\left(\tilde{x}^2 + 2\frac{\tilde{D}}{2\tilde{A}}\tilde{x} + \frac{\tilde{D}^2}{4\tilde{A}^2}\right) + \tilde{C}\left(\tilde{y}^2 + 2\frac{\tilde{E}}{2\tilde{C}}\tilde{y} + \frac{\tilde{E}^2}{4\tilde{C}^2}\right) =$$

$$\frac{\tilde{D}^2}{4\tilde{A}} + \frac{\tilde{E}^2}{4\tilde{C}} - F.$$

При условии $\tilde{F} = \dfrac{\tilde{D}^2}{4\tilde{A}} + \dfrac{\tilde{E}^2}{4\tilde{C}} - F \neq 0$ поделим полученное уравнение на $\tilde{F}$, свернем выражения в скобках до квадратов сумм, а множители при них переведем в знаменатели:

$$\frac{\left(\tilde{x} + \dfrac{\tilde{D}}{2\tilde{A}}\right)^2}{\tilde{F}/\tilde{A}} + \frac{\left(\tilde{y} + \dfrac{\tilde{E}}{2\tilde{C}}\right)^2}{\tilde{F}/\tilde{C}} = 1.$$

Вводя обозначения для новых переменных и постоянных:

$$\mathrm{x} = \tilde{x} + \frac{\tilde{D}}{2\tilde{A}}; \qquad \mathrm{y} = \tilde{y} + \frac{\tilde{E}}{2\tilde{C}};$$

$$\frac{\tilde{F}}{\tilde{A}} = \pm a^2; \qquad \frac{\tilde{F}}{\tilde{C}} = \pm b^2,$$

перепишем исследуемое уравнение в виде

$$\pm\frac{\mathrm{x}^2}{a^2} \pm \frac{\mathrm{y}^2}{b^2} = 1.$$

Введение новых переменных x и y равносильно параллельному переносу координатной системы $\tilde{x}\tilde{y}$ в новый центр с координатами $\tilde{x}_0{=}-\dfrac{\tilde{D}}{2\tilde{A}}$ и $\tilde{y}_0{=}-\dfrac{\tilde{E}}{2\tilde{C}}$. В зависимости от знаков, стоящих при слагаемых последнего уравнения, из него получаются уравнения:

эллипса

$$\frac{\mathrm{x}^2}{a^2} + \frac{\mathrm{y}^2}{b^2} = 1$$

и *гиперболы*

$$\frac{\mathrm{x}^2}{a^2} - \frac{\mathrm{y}^2}{b^2} = 1 \qquad \text{или} \qquad -\frac{\mathrm{x}^2}{a^2} + \frac{\mathrm{y}^2}{b^2} = 1.$$

Если исходное уравнение не содержит квадрата одной из переменных ($\tilde{A}$ или $\tilde{C}$ равны нулю), то параллельным переносом координат его можно привести к уравнению *параболы*:

$$\mathrm{x}^2 = 2q\mathrm{y} \qquad \text{или} \qquad \mathrm{y}^2 = 2p\mathrm{x}.$$

Полученные уравнения называются *каноническими уравнениями кривых эллипса, гиперболы* и *параболы.*

Других кривых, описываемых уравнениями второго порядка, не существует.

По виду канонического уравнения легко определить тип кривой второго порядка. Тем не менее это можно сделать, по знаку определителя коэффициентов квадратичной формы общего уравнения. Уравнение описывает следующие типы кривых:

если

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} > 0 \ - \ \text{эллипс}, \\ < 0 \ - \ \text{гипербола}, \\ = 0 \ - \ \text{парабола}. \end{cases}$$

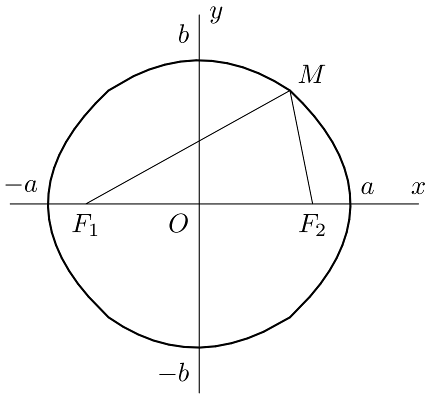
ЭЛЛИПС И ЕГО СВОЙСТВА

Эллипсом называется геометрическое место точек на плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2, называемых *фокусами*, есть величина постоянная $(2a)$.

Согласно определению сумма модулей векторов $\overline{F_1M} = \boldsymbol{r}_1$ и $\overline{F_2M} = \boldsymbol{r}_2$ равна $2a$ (M — точка, лежащая на эллипсе):

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Уравнение не привязано ни к какому базису и, следовательно, ни к какой системе координат. Это уравнение инвариантно по отношению к выбору систем координат.



Для преобразования уравнения эллипса к каноническому виду введем *собственную систему координат.* Ось x собственной системы направим по вектору $\overline{F_1F_2}$, ось y проведем через середину отрезка F_1F_2 перпендикулярно оси x.

На рисунке показан эллипс со связанной с ним *собственной системой координат.*

Обозначим расстояние между фокусами $F_1F_2 = 2c$. Два параметра (a и c) полностью характеризуют эллипс с точностью до его расположения в пространстве.

Во введенной собственной (декартовой ортогональной) системе координаты характерных точек: $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, $M(x, y)$. Тогда $\boldsymbol{r}_1 = \overline{F_1M} = (x + c, y)$, $\boldsymbol{r}_2 = \overline{F_2M} = (x - c, y)$.

Подставим значения модулей записанных векторов в уравнение эллипса и перенесем второе слагаемое в правую часть уравнения:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Чтобы избавиться от радикалов, возведем обе части записанного равенства в квадрат:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

или

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Чтобы избавиться от корня, повторно возведем равенство в квадрат. После приведения подобных получим

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Вводя новый параметр

$$b^2 = a^2 - c^2 \qquad (a > c),$$

придем к равенству

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Поделив обе части последнего равенства на a^2b^2, приходим к *каноническому уравнению эллипса*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Так как каноническое уравнение получено после того как исходное уравнение дважды возводилось в квадрат, то полученное уравнение может содержать лишние корни. В этом случае координаты точек, которые удовлетворяют полученному уравнению, не будут удовлетворять исходному уравнению.

Убедимся в том, что этого не будет.

Пусть координаты x и y некоторой точки удовлетворяют полученному уравнению. Подставим найденную из этого уравнения переменную $y^2 = b^2\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$ в выражение

$$r_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}.$$

После преобразований получим

$$r_1 = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2}.$$

Так как $|x| < a$, что следует из уравнения, и $\dfrac{c}{a} < 1$, то $a + \dfrac{c}{a} > 0$. В этом случае $r_1 = a + \dfrac{c}{a}x$.

Аналогично найдем $r_2 = a - \dfrac{c}{a}x$. Складывая два последних равенства, получаем $r_1 + r_2 = 2a$.

Таким образом, любая точка, удовлетворяющая каноническому уравнению эллипса, принадлежит эллипсу и наоборот.

Опишем некоторые основные характеристики и свойства эллипса.

1. Постоянные a и b называются *полуосями эллипса.*

При $y = 0$ из уравнения эллипса получим $x = \pm a$, а при $x = 0$: $y = \pm b$. То есть a и b — это отрезки, отсекаемые эллипсом на осях координат.

2. Координаты фокусов $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, где

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

при условии, что a — бóльшая полуось эллипса. Величина $2c$ — расстояние между фокусами.

3. Можно ввести параметр t, связанный с переменными x и y соотношениями

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$$

которые называются параметрическими уравнениями эллипса.

4. Величина

$$e = \frac{c}{a}$$

называется *эксцентриситетом* эллипса $e \in [0, 1)$.

При $e = 0$ $(a = b = R)$ эллипс превращается в окружность:

$$x^2 + y^2 = R^2;$$

при $e \to 1$ $(b \to 0)$ эллипс приближается к прямой.

ГИПЕРБОЛА И ЕЕ СВОЙСТВА

Гиперболой называется геометрическое место точек, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2, называемых *фокусами*, есть величина постоянная $(2a)$.

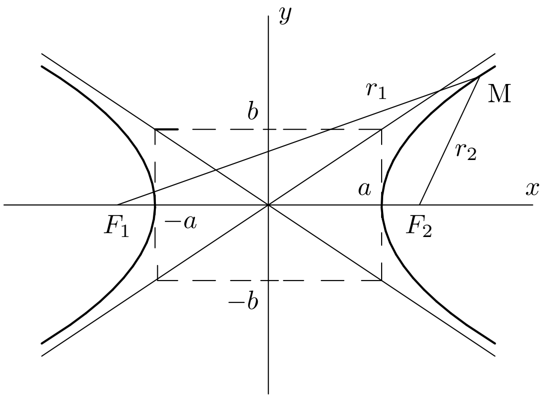
Если M — произвольная точка, принадлежащая гиперболе и $\boldsymbol{r}_1 = \overline{F_1M}$ $\boldsymbol{r}_2 = \overline{F_2M}$, то уравнение гиперболы, инвариантное по отношению к выбору систем координат

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

Введение собственной системы координат, аналогичной эллипсу, и преобразования, аналогичные проделанным для эллипса, приводят к *каноническому уравнению гиперболы*:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

На рисунке изображена гипербола с *собственными осями координат.*



Рассмотрим основные характеристики и свойства гиперболы.

1. Постоянные a и b называются *полуосями гиперболы.* При $y = 0$ имеем $x = \pm a$. При $x = 0$ получаем мнимые корни $y = \pm\sqrt{-b^2}$, т.е. гипербола не пересекает ось y, которая называется мнимой осью гиперболы (x — действительная ось).

2. Координаты фокусов: $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, где

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Расстояние между фокусами равно $2c$.

3. Можно ввести параметр t такой, что

$$\begin{cases} x = a\ cht = a\left(e^t + e^{-t}\right)/2, \\ y = b\ sht = b\left(e^t - e^{-t}\right)/2. \end{cases}$$

При таких значениях переменных x и y уравнение гиперболы превращается в тождество.

Последние два уравнения называются *параметрическими уравнениями гиперболы.*

Функции ch$t$ и sh$t$ — *гиперболические косинус* и *синус.* Их название определило название кривой.

4. Величина

$$e = \frac{c}{a}$$

называется *эксцентриситетом гиперболы.* Для гиперболы эксцентриситет

$$e \in (1; \infty).$$

Эксцентриситет характеризует степень отклонения точек гиперболы от оси x. При $e \to 1$ $(b \to 0)$ ветви гиперболы стремятся к оси x; при $e \to \infty$ $(b \to \infty)$ – к прямым $x = \pm a$, перпендикулярным оси x.

5. Гипербола имеет две асимптоты. Это прямые

$$y = \pm \frac{b}{a} x,$$

проходящие через начало координат и вершины прямоугольника со сторонами $2a$ и $2b$, изображенного пунктиром на рисунке.

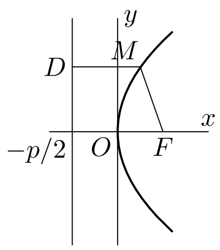
Гипербола

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

для которой ось x является мнимой, называется сопряженной по отношению к исходной. Асимптоты у обеих гипербол общие.

ПАРАБОЛА И ЕЕ СВОЙСТВА

Параболой называется геометрическое место точек, расстояния от которых до некоторой фиксированной точки F, называемой *фокусом параболы*, равны расстоянию до фиксированной прямой, называемой *директрисой.*



Выбрав на параболе произвольную точку M и обозначив проекцию точки M на директрису через D согласно определению параболы запишем равенство:

$$|\overline{DM}| = |\overline{FM}|. \tag{43}$$

Это и есть уравнение параболы, не зависящее от систем координат.

Введем *собственную* (декартову) *систему координат* параболы таким образом, чтобы ее ось x расположилась ортогонально директрисе и проходила через точку F. Положительным считаем направление от директрисы к фокусу. Ось y проведем перпендикулярно оси x через середину отрезка между директрисой и фокусом в направлении, соответствующем правой системе координат.

Обозначим расстояние между директрисой и фокусом через p — единственный параметр, который с точностью до ориентации в пространстве определяет параболу. Тогда координаты фокуса $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$, а уравнение директрисы $x = -\dfrac{p}{2}$.

Задание координат точек $M(x, y)$, $D\left(-\dfrac{p}{2}, y\right)$ и $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$, которые образуют векторы в равенстве (43), позволяет записать выражения для этих векторов:

$$\overline{DM} = \left(x + \frac{p}{2}, y - y\right) = \left(x + \frac{p}{2}, 0\right);$$

$$\overline{FM} = \left(x - \frac{p}{2}, y - 0\right) = \left(x - \frac{p}{2}, y\right)$$

и найти квадраты их модулей:

$$|\overline{DM}|^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + 0^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2;$$

$$|\overline{FM}|^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2.$$

Приравняем полученные выражения:

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2.$$

Отсюда, приводя подобные, приходим к каноническому уравнению параболы:

$$y^2 = 2px.$$

Отметим некоторые свойства и характеристики параболы.

1. Парабола проходит через начало координат — точку $O(0;0)$ ($y = 0$ при $x = 0$), называемую *вершиной параболы.*

2. Парабола симметрична относительно оси x.

3. Директрисой является прямая

$$x = -\frac{p}{2},$$

ортогональная оси x и находящаяся от начала собственной системы координат на таком же расстоянии, что и фокус.

4. Эксцентриситет параболы равен единице. Этот факт доказывается, если уравнения кривых второго порядка представить в полярной системе координат (x, α), где α — угловая координата, отсчитываемая от направления оси x.

5. Важным свойством параболы, определяющим ее широкое применение в рефлекторах осветительных и других волновых приборах, является ее оптическое свойство: луч, выходящий из фокуса, отражается от линии параболы в направлении, перпендикулярном директрисе.

Л Е К Ц И Я 13

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Геометрическими образами квадратных уравнений в пространстве $\Re_3$ являются поверхности. Количество различных видов поверхностей (как и кривых) второго порядка ограничено. Каждая из поверхностей преобразованием координат (параллельным переносом и поворотами вокруг трех осей) может быть приведена к каноническому виду, где ее математическая модель имеет характерный вид.

Рассмотрим все типы поверхностей второго порядка.

1. **Цилиндрические поверхности** — это поверхности, образованные параллельным переносом прямой, *образующей цилиндра,* вдоль некоторой кривой, называемой *направляющей цилиндра.*

Направляющая может быть либо эллипсом (в частном случае окружностью), либо гиперболой, либо параболой. Соответствующие поверхности будут называться *эллиптическим (в частности, круговым)* (рис. 0.3,а), *гиперболическим* (рис. 0.3,б) и *параболическим* (рис. 0.3,в) *цилиндрами.*

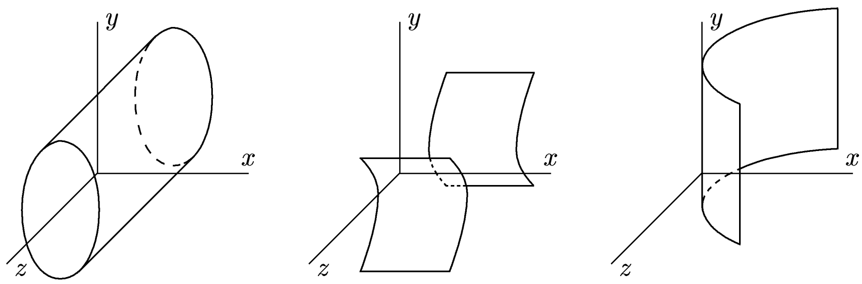
Канонические уравнения соответствующих цилиндрических поверхностей не содержат одну из координат — ту координату, параллельно которой располагается образующая цилиндрической поверхности. Поэтому уравнения изображенных на рис. 0.3 цилиндрических поверхностей имеют в $\Re_3$ (!), соответственно, вид:

$$\text{а) } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \quad \text{б) } -\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1; \quad \text{в) } z^2=2px. \tag{44}$$

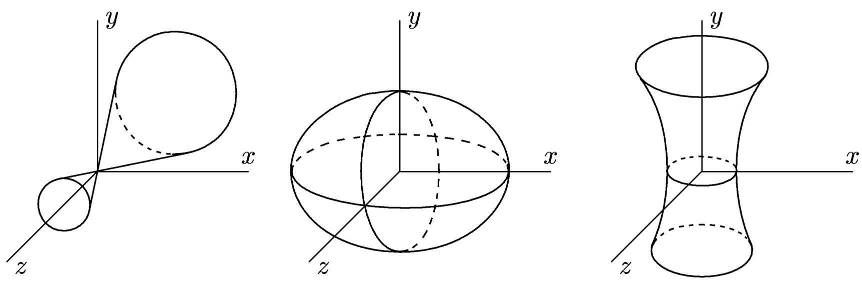
2. **Поверхности вращения.** Характерной особенностью этих поверхностей является наличие в их уравнениях слагаемых с квадратами двух переменных, имеющих одинаковые коэффициенты. В этом случае в сечениях поверхностей плоскостями, перпендикулярными третьей координате (третья координата — постоянная величина), получаются окружности.

Например,
$x^2+y^2-cz=0$ — поверхность, образованная вращением параболы $x^2=cz$ (или $y^2=cz$) вокруг оси z;
$x^2+y^2=cz^2$ — круговой конус (рис. 0.3,г), образованный вращением прямой $x=Cz$ ($y=Cz$) вокруг оси z ($c=C^2$).

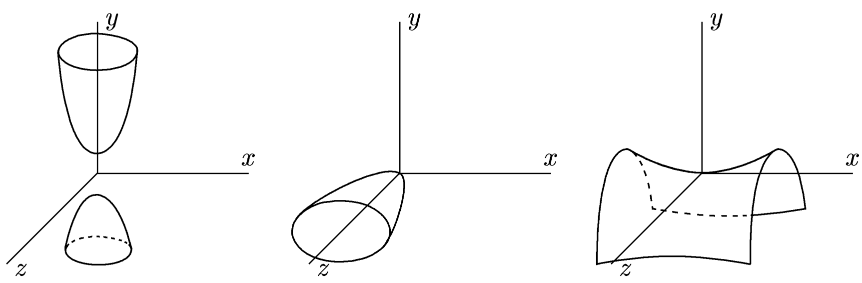
3. **Конические поверхности**. Уравнения этих поверхностей, записанных в собственной системе координат, содержат только слагаемые с квадратами трех переменных. Свободный член равен нулю и



а) Эллиптический цилиндр б) Гиперболический цилиндр в) Параболический цилиндр



г) Круговой конус д) Эллипсоид е) Однополостный гиперболоид



ж) Двухполостный гиперболоид з) Эллиптический параболоид и) Гиперболический параболоид

Рис. 0.3. Поверхности второго порядка

одно из слагаемых входит в сумму со знаком, противоположным двум другим слагаемым. На рис. 0.3,г изображена коническая поверхность, описываемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{45}$$

В сечениях этих поверхностей координатными плоскостями (для поверхности (45) $x = 0$ и $y = 0$) получаются пары прямых типа

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{a} = \pm\frac{z}{c}.$$

При $a = b$ коническая поверхность становится круговой.

4. **Эллипсоид** — это геометрическое место точек в $\Re_3$, удовлетворяющих каноническому уравнению (рис. 0.3,д):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{46}$$

В сечениях этой поверхности плоскостями $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ получаются эллипсы.

5. **Однополостный гиперболоид** — геометрическое место точек в $\Re_3$, удовлетворяющих каноническому уравнению (рис. 0.3,е):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{47}$$

Минус в канонических уравнениях однополостных гиперболоидов может стоять только перед одним из слагаемых уравнения. Переменная, перед которой стоит минус, определяет *мнимую ось* гиперболоида. В сечениях поверхности координатными плоскостями x=0 и z=0 получаются гиперболы; $y = \pm h$ (в том числе $h = 0$) — эллипсы.

6. **Двухполостный гиперболоид** — геометрическое место точек в $\Re_3$, удовлетворяющих каноническому уравнению (рис. 0.3,ж):

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{48}$$

Отрицательные слагаемые этого уравнения определяют координаты плоскости $y = 0$, которую не пересекает поверхность гиперболоида.

В сечениях поверхности координатными плоскостями $x = 0$ и $z = 0$ получаются гиперболы; $y = \pm h$ $(h > b)$ — эллипсы.

7. **Эллиптический параболоид** — геометрическое место точек в $\Re_3$, удовлетворяющих каноническому уравнению (рис. 0.3,з):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = pz. \tag{49}$$

В сечениях поверхности координатными плоскостями x=0 и y=0 получаются параболы; сечение $z = 0$ определяет точку (0;0;0) — вершину параболоида; $z = h > 0$ — эллипсы.

8. **Гиперболический параболоид** — геометрическое место точек в $\Re_3$, удовлетворяющих каноническому уравнению (рис. 0.3,и):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = by. \tag{50}$$

Для канонического уравнения этой поверхности характерно то, что слагаемые с квадратами координат имеют противоположные знаки, а третья координата входит в уравнение в первой степени.

Для анализа форм поверхностей широко используется метод сечений. Метод в виде сечений координатными плоскостями применялся выше. В общем поверхности можно рассекать плоскостями, параллельными координатным плоскостям, или даже плоскостями общего вида.

Так, при $x = \pm d$ из (50) получим

$$z^2 = -2p(y - y_0),$$

где $p = \dfrac{1}{2}bc^2$, $y_0 = \dfrac{d^2}{a^2b}$.

Полученные в двух сечениях кривые представляют собой параболы, ветви которых направлены в сторону отрицательных y, а вершины смещены в сторону положительных y на величину y_0. Кривые, соответствующие обсуждаемому уравнению параболы, показаны на рис. 0.3,и — это крайние правое и левое сечения.

Других поверхностей второго порядка, кроме перечисленных, не существует.

Записанные в произвольных координатах поверхности второго порядка в $\Re_3$ и гиперповерхности в $\Re_n$ содержат слагаемые с произведениями координат. Преобразование поворота и параллельного переноса осей координат позволяют привести эти уравнения к каноническому виду (содержащему только квадраты переменных).

Л Е К Ц И Я 14

ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА ТОЧЕК

Множества, элементами которых являются точки, называют *точечными множествами.*

Множество $\Re_1$ представляет собой точечное множество на неограниченной прямой. Любое подмножество $\Re_1$, например, отрезок прямой, также представляет собой точечное множество.

Точечное множество в $\Re_2$ — это точки неограниченной плоскости или любой части плоскости, например, ограниченные замкнутыми кривыми.

В $\Re_3$ — это точки бесконечного трехмерного пространства или любой его (неограниченной или ограниченной) части.

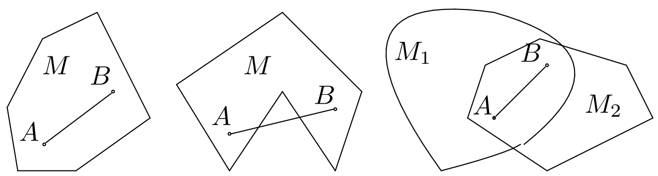
В общем случае точечное множество может быть представлено в $\Re_n$.

Множество $B \subset \Re_n$ называется *выпуклым,* если для любых $X_1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)^T$ и $X_2 = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)^T \in B$ выполняется условие

$$\alpha X_1 + (1-\alpha) X_2 \in B, \quad (\alpha \in [0,1]).$$

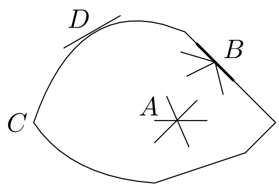
Другими словами, множество точек будет выпуклым, если все точки, принадлежащие отрезку, соединяющему две любые точки A и B множества, также принадлежат этому множеству.

На рисунках показаны примеры выпуклого точечного и невыпуклого множеств в $\Re_2$,.



Теорема. *Пересечение двух выпуклых множеств является выпуклым множеством.*

Справедливость теоремы поясняется рисунком. Действительно, если $AB \in M_1 \bigcap M_2$, то $AB \in M_1$ и $AB \in M_2$. Но M_1 и M_2 — выпуклые множества. Следовательно, $M_1 \bigcap M_2$ также выпуклое множество, так как оно состоит из точек, принадлежащих одновременно M_1 и M_2.



Пользуясь методом математической индукции, можно доказать, что пересечение конечного числа выпуклых множеств также является выпуклым множеством.

Ограниченные множества имеют *внутренние точки* и *граничные точки.*

Для любой внутренней точки множества рассматриваемого пространства (например, точка A всегда можно выбрать проходящий через эту точку произвольно направленный отрезок некоторой длины такой, для которого A является внутренней точкой и все точки которого принадлежат множеству.

Для граничных точек множества (например, точка B) проходящий через них отрезок не может иметь, по крайней мере, произвольного направления, все точки отрезка которого лежат или на границе множества, или внутри него.

Точка выпуклого множества называется *угловой точкой,* если через нее нельзя провести ни одного отрезка, состоящего только из точек множества и для которого эта точка была бы внутренней (точки C и D).

Следуя введенным определениям, можно говорить о выпуклых многоугольниках, многогранниках и т.д.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ В $\Re_2$

Рассмотрим одно линейное уравнение с двумя переменными (неизвестными) x_1 и x_2:

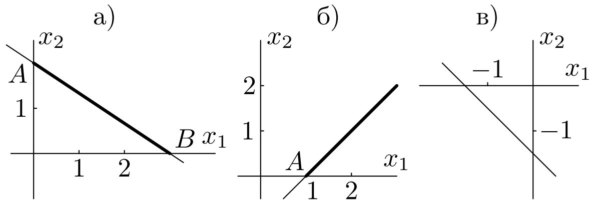
$$2x_1 + 3x_2 = 6.$$

Это частный вид «системы уравнений» при $m = 1$ и $n = 2$.

Найдем множество всех допустимых решений этой «системы», базисные решения и граничные точки.

Напомним, что *допустимыми решениями* в экономике называют решения с неотрицательными значениями переменных.

Каждое решение заданного уравнения представляет собой пару чисел, лежащих на неограниченной прямой.



Допустимые (неотрицательные) решения этого уравнения лежат на отрезке AB прямой, расположенной в первой координатной четверти и имеющей две граничные точки $A(0;2)$ и $B(3;0)$.

Базисным решением называют решение уравнения (системы уравнений), в которых основные (базисные) переменные выражены через свободные переменные.

Найдем все возможные варианты записи общих решений уравнения. Если принять x_1 за основную переменную, x_2 — за свободную (неосновную), то общее решение запишется в виде

$$x_1 = 3 - \frac{3}{2}x_2.$$

Полагая $x_2 = 0$, получим частное решение (3;0).

Если за основную переменную принять x_2, то на основе общего решения

$$x_2 = 2 - \frac{2}{3}x_1$$

при $x_1 = 0$ получим частное решение (0;2).

Оба частные решения допустимы. Им соответствуют граничные точки A и B множества решений.

При $x_1 \in [0;3]$ и $x_2 \in [0;2]$ из заданного уравнения можно получить все возможные варианты допустимых решений. Все они представляют собой точки, принадлежащие отрезку AB прямой.

Для уравнения

$$x_1 - x_2 = 1$$

существует единственная граничная точка для допустимых решений — это точка $A(1;0)$. Вторая точка находится в бесконечности.

Уравнение

$$2x_1 + 2x_2 + 3 = 0$$

вообще не имеет граничных допустимых решений и, следовательно, точек с допустимыми решениями.

Линейные неравенства для одного уравнения с двумя переменными представляются в двух видах:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + b \geq 0 \tag{51}$$

или

$$a_1x_1 + a_2x_2 + b < 0. \tag{52}$$

Каждому из бесчисленного множества решений неравенств соответствует пара чисел $(x_1; x_2)$, совокупность которых представляет собой точку на плоскости. Геометрический смысл множества решений этих неравенств устанавливает следующая приводимая без доказательства теорема.

Теорема. *Множеством решений линейного неравенства* (51) *служит одна из двух полуплоскостей, на которые всю неограниченную плоскость делит прямая* $a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0$, *включая эту прямую. Вторая полуплоскость без самой прямой является множеством решений строгого неравенства* (52).

Установить принадлежность точек полуплоскости тому или иному неравенству можно с помощью *пробной точки* — это произвольная точка, принадлежащая одной из полуплоскостей, но не лежащая на прямой.

Координаты пробной точки подставляются вместо неизвестных в одно из неравенств (51) или (52). Если неравенство удовлетворяется, то полуплоскость, которой принадлежит пробная точка, описывается этим неравенством; в противном случае — вторым неравенством. В качестве пробной точки удобно использовать начало координат, если прямая не проходит через него.

Рассмотрим систему двух неравенств с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \geq 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \geq 0. \end{cases} \tag{53}$$

Знаки неравенств могут иметь противоположное направление, или быть строгими.

В общем случае множеством решений системы m неравенств в $\Re_2$ (если система соответствующих уравнений совместна) являются точки, принадлежащие пересечению полуплоскостей множеств решений всех неравенств. Это множество имеет конечное число угловых точек.

Система двух неравенств имеет не более одной угловой точки. Это точка пересечения двух прямых, описываемых уравнениями, следующими из (53).

Границами трех неравенств на плоскости являются в общем случае три прямые. Угловыми точками таких выпуклых множеств являются точки пересечения прямых.

Множеством решений системы m совместных линейных неравенств с двумя переменными является выпуклый многоугольник на плоскости, количество угловых точек в котором не превосходит m.

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Принятие оптимального решения — основная задача планирования любого процесса, протекающего в зависимости от воздействия на него человека. В экономике многие задачи нацелены, в частности, на разработку таких планов развития фирм и деятельности отдельных лиц и сообществ, которые приводят к получению наибольшей прибыли или наибольшей экономии.

Пусть вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \Re_n$ определяет совокупность n переменных $x_j \quad (j = \overline{1, n})$, а $F(X) \in \Re$ — функция, определенная на множестве Ω, состоящем из этих n переменных.

Оптимизационная задача $(F; \Omega)$ сводится к отысканию максимального или минимального значений $F(X)$ на множестве значений Ω. При этом $F(X)$ называется *целевой функцией,* а Ω – *множеством допустимых решений* (*допустимым множеством*) оптимизационной задачи. *Допустимым множеством* в экономике называют множество с неотрицательными элементами $(X \geq \Theta)$.

Решением оптимизационной задачи называется такое значение вектора переменных $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)^T$, при котором для любых $X \in \Omega$ выполняется условие $F(X^*) \leq F(X)$ для задачи отыскания минимального значения функции и $F(X^*) \geq F(X)$ – для максимального значения.

Если задача оптимизации не имеет решения, то она называется *неразрешимой.* Задача не разрешима, в частности, если целевая функция не ограничена на допустимом множестве Ω.

Задача отыскания максимума $(F; \Omega)$ легко сводится к задаче отыскания минимума сменой знака целевой функции, т.е. к задаче $(-F; \Omega)$.

Задачу отыскания оптимального решения можно осуществить *методами математического программирования* (термин «программирование» относится к выработке некоторой программы действий по отысканию оптимальных значений функции).

В зависимости от вида целевой функции и множества допустимых решений математическое программирование включает в себя частные виды задач, в том числе:

— линейное программирование (ЛП);

— целочисленное программирование (ЦП);

— нелинейное, в частности, выпуклое программирование (ВП);

— динамическое программирование (ДП).

Решением оптимизационных задач занимаются и такие разделы математики, как вариационное исчисление, теория оптимального управления, теория игр и др.

Л Е К Ц И Я 15

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ЛП

Оптимизационная задача $(F;\Omega)$, в которой целевая функция F является линейной и множество допустимых решений ограничено кусочно-линейными функциями, называется *задачей линейного программирования.* Упомянутые кусочно-линейные функции представляют собой систему линейных неравенств.
Среди них могут быть и равенства.

В *классической* постановке математическая модель задачи ЛП представляет собой группу соотношений:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \Longrightarrow \max(\min); \tag{54}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases} \tag{55}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n}). \tag{56}$$

Соотношение (54) определяет *целевую функцию,* выраженную через искомые переменные x_j и *весовые коэффициенты* c_j. Знак $\Longrightarrow$ max(min) означает, что целевая функция после завершения решения задачи должна принять максимальное (минимальное) значение. Система неравенств (55) – это *ограничения,* накладываемые на изменения некоторых показателей задачи ЛП. Неравенства (56) выражают требование: переменные задачи не должны выходить за пределы области допустимых значений (должны быть неотрицательными).

Если вместо знаков $\le$ (или $<$) в сформулированной задаче ЛП стоят $\ge$ (или $>$), то для изменения знаков на противоположные, т.е преобразования неравенств к виду (55), достаточно умножить их на -1. Такие же действия применимы к целевой функции для изменения ее предельного значения с max на min.

Записанная в виде соотношений (54)–(56) задача ЛП может быть представлена в более компактном виде с использованием символа суммирования:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \Longrightarrow \max(\min);$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad (i = \overline{1,m});$$

$$x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,n}).$$

Введем обозначения:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Матрица $\boldsymbol{A}$ называется *матрицей условий*, *технологической матрицей*, или *матрицей норм расхода*, в зависимости от того, какой смысл вложен в совокупность ее элементов; $\boldsymbol{B}$ — вектор ограничений; $\boldsymbol{X}$ — вектор переменных; $\boldsymbol{C}$ — вектор весовых коэффициентов.

Тогда математическая модель задачи линейного программирования представится в матричной форме:

$$F = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{X} \Longrightarrow \max(\min);$$

$$\boldsymbol{AX} \le \boldsymbol{B};$$

$$\boldsymbol{X} \ge \boldsymbol{\Theta}.$$

В матрицу A входят подматрицы

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots,$$

$$\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

называемые *векторами условий*. Матрицу условий можно выразить через эти векторы:

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{A}_2 \dots \boldsymbol{A}_n)\,.$$

Ограничения можно записать, используя векторы условий:

$$\boldsymbol{A}_1 x_1 + \boldsymbol{A}_2 x_2 + \dots + \boldsymbol{A}_n x_n \leq \boldsymbol{B}.$$

Свойства задач линейного программирования

1. Допустимое множество Ω решений задачи ЛП либо пусто, либо является выпуклым множеством пространства $\Re_n$.

2. Если допустимое множество Ω задачи ЛП не пусто, а целевая функция F ограничена на Ω, то задача ЛП имеет оптимальное решение.

3. Оптимальные решения задачи ЛП (если они существуют) всегда находятся на границе множества Ω.

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ ЛП

Задача о рационе

На ферме имеется n видов кормов, каждый из которых содержит m разновидностей питательных веществ. Одна единица j-го вида кормов $(j = \overline{1, n})$ содержит a_{ij} единиц i-го питательного вещества $(i = \overline{1, m})$ и имеет стоимость c_j.

Требуется составить такой рацион, который удовлетворял бы всем потребностям в питательных веществах $b_i \;\; (i = \overline{1, m})$ и имел бы минимальную стоимость. Минимально необходимые количества питательных веществ b_i известны.

Обозначим через x_j количество j-го корма в рационе, а через F – стоимость всего рациона потребных кормов. Тогда

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Longrightarrow \min\,.$$

Рацион должен удовлетворять всем потребностям в питательных веществах. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = \overline{1, m}).$$

Вместе с ограничениями

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n})$$

выписанные соотношения образуют задачу ЛП.

З а д а ч а п л а н и р о в а н и я п р о и з в о д с т в а

Предприятие располагает m видами ресурсов и может выпускать некоторую продукцию n различными способами. За единицу времени использования j-го способа производства $(j = \overline{1, n})$ расходуется a_{ij} единиц i-го ресурса $(i = \overline{1, m})$ и выпускается c_j единиц продукции.

Требуется составить такой план производства предприятия, который позволит ему выпускать наибольшее количество продукции при условии, что количество ресурсов i-го вида на предприятии равно b_i (большего количества предприятие не имеет возможности израсходовать).

Пусть x_j – время использования предприятием j-го способа производства. Если F – общее количество выпускаемой продукции, то

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Longrightarrow \max .$$

Работая по этому плану, предприятие израсходует $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ единиц i-го ресурса, ограниченного величиной b_i. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i .$$

Вместе с ограничениями

$$x_j \geq 0$$

выписанные соотношения образуют задачу ЛП.

Т р а н с п о р т н а я з а д а ч а

Пусть каждое из m предприятий изготавливает однотипную продукцию в количествах a_i $(i = \overline{1, m})$. Продукция поставляется каждому из n потребителей в количествах b_j $(j = \overline{1, n})$. Известны стоимости c_{ij} перевозки единицы продукции от i-го производителя j-му потребителю. Требуется определить план перевозок – количества товаров x_{ij}, которые следует переправить от i-го производителя j-му потребителю и при этом расходование средств будет минимальным.

Суммарные затраты на перевозку всех производимых товаров потребителям представляет собой целевую функцию, которую необходимо минимизировать:

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \Longrightarrow \min .$$

Количество продукции, производимой i-м производителем и поставляемой всем n потребителям:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad (i = \overline{1, m}).$$

Количество продукции, получаемой j-м потребителем от всех m производителей:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad (j = \overline{1, n}).$$

При равенстве количеств производимой и потребляемой продукции можно составить уравнения баланса:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Целевая функция вместе с соотношениями баланса, которые в транспортной задаче играют роль ограничений, представляют собой модель задачи ЛП.

В первых двух задачах ограничения записывались в виде неравенств, хотя часть из них могут быть равенствами; в последней задаче ограничения представляют собой строгие равенства в случае, если количество производимых товаров равно количеству потребляемых. Следует заметить, что упомянутое различие несущественно для задач ЛП. Действительно, любое равенство для суммы двух и более функций $f(X) + g(X) = 0$ можно представить в виде двух неравенств: $f(X) \geq 0$ и $g(X) < 0$. С другой стороны, к любому неравенству можно прибавить некоторое слагаемое, которое превратит его в равенство.

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛП

Рассмотрим задачу ЛП в пространстве $\Re_2$, то есть задачу, в которую входят только две переменные x_1 и x_2:

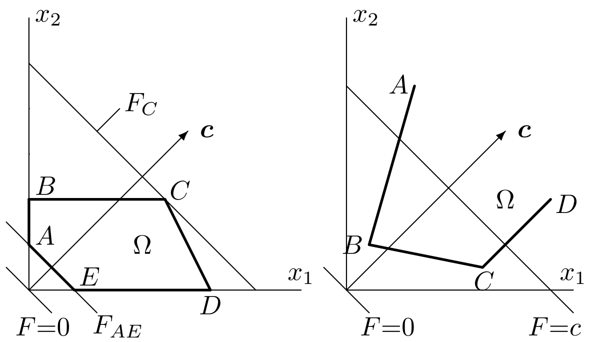
$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \Longrightarrow \max; \tag{57}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m; \end{cases} \tag{58}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0. \tag{59}$$

Каждое из неравенств (58) определяет на координатной плоскости x_1x_2 некоторую полуплоскость. Допустимое множество Ω решений задачи представляет собой пересечение конечного числа m полуплоскостей (58) и ограничено выпуклым многоугольником.

Предположим, что область Ω, ограниченная неравенствами (58), построена (ограничена жирными линиями на рисунке.



Вектор

$$\boldsymbol{c} = (c_1;\ c_2)$$

перпендикулярен прямой $c_1x_1 + c_2x_2 = const$ ($const$ (константа) — произвольная постоянная величина). При положительных c_1 и c_2 вектор направлен в сторону возрастания F.

Проведем на плоскости прямые, перпендикулярные $\boldsymbol{c} = (c_1; c_2)$, для различных значений целевой функции: F_0, F_{AE}, F_C, ... Первая из них не пересекает область Ω (проходит через начало координат), вторая совпадает с границей области AE, третья касается границы области только в одной угловой точке C.

В точке C, являющейся общей точкой для целевой функции и области Ω, F имеет максимальное из возможных значений. Координаты x_{1C} и x_{2C} точки C удовлетворяют одновременно уравнению $c_1x_1+c_2x_2 = F_C$, и системе неравенств (58). Это точка удалена на максимально возможное для области Ω расстояние от начала координат в направлении вектора $\boldsymbol{c}$.

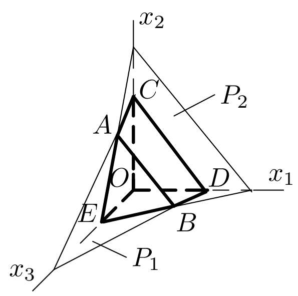
Если требуется отыскать минимальное значение целевой функции F, удовлетворяющей неравенствам (58), то это значение $F = F_{AE}$ будет соответствовать наименьшему удалению прямой $c_1x_1 + c_2x_2 = const$ от начала координат.

Отметим, что для задачи, геометрический образ которой изображен на рисунке, максимальному значению целевой функции соответствует единственная пара значений координат $(x_{1C}; x_{2C})$, тогда как минимальному значению функции – любые координаты точек прямой $c_1x_1 + c_2x_2 = F_{AE}$, лежащие на отрезке AE границы Ω.

Не рисунке справа область допустимых значений Ω не ограничена в направлении возрастания вектора $\boldsymbol{c}$. Целевая функция не ограничена сверху. Ее максимальное значение стремится к бесконечности.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗАДАЧ ЛП В $\Re_3$

В случае $\Re_3$ ограничения типа $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$ представляют собой плоскости, а $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \leq b_i$ — выпуклое трехмерное полупространство.



На рисунке изображены следы двух пересекающихся по линии AB плоскостей, соответствующих двум ограничениям

P_1: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$ и

P_2: $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$.

Плоскости $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$, ограничивающие пространство первого координатного угла ($x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ \ x_3 \geq 0$), пересекаются с

плоскостями P_1 и P_2 по следующим прямым.
P_1: по прямой AC с плоскостью $x_1 = 0$; по прямой BD с плоскостью $x_2 = 0$ и по прямой CD с плоскостью $x_3 = 0$.
P_2: по прямой AE с плоскостью $x_1 = 0$ и по прямой BE с плоскостью $x_2 = 0$.

Выпуклый пятигранник $OCDBEA$ образует область (множество) допустимых решений задачи.

Что касается функции $F{=}c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3$, то при ее фиксированном значении $F = const$ получаемое уравнение описывает плоскость P, перпендикулярную вектору $\boldsymbol{c} = (c_1; c_2; c_3)$. При $F{=}0$ эта плоскость проходит через начало координат. Для задачи отыскания максимума целевой функции значение F_{max} при положительных коэффициентах c_1, c_1 и c_3 будет соответствовать плоскости P, наиболее удаленной от начала координат в направлении вектора $\boldsymbol{c}$ и имеющей общую точку (общие точки) с областью допустимых решений Ω.

В зависимости от направления вектора $\boldsymbol{c}$ это может быть одна из угловых точек O, A, B, C, D, E, одно из ребер многогранника $OCDBEA$ (OC, CD, AB, $\ldots$) или одна из граней, например $ABDC$ (в случае, если вектор $\boldsymbol{c}$ перпендикулярен плоскости P_1). В последнем случае будут пропорциональны координаты векторов нормалей к плоскостям P и P_1, т.е. будут выполняться условия: $\dfrac{c_1}{a_{11}} = \dfrac{c_2}{a_{12}} = \dfrac{c_3}{a_{13}}$.

Обобщение сказанного на пространство $\Re_n$ очевидно. Для этого достаточно рассмотренные плоскости заменить на гиперплоскости и записать их уравнения $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$ в пространстве с n взаимно ортогональными координатными плоскостями $x_j = 0$ $(j = \overline{1, n})$.

КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАДАЧИ ЛП

Для простоты рассуждений будем считать, что ограничения представляют собой только неравенства. Случаи, когда среди неравенств имеются уравнения, будут рассмотрены на примерах решения частных задач ЛП.

Каноническая форма задачи ЛП тем, что в ней неравенства системы ограничений путем введения дополнительных переменных преобразуются в равенства.

Добавим к первому неравенству системы новую переменную x_{n+1} такую, которая превращает неравенство в равенство. Аналогично — ко второму неравенству — переменную x_{n+2}, $\ldots$, к последнему неравенству переменную x_{n+m}.

В *классической постановке* задачи ЛП при $F \Longrightarrow \max$ неравенства ограничений имеют знак $\leq$. Поэтому все добавляемые переменные будут неотрицательны. Кроме того, новые переменные фиктивные, поэтому в целевую функцию они входить не будут (войдут с нулевыми множителями).

В результате придем к *канонической форме* задачи ЛП:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \Longrightarrow \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1, (n+m)}\right).$$

Систему ограничений представим в матричной форме;

$$AX = B,$$

где

$$\underset{m\times(n+m)}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix};$$

$$\underset{(n+m)\times 1}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix}; \qquad \underset{(m\times 1)}{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Полученная путем добавления фиктивных переменных система уравнений линейно независима потому, что подматрица коэффициентов, стоящих при введенных фиктивных переменных (второе равенство для матрицы A), является единичной матрицей порядка m, равного количеству уравнений.

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ЛП

Чтобы задача ЛП имела решение, система ее ограничений должна быть совместной. Совместность уравнений будет обеспечена, если ранг r матрицы ее коэффициентов не меньше ранга расширенной матрицы (теорема Кронекера-Капелли). В частном случае, если в задаче ЛП все ограничения представлены в виде неравенств (равенства в исходной системе отсутствуют), то количество линейно независимых уравнений приведенной к каноническому виду системы ограничений будет равно рангу матрицы коэффициентов (количеству уравнений или равному ему количеству добавочных неизвестных m). В то же время общее количество неизвестных равно $n+m$. То есть, если система уравнений системы ограничений совместна, то она в общем случае будет иметь бесчисленное множество решений.

Ограничения приведенной к каноническому виду задачи ЛП:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n + x_{n+1}A_{n+1} + \ldots + x_{n+m}A_{n+m} = B. \quad (60)$$

Здесь $A_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^T \quad (j = \overline{1, n+m})$ — векторы-столбцы матрицы коэффициентов системы ограничений.

Из системы векторов $A_1,\ldots$, A_n, A_{n+1}, $\ldots$, A_{n+m} можно выбрать совокупность максимального количества линейно независимых векторов, образующих базис. Базисов может быть несколько. Для простоты дальнейших рассуждений будем считать, что номера векторов A_j $(j = \overline{1, m+n})$ упорядочены так, что последние m из них A_{n+1}, $\ldots$, A_{n+m} образуют базис. Нумерация соответствует тому, что исходная базисная матрица коэффициентов во многих задачах линейного программирования будет единичной. Выбранному базису соответствуют базисные переменные (60) $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$. Тогда оставшиеся переменные x_1, $x_2,\ldots$, x_n будут относиться к свободным переменным.

Выражая базисные переменные через свободные, получим общее решение системы ограничений. Одним из частных решений системы ограничений является решение, полученное при условии равенства нулю всех свободных переменных.

Опорным решением задачи ЛП называется вектор ее допустимого решения при условии, что все свободные переменные равны нулю. Опорное решение представляет собой совокупность неотрицательных координат в разложении (60), стоящих множителями при линейно независимых векторах A_{n+1}, A_{n+2}, $\ldots$, A_{n+m} (базисных векторах):

$$X = (x_1 = 0; \ldots; x_m = 0; x_{m+1}; \ldots; x_{m+n})^T.$$

Пример. Рассмотрим систему ограничений задачи ЛП, приведенную к каноническому виду:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 8; \end{cases} \quad (61)$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,4}).$$

Система ограничений задачи может быть представлена в виде

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}. \qquad (62)$$

Векторы $X^1 = (0; 2; 0; 6)^T$ и $X^2 = (1; 1; 1; 3)^T$, как легко в этом убедиться, являются допустимыми решениями системы ограничений.

Индексами сверху обозначений векторов решений и векторов ограничений здесь и в дальнейшем будем обозначать варианты решений.

Проверим, будут ли векторы X^1 и X^2 опорными решениями задачи ЛП.

В случае решения X^1 система ограничений (62) превратится в тождества:

$$2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

В этом случае имеем два вектора условий (векторов коэффициентов при неизвестных x_2 и x_4 в ограничениях):

$$A_2^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A_4^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Эти векторы линейно независимы. Утверждение справедливо потому, что для них нельзя подобрать такие коэффициенты λ_1 и λ_2, одновременно не равные нулю, чтобы выполнялось условие

$$\lambda_1 A_2^1 + \lambda_2 A_4^1 = 0.$$

Линейная независимость векторов следует и из того, что ранг матрицы

$$A^1 = (A_2^1, A_4^1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

составленной из двух векторов, равен двум (определитель матрицы не равен нулю).

Для вектора решения X^2 имеем четыре вектора условий:

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad A_2^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A_4^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Эти векторы линейно зависимы. Утверждение справедливо хотя бы потому, что векторы A_1^2 и A_2^2 могут быть представлены в виде линейных комбинаций векторов A_3^2 и A_4^2:

$$A_1^2 = A_3^2 + 4A_4^2;$$

$$A_2^2 = 2A_3^2 + A_4^2.$$

Пара векторов A_2^1 и A_4^1 образует базис в системе четырех векторов условий, а четыре вектора A_1^2, A_2^2, A_3^2 и A_4^2 — не образуют. Согласно приведенному определению, вектор X^1 является опорным решением задачи, а X^2 таковым не является.

Теорема 1. *Решение X^i задачи ЛП будет опорным в том случае, если в разложении* (60) *вектора ограничений $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$ по векторам базиса A_1^i, A_2^i, …, A_m^i все коэффициенты (переменные x_j) неотрицательны.*

Утверждение теоремы следует из условий неотрицательности переменных задачи.

Вектор $X^3 = (0; 8; -12; 0)^T$ удовлетворяет системе уравнений (61) и имеет базис линейно независимых векторов:

$$A_2^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

но вектор ограничений $B = (4; 8)$ раскладывается по этому базису, имея отрицательный коэффициент при A_3^3:

$$B = 8A_2^3 - 12A_3^3$$

или

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 12 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому вектор X^3 не может рассматриваться в качестве опорного решения.

Для рассмотренного примера матрица коэффициентов системы ограничений с помощью элементарных преобразований может быть приведена к единичной матрице второго порядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, ранг матрицы и количество базисных векторов условий равны 2.

Опорное решение называется *невырожденным,* если число его ненулевых координат точно равно рангу матрицы коэффициентов, и *вырожденным* — в противном случае. В рассмотренном примере X^1 и X^3 — векторы невырожденных решений, а X^2 — вектор вырожденного решения.

Задача ЛП может иметь несколько (но ограниченное количество) опорных решений. Одно из опорных решений будет оптимальным. Поэтому оптимальное решение следует искать среди опорных решений.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Если совокупность векторов условий A_1, A_2, ..., A_{n+m} содержит m линейно независимых векторов, A_{n+1}, A_{n+2}, ..., A_{n+m}, то опорный план*

$$X = (x_1 = 0, \ldots, x_m = 0, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n})^T$$

соответствует крайней точке области допустимых решений Ω.

В справедливости теоремы убедимся на примере задачи ЛП в $\Re_2$.

В этом случае ограничения сводятся к системе двух неоднородных линейно независимых уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Решением системы уравнений являются две координаты x_1 и x_2 точки пересечения двух прямых, представленных системой уравнений. Это — угловая точка выпуклой области допустимых решений задачи.

Для $\Re_3$ система ограничений сводится к системе трех уравнений с тремя неизвестными. Решение системы дает в общем случае три координаты угловой точки пересечения трех плоскостей.

Обобщение рассуждений на пространство $\Re_n$ убеждает в справедливости теоремы.

Еще одну теорему, определяющую свойство решения задач ЛП, приведем без доказательства.

Теорема 3. *Если задача ЛП имеет решение, то целевая функция F достигает своего экстремального значения хотя бы в одной из крайних точек области* Ω.

УЛУЧШЕНИЕ РЕШЕНИЯ. ПРИЗНАКИ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Рассмотрим два примера решения задач ЛП, исходные соотношения для которых приведены к каноническому виду.

Пример 1.

$$F = 5 - x_1 + x_2 \implies \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 8; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,4}).$$

Запишем уравнения системы ограничений в матричном виде и преобразуем полученное выражение, выделив в нем единичную матрицу коэффициентов при основных переменных:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \end{array} \implies \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 8 & -4 & -1 \end{array}\right). \\ \begin{array}{ccccc} x_3 & x_4 & & x_1 & x_2 \end{array} \end{array}$$

Отсюда получаем общее решение системы ограничений:

$$x_3 = 4 - x_1 - 2x_2, \tag{63}$$

$$x_4 = 8 - 4x_1 - x_2. \tag{64}$$

В приведенных преобразованиях в качестве опорного решения в нулевом приближении выбран вектор $X^0 = (0, 0, x_3, x_4)^T$, единичные базисные векторы для которого $A_3 = (1, 0)^T$ и $A_4 = (0, 1)^T$ линейно независимы и образуют единичную матрицу.

Свободные переменные x_1 и x_2 будем считать равными нулю. Тогда частным решением системы ограничений (решением в нулевом приближении) будет вектор $X^0 = (0, 0, 4, 8)^T$. При найденных значениях координат вектора решения X^0 целевая функция

$$F^0 = 5 - 0 + 0 = 5.$$

Возникает вопрос: можно ли уменьшить значение F, приблизив его к минимальному, и если да, то каким образом?

Для ответа на этот вопрос обратимся к исходному выражению для целевой функции. Переменная x_1 входит в выражение для F с коэффициентом -1. Так как все переменные задачи — неотрицательные величины, то уменьшить значение целевой функции можно, увеличивая значение переменной x_1. Такое утверждение не подходит к переменной x_2, которая в нулевом приближении принята равной нулю, а ее увеличение приведет к росту функции цели.

Если в решениях (63) и (64) переменную x_2 оставить равной нулю (этого требует условие минимизации F), то из условия неотрицательности переменных x_3 и x_4 следует, что в выражении (63) x_1 может достичь максимального значения $x_1 = 4$ (x_3 при этом станет равной нулю), а в выражении (64) может достичь максимального значения при $x_1 = \frac{8}{4} = 2$.

Из двух предельных величин для x_1 следует выбрать меньшее: $x_1 = 2$ (при $x_1 = 4$ переменная x_4 в выражении (64) становится отрицательной, что недопустимо):

$$x_1 = \min\left\{\frac{4}{1}; \frac{8}{4}\right\} = 2.$$

Требуемое значение x_1 получено из (64). Из этого же равенства выразим новую основную переменную:

$$x_1 = 2 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_4. \tag{65}$$

Выражение для второй основной переменной получается из (63) заменой x_1 на (65):

$$x_3 = 4 - (2 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_4) - 2x_2 = 2 - \frac{7}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_4. \tag{66}$$

Запишем выражение для функции цели в первом приближении:

$$F^1 = 5 - (2 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_4) + x_2 = 3 + \frac{5}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_4 \implies min. \tag{67}$$

При равенстве нулю свободных переменных x_2 и x_4 получаем

$$F^1 = 3.$$

Это значение целевой функции является минимальным, так как в выражении (67) у обеих переменных коэффициенты положительные. Их увеличение не может привести к уменьшению значения F.

Пример 2.

$$F = -x_1 - x_2 \implies \min;$$

$$\begin{cases} -x_1 + \ x_2 + x_3 = 1, \\ \ \ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,4}).$$

Запишем уравнения системы ограничений в матричном виде и преобразуем полученные выражения, выделив в них единичную матрицу коэффициентов при основных переменных:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \\ \scriptstyle x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{rr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right). \\ \scriptstyle x_3 \quad x_4 \qquad\quad x_1 \qquad x_2 \end{array}$$

Отсюда получаем общее решение системы ограничений:

$$x_3 = 1 + x_1 - x_2, \tag{68}$$

$$x_4 = 2 - x_1 + 2x_2. \tag{69}$$

Свободные переменные будем считать равными нулю. Тогда опорным решением системы ограничений (решением в нулевом приближении) будет вектор $X^0 = (0\ 0\ 1\ 2)^T$. При этих значениях координат вектора решения целевая функция

$$F^0 = -0 - 0 = 0.$$

Исходное выражение для целевой функции таково, что рост обеих входящих в него переменных x_1 и x_2 будет приближать F к минимуму. Увеличение переменной x_1 ограничено величиной 2, что следует из равенства (69), а переменной x_2 — значением 1, получаемом из (68). При $x_1 > 2$ и $x_2 > 1$ переменные x_4 и x_3 становятся отрицательными (недопустимыми).

Так как $x_1 = 2$ больше, чем $x_2 = 1$, а эти переменные входят в выражение для целевой функции с одинаковыми коэффициентами ($c_1 = c_2 = -1$), то в качестве новой основной переменной выбираем x_1, а свободной переменной станет x_4.

Из (69) следует

$$x_1 = 2 + 2x_2 - x_4. \tag{70}$$

В выражении (68) заменим x_1:

$$x_3 = 1 + (2 + 2x_2 - x_4) - x_2 = 3 + x_2 - x_4. \tag{71}$$

Функция цели при новых свободных переменных (в первом приближении):

$$F^1 = -(2 + 2x_2 - x_4) - x_2 = -2 - 3x_2 + x_4$$

равна -2 при $x_2 = x_4 = 0$.

Переменную x_4 в выражении для F^1 увеличивать нельзя (функция цели будет расти). Что касается переменной x_2, то она может возрастать неограниченно, ибо в выражения (70) и (71) она входит с положительными коэффициентами.

Оптимального решения не существует:

$$minF \to -\infty.$$

Пример 3.

Задачи, рассмотренные в примерах 1 и 2, обобщим, ограничиваясь четырьмя переменными и двумя уравнениями условий:

$$F = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \implies \min; \tag{72}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = b_2; \end{cases} \tag{73}$$

$$x_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,4}).$$

Представление системы ограничений в виде (73) (с единичной матрицей при переменных x_3 и x_4) позволяет выбрать простейший исходный базис $A^0 = (A_3, A_4)$ (базис нулевого приближения) в виде единичных векторов-столбцов при переменных x_3 и x_4:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \implies \quad A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

В этом случае общее решение системы уравнений (73) примет вид

$$x_3 = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2, \tag{74}$$

$$x_4 = b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2. \tag{75}$$

При нулевых значениях свободных переменных ($x_1 = x_2 = 0$) из выражений (74)–(75) получается частное решение для основных переменных: $x_3 = b_1$, $x_4 = b_2$. Вектор опорного решения в нулевом приближении

$$X^0 = (0; 0; x_3; x_4)^T = (0; 0; b_1; b_2)^T,$$

и целевая функция

$$F^0 = c_0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 = c_0.$$

Вопрос о необходимости дальнейшего улучшения решения зависит от коэффициентов при переменных в целевой функции и в ограничениях. При этом возможны три случая.

Случай 1. *Все коэффициенты при свободных переменных в функции цели F не отрицательны*: $c_1 \geq 0$; $c_2 \geq 0$.

В этом случае для любого неотрицательного решения $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$ системы (73) $c_1 x_1 \geq 0$, $c_2 x_2 \geq 0$ имеем $F = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 \geq c_0$, т.е $minF = c_0$ и полученное решение оптимально.

Случай 2. *В выражении для F имеется хотя бы одна свободная переменная x_j, коэффициент при которой отрицателен ($c_j < 0$), и среди коэффициентов a_{1j}, a_{2j} при переменной x_j в системе ограничений имеется хотя бы один отрицательный.*

Случай соответствует примеру 1. Для него одну из переменных x_j (x_1 или x_2) с отрицательным коэффициентом a_{1j} или a_{2j} переводят в основную. В число свободных переводится та из основных переменных, которая выражается через x_j с отрицательным коэффициентом. Если оба коэффициента отрицательны, то в свободные переменные переводится та, для которой отношение $\dfrac{b_i}{a_{ij}}$ $(i = \overline{1,2})$ будет минимальным.

«Рокировка» основной и свободной переменных позволяет увеличить значение переменной x_j, входящей с отрицательным коэффициентом в целевую функцию, тем самым уменьшить F, приблизив ее к минимуму.

Случай 3. *В выражении для F имеется свободное неизвестное, коэффициент при котором отрицателен, а все коэффициенты при этом неизвестном в ограничениях* (73) *— не отрицательны.*

Случай соответствует примеру 2. Задача не имеет решения, так как $minF \to -\infty$.

ЛЕКЦИЯ 16

СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД

Суть симплексного метода заключается в следующем.

Если известна какая-нибудь крайняя точка области Ω и значение функции цели F (при стремлении ее, например, к максимуму) в этой точке, то все точки, в которых значение F меньше найденного, в дальнейших улучшениях решения не рассматриваются. Алгоритм симплексного метода позволяет на последующих шагах переходить только к тем точкам границы Ω, в которых значение F ближе к экстремальному. Решение в симплексном методе заканчивается при условии, что найденное значение целевой функции не может быть улучшено.

Симплексный метод базируется на следующем:

— умение задавать начальный опорный план;

— умение переходить к лучшему опорному плану;

— существование признака оптимальности решения.

Рассмотрим подход к организации симплексного метода решения задачи ЛП, приведенной к каноническому виду. Будем для определенности находить максимальное значение функции цели F:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \Longrightarrow \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1k}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{l1}x_1 + \ldots + a_{lk}x_2 + \ldots + a_{ln}x_n + x_{n+l} = b_l, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mk}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \big(j = \overline{1,(n+m)}\big).$$

Представим исходные данные в виде таблицы.

A_j / $\underline{A_i}$	$\downarrow$ $A_1 \ldots A_k \ldots A_n$ $(x_1)\ldots(x_k)\ldots(x_n)$	$A_{n+1} \ldots A_{n+l} \ldots A_{n+m}$ $(x_{n+1})\ldots(x_{n+l})\ldots(x_{n+m})$	b_i	Q_i
A_{n+1}	$a_{11} \ldots a_{1k} \ldots a_{1n}$	$1 \ \ldots \ 0 \ \ldots \ 0$	b_1	b_1/a_{1k}
$\vdots$	$\vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots$	$\vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\leftarrow A_{n+l}$	$a_{l1} \ldots a_{lk} \ldots a_{ln}$	$0 \ \ldots \ 1 \ \ldots \ 0$	b_l	b_l/a_{lk}
$\vdots$	$\vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots$	$\vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_{n+m}	$a_{m1}\ldots a_{mk}\ldots a_{mn}$	$0 \ \ldots \ 0 \ \ldots \ 1$	b_m	b_m/a_{mk}
$-c_j$	$-c_1\ldots -c_k\ldots -c_n$	$0 \ \ldots \ 0 \ \ldots \ 0$	$F^0 = 0$	

В последней строке (*индексной*) стоят *индексы* — взятые с обратным знаком коэффициенты при неизвестных в целевой функции. Смысл умножения коэффициентов c_j на -1 состоит в том, что в этом случае при преобразованиях Гаусса-Жордана в последней строке матрицы в столбце со свободными членами b_i получается значение целевой функции F.

В качестве базисных в исходном (нулевом) приближении удобно выбрать векторы условий, стоящие при переменных $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$, множители при которых равны единицам и поэтому базис $A^0 = (A_{n+1}, \ldots, A_{n+m}) = I$ представляет собой единичную матрицу.

Если среди координат вектора коэффициентов $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ имеются положительные (отрицательные значения индексов $-c_j$), то согласно признаку оптимальности в базис A^0, выбранный в качестве исходного, следует ввести новый вектор A_k, которому соответствует максимальное значение весового коэффициента c_k.

Введение в базис нового вектора A_k (над ним в верхней строке стоит стрелка) должно сопровождаться выводом из этого базиса вектора A_{n+l} (перед ним в левой колонке стоит стрелка), которому соответствует минимальное положительное значение отношения

$$Q_l = \frac{b_l}{a_{lk}} = \min_i \frac{b_i}{a_{ik}}, \qquad a_{ik} > 0 \qquad (i = \overline{1, m}).$$

Строку с номером l, столбец с номером k и элемент a_{lk} принято называть *направляющими.*

Элементы вводимой строки, заменяющей в таблице направляющую строку, вычисляются по формуле

$$a'_{lj} = \frac{a_{lj}}{a_{lk}}, \qquad \left(j = \overline{1, (n+m)}\right).$$

Что касается элементов всех других, i-х строк ($i \neq l$), то для определения их новых значений используется зависимость

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{lj}\frac{a_{ik}}{a_{lk}} \qquad \left(j = \overline{1, (n+m)}, \quad i = \overline{1, m}\right).$$

Значения координат вектора ограничений нового опорного решения можно определить из выражений:
для $i = l$

$$b'_l = \frac{b_l}{a_{lk}};$$

для $i \neq l$

$$b'_i = b_i - b_l \frac{a_{ik}}{a_{lk}}.$$

Элементы индексной строки $-c_j$ преобразуются по формуле

$$-c'_j = -c_j + \Delta_j,$$

где

$$\Delta_j = c_l \frac{a_{lj}}{a_{lk}}.$$

Для использования описанной процедуры симплекс-метода в задаче ЛП на отыскание минимума целевой функции можно эту функцию умножить на -1 и затем отыскивать максимум для вновь полученной целевой функции.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛП

Пусть заданы целевая функция

$$F = 40x_1 + 20x_2 \longrightarrow \max$$

и система ограничений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 200, \\ 2x_1 + x_2 \leq 250; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,2}).$$

Требуется найти такой вектор решения, который обеспечит максимальное значение функции цели.

Р е ш е н и е. Приведем задачу к каноническому виду, добавляя к каждому неравенству системы по дополнительной положительной неизвестной x_3 и x_4 и превращая тем самым неравенства в равенства:

$$F = 40x_1 + 20x_2 + 0x_3 + 0x_4 \longrightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 = 200, \\ 2x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 250; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}).$$

Представим данные задачи и ее дальнейшее решение в виде табл. 0.1–0.3.

Таблица 0.1. Исходная таблица задачи

$A_i \backslash A_j$	$\downarrow$ A_1	A_2	A_3	A_4	b_i	Q_i	
A_3	1	2	1	0	200	200	$-N2/2$
$\leftarrow A_4$	$\boxed{2}$	1	0	1	250	$\underline{125}$	:2
$-c_j$	$-\underline{40}$	-20	0	0	$F^0 = 0$		$+20N2$

В исходном (нулевом) приближении базисными векторами условий задачи (векторами, координаты которых образуют единичную подматрицу в матрице коэффициентов) являются $A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $A^0 = (A_3, A_4)$.

В этом случае опорным решением задачи в нулевом приближении будет вектор $X^0 = (x_1^0; x_2^0; x_3^0; x_4^0)^T = (0; 0; 200; 250)^T$.

Этому решению соответствует значение целевой функции:

$$F^0 = c_1 x_1^0 + c_2 x_2^0 + 0 x_3^0 + 0 x_4^0 = 40 \cdot 0 + 20 \cdot 0 + 0 \cdot 200 + 0 \cdot 250 = 0.$$

Так как среди весовых коэффициентов $c_j \quad (j = \overline{1, 4})$ имеются положительные (отрицательные значения индексной строки таблицы), то должно существовать большее, чем $F^0 = 0$, значение целевой функции.

Новый базисный вектор должен соответствовать максимальному значению весового коэффициента. Это значение $(c_1 = 40)$, и ему соответствует вектор условий $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Для определения вектора условий, который необходимо удалить из базиса, найдем минимум отношений b_i / a_{i1}, то есть отношений координат вектора ограничений к координатам вектора A_1:

$$Q = \min\left(\frac{b_1}{a_{11}}; \frac{b_2}{a_{21}}\right) = \min\left(\frac{200}{1}; \frac{250}{2}\right) = \frac{250}{2} = \frac{b_2}{a_{21}}.$$

Значению $a_{21} = 2$, взятому в таблице в рамку и находящемуся на второй строке матрицы коэффициентов, соответствует единичное значение находящейся на этой же строке координаты базисного вектора A_4, который и требуется удалить из числа базисных. Этот факт отмечен стрелкой, стоящей перед вектором A_4 в левом столбце таблицы.

Далее используем преобразования Гаусса-Жордана (действия над строками указаны в правом столбце таблицы) для преобразования нового базисного вектора к виду $A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и превращению в нуль весового коэффициента c_1.

Таблица коэффициентов матрицы условий преобразуется к виду, приведенному в табл. 0.2 (первая итерация симплекс-метода).

Таблица 0.2. Таблица задачи, итерация 1

$A_i \backslash A_j$	A_1	A_2	A_3	A_4	b_i
A_3	0	3/2	1	$-1/2$	75
A_1	1	1/2	0	1/2	125
$\Delta_j - c_j$	0	0	0	20	$F^1 = 5000$

Базисом первого приближения является пара векторов условий A_1 и A_3, образующих в совокупности единичную матрицу:

$$A^1 = (A_1\ A_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты, стоящие в последней строке таблицы, позволяют представить выражение для целевой функции в виде

$$F^1 = 5000 - 20x_4,$$

и при равенстве нулю свободной переменной x_4: $F^1 = 5000$.

Опорное решение задачи на этой итерации соответствует вектору $X^1 = (x_1^1;\ x_2^1;\ x_3^1;\ x_4^1)^T = (125;\ 0;\ 75;\ 0)^T$, что позволяет определить значение целевой функции по ее первоначальному виду:

$$F^1 = c_1 x_1^1 + c_2 x_2^1 + 0x_3^1 + 0x_4^1 = 40{\cdot}125 + 20{\cdot}0 + 0{\cdot}75 + 0{\cdot}0 = 5000.$$

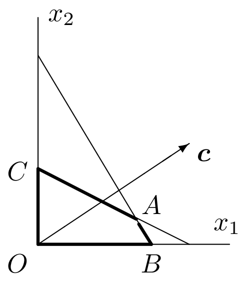
Значение совпадает с полученным выше.

Среди весовых коэффициентов целевой функции (последняя, индексная строка табл. 0.2) в результате проделанного преобразования не оказалось отрицательных (среди коэффициентов функции F отсутствуют положительные). Поэтому дальнейшее улучшение решения невозможно.

На основании признака оптимальности делаем заключение:

$$F_{max} = F^1 = 5000.$$

Замечание. Наличие одного «лишнего» нуля в строке индексов (больше двух для ранга матрицы коэффициентов, равного двум) говорит о неоднозначности опорного решения. Действительно, если в



качестве базиса для определения опорного решения выбрать векторы A_1 и A_2 $\big(A^2 = (A_1, A_2)\big)$, то табл. 0.1 преобразуется в табл. 0.3.

Таблица 0.3. Решение задачи, итерация 2

$\underline{A}_i \backslash A_j$	A_1	A_2	A_3	A_4	b_i
A_2	0	1	$2/3$	$-1/3$	50
A_1	1	0	$-1/3$	$2/3$	100
$\Delta_j - c_j$	0	0	0	20	$F^2 = 5000$

Опорное решение задачи, представленной в табл. 0.3, соответствует вектору
$$X^2 = (x_1^2;\ x_2^2;\ x_3^2;\ x_4^2)^T = (100;\ 50;\ 0;\ 0)^T,$$
что позволяет определить значение целевой функции:
$$F^2 = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + 0x_3^2 + 0x_4^2 =$$
$$= 40 \cdot 100 + 20 \cdot 50 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 5000 = F_{max}.$$

Так как среди индексов отсутствуют отрицательные, то целевая функция равна своему максимальному значению, которое совпадает с полученным значением для первой итерации.

Решение задачи неоднозначно. Разные варианты вектора решения приводят к одному значению целевой функции.

Если решить эту задачу графическим методом (наличие только двух переменных позволяет это сделать), то в результате построений приходим к изображению, показанному на рисунке.

Прямые, соответствующие постоянным значениям функции цели при различных значениях целевой функции, будут параллельны AB.

Значение F_{max} соответствует наибольшему удалению прямой $40x_1+20x_2 = const$ от начала координат в направлении нормали $\boldsymbol{c} = (40, 20)$ при условии, что эта прямая принадлежит множеству Ω допустимых значений (четырехугольнику $CABO$).

Таким условиям удовлетворяет прямая, совпадающая с AB. Координаты любой точки, лежащей на отрезке AB, будут соответствовать $F_{max} = 5000$. Действительно, точка $B(125; 0)$ соответствует решению задачи на первой итерации (табл. 0.2), т.е вектору $X^1 = (125; 0; 75; 0)^T$, а точка $A(100; 50)$ — решению задачи во втором приближении (табл. 0.3), т.е вектору $X^2 = (100; 50; 0; 0)^T$.

Решение в нулевом приближении соответствует значению функции цели в начале координат: $F^0 = F(0, 0) = 0$.

МЕТОД ИСКУССТВЕННОГО БАЗИСА

Добавление фиктивных положительных переменных $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ к ограничениям $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad (i = \overline{1, m},\ b_i \ge 0)$ превращало эти ограничения в систему линейных алгебраических уравнений (**??**) с единичным опорным базисом и положительными правыми частями. Характерной особенностью таких уравнений является то, что их правые части — положительные величины, и исходное опорное решение равно правым частям уравнений: $X^0 = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})^T = (b_1, \ldots, b_m)^T = B$. В этом случае говорят, что ограничения задачи ЛП имеют *предпочтительный вид.*

Ограничения будут иметь *непредпочтительный вид*, если перед коэффициентами их правой части (b_i) стоят знаки, противоположные знакам при фиктивных переменных.

Для решения задач ЛП с ограничениями, имеющими непредпочтительный вид, применяют метод *искусственного базиса* (*M-метод*). Суть его заключается в следующем.

Пусть задача ЛП представляется в виде математической модели:

$$F = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \quad \to \quad \max(\min); \tag{76}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n + x_{n+k} = b_k; \end{cases} \tag{77}$$

$$\begin{cases} a_{k+1,1}x_1 + \ldots + a_{k+1,n}x_n - x_{n+k+1} = b_{k+1}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m; \end{cases} \tag{78}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n{+}m}). \tag{79}$$

Часть базисных векторов опорного решения имеют отрицательные координаты — множители при фиктивных неизвестных в системе уравнений (78) равны -1. Система ограничений имеет непредпочтительный вид.

Прибавим к левым частям ограничений (78) положительные переменные $w_1,\ \ldots,\ w_{m-k}$.

$$\begin{cases} a_{k+1,1}x_1 + \ldots + a_{k+1,n}x_n - x_{n+k+1} + w_1 = b_{k+1}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n - x_{n+m} + w_{m-k} = b_m. \end{cases} \tag{80}$$

Вместе с переменными $x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$ они дают возможность представить базис исходного опорного решения в виде единичной матрицы.

Переменные $w_1,\ \ldots,\ w_{m-k}$ добавляются к целевой функции с коэффициентами $\pm M$ ($-M$ — при отыскании максимума и $+M$ — при отыскании минимума):

$$\begin{aligned} F &= c_1x_1 + \ldots + c_nx_n - M(w_1 + \ldots + w_{m-k}) \quad \to \quad \max \\ F &= c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + M(w_1 + \ldots + w_{m-k}) \quad \to \quad \min. \end{aligned} \tag{81}$$

Множитель M в целевых функциях — это достаточно большая постоянная, настолько большая, что если хотя бы одна из переменных $w_i \neq 0$ $(i = \overline{1, m-k})$, то в функции цели можно пренебречь слагаемыми $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i$. Отсюда следует, что приемлемое решение задачи ЛП будет иметь место только в случае, когда переменные $w_i = 0$ $(i = \overline{1, m-k})$.

Заметим, что в силу произвольности множителя M наряду с целевой функцией F можно получить оптимальное решение задачи, добиваясь выполнения условий экстремальности функции

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= -M(w_1 + \ldots + w_{m-k}) \quad \to \quad \max, \\ \tilde{F} &= M(w_1 + \ldots + w_{m-k}) \quad \to \quad \min. \end{aligned} \tag{82}$$

Пример. Найти решение задачи ЛП:

$$F = 2x_1 + x_2 \quad \to \quad \min;$$

Таблица 0.4. Симплекс-таблицы

	x_1	x_2	v_1	v_2	w_1	w_2	b_i	Q_i	
w_1	1	1	-1	0	1	0	6	3	$-N_2/3$
$\leftarrow w_2$	1	$\boxed{3}$	0	-1	0	1	12	2	$:3$
$-c_j=-M$					$-M$	$-M$			$+M(N_1+N_2)$
Δ_j-c_j	$2M$	$\underline{4M}$	$-M$	$-M$	0	0	$18M$		$-4MN_2/3$
$\leftarrow w_1$	$\boxed{2/3}$	0	-1	$1/3$	1	$-1/3$	2	3	$\cdot 3/2$
x_2	$1/3$	1	0	$-1/3$	0	$1/3$	4	12	$-N_1/2$
Δ_j-c_j	$\underline{2M/3}$	0	$-M$	$M/3$	0	$-4M/3$	$2M$		$-MN_1$
x_1	1	0	$-3/2$	$1/2$	$3/2$	$-1/2$	3		
x_2	0	1	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	3		
Δ_j-c_j	0	0	0	0	$-M$	$-M$	0		

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ x_1,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Дополнительные переменные будем обозначать для наглядности различными буквами. Для превращения неравенств системы ограничений в равенства из их левых частей необходимо вычесть положительные переменные v_1 и v_2. Однако базис опорного решения получаемой при этом системы уравнений не образует единичной матрицы (перед переменными стоит минус). Используем для решения метод искусственного базиса. Следуя ему, представим математическую модель задачи в виде

$$\tilde{F} = Mw_1 + Mw_2 \to \quad \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - v_1 + w_1 = 6, \\ x_1 + 3x_2 - v_2 + w_2 = 12, \\ x_1, x_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \geq 0. \end{cases} .$$

Решение проведем с использованием симплекс-таблиц. При первом преобразовании табл. 0.4 индексная строка, состоящая только из взятых с обратным знаком множителей M при переменных w_1 и w_2, преобразуется так, чтобы на местах этих множителей стояли нули. Необходимые для этого преобразования над строками таблицы показаны в последнем столбце напротив строки индексов $-c_j = -M$. В результате преобразований получена следующая за упомянутой строка индексов $\Delta_j - c_j$.

После трех итераций, потребовавшихся для решения задачи, процесс определения оптимального опорного решения завершается. Признаком оптимальности полученного решения

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, v_1^*, v_2^*, w_1^*, w_2^*)^T = (3, 3, 0, 0, 0, 0)^T$$

является равенство коэффициентов индексной строки соответствующим коэффициентам исходной симплекс-таблицы.

Подставляя значения координат оптимального решения в функцию цели, найдем ее минимальное значение:

$$F_{min} = 2 \cdot 3 + 3 + M(0 + 0) = 9.$$

Л Е К Ц И Я 17

ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЗАДАЧАХ ЛП. ЗАДАЧА ТОРГА

Пусть работа предприятия характеризуется векторами удельных прибылей (весовых или ценовых коэффициентов, определяющих стоимость единиц продукции) $C = (c_1; c_2; \ldots; c_n)^T$ и запасов ресурсов $B = (b_1; b_2; \ldots; b_m)^T$. Кроме того, известна технологическая матрица $A = (a_{ij})$ $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$, где a_{ij} – количество i-го ресурса, идущего на производство единицы j-й продукции. Рациональная организация работы предприятия сводится к задаче ЛП, оптимизирующей план производства $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)^T$, который делает прибыль максимальной:

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \Longrightarrow \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases} \tag{83}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n}).$$

Некоторая заинтересованная фирма предложила руководству предприятия продать ей сырье B по цене, определяемой вектором $Y = (y_1; y_2; \ldots; y_m)^T$, такой, что за все сырье фирма предлагает выплатить предприятию сумму, составляющую $\Phi(Y) = Y^TB = y_1b_1 + y_2b_2 + \ldots + y_mb_m$. Если $\Phi(Y)$ будет не меньше суммы $F(X)$, получаемой предприятием от производства продукции, то предприятие согласится с предложением фирмы.

В процессе торга предприятие будет стремиться к тому, чтобы выручка от продажи сырья, идущего на производство j-го вида продукции, была не меньше стоимости c_j этого вида продукции, т.е:

$$y_1a_{1j} + y_2a_{2j} + \ldots + y_ma_{mj} \ge c_j, \quad (j = \overline{1,n}).$$

Что касается фирмы (покупателя сырья), то она в процессе торга будет стараться добиться того, чтобы $\Phi(Y)$ была как можно меньше.

Удовлетворить запросы фирмы с учетом интересов предприятия можно, решив задачу ЛП:

$$\Phi(Y) = y_1b_1 + y_2b_2 + \ldots + y_mb_m \Longrightarrow \min;$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n; \end{cases} \tag{84}$$

$$y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}).$$

Задача (84) называется двойственной задачей ЛП по отношению к задаче (83). Вместе эти две задачи образуют задачу торга.

Вводя обозначения

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

перепишем (83) и (84) в матричном виде:

$$\begin{array}{ll} F(X) = C^T X \Rightarrow \max; & \Phi(Y) = B^T Y \Rightarrow \min; \\ AX \leq B; & A^T Y \geq C; \\ X \geq \Theta. & Y \geq \Theta. \end{array}$$

Соотношения представляют собой *симметричную пару двойственных задач*. Эти соотношения имеют общий вид для любых задач ЛП, не обязательно относящихся к задачам торга.

Отметим особенности пары двойственных задач.

1. Тип экстремума меняется на противоположный при переходе от одной задачи к другой.

2. Типы неравенств в системах ограничений двух взаимно двойственных задач противоположны.

3. Свободные члены вектора B исходной задачи становятся коэффициентами при переменных в целевой функции двойственной задачи.

4. Коэффициенты при переменных целевой функции исходной задачи становятся свободными членами в неравенствах системы ограничений двойственной задачи.

5. Каждый j-й столбец коэффициентов a_{ij} $(i = \overline{1,m})$ в системе ограничений исходной задачи формирует коэффициенты j-й строки системы ограничений двойственной задачи. Строки матрицы A исходной задачи становятся столбцами матрицы A^T двойственной задачи.Поэтому в матричной записи исходной задачи стоит матрица A, а в двойственной задаче — A^T.

6. Каждой переменной вектора X исходной задачи ставится в соответствие переменная вектора Y двойственной задачи по схеме:

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n & x_{n+1} & \dots & x_{n+m} \\ \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow \\ y_{m+1} & y_{m+2} & & y_{m+n} & y_1 & \dots & y_m \end{array}$$

Аналогично пунктам 1–6 формулируются свойства перехода от двойственной задачи к исходной. Поэтому две записанные в виде (**??**) задачи являются взаимно двойственными. Любую их них можно принять за исходную, тогда вторая задача будет двойственной по отношению к исходной.

Отметим, что при формулировке исходной и двойственной задач неравенства $\geq$ в системе ограничений должно соответствовать задаче отыскания минимума целевой функции, а $\leq$ — максимума. Если в каком-то из ограничений знак неравенства отличен от требуемого, то это неравенство следует умножить на -1, после чего поменять знак неравенства на противоположный.

ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Рассмотрим пару двойственных задач. Используя представленные в них соотношения, запишем последовательные неравенства:

$$F(X) = C^T X \leq (Y^T A)X =$$

$$Y^T(AX) \leq Y^T B = \Phi(Y).$$

Выписанная цепочка неравенств позволяет записать соотношение между целевыми функциями исходной и двойственной задач ($F \to \max$, $\Phi \to \min$):

$$F(X) \le \Phi(Y). \tag{85}$$

Это соотношение называют *основным неравенством теории двойственности.*

С экономической точки зрения неравенство (85) можно трактовать следующим образом. С точки зрения производителя доход, который он может получить от продажи ресурсов, идущих на изготовление единицы продукции, должен быть не меньше, чем выручка от реализации единицы произведенной продукции. Ни один допустимый план производства не может извлечь из запасенных ресурсов больше, чем они того стоят.

Существует **критерий оптимальности допустимых решений.** *Для того чтобы допустимые решения X_* и Y_* исходной и двойственной задач были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы целевые функции этих задач были равны.*

Сформулируем без доказательства две теоремы двойственности.

Теорема 1. *Если одна из двойственных задач ЛП имеет оптимальное решение, то и другая задача имеет оптимальное решение. При этом экстремальные значения целевых функций будут равны.*

По отношению к задаче планирования эта теорема утверждает, что только оптимальный план извлекает из ресурсов точно столько, сколько они стоят.

Теорема 2. *Для того чтобы допустимые решения X_* исходной и Y_* двойственной задач ЛП были оптимальными, необходимо и достаточно выполнения соотношений:*

$$1.\ Y_*^T(B - AX_*) = 0 \quad \text{и} \quad X_*^T(C - A^T Y_*) = 0.$$

Или в координатно-индексной форме:

$$2.\ \sum_{i=1}^{m} y_i^* \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \right) = 0$$

$$\text{и} \quad \sum_{j=1}^{n} x_j^* \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i^* \right) = 0.$$

Последние две пары соотношений будут выполнены, если выполняются соотношения:

3. Для всякого $i = \overline{1, m}$, если $y_i^* > 0$,

то $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$;

для всякого $j = \overline{1, n}$, если $x_j^* > 0$,

то $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ji} y_i^* = c_j$.

Равнозначность исходной и двойственной задач ЛП иногда дает возможность быстрее и проще получить решение задачи ЛП, заменяя ее на двойственную.

ГОУ ВПО «САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА»
(Национальный исследовательский университет)

Б.А. Горлач

Л И Н Е Й Н А Я
А Л Г Е Б Р А

Методические указания по решению задач

Самара, 2013

ТЕМА 1
Определители
Вопросы

1. Что собой представляет определитель матрицы?
2. Запишите формулы для вычисления определителей первого и второго порядков.
3. Сформулируйте правило треугольников вычисления определителя третьего порядка и запишите соответствующую правилу формулу.
4. Перечислите основные свойства определителей.
5. Что такое алгебраическое дополнение элемента определителя? Запишите формулы разложения определителя по элементам строк и столбцов.
6. Чему равна сумма произведений элементов i-й строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения другой его строки (столбца)?

Задачи

В задачах 1–4 вычислить определители, используя определение.

1. $\det(-2) = |-2| = -2.$ **2.** $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - (-2) \cdot 4 = 8.$

3. $$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot5+4\cdot6\cdot2+(-2)\cdot3\cdot0-$$
$$-(-2)\cdot(-1)\cdot2-4\cdot3\cdot5-1\cdot6\cdot0 = -21.$$

4. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$

Матрица, порождающая этот определитель, является матрицей преобразования поворота на угол α декартовой ортогональной системы координат.

При решении задач 5 и 6 вычислить определители, используя их свойства.

$$\textbf{5.}\ \begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} -N2 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Равенство определителя нулю следует из свойства: определитель, элементы строк (столбцов) которого пропорциональны, равен нулю. Коэффициент пропорциональности первой и третьей строк полученного определителя равен единице.

6. При каких значениях переменных x, y, z обратится в нуль определитель

$$\begin{vmatrix} x & 0 & x^2 \\ 0 & y & 0 \\ z & 0 & z^2 \end{vmatrix} ?$$

Р е ш е н и е. При $x = z$ первая и третья строки определителя становятся равными и определитель обратится в нуль. Кроме того, рассматриваемый определитель будет равен нулю, если одна из переменных равна нулю.

В задачах 7–10 вычислить определители, образовав предварительно нули в элементах их строк (столбцов) и понижая порядок определителей.

$$\textbf{7.}\ \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2N1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -7 & -3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по элементам третьего столбца:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - 3 \cdot (-7) = 15.$$

8.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -N4/2 \\ \\ -N4 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по элементам четвертого столбца и вынесем из первой строки общий множитель 3:

$$\Delta = 3\cdot 2\cdot(-1)^{4+4}\begin{array}{c}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc} & \scriptstyle -N1 & \end{array}\end{array} = 6\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 6\cdot 1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 6\big(-2\cdot 5 - 1\cdot(-3)\big) = -42.$$

9.

$$\Delta = \begin{array}{cc}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{array}{l} \scriptstyle -N2 \\ \\ \\ \\ \end{array}\end{array} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Равенство нулю определителя следует из пропорциональности элементов первой и четвертой строк.

10. $$\Delta = \begin{array}{c}\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc} & \scriptstyle -aN1 & \scriptstyle -aN2 \end{array}\end{array} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & b(b-a) & b^2(b-a) \\ c & c(c-a) & c^2(c-a) \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по элементам первой строки. При этом из второй строки вынесем общий множитель $b-a$, а из третьей строки $c-a$. В результате придем к определителю второго порядка:

$$\Delta = a(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} b & b^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix} = abc(a-b)(b-c)(c-a).$$

Определители различного порядка, подобные Δ, называются *определителями Вандермонда.* Они используются при аппроксимации функций.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить определители, используя их определение и свойства.

1. $\det(-2{,}3)$; **2.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$; **3.** $\begin{vmatrix} x+y & 2x \\ y & x+y \end{vmatrix}$;

$$\mathbf{4.}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix};\quad \mathbf{5}.\ \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0{,}5 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix};\quad \mathbf{6.}\ \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычислить определители, образовав предварительно нули в элементах их строк (столбцов) и понижая порядок определителей до 2.

$$\mathbf{7}.\ \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 1 \end{vmatrix};\qquad \mathbf{8}.\ \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{9}.\ \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix};\qquad \mathbf{10}.\ \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 \\ b & b^2 & b^3 & b^4 \\ c & c^2 & c^3 & c^4 \\ d & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix}.$$

ТЕМА 2
Матрицы
Вопросы

1. Какой математический объект называют матрицей? Как определяется размер матрицы?
2. Что обозначает первый индекс в обозначении a_{ij} элемента матрицы?
3. Какая матрица называется прямоугольной? квадратной? нулевой?
   единичной? треугольной? диагональной? матрицей-строкой? матрицей-столбцом?
4. Что такое транспонированная матрица? симметричная матрица?
5. Какие операции над матрицами называются линейными? Перечислите основные свойства линейных операций над матрицами.
6. Что называется произведением матриц? Запишите формулу для определения элементов матрицы произведения?
7. Сформулируйте основные свойства произведений матриц. Как возвести матрицу в степень?
8. Что такое обратная матрица? Опишите последовательность вычисления обратной матрицы.
9. Что представляет собой невырожденная матрица? Почему требование невырожденности важно для вычисления обратной матрицы?
10. Можно ли менять местами операции определения обратной матрицы и транспонирование?

Задачи

1. Найти $2A - B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. Вспоминаем, что при произведении матрицы на число каждый элемент матрицы умножается на это число (в отличие от определителя, где на число умножаются элементы одной из строк или одного из столбцов). При суммировании матриц (одинакового размера) складываются соответствующие элементы матриц. Поэтому

$$2A - B = \begin{pmatrix} 2{\cdot}2{-}3 & 2{\cdot}(-3){-}(-5) \\ 2{\cdot}(-1){-}(-1) & 2{\cdot}1{-}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Найти AB, BA, $B^{T}A^{T}$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Сравнить полученные результаты.

Р е ш е н и е.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3{\cdot}2{+}(-2){\cdot}(-2) & 3{\cdot}(-4){+}(-2){\cdot}1 \\ -1{\cdot}2{+}0{\cdot}(-2) & -1{\cdot}(-4){+}0{\cdot}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -14 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6{+}4 & -4{+}0 \\ -6{-}1 & 4{+}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \neq AB;$$

$$B^{T}A^{T} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6{+}4 & -2{+}0 \\ -12{-}2 & 4{+}0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = (AB)^{T}.$$

3. Найти произведения AA^{T} и $A^{T}A$ матриц, образованных вектором-столбцом $\boldsymbol{A} = (2; -1; 0)^{T}$.

Р е ш е н и е. $AA^{T} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2{\cdot}2 & 2{\cdot}(-1) & 2{\cdot}0 \\ (-1){\cdot}2 & (-1){\cdot}(-1) & (-1){\cdot}0 \\ 0{\cdot}2 & 0{\cdot}(-1) & 0{\cdot}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A^{T}A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2{\cdot}2 + (-1){\cdot}(-1) + 0{\cdot}0) = (5).$$

Получены матрицы размера 3×3 и 1×1. Матрицы отличаются, в том числе и размером.

4. Для матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$ убедиться в справедливости соотношений $A=IA$ и $A=AI$, где I — единичные матрицы: в первом случае размера 2×2, во втором — 3×3.

Р е ш е н и е. $IA=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 1{\cdot}1{+}0{\cdot}(-1) & 1{\cdot}2{+}0{\cdot}3 & 1{\cdot}0{+}0{\cdot}4\\ 0{\cdot}1{+}1{\cdot}(-1) & 0{\cdot}2{+}1{\cdot}3 & 0{\cdot}0{+}1{\cdot}4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}=A;$$

$$AI=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}=A.$$

5. Найти матрицу, обратную по отношению к матрице

$$A=\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Найдем определитель матрицы:

$\Delta_{A}=\begin{vmatrix} -3 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}+N2\\ \\ \\ \end{matrix}=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=\{$Разложим определитель по элементам второй строки$\}=1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$ (!).

Отличие определителя от нуля говорит о невырожденности матрицы. Следовательно, матрица, обратная по отношению к A, существует. Для определения A^{-1} найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы A:

$A_{11}=+\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1;\quad A_{21}=-\begin{vmatrix} -1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1;\quad A_{31}=+\begin{vmatrix} -1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1;$

$A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=0;\quad A_{22}=+\begin{vmatrix} -3 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=1;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} -3 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1;$

$A_{13}=+\begin{vmatrix} 2 & 1\\ -2 & 0\end{vmatrix}=2;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} -3 & -1\\ -2 & 0\end{vmatrix}=2;\quad A_{33}=+\begin{vmatrix} -3 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1.$

Из алгебраических дополнений формируем союзную матрицу — это
транспонированная матрица алгебраических дополнений — и, поделив ее на
$\Delta_A = 1$, получаем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица найдена правильно, если ее произведение справа или слева на исходную матрицу приводит к единичной матрице. Убедимся в этом:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3+0+4 & -3-1+4 & 3-1-2 \\ 2+0-2 & 2+1-2 & -2+1+1 \\ -2+0+2 & -2+0+2 & 2+0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \ (!).$$

6. При каких значениях λ матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & \lambda \\ \lambda & -4 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

не имеет обратной?
Р е ш е н и е. Матрица не имеет обратной, если она вырожденная, т.е. если ее определитель равен нулю. Раскроем и приравняем нулю определитель:

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & \lambda \\ \lambda & -4 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 2(3\lambda^2 + \lambda - 4) = 0.$$

Решая квадратное уравнение, находим два искомых значения λ: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -4/3$.

7. Для производства продукции трех видов предприятие использует сырье двух типов. Нормы затрат сырья на изготовление единиц продукции представлены в таблице

Сырье	Продукция		
	1	2	3
1	3	5	2
2	4	2	3

Стоимость единиц сырья задана матрицей $C = (5,\ 10)^T$.

Требуется определить затраты на производство продукции трех видов в количествах, определяемых матрицей $B = (100,\ 50,\ 100)^T$.

Р е ш е н и е. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} -$$

матрица затрат сырья на производство единиц продукции предприятия. Тогда стоимость производства единиц продукции определится произведением матриц

$$A^T C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 45 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Для определения общих затрат S на производство продукции, количество которой задано матрицей B, найдем произведение матриц

$$S = B^T(A^T C) = (100\ 50\ 150) \begin{pmatrix} 55 \\ 45 \\ 40 \end{pmatrix} = 13750.$$

Отметим, что свойства ассоциативности и транспонирования произведения матриц позволяют вычислить величину затрат при других последовательностях математических действий:

$$S = (B^T A^T)C = C^T(AB) = (C^T A)B.$$

8. Определить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. Для определения ранга матрицы выделим в ней единичную подматрицу, используя элементарные преобразования. На первом шаге прибавим к элементам третьей и четвертой строк умноженные на 2 элементы первой строки:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ {}_{+2N1} \\ {}_{+2N1} \end{matrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 4 \\ 9 & 0 & 0 & 8 & 3 \\ 12 & 0 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

В полученной матрице второй столбец содержит только нули и одну единицу в первой строке. Этот столбец используем для получения нулей во всех элементах первой строки, кроме второго. Для этого достаточно умножить элементы второго столбца на -5 и прибавить их к соответствующим элементам первого столбца, затем умножить на $+2$ и прибавить к элементам третьего столбца и т.д. В результате все элементы первой строки, кроме второго, обратятся в нули, а остальные элементы матрицы не изменятся.

Из элементов четвертой строки полученной матрицы вычтем элементы второй строки:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 4 \\ 9 & 0 & 0 & 8 & 3 \\ 12 & 0 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}_{-N2} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 4 \\ 9 & 0 & 0 & 8 & 3 \\ 9 & 0 & 0 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Элементы последних двух строк матрицы совпадают. Одну из этих строк можно сделать нулевой, вычитая из ее элементов элементы равной ей строки. После этого нулевую строку вычеркиваем. Поделим элементы третьего столбца на 2 и с помощью полученной единственной в третьем столбце единицы (остальные элементы третьего столбца нулевые) образуем нули в первом, втором, четвертом и пятом элементах второй строки:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Поделив элементы первого столбца на девять (можно четвертый столбец поделить на 8 или пятый на 3), образуем с помощью полученной единицы нули в четвертом и пятом элементах третьей строки. В результате получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычеркнем нулевые четвертый и пятый столбцы матрицы и переставим оставшиеся столбцы: третий на место второго, второй на место первого и первый на место третьего. В результате получим единичную матрицу третьего порядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ранг исходной матрицы равен трем: $\operatorname{rang} A = 3$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти AB, BA, $A + B^T$ и $A^T + B$, если

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\quad B = A^T$. $\qquad$ **3**. $A = (1\ 2\ -1)$; $\quad B = A^T$.

Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

доказать справедливость соотношений:

4. $\det(AB) = detA \det B = \det(BA)$, $\quad$ **5.** $(AB)^T = B^T A^T \neq A^T B^T$.

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -10 \end{pmatrix}$ найти:

6. A^2; $\qquad$ **7.** A^{-1};

убедиться в справедливости соотношений:

8. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$; $\quad$ **9.** $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

10. Определить ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

ТЕМА 3
Матричные уравнения
Вопросы

1. Что собой представляет невырожденная матрица

2. Почему при определении решения матричного уравнения в правой части решения нельзя менять местами обратную матрицу коэффициентов системы уравнений и матрицу свободных членов?

3. Что собой представляет матричный метод решения систем уравнений? метод определителей?

4. Опишите последовательность определения решения систем уравнений методом обратной матрицы? методом определителей?

Задачи

1. Матричным методом (методом обратной матрицы) найти решение системы уравнений $\begin{cases} x + 3y - z = 4, \\ -x + 2y + z = 6, \\ 3x + 4y - 4z = -1. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Введенные матрицы позволяют записать исходную систему в матричном виде: $AX = B$.

Если матрица A невырожденная, то, умножая матричное уравнение на A^{-1} слева, придем к искомому решению:

$$X = A^{-1}B. \tag{1}$$

Обратить внимание на то, что $X \neq BA^{-1}$. Произведение матриц некоммутативно!

Найдем определитель, образуя предварительно нули в элементах его третьего столбца. Для этого к элементам третьего столбца определителя прибавим соответствующие элементы первого столбца:

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 2 - 3 \cdot (-1)) = -5 \neq 0.$$

Определитель отличен от нуля, поэтому матрица A невырожденная и обратная матрица существует. Найдем все алгебраические дополнения матрицы A:

$$A_{11}=+\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}=-12; \quad A_{21}=-\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}= 8; \quad A_{31}=+\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}= 5;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=-1; \quad A_{22}=+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=-1; \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}= 0;$$

$$A_{13}=+\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-10; \quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}= 5; \quad A_{33}=+\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}= 5.$$

Поделив образованную из алгебраических дополнений союзную матрицу на определитель, получим обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -12 & 8 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ -10 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 & -8 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 10 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Подставим полученное выражение для A^{-1} и матрицу B в (1) и раскроем матричное произведение:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 & -8 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 10 & -5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 \cdot 4+(-8) \cdot 6+(-5) \cdot (-1) \\ 1 \cdot 4+1 \cdot 6+0 \cdot (-1) \\ 10 \cdot 4+(-5) \cdot 6+(-5) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица-столбец представляет собой искомое решение.

Подставим найденные значения неизвестных в исходные уравнения для того, чтобы убедиться в правильности решения:

$$\begin{cases} \ \ 1{+}3{\cdot}2 \quad -3 = \ \ 4 \quad (!), \\ -1{+}2{\cdot}2 \quad +3 = \ \ 6 \quad (!), \\ 3{\cdot}1{+}4{\cdot}2 \ -4{\cdot}3 = -1 \quad (!). \end{cases}$$

Все уравнения превратились в равенства, что подтверждает правильность найденного решения.

2. Систему уравнений задачи 1 решить методом Крамера.

Р е ш е н и е. Согласно методу Крамера неизвестные в заданной системе уравнений определяются по формулам:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \qquad (2)$$

Здесь $\Delta = \Delta_A = -5$ — определитель матрицы коэффициентов системы уравнений (найден в задаче 1); Δ_x, Δ_y, Δ_z — определители матриц, в которых вместо столбцов коэффициентов соответственно при неизвестных x, y, z стоит вектор-столбец свободных членов (матрица B).

Найдем эти определители:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 6 \cdot 4 - $$
$$-(-1) \cdot 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 6 \cdot (-4) - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -5;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 \cdot (-4) + 4 \cdot 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) - $$
$$-(-1) \cdot 6 \cdot 3 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4) - 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -10;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 6 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) \cdot 4 - $$
$$-4 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) \cdot (-1) - 1 \cdot 6 \cdot 4 = -15.$$

Подставляя полученные значения определителей в формулы (2), найдем требуемые неизвестные:

$$x = \frac{-5}{-5} = 1, \quad y = \frac{-10}{-5} = 2, \quad x = \frac{-15}{-5} = 3.$$

О правильности решения говорит его совпадение с решением, полученным в предыдущей задаче матричным методом.

Задачи для самостоятельного решения

Системы уравнений

$$\begin{cases} x-3y=4, \\ 2x+\ y=1 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3=-4, \\ 3x_1+\ x_2+\ x_3=\ 1, \\ 4x_1+2x_2+3x_3=\ 0 \end{cases}$$

решить:

1. Методом обратной матрицы.

2. Методом определителей.

3. Проверить правильность полученных решений путем их подстановки в заданные уравнения и сравнением результатов двух решений.

ТЕМА 4
Системы линейных уравнений
Вопросы

1. Как формируется расширенная матрица систем уравнений?

2. Опишите последовательность решения систем уравнений методом Гаусса–Жордана. К какому виду при этом приводится матрица коэффициентов?

3. Сформулируйте теорему Кронекера–Капелли для систем уравнений общего вида и для однородных систем уравнений.

4. Изобразите конечный вид расширенной матрицы систем уравнений для всех вариантов систем, в том числе для однородных.

Задачи

1. Систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ \ x - \ \ y = 5 \end{cases}$$

решить:

1) методом исключения неизвестных;

2) путем преобразования расширенной матрицы системы методом Гаусса-Жордана.

Р е ш е н и е.

1. Умножим второе уравнение системы на 3 и прибавим полученное уравнение к первому:

$$\begin{cases} 5x = 15, \\ x - y = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ 3 - y = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = -2. \end{cases}$$

2. Составим расширенную матрицу системы и путем элементарных преобразований строк преобразуем ее к единичной:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}\right)^{+3N2} \Longrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 5 & 0 & 15 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}\right)^{:5}_{\cdot(-1)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -5 \end{array}\right)_{+N1} \Longrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

$x \quad y \quad$ св

Первый столбец полученной матрицы соответствует коэффициентам при неизвестной x, второй — при y, третий — свободным членам. Если после проделанных преобразований вернуться к системе уравнений, то получим:

$$\begin{cases} 1{\cdot}x + 0{\cdot}y = 3, \\ 0{\cdot}x + 1{\cdot}y = -2. \end{cases}$$

Отсюда: $x = 3$, $y = -2$.

То есть решение системы уравнений (столбец свободных членов преобразованной матрицы) соответствует неизвестным, коэффициенты при которых стали равными единице.

Решение системы линейных уравнений единственно, поэтому разные методы преобразования исходных уравнений привели (и не могли не привести) к одному результату.

В задачах 2–4 методом Гаусса–Жордана найти решения систем уравнений или доказать их несовместимость.

2. $\begin{cases} x + 3y - z = 4, \\ -x + 2y + z = 6, \\ 3x + 4y - 4z = -4. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем матрицу коэффициентов при ее неизвестных к единичной:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & -4 & -4 \end{array}\right)\begin{array}{l} {\scriptstyle +N2} \\ \\ {\scriptstyle +4N2} \end{array} \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 5 & 0 & 10 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \\ -1 & 12 & 0 & 20 \end{array}\right)\begin{array}{l} {\scriptstyle :5} \\ {\scriptstyle -N3} \\ {\scriptstyle \cdot(-1)} \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -10 & 1 & -14 \\ 1 & -12 & 0 & -20 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ {\scriptstyle +10N1} \\ {\scriptstyle +12N1} \end{array} \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Так как матрица коэффициентов свелась к единичной матрице третьего порядка, то ранг исходной матрицы равен трем. Ранг расширенной матрицы также равен трем. В этом легко убедиться, вычитая из последнего столбца последней записи преобразованной расширенной матрицы первый столбец, умноженный на 4, второй столбец, умноженный на 2, и третий столбец, умноженный на 6. В результате столбец свободных членов станет нулевым, и его можно вычеркнуть при определении ранга матрицы. Так как ранг матрицы коэффициентов и ранг расширенной матрицы равны, то согласно теореме Кронекера–Капелли система имеет единственное решение — $\operatorname{rang} A$ совпадает с количеством неизвестных.

3. $\begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 - 5x_4 = \ \ 6, \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + \ \ x_4 = -1, \\ \ \ x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 - \ \ x_4 = -3. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем одну из подматриц коэффициентов при ее неизвестных к единичной матрице:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & -5 & 6 \\ -1 & 3 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} -2N3 \\ +N3 \\ \end{array} \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & -3 & 3 & -3 & 12 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} :-3 \\ :2 \\ \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2N1 \\ -N1 \end{array} \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ :3 \\ \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} +N2 \\ \\ \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \text{св} \end{array} \end{array}.$$

В матрице коэффициентов выделена единичная подматрица. Под столбцами этой матрицы стоят неизвестные x_1, x_2 и x_3, которые принимаем за базовые. Оставшееся неизвестное x_4 относим к свободным неизвестным и переносим в правую часть матрицы, заменив знаки в его коэффициентах на противоположные:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{rrr|rr} 0 & 1 & 0 & -2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \text{св} & x_4 \end{array} \end{array}$$

Вытекающее из последней матрицы решение (выражение основных переменных через свободную переменную) будет таково:

$$\begin{cases} x_1 = \ \ 1 + \ \ 2x_4, \\ x_2 = -2 - \ \ x_4/3, \\ x_3 = \ \ 2 + 2x_4/3. \end{cases}$$

В рассмотренном примере ранг матрицы коэффициентов равен рангу расширенной матрицы ($\operatorname{rang}\ A = \operatorname{rang}\ B = 3$), а количество неизвестных ($n = 4$) превосходит количество уравнений $m = \text{rang}\ A = 3$. Записанное общее решение системы подтверждает справедливость теоремы Кронекера–Капелли о бесконечном множестве ее частных решений. Каждому из бесчисленного множества значений свободной переменной x_4 соответствуют определенные частные решения (значения основных переменных). Например, при $x_4 = 0$ получим: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$.

Убедиться в правильности найденного общего решения (и каждого из частных решений) можно, подставив его в исходную систему уравнений.

Конечно, в качестве основных можно выбрать и другие неизвестные, рассмотрев отличные от приведенных выше варианты преобразования матрицы коэффициентов. Если, например, в качестве основных выбрать переменные x_1, x_3 и x_4, то в процессе преобразований по методу Гаусса–Жордана в единичную матрицу следует превратить подматрицу матрицы коэффициентов, столбцами которой будут коэффициенты при этих переменных.

Для получения такого решения воспользуемся матрицей, полученной после третьего шага ранее проделанных преобразований:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)\begin{matrix} {\scriptstyle +N2} \\ \\ {\scriptstyle +N2} \end{matrix} \Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right)_{+N1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & -11 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \text{св} \end{array} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -11 & -6 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_3 & x_4 & \text{св} & x_2 \end{array} \end{array}.$$

Последняя матрица получена из предпоследней переносом в правую часть (следовательно, сменой знака) второго столбца. Этим действием выбраны основные переменные x_1, x_3 и x_4, а x_2 становится свободной переменной.

Последняя матрица позволяет записать решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = -11 - 6x_2, \\ x_3 = \ -2 - 2x_2, \\ x_4 = \ -6 - 3x_2. \end{cases}$$

Одно из частных решений системы, полученное при $x_2 = -2$: $x_1 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$, совпадает с частным решением первого варианта решения.

4. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-\ x_3=-3, \\ \ x_1-\ x_2+2x_3=\ 1, \\ \ x_1+4x_2-3x_3=\ 0. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем матрицу коэффициентов при ее неизвестных к единичной:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} -2N2 \\ \\ -N2 \end{array} \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 5 & -5 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{c} :5 \\ +N1/5 \\ -N1 \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

Вид полученной матрицы говорит о следующем.

Ранг матрицы коэффициентов A оказался меньше ранга P расширенной матрицы ($\mathrm{rang}\ A = 2 < \mathrm{rang}\ P = 3$). По теореме Кронекера–Капелли рассматриваемая систем несовместна. Об этом говорит и преобразованное третье уравнение системы, приводящее к противоречию: $0 = 4$ (!).

5. Определить значение λ, при котором система однородных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + \ x_3 = 0, \\ \ x_1 + 2x_2 - \ x_3 = 0, \\ 2x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевые решения. Найти эти решения.

Р е ш е н и е. Это однородная система уравнений, и она может иметь ненулевые решения только в случае, если матрица коэффициентов при неизвестных вырождена (определитель матрицы равен нулю). Приравняем нулю определитель матрицы коэффициентов:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Решая полученное после раскрытия определителя линейное алгебраическое уравнение относительно λ, получим $\lambda = -4$. При этом значении λ матрица коэффициентов при неизвестных заданной системы уравнений будет вырожденной. Факт вырожденности матрицы будет, кроме того, доказан, если окажется, что ее ранг меньше трех. Ранг матрицы, а заодно и ненулевые решения, определим, используя процедуру преобразований Гаусса–Жордана.

Составим расширенную матрицу системы (к матрице коэффициентов прибавляем нулевой столбец свободных членов, что, естественно, не изменит ранга матрицы коэффициентов) и преобразуем полученную матрицу:

$$\begin{array}{cl}\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} {\scriptstyle -3N2} \\ \\ {\scriptstyle -2N2} \end{array}\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{cl}\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -8 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 4 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} {\scriptstyle :4} \\ \\ {\scriptstyle -N1} \end{array}\end{array}.$$

Третью строку, обращающуюся в нуль после вычитания из нее первой строки, вычеркиваем из матрицы. После этого продолжим преобразования оставшихся двух строк матрицы:

$$\begin{array}{cl}\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle +N2} \end{array}\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c}\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} {\scriptstyle x_1} & {\scriptstyle x_2} & {\scriptstyle x_3} & {\scriptstyle \text{св}} \end{array}\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c}\left(\begin{array}{rr|r} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} {\scriptstyle x_1} & {\scriptstyle x_3} & {\scriptstyle x_2} \end{array}\end{array}.$$

Отсюда следует общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_3 = 2x_2. \end{cases}$$

Подстановка решения в исходную систему уравнений обращает ее в тождество:

$$\begin{cases} 3\cdot 0 - 2x_2 + \ \ 2x_2 = 0\ (!), \\ \quad 0 + 2x_2 - \ \ 2x_2 = 0\ (!), \\ 2\cdot 0 - 4x_2 + 2\cdot 2x_2 = 0\ (!). \end{cases}$$

6. На изготовление единицы продукции первого вида предприятию требуется: 0,2 кг сырья первого вида; 0,15 кг сырья второго вида: 0,1 кг сырья третьего вида. Соответственно на изготовление единицы продукции второго вида требуется сырья: 0,4 кг первого; 0,2 кг второго и 0,05 кг третьего вида. На изготовление единицы продукции третьего вида требуется: 0,1; 0,1 и 0,2 кг сырья соответствующих видов.

Предприятие располагает сырьем трех видов в количестве: 21 кг — первого вида, 15 кг — второго и 15 кг — третьего.

Требуется определить количество товаров первого, второго и третьего видов, которое может выпустить предприятие из имеющихся у него запасов сырья.

Р е ш е н и е. Обозначая искомое количество товаров через x_1, x_2, x_3, для их определения составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}1x_3 = 21, \\ 0{,}15x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = 15, \\ 0{,}1x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}2x_3 = 15. \end{cases}$$

Для решения системы используем метод Гаусса–Жордана. Составим и преобразуем расширенную матрицу.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}1 & 21 \\ 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}1 & 15 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}2 & 15 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

(для удобства дальнейших преобразований умножим расширенную матрицу на 10) $\Longrightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 210 \\ 1{,}5 & 2 & 1 & 150 \\ 1 & 0{,}5 & 2 & 150 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ {\scriptstyle -N1} \\ {\scriptstyle -2N1} \end{array} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 210 \\ -0{,}5 & -2 & 0 & -60 \\ -3 & -7{,}5 & 0 & -270 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ {\scriptstyle \cdot(-2)} \\ {\scriptstyle \cdot(-1)} \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 210 \\ 1 & 4 & 0 & 120 \\ 3 & 7{,}5 & 0 & 270 \end{array}\right)\begin{array}{l} {\scriptstyle -2N2} \\ \\ {\scriptstyle -3N2} \end{array} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 1 & -30 \\ 1 & 4 & 0 & 120 \\ 0 & -4{,}5 & 0 & -90 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ {\scriptstyle :(-4{,}5)} \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 1 & -30 \\ 1 & 4 & 0 & 120 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \end{array}\right)\begin{array}{l} {\scriptstyle +4N3} \\ {\scriptstyle -4N3} \\ \\ \end{array} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 50 \\ 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \end{array}\right).$$

Отсюда получаем решение:

$$(x_1, x_2, x_3) = (40, 20, 50).$$

В правильности полученного решения убедимся, подставив найденные значения неизвестных в исходную систему уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}2 \cdot 40 + 0{,}4 \cdot 20 + 0{,}1 \cdot 50 = 21, \ (!) \\ 0{,}15 \cdot 40 + 0{,}2 \cdot 20 + 0{,}1 \cdot 50 = 15, \ (!) \\ 0{,}1 \cdot 40 + 0{,}05 \cdot 20 + 0{,}2 \cdot 50 = 15. \ (!) \end{cases}$$

7. Путем преобразований Гаусса–Жордана найти обратную матрицу по отношению к

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \\ 4 & -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Присоединим к заданной матрице справа единичную матрицу и путем преобразования Гаусса–Жордана (над строками !) приведем правую часть матрицы к единичной:

$$AI = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} {\scriptstyle :2} \\ {\scriptstyle +N1} \\ {\scriptstyle -2N1} \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} {\scriptstyle -2N2} \\ {\scriptstyle \cdot -1} \\ {\scriptstyle +2N2} \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -3 & -3/2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} {\scriptstyle +3N3} \\ {\scriptstyle +N3} \\ \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -3/2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) = IA^{-1}.$$

В правой части полученной матрицы стоит матрица, обратная по отношению к исходной: $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 8 & 6 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1–3 методом Гаусса–Жордана найти решения систем уравнений или доказать их несовместность.

1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$ **2**. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$ **3**. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5, \\ x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$

4. Определить значение λ, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ \lambda x_1 - 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

имеет ненулевые решения. Найти эти решения.

5. Путем преобразований Гаусса–Жордана найти обратную матрицу по отношению к матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание на расчетную работу. Часть 2

В задания входят 5 частей. Части 1–3 рекомендуются для выполнения студентам всех специальностей; часть 4 рассчитана на студентов с углубленной подготовкой по математике; часть 5 рекомендуется студентам, обучаемым по экономическим специальностям без углубленной математической подготовки.

Во всех частях заданий $k = 1 + \dfrac{N}{n}$, где N — последняя цифра номера группы, в которой обучается студент, n — порядковый номер студента в списке группы (для заочного отделения — последние две цифры номера студенческого билета. Если они больше 36, то последняя цифра).

Во всех частях заданий вычисления проводить, удерживая в результатах три значащие цифры. Ошибка вычислений не должна превышать 1%.

Пояснительные записки всех частей расчетных работ оформлять на листах размера А4. Текст писать на одной стороне листа. Отчет представляется преподавателю в сшитом виде вместе с титульным листом.

Титульный лист должен содержать следующую информацию (в порядке следования).

«НАИМЕНОВАНИЕ УЧЕБНОГО ЗАВЕДЕНИЯ»

Курсовая работа по линейной алгебре, часть ϵ
Название работы

Выполнил: *ст-т гр.... Фамилия И.*
Принял: *должность преподавателя,*
Фамилия И.О.

ГОРОД 20... г.

Задание на расчетную работу. Часть 1 «Системы линейных уравнений»

Задана система уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + kx_3 = kN, \\ 2x_1 - \ x_2 + 3x_3 = 1 + 3N, \\ \lambda x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 2(1 - N). \end{cases}$$

В предположении, что $\lambda = N$, найти решение системы:
1) матричным методом;
2) методом определителей;
3) методом Гаусса–Жордана.
4). Приравняв нулю правые части системы уравнений определить значение λ, при котором система имеет нетривиальные решения. Найти эти решения.
5). Найти решения системы уравнений или доказать ее несовместность:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + \ kx_3 = 5, \\ 2x_1 + \ x_2 + 2kx_3 = -1, \\ \ x_1 - 3x_2 - \ kx_3 = \ k. \end{cases}$$

Указание.

1. В пунктах 4 и 5 сделать проверку путем подстановки полученного решения (если оно существует) в исходную систему уравнений.

2. Вычисления и числовые решения представлять в виде обыкновенных дробей.

Типовые контрольные работы

БИЛЕТ ПО ТЕОРИИ (на 15 мин)

1. Перечислите свойства, характеризующие определитель.

1. Множитель всех элементов можно вынести за знак определителя.
2. Строки и столбцы равноценны.
3. Определитель не изменится, если элементы любой его строки умножить на числовой множитель.
4. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов его главной диагонали.
5. Среди пунктов 1–4 нет требуемых.

2. Перечислите соотношения, справедливые для произведений матриц.

1. $AB = BA$. 2. $A(BC) = (AB)C$. 3. $A^2 = (a_{ij}^2)$.

4. $A(B+C) = AB + AC$. 5. $AB = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

3. Перечислите элементарные преобразования над матрицами, которые не изменяют их ранг.

1. Прибавление к элементам столбца элементов другого столбца.
2. Вычеркивание части строк, если их количество превышает количество столбцов, и наоборот.
3. Транспонирование матрицы.
4. Суммирование двух матриц.
5. Умножение матрицы на число, отличное от нуля.

4. Перечислите соотношения, определяющие решения систем уравнений матричным методом и методом Крамера.

1. BA^{-1}. 2.$A^{-1}B$. 3.A^c/Δ. 4.Δ_i/Δ. 5.B/Δ.

5. Какие утверждения согласуются с теоремой Кронекера–Капелли (A — матрица коэффициентов; B — матрица свободных членов; m — количество уравнений; n — количество неизвестных)?

1. Если rang $A <$ rang B, то система имеет множество решений.
2. Если rang $A =$ rang $B = n$, то система имеет единственное решение.
3. Если определитель коэффициентов равен нулю, то однородная система имеет бесчисленное множество решений.
4. Если определитель коэффициентов не равен нулю, то однородная система не имеет решений.
5. Если rang $A =$ rang $B < n$, то система не имеет решений.

БИЛЕТ ПО ПРАКТИКЕ (на 75 мин)

1. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Матричным методом решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

3. Методом Гаусса–Жордана решить систему уравнений или доказать ее несовместность.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = -3, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 7. \end{cases}$$

4. Найти значение λ, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

имеет ненулевые решения. Найти эти решения.

5. Путем преобразований Гаусса–Жордана найти обратную матрицу по отношению к $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \\ 4 & -6 & -5 \end{pmatrix}$.

ТЕМА 5

Векторы. Линейные зависимость и независимость системы векторов

Вопросы

1. Что собой представляет вектор с геометрической точки зрения? модуль вектора? направление вектора?

2. Что собой представляют линейные операции над векторами? Перечислите свойства линейных операций.

3. Что называется скалярным произведением векторов? Запишите формулу для скалярного произведения векторов и поясните, от чего зависит знак скалярного произведения.

4. Что такое проекция вектора на направленную ось? Перечислите основные свойства проекций.

5. Как связана проекция вектора со скалярным произведением?

6. Какие векторы называются линейно зависимыми? линейно независимыми?

7. Как можно разложить вектор по базисам пространств L_1? L_2? L_3?

Задачи

1. Заданы три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, произвольным образом расположенные в пространстве. Путем построений изобразить процесс получения векторов $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ и $-2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

Р е ш е н и е. Для решения задачи используем правила суммирования векторов и умножения их на число. Например, в случае построения третьего вектора сначала изображается вектор, длина которого в 2 раза больше вектора $\boldsymbol{a}$ и который направлен в сторону, противоположную вектору $\boldsymbol{a}$. С концом полученного вектора совмещается начало вектора $\boldsymbol{b}$, затем с концом присоединенного вектора $\boldsymbol{b}$ совмещается начало вектора $\boldsymbol{c}$. Началом искомого вектора является начало вектора $-2\boldsymbol{a}$, а концом — конец вектора $\boldsymbol{c}$.

Проверить справедливость свойства коммутативности операции сложения векторов.

2. Построить вектор $\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_2 + 3\boldsymbol{i}_3$, где $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$ и $\boldsymbol{i}_3$ — тройка взаимно ортогональных единичных векторов.

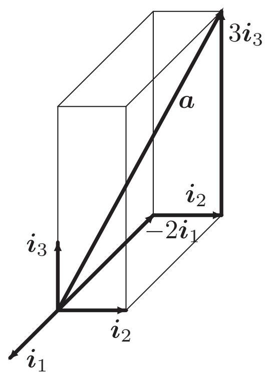


Рис. 0.1. Задача 3

Р е ш е н и е (рис.0.1). Искомый вектор $\boldsymbol{a}$ можно получить двумя способами. Либо построением прямоугольного параллелепипеда на векторах $-2\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$ и $3\boldsymbol{i}_3$, либо последовательно присоединяя к концу каждого предыдущего вектора начало последующего. В первом случае искомый вектор, началом которого служат начала трех векторов — сторон параллелепипеда, совпадает с диагональю построенного прямоугольного параллелепипеда. Во втором случае начало вектора $\boldsymbol{a}$ совпадает с началом первого изображаемого вектора суммы, конец — с концом последнего.

3. Заданы модули $a = 10$, $b = 5$ двух векторов и угол $\varphi = (\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = 2\pi/3$ между ними. Найти скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.
Р е ш е н и е. Используя формулу, соответствующую определению скалярного произведения $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a \cdot b \cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$, найдем $\big(\cos(2\pi/3) = -1/2\big)$:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 10 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -25.$$

Знак «минус» в значении скалярного произведения говорит о том, что угол между рассматриваемыми векторами тупой.

4. Заданы модули $a = 2$, $b = 5$ двух векторов и их скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 10$. Определить угол между векторами.
Р е ш е н и е. Из формулы, соответствующей определению скалярного произведения, следует: $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \dfrac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{a \cdot b}$. Воспользовавшись этим выражением, найдем

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{10}{2 \cdot 5} = 1.$$

Отсюда $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = 2\pi k \quad (k \in Z)$.

5. Найти скалярное произведение векторов $2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$, если известны модули векторов $a = 4$, $b = 1$ и угол $\varphi = (\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \pi/3$.
Р е ш е н и е. Для определения искомой величины предварительно раскроем скалярное произведение, опираясь на его свойства (дистрибутивность, коммутативность и возможность вынесения числового множителя за знак скалярного произведения):

$$\big((2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}), (\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b})\big) = 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) - 4(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + 3(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) - 6(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) =$$

$$= 2a^2 - a \cdot b \cos\varphi - 6b^2 = 2 \cdot 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot 1^2 = 24.$$

6. Найти проекцию вектора $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ на направление вектора $\boldsymbol{c}$, если $a = \sqrt{3}$, $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}}) = \pi/6$, $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}}) = \pi/2$.
Р е ш е н и е. Используя свойства суммы проекций векторов и произведения проекции вектора на число, получим

$$Pr_{\boldsymbol{c}}(2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}) = 2Pr_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a} + 3Pr_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b} = 2a\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}}) + 3b\cos(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}}) =$$

$$= 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot b \cdot 0 = 3.$$

7. Найти проекцию вектора $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ на направление вектора $\boldsymbol{c}$, если $c = 2$, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) = -1$, $(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = 4$.

Р е ш е н и е. Используя формулу, связывающую проекции векторов со скалярным произведением $Pr_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a} = \dfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})}{c}$, получим

$$Pr_{\boldsymbol{c}}(2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}) = 2\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})}{c} - 3\frac{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}{c} = 2\frac{-1}{2} - 3\frac{4}{2} = -7.$$

8. Убедиться в том, что любое частное решение уравнения $x-2y = 0$ представляет собой вектор в пространстве $\Re_2$.

Р е ш е н и е. Исходное уравнение — частный случай однородной системы уравнений при $n = 2$ и $m = 1$. Ранги матрицы ее коэффициентов и расширенной матрицы равны: $rang(1, 2) = rang(1, 2, 0) = r = 1$.

Количество неизвестных $n = 2 > r$. Согласно теореме Кронекера-Капелли система имеет бесчисленное множество решений. Общее решение заданной «системы» уравнений неоднозначно и представляется совокупностью двух величин $x = t$ и $x = 2t$, где $t \in \Re$.

Обозначим эту совокупность через X и покажем, что $X = (t, 2t)$ представляет собой вектор в пространстве $\Re_2$, т.е. удовлетворяет всем условиям параграфа **??**, определяющим векторное пространства.

Рассмотрим два частные решения исходного уравнения $X_1 = (t_1, 2t_1)$ и $X_2 = (t_2, 2t_2)$ и совокупность $\Theta = (0, 0)$. Проверку осуществим следуя пунктам аксиом векторного пространства.

1. Образуем сумму двух векторов: $X_1 + X_2 = ((t_1, 2t_1) + (t_2, 2t_2) = (t_1 + t_2, 2t_1 + 2t_2) = (T, 2T)$. Здесь и далее $T = t_1 + t_2 \in \Re$.

2. Операция суммирования обладает свойством коммутативности. Действительно, $X_1 + X_2 = (t_1 + t_2, 2t_1 + 2t_2) = (t_2 + t_1, 2t_2 + 2t_1) = (t_2, 2t_2) + (t_1, 2t_1) = X_2 + X_1$.

В выполнимости пунктов 3-9 аксиом векторного пространства читателям предлагается убедиться самостоятельно.

10. $X + (-X) = (t, 2t) + (-t, -2t) = (t - t, 2t - 2t) = (0, 0) = \Theta$.

Все пункты аксиом выполнены, поэтому, следуя определению, $\boldsymbol{X}$ представляет собой вектор в $\Re_2$.

9. Установить, будут ли векторы $\boldsymbol{a}_1 = (2, 1, 1) = 2i_1 + i_2 + i_3$, $\boldsymbol{a}_2 = (-3, 1, -4) = -3i_1 + i_2 - 4i_3$ и $\boldsymbol{a}_3 = (1, 3, -2) = i_1 + 3i_2 - 2i_3$ линейно независимыми.

Р е ш е н и е. Для установления факта линейной зависимости или линейной независимости заданных векторов составим и приравняем нулевому вектору их линейную комбинацию:

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{\Theta}.$$

Подставим в записанное равенство заданные векторы, выраженные через базисные векторы и сгруппируем слагаемые с одинаковыми $\boldsymbol{i}_k \quad (k = 1, 2, 3)$:

$$(2\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3)\boldsymbol{i}_1 + (\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3)\boldsymbol{i}_2 + (\lambda_1 - 4\lambda_2 - 2\lambda_3)\boldsymbol{i}_3 = 0 \cdot i_1 + 0 \cdot i_2 + 0 \cdot i_3.$$

Приравнивая множители при одинаковых базисных векторах правой и левой частей записанного равенства, придем к системе уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\lambda_1 - 3\lambda_2 + \ \lambda_3 = 0, \\ \ \lambda_1 + \ \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ \ \lambda_1 - 4\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0. \end{array} \right.$$

Однородная система уравнений будет иметь ненулевые решения, если определитель матрицы ее коэффициентов равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{-2N2} \\ \\ \text{-N 2} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 0 \ (!)$$

Обратим внимание на то, что столбцами определителя являются координаты заданных векторов.

Равенство нулю определителя указывает на то, что существуют ненулевые значения коэффициентов λ_k при которых линейная комбинация заданных векторов обращается в нуль. Эти значения: $\lambda_1 = -2t,\ \lambda_2 = -t,\ \lambda_3 = t$. Таким образом

$$-2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{\Theta}.$$

Система заданных векторов линейно зависима.

10. Установить, можно ли считать функции $e^{k_1 x}$ и $e^{k_2 x}$ линейно независимыми векторами.
Р е ш е н и е. Составим и приравняем нулю линейную комбинацию заданных функций.

$$\lambda_1 e^{k_1 x} + \lambda_2 e^{k_2 x} = 0.$$

Предположим, что хотя бы один из числовых множителей в равенстве (пусть λ_1) не равен нулю. Перенесем второе слагаемое в правую часть равенства и поделим полученное выражение на $\lambda_1 e^{k_2 x}$:

$$e^{(k_1 - k_2)x} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

В правой части полученного выражения стоит число, а в левой — функция переменной x. Равенство возможно только в случае, когда $k_1 = k_2$. Таким образом, экспоненциальные функции будут линейно независимыми если коэффициенты в их показателях различны.

11. Установить, можно ли считать функции x и kx линейно независимыми векторами.
Р е ш е н и е. Составим и приравняем нулю линейную комбинацию заданных функций:

$$\lambda_1 x + 2\lambda_2 kx = 0.$$

Ясно, что записанное равенство будет выполняться при не равных нулю коэффициентах λ_1 и λ_2, связанных зависимостью $\lambda_1 = -2k\lambda_2$. Функции — линейно зависимые.

12. Записать вектор $\boldsymbol{a} = -1{,}5\boldsymbol{p}_1 + 0{,}5\boldsymbol{p}_2$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, если зависимость между двумя парами базисных векторов выражается соотношениями:

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2); \qquad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{4}(3\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2).$$

Р е ш е н и е. Из двух векторных уравнений, связывающих заданные базисные векторы, найдем

$$\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2; \qquad \boldsymbol{p}_2 = 3\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2.$$

Подставляя эти зависимости в выражение для вектора $\boldsymbol{a}$, получим

$$\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{e}_1 - 4\boldsymbol{e}_2.$$

Замечание: линейная независимость двух пар базисных векторов следует из возможности взаимного однозначного представления одной пары векторов через другую.

Желательно представленные преобразования сопроводить рисунком, выбрав в качестве исходного базиса любую пару некомпланарных векторов: $(\boldsymbol{e}_1; \boldsymbol{e}_2)$ или $(\boldsymbol{p}_1; \boldsymbol{p}_2)$.

13. Записать вектор $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2 + 2\boldsymbol{p}_3$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, если зависимость между векторами выражается соотношениями:

$$\boldsymbol{e}_1 = 3\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 - 2\boldsymbol{p}_3; \quad \boldsymbol{e}_2 = -1{,}5\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2; \quad \boldsymbol{e}_3 = 3\boldsymbol{p}_1 - 2\boldsymbol{p}_2.$$

Р е ш е н и е. Искомое представление вектора $\boldsymbol{a}$ должно иметь вид

$$\boldsymbol{a} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \lambda_3\boldsymbol{e}_3. \tag{3}$$

Подставим в (3) зависимости между $\boldsymbol{e}_k$ и $\boldsymbol{p}_k$ $(k = \overline{1,3})$ и сгруппируем в полученном выражении слагаемые при одинаковых векторах $\boldsymbol{p}_k$:

$$\boldsymbol{a} = (\lambda_1 - 1{,}5\lambda_2 + 3\lambda_3)\boldsymbol{p}_1 + (-\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3)\boldsymbol{p}_2 - 2\lambda_1\boldsymbol{p}_3.$$

Приравнивая коэффициенты при векторах $\boldsymbol{p}_k$ в полученном и исходном выражениях для вектора $\boldsymbol{a}$, придем к системе трех уравнений относительно трех неизвестных λ_k:

$$\begin{cases} 3\lambda_1 - 1{,}5\lambda_2 + 3\lambda_3 = 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = -1, \\ -2\lambda_1 = -2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -1{,}5\lambda_2 + 3\lambda_3 = -2, \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = -2, \\ \lambda_1 = 1. \end{cases}$$

Умножение первого уравнения системы на -2, второго на 3 приводит к уравнениям с одинаковыми левыми и различными правыми частями:

$$\begin{cases} 3\lambda_2 - 6\lambda_3 = 4, \\ 3\lambda_2 - 6\lambda_3 = -6, \end{cases}$$

что говорит о несовместности двух уравнений. Причина тому — линейная зависимость (коллинеарность) двух заданных векторов: $\boldsymbol{e}_3 = -2\boldsymbol{e}_2$.

14. Денежные единицы E, D и R трех государств связаны отношениями, представленными таблицей (значения единиц, приведенных в верхней строке относятся к значениям единиц первого столбца).

Установить факт линейной зависимости или независимости систем векторов, представленных координатами строк (столбцов) таблицы.

	E	D	R
E	1	5/6	25
D	6/5	1	30
R	1/25	1/30	1

Р е ш е н и е Составим в виде совокупности координат векторы, представленные тремя строками таблицы:

$$\boldsymbol{a} = \left(\frac{E}{E}; \frac{D}{E}; \frac{R}{E}\right) = \left(1; \frac{5}{6}; 25\right), \quad \boldsymbol{b} = \left(\frac{6}{5}; 1; 30\right), \quad \boldsymbol{c} = \left(\frac{1}{25}; \frac{1}{30}; 1\right).$$

Нетрудно убедиться в том, что любой из записанных векторов коллинеарен двум другим. Действительно, например, $\boldsymbol{b} = \dfrac{6}{5}\boldsymbol{a} = 30\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a} = \dfrac{5}{6}\boldsymbol{b} = 25\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c} = \dfrac{1}{25}\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{25}\boldsymbol{b}$. Аналогичные соотношения можно записать для векторов, представленных координатами столбцов таблицы. Следовательно, отношения обменных курсов различных валют представляются числами, которые являются координатами линейно зависимых векторов.

Задачи для самостоятельного решения

1. Изобразить на рисунке три произвольных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Построить по ним векторы $0{,}5\boldsymbol{a}$, $-0{,}5\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$, $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})$.

2. Заданы модули векторов $a=4$, $b=5$ и угол $(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=2\pi/3$. Найти скалярное произведение векторов.

3. Заданы модули векторов $a=1$, $b=3$ и угол $(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\pi/2$. Найти скалярное произведение векторов $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

4. Найти $Pr_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$, если $b=4$, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=8$.

5. Найти угол $\alpha=(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$, если $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=4$, $a=2$, $b=4$.

6. Доказать, что полином n-й степени $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ представляет собой линейную комбинацию системы линейно независимых «векторов» $(x^0,x^1,x^2,\ldots,x^n)$.

7. Записать вектор $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ в базисе $(\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3)$, если $\boldsymbol{i}_1=\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{i}_2=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{i}_3=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$.

8. Записать вектор $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ в базисе $(\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2)$, если $\boldsymbol{i}_1=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{i}_2=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$. Изобразить на рисунке разложение вектора в двух базисах.

9. Определить, будут ли линейно независимыми функции $\sin x$ и $\cos x$?

10. Определить, будут ли векторы $(3,1,5)$, $(-2,2,-3)$ и $(1,-5,1)$ линейно независимыми.

ТЕМА 6

Операции над векторами в ортонормированном базисе

Вопросы

1. Что собой представляет ортонормированный базис? Запишите все возможные варианты скалярных произведений векторов ортонормированного базиса.

2. Какова связь между проекциями вектора на векторы ортонормированного базиса и координатами вектора?

3. Что собой представляют координаты единичного вектора в ортонормированном базисе?

4. Как определить модуль вектора по его координатам в ортонормированном базисе?

5. Как связаны между собой направляющие косинусы вектора, заданного в ортонормированном базисе?

6. Приведите выражение для скалярного произведения векторов, представленных своими координатами в ортонормированном базисе, а также для косинуса угла между векторами.

7. Запишите в координатной форме условия ортогональности и параллельности двух векторов.

Задачи

1. В пространстве L_2 заданы два геометрических вектора $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$. Ввести в этом пространстве ортонормированный базис и показать на рисунке проекции векторов $\overline{CA}$, $\overline{CB}$ и $\overline{AB}$. Записать выражения для проекций и составляющих этих векторов по направлениям базисных векторов.

Р е ш е н и е. Проекции векторов соответствуют длинам отрезков по координатным осям, связанным с базисными векторами, так как ортогональные базисные векторы имеют единичные модули: $Pr_{\boldsymbol{i}_1}\overline{CA} = a_1 - c_1$ (отрицательная величина); $Pr_{\boldsymbol{i}_1}\overline{CB} = b_1 - c_1$, $Pr_{\boldsymbol{i}_1}\overline{AB} = b_1 - a_1$, $\ldots$, $Pr_{\boldsymbol{i}_2}\overline{AB} = b_2 - a_2$.

Векторы раскладываются на составляющие по направлениям базисных векторов:

$$\overline{CA} = (a_1 - c_1)\boldsymbol{i}_1 + (a_2 - c_2)\boldsymbol{i}_2, \ \ldots, \ \overline{AB} = (b_1 - a_1)\boldsymbol{i}_1 + (b_2 - a_2)\boldsymbol{i}_2.$$

2. Найти вектор $\overline{AB}$, если в декартовой ортогональной системе координат $A(3;-2)$, $B(2;-4)$.

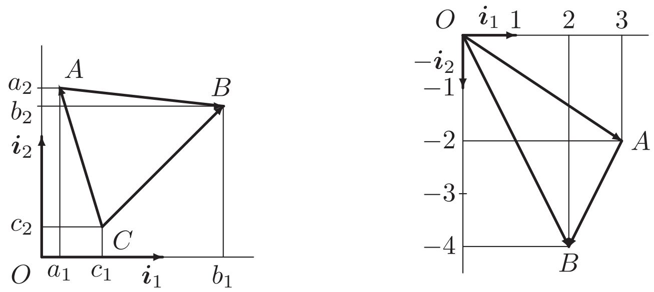


Рис. 0.2. Решения задач 1 (слева) и 2 (справа)

Построить векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{AB}$ в ортонормированном базисе, связанном с системой координат (O — начало координат).

Р е ш е н и е. Векторы, задаваемые координатами точек их конца и начала, определяются разностями соответствующих координат. Так как координаты точки O нулевые: $O(0,0)$, то $\overline{OA} = (a_1 - 0; a_2 - 0) = (a_1; a_2) = (3;-2)$, $\overline{OB} = (b_1; b_2) = (2;-4)$. Записанные соотношения подтверждают утверждение о том, что координаты радиусов-векторов в ортонормированном базисе равны координатам концов этих векторов.

Далее имеем: $\overline{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2) = \big(2-3; -4-(-2)\big) = (-1;-2)$.

3. В ортонормированном базисе заданы векторы $\boldsymbol{a} = (4; -2; 0)$ и $\boldsymbol{b} = (3; 5; -1)$. Найти $0{,}5\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ и $2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$.

Р е ш е н и е. Учитывая свойства линейных операций над векторами, заданными своими координатами, найдем:

$0{,}5\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \big(0{,}5 \cdot 4 + 3; 0{,}5 \cdot (-2) + 5; 0{,}5 \cdot 0 + (-1)\big) = (5; 4; -1);$

$2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \big(2 \cdot 3 - 4; 2 \cdot 5 - (-2); 2 \cdot (-1) - 0\big) = (2; 12; -2) = 2(1; 6; -1).$

4. Найти $Pr_b\boldsymbol{a}$, если $\boldsymbol{a} = (0; 2; -3)$, $\boldsymbol{b} = (1; -2; -1)$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой определения проекций через скалярное произведение векторов:

$$Pr_b\boldsymbol{a} = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{b} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} = \frac{0 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + (-3) \cdot (-1)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

5. Найти угол между векторами $\boldsymbol{a} = (-0{,}5; 2; 1{,}5)$ и $\boldsymbol{b} = (1; -4; -3)$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой определения косинуса угла между двумя векторами через скалярное произведение этих векторов:

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{a \cdot b} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} =$$

$$= \frac{-0{,}5 \cdot 1 + 2 \cdot (-4) + 1{,}5 \cdot (-3)}{\sqrt{(-0{,}5)^2 + 2^2 + (1{,}5)^2}\sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-3)^2}} = \frac{-13}{0{,}5\sqrt{26}\sqrt{26}} = -1.$$

Отсюда $\varphi = \arccos(-1) = \pi$.

Заданные векторы оказались коллинеарными. Этого результата можно было ожидать. Действительно, векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ линейно зависимы: $\boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{a}$.

6. Найти m и n, если известно, что векторы $\boldsymbol{a} = (2; 2; m)$ и $\boldsymbol{b} = (n; 4; 6)$ параллельны.

Р е ш е н и е. Из условия параллельности векторов $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$ следует $\dfrac{2}{n} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{m}{6}$.

Из двух независимых уравнений получим:

$$\frac{2}{n} = \frac{2}{4} \Longrightarrow n = 4; \qquad \frac{2}{4} = \frac{m}{6} \Longrightarrow m = 3.$$

7. Найти m, если векторы $\boldsymbol{a} = (5m; 2; m)$ и $\boldsymbol{b} = (-1; 3; m)$ перпендикулярны.

Р е ш е н и е. Из условия перпендикулярности векторов

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

следует:

$$5m \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + m \cdot m = 0.$$

Для определения m имеем квадратное уравнение

$$m^2 - 5m + 6 = 0.$$

Это уравнение имеет два действительных корня: $m_1 = 2$ и $m_2 = 3$ — искомые значения m.

8. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{a} = (1; \sqrt{2}; -1)$.
Р е ш е н и е. Определив модуль заданного вектора

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + (-1)^2} = 2,$$

найдем единичный вектор, сонаправленный вектору $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{a}}{a} = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

Координатами единичного вектора в ортонормированном базисе являются направляющие косинусы. Таким образом,

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\alpha_3 = -\frac{1}{2}.$$

Отсюда находим значения углов: $\alpha_1 = \pi/3$, $\alpha_2 = \pi/4$, $\alpha_3 = 2\pi/3$, которые определяют направление вектора $\boldsymbol{a}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти вектор $\overline{AB}$, если в декартовой ортогональной системе координат $A(1; 2; -1)$, $B(3; -4; 1)$.

Построить векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{AB}$ в ортонормированном базисе, связанном с системой координат (O – начало координат).

2. В ортонормированном базисе заданы векторы $\boldsymbol{a} = (2; -1; 0)$ и $\boldsymbol{b} = (3; 1; 5)$. Найти $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a}$.

3. Найти $Pr_b\boldsymbol{a}$, если $\boldsymbol{a} = (0; 2; -3)$, $\boldsymbol{b} = (1; -2; -1)$.

4. Найти угол между векторами $\boldsymbol{a} = (2; 3; -1)$ и $\boldsymbol{b} = (-1; 0; 3)$.

5. Найти m, если известно, что векторы $\boldsymbol{a} = (1; n; 3)$ и $\boldsymbol{b} = (m; 4; 6)$ параллельны.

6. Из условия перпендикулярности векторов $\boldsymbol{a} = (m; 2m; 1)$ и $\boldsymbol{b} = (m; 1; 1)$ найти m.

7. Найти угол между диагоналями четырехугольника, заданного координатами его вершин: $A(-1; -1)$, $B(-1; 2)$, $C(2; -1)$ и $D(2; 2)$.

8. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{a} = (3; -6; 2)$.

ТЕМА 7
Векторное и смешанное произведения векторов
Вопросы

1. Дайте определение векторного произведения векторов?
2. В чем геометрический смысл векторного произведения?
3. Дайте определение смешанного произведения векторов?
4. В чем геометрический смысл смешанного произведения?
5. В чем состоит задача деления отрезка в заданном отношении? Приведите формулы для определения координат точки, делящей отрезок в заданном отношении и, в частности, пополам.

Задачи

1. Заданы модули двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$: $a = 3$, $b = 1/\sqrt{3}$ и угол между векторами $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \pi/3$. Вычислить площадь S параллелограмма, двумя сторонами которого являются векторы $3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

Р е ш е н и е.

Составим векторное произведение, раскроем его и найдем модуль полученного вектора:

$$c = |\boldsymbol{c}| = |(3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})| = |3\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b}|.$$

Так как $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}| = aa \sin 0 = 0$, $|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b}| = bb \sin 0 = 0$ и $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ то

$$c = |4ab \sin \pi/3| = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 = S.$$

2. Сумма трех векторов равна нулевому вектору: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{\Theta}$. Доказать, что при этом $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$. Каков геометрический смысл полученного результата?

Р е ш е н и е. Из первого заданного равенства выразим один из векторов (произвольный) через два других:

$$\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}.$$

Полученное равенство приводит к следующим результатам:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c};$$

$$\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = -\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}.$$

Таким образом требуемое равенство доказано.

Геометрический смысл полученного результата объясняется следующим. Равенство нулю суммы трех векторов указывает на то, что эти векторы образуют замкнутый треугольник. Векторные произведения любой из пар векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ равны одной и той же площади — площади, образованной тремя векторами.

3. $a = 4$, $b = 3$ — модули векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Угол между этими векторами $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \pi/6$. Выразить через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ единичный вектор $\boldsymbol{i}$, ортогональный плоскости векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и образующий с заданными векторами (в порядке их записи) правую тройку векторов.

Р е ш е н и е. Согласно определению в векторном произведении

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

$\boldsymbol{c}$ — вектор, перпендикулярный векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, составляет с ними правую тройку векторов. Чтобы найти единичный вектор в направлении $\boldsymbol{c}$, достаточно разделить этот вектор на его модуль

$$c = ab \sin \pi/6 = 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 6.$$

Тогда

$$\boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{c}}{c} = \frac{1}{6}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}.$$

4. Используя определение векторного произведения найти угол между векторами $\boldsymbol{a} = (-2, 1, 0)$ и $\boldsymbol{b} = (3, 2, -1)$.

Р е ш е н и е. Для определения векторного произведения заданных векторов воспользуемся формулой (**??**):

$$\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

В результате раскрытия определителя получим совокупности координат вектора $\boldsymbol{c}$:

$$\boldsymbol{c} = \big((1 \cdot (-1) - 0 \cdot 2), (0 \cdot 3 - (-2)(-1)), (-2 \cdot 2 - 1 \cdot 3)\big) = \big(-1, -2, -7\big).$$

Модуль этого вектора

$$c = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-7)^2} = \sqrt{54}.$$

Найдем модули векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$a = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}; \qquad b = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}.$$

Из формулы для определения модуля векторного произведения найдем

$$\sin(\hat{\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}}) = \frac{c}{ab} = \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{5}\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{27}{35}}.$$

5. Найти вектор $\boldsymbol{c} = (2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b})$, если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ заданы в задаче **4** в виде совокупности их координат в ортонормированном базисе.

Р е ш е н и е. Для определения векторного произведения раскроем векторное произведение двучленов, стоящих в скобках условия примера:

$$\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} + 2 \cdot 3\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b} = 7\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}.$$

Используем полученное в примере **4** по формуле (**??**) значение $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \big(-1, -2, -7\big)$.

Тогда

$$\boldsymbol{c} = 7\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -7\big(1, 2, 7\big).$$

6. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1, 5, 0)$, $B(3, 1, 0)$, $C(0, 3, 0)$.

Р е ш е н и е. Отметим характерную особенность расположения точек в L_3. Отсутствие в них третьей координаты указывает на то, что все точки лежат в первой координатной плоскости.

Выберем любые два из трех векторов, совпадающих со сторонами треугольника. Пусть эти векторы $\boldsymbol{a} = \overline{CB} = (3, -2, 0)$ и $\boldsymbol{b} = \overline{CA} = (1, 2, 0)$. Тогда

$$S = \frac{1}{2}\big|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\big| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_3 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\big|(3\cdot2-(-2)\cdot1)\boldsymbol{i}_1+0\boldsymbol{i}_2+0\boldsymbol{i}_3\big| = |4i_1| = 4.$$

Замечание. Если бы под знаком абсолютной величины стояла сумма трех отличных от нуля векторов: $s_1\boldsymbol{i}_1 + s_2\boldsymbol{i}_2 + s_3\boldsymbol{i}_3$, то искомую площадь следовало искать по правилам определения модуля вектора, т.е: $S = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}$.

7. Три вектора заданы своими координатами в ортонормированном базисе: $\boldsymbol{a} = (2, -1, 4)$, $\boldsymbol{b} = (0, -2, 3)$, $\boldsymbol{c} = (-2, 3, 1)$.

Установить, могут ли эти векторы, расположенные в порядке их перечисления, составлять правый базис в L_3;

Р е ш е н и е.

Если смешанное произведение трех векторов $\boldsymbol{abc}$ положительно, то векторы образуют правый базис в L_3. При отрицательном значении смешанного произведения — левый базис. Если смешанное произведение векторов равно нулю, то векторы компланарны и не могут быть базисными.

Найдем смешанное произведение заданных векторов по формуле (**??**)

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(-2)\cdot 1+4\cdot 0\cdot 3+(-1)\cdot 3\cdot(-2)-4\cdot(-2)\cdot(-2)-2\cdot 3\cdot 3-(-1)\cdot 0\cdot 1 = -32.$$

Отличное от нуля значение смешанного произведения указывает на то, что векторы линейно независимы и могут быть приняты в качестве базисных. Знак минус указывает на то, что тройка векторов образует левый базис. Чтобы изменить ориентацию векторов на правую, достаточно в порядке заданного следования векторов $\boldsymbol{abc}$ поменять местами два любых вектора. Так, например, $\boldsymbol{acb} = +32$.

8. Вершины тетраэдра заданы своими координатами в ортонормированном базисе L_3: $A(1,-2,5)$, $B(4,3,0)$, $C(-2,1,3)$, $D(4,0,2)$.

а) Определить объем $V_т$ тетраэдра $ABCD$;

б) Вычислить высоту h тетраэдра, опущенную из вершины A.

Р е ш е н и е.

а) Объем тетраэдра составляет шестую часть объема параллелепипеда $V_т = \dfrac{1}{6}V = \dfrac{1}{6}|\boldsymbol{abc}|$. Векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ при этом должны выходить из одной вершины (или быть направлеными в одну вершину). Пусть это будет вершина D. Тогда:

$$\boldsymbol{a} = \overline{AD} = (3,2,-3); \quad \boldsymbol{b} = \overline{BD} = (0,-3,2); \quad \boldsymbol{c} = \overline{CD} = (6,-1,-1).$$

Искомый объем

$$V_т = \frac{1}{6}\big|\boldsymbol{abc}\big| = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 6 & -1 & -1 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{6}\big|3\cdot(-3)\cdot(-1)+(-3)\cdot 0\cdot(-1)+2\cdot 2\cdot 6-(-3)\cdot(-3)\cdot 6-3\cdot 2\cdot(-1)-2\cdot 0\cdot(-1)\big| =$$

$$= \frac{1}{6}\left|-15\right| = 2{,}5.$$

б) Объем тетраэдра $V_{\scriptscriptstyle T} = \dfrac{1}{3}Sh$, где S – площадь основания тетраэдра, противоположного вершине A. Для ее определения воспользуемся векторным произведением двух произвольных векторов основания. Пусть это будут найденные ранее векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$S = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 6 & -1 & -1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|(3\cdot 1 + 2\cdot 1;\ 2\cdot 6 - 0\cdot 1;\ -0\cdot 1 + 3\cdot 6)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(5, 12, 18)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{5^2 + 12^2 + 18^2} = \frac{1}{2}\sqrt{493}.$$

Искомое значение высоты

$$h = \frac{3V_{\scriptscriptstyle T}}{S} = \frac{3\cdot 2{,}5}{\sqrt{493}/2} = \frac{15}{\sqrt{493}}.$$

9. Отрезок, соединяющий точки $M_1(6; -8; 2)$ и $M_2(-2; 0; 2)$, разделить в отношении 3:1.
Р е ш е н и е. Воспользуемся формулами деления отрезка в отношении λ:

$$x_1 = \frac{x_1^1 + \lambda x_1^2}{1+\lambda}, \quad x_2 = \frac{x_2^1 + \lambda x_2^2}{1+\lambda}, \quad x_3 = \frac{x_3^1 + \lambda x_3^2}{1+\lambda},$$

находим:

$$x_1 = \frac{6 + 3\cdot(-2)}{1+3} = 0; \qquad x_2 = \frac{-8 + 3\cdot 0}{1+3} = -2; \qquad x_3 = \frac{2 + 3\cdot 2}{1+3} = 2.$$

Эти значения определяют координаты точки $M(0; -2; 2)$, делящей отрезок M_1M_2 в отношении 3:1.

10. Записать выражение для вектора $\overline{AD}$, совпадающего с медианой треугольника ABC, если $A(0; 5; -2)$, $B(3; -1; 4)$, $C(1; 3; -4)$.
Р е ш е н и е. По определению медианы точка D делит отрезок BC пополам. Поэтому $D\left(\dfrac{x_1^B + x_1^C}{2}; \dfrac{x_2^B + x_2^C}{2} + \dfrac{x_3^B + x_3^C}{2}\right) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow D\left(\frac{3+1}{2}; \frac{-1+3}{2}; \frac{4+(-4)}{2}\right) \Longrightarrow D(2; 1; 0).$$

Запишем выражение для вектора, совпадающего с медианой:

$$\overline{AD} = (x_1^D - x_1^A; x_2^D - x_2^A; x_3^D - x_3^A) = \big(2-0; 1-5; 0-(-2)\big) = 2(1; -2; 1).$$

11. Найти координаты точки C, симметричной точке $A(1;2)$ относительно точки $B(-1;5)$.
Р е ш е н и е. Из условия задачи следует, что B делит отрезок AC пополам. Пусть координаты точки C x_C и y_C. Из формул определения координат точки, делящей отрезок пополам,

$$x_B = \frac{1}{2}(x_A + x_C), \qquad y_B = \frac{1}{2}(y_A + y_C)$$

находим и определяем значения искомых координат:

$$x_C = 2x_B - x_A = 2 \cdot (-1) - 1 = -3; \quad y_C = 2y_B - y_A = 2 \cdot 5 - 2 = 8.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Заданы модули двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$: $a = 1$, $b = 3$ и угол между векторами $(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}) = \pi/6$. Вычислить площадь S параллелограмма, двумя сторонами которого являются векторы $2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$.

2. Найти модуль вектора $\boldsymbol{c} = (3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{b})$, если $\boldsymbol{a} = (1, -2, 0)$ и $\boldsymbol{b} = (-3, 1, -1)$.

Заданы координаты точек: $A(-2, 3, 1)$, $B(2, 0, -1)$, $C(0, -2, 3)$, $D(-1, 4, 1)$. Требуется:

3. Проверить, будут ли точки лежать в одной плоскости.

4. Определить, могут ли три вектора, выходящих из точки D в направлениях оставшихся точек, образовать базис.

5. Установить, какой тип базиса (правый или левый) образует тройка векторов, построенных в задаче 4.

6. Найти площадь основания тетраэдра, противоположного вершине D.

7. Вычислить объем тетраэдра, вершинами которого являются заданные точки.

8. Определить высоту тетраэдра, опущенную из вершины D на противоположное основание.

9. Разделить отрезок, соединяющий точки $M_1(2;3;0)$ и $M_2(4;1;2)$, в отношении 2:1.

10. Точка $B(2;1;4)$ делит отрезок AC пополам. Найти координаты точки C, если $A(3;-1;5)$.

Задание на расчетную работу. Часть 3

Заданы координаты четырех вершин тетраэдра: $A(3, 5, -2)$, $B(-1, 3, 2)$, $C(k, -4, 3)$, $D(3, -4, -k)$.

В декартовой ортогональной системе координат изобразить тетраэдр.

Средствами линейной алгебра найти следующие элементы тетраэдра.

1. Длину стороны CD.

2. Длину медианы треугольника BCD, выходящую из вершины D.

3. Угол между диагоналями параллелограмма, построенного на сторонах BC и BD.

4. Длину высоты, опущенной из вершины A на основание BCD.

5. Площадь основания BCD.

6. Объем тетраэдра.

7. Убедиться в том, что векторы AB, AC, AD и BC линейно зависимы. Выбрать среди этих векторов линейно независимые. Доказать факт их линейной независимости.

По возможности, выполнить проверку правильности полученных результатов (возможно получив результаты другими методами).

ТИПОВЫЕ БИЛЕТЫ
контрольных работ

Билет по теории
(на 15 минут)

1. Перечислите элементарные преобразования над определителями, не изменяющие их значения.

1. Прибавление к элементам столбцов соответствующих элементов других столбцов.
2. Перестановка любых строк (столбцов).
3. Вычеркивание столбцов, состоящих только из нулевых элементов.
4. Вычеркивание строки и столбца, на пересечении которых стоит нулевой элемент.
5. Среди ответов 1–4 нет правильных.

2. Перечислите соотношения, справедливые для произведений матриц.

1. $AB = BA$; 2. $A(BC) = (AB)C$; 3. $A^2 = (a_{ij}^2)$;

4. $A(B + C) = AB + AC$; 5. $AB = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

3. Расставьте номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка) по отношению к скалярному произведению и его свойствам ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ — векторы, $\lambda \in \Re$). В местах отсутствия правильных ответов поставьте цифру 5.

1. Коммутативность	1. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$;
2. Ассоциативность	2. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$;
3. Дистрибутивность	3. $\big(\boldsymbol{a}, (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})\big) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$;
4. Определение	4. $\lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b})$.

4. Какие из перечисленных ниже соотношений справедливы для проекций векторов?

1. $Pr_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = Pr_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$; 2. $Pr_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = b\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$;
3. $Pr_{\boldsymbol{b}}\lambda\boldsymbol{a} = \lambda Pr_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$; 4. $Pr_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = Pr_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a} \cdot Pr_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b}$;
5. $Pr_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = Pr_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a} + Pr_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b}$.

5. Отметьте свойства, справедливые для векторов, представленных в ортонормированном базисе в L_3 ($\boldsymbol{a}$ — произвольный вектор; $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор).

1. $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{i_1}) = \cos\alpha_1$; 2. $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i}_1 + a_2\boldsymbol{i}_2 + a_3\boldsymbol{i}_3$; 3. $a_1a_3 = 0$;
4. $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$; 5. $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha_1; \cos\alpha_2; \cos\alpha_3)$.

Билет по практике

(на 45 минут)

1. Из условия перпендикулярности векторов $\boldsymbol{a} = (m; 2m; 1)$ и $\boldsymbol{b} = (m; 1; 1)$ найти m.

2. Найти скалярное (другой вариант: векторное) произведение $\big((2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}), (\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b})\big)$, если $a = 1$, $b = 2$, $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \pi/3$.

3. Определить, при каких условиях будут линейно независимыми векторы (функции) a^{k_1x} и a^{k_2x}.

4. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$, если $A(-2; 1; 3)$ и $B(2; 1; 0)$.

5. Найти площадь параллелограмма, вершинами которого являются точки $A(2; -1; 3)$, $B(3; -2; 1)$ и $C(2; 1; 4)$.

Т Е М А 8
Комплексные числа

Задачи

1. Доказать (самостоятельно), что операции сложения и умножения комплексных чисел ($z_k = x_k + iy_k$) $\quad$ ($k = 1, 2, 3$) обладают свойствами:

а) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
б) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$;
в) $z_1 z_2 = z_2 z_1$;
г) $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2)z_3$;
д) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

В задачах **2** – **5** преобразовать выражения к алгебраической форме комплексного числа.

2. $z = (1 - 2i)(2 + i)^2 + 5i$.
Р е ш е н и е проведем поэтапно:
$(2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 3 + 4i$;
$(1 - 2i)(3 + 4i) = 3 + (4 - 6)i - 8i^2 = 11 - 2i$;
$z = 11 - 2i + 5i = 11 + 3i$.

3. $z = (2i - 1)^2 + (1 - 3i)^3$:
$z = (4i^2 - 4i + 1) + (1 - 3 \cdot 3i + 3(3i)^2 - 3^3 i^3) =$
$-3 + 4i - 26 + 18i = -29 + 14i$.

4. $z = \dfrac{2 - i}{1 + i}$
$z = \dfrac{(2 - i)(1 - i)}{1^2 - i^2} = \dfrac{1 - 3i}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}i$.

5. $z = \dfrac{(1 + i)(3 + i)}{3 - i} - \dfrac{(1 - i)(3 - i)}{3 + i}$.
$z = \dfrac{(2 + 4i)(3 + i) - (2 - 4i)(3 - i)}{(3 - i)(3 + i)} = \dfrac{(2 + 14i) - (2 - 14i)}{9 + 1} = 2{,}8i$.

6. Найти действительные решения уравнения

$$12[(2x + i)(1 + i) + (x + y)(3 - 2i)] = 17 + 6i.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем уравнение:

$$12[(2x-1)+(2x+1)i+3(x+y)-2(x+y)i]=17+6i;$$

$$12[5x+3y-1+(1-2y)i]=17+6i.$$

Так как в выражении $a+bi$ слагаемые с $\operatorname{Re} a$ и $\operatorname{Im} a$ линейно независимы, то для нахождения решения уравнения приравниваем действительные слагаемые правой и левой частей уравнения, а затем мнимые:

$$\begin{cases} 5x+3y-1=\dfrac{17}{12}, \\ 1-2y=\dfrac{6}{12}; \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{1}{3}, \qquad y=\frac{1}{4}.$$

В задачах **7–8** доказать справедливость соотношений.

7. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, где $z_k=x_k+y_k \quad (k=1,2)$.

Р е ш е н и е. Так как $\overline{z}_k=x_k-y_ki$, то

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i, \quad\Longrightarrow\quad \overline{z_1+z_2}=(x_1+x_2)-(y_1+y_2)i.$$

$$\overline{z}_1+\overline{z}_2=x_1-y_1i+x_2-y_2i=(x_1+x_2)-(y_1+y_2)i \quad (!).$$

8. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

Р е ш е н и е.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(x_1+y_1i)(x_2-y_2i)}{x_2^2+y_2^2}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+(y_1x_2-x_1y_2)i}{x_2^2+y_2^2};$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{1}{x_2^2+y_2^2}\sqrt{(x_1x_2+y_1y_2)^2+(y_1x_2-x_1y_2)^2}=$$
$$=\frac{1}{x_2^2+y_2^2}\sqrt{x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+y_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2};$$

$$\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}=\frac{1}{x_2^2+y_2^2}\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}=$$
$$=\frac{1}{x_2^2+y_2^2}\sqrt{x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+y_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2} \quad (!).$$

9. Доказать, что $|z_1-z_2|$ — это расстояние между точками M_1 и M_2, изображающими комплексные числа z_1 и z_2.

Р е ш е н и е. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$ и $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Записанное выражение представляет собой модуль вектора $\overline{M_1 M_2} = \big((x_2 - x_1),\ (y_2 - y_1)\big)$.

10. Найти корни второй, третьей и четвертой степеней из единицы.

Р е ш е н и е. Для $a = 1$ $(a = 1+0\cdot i)$ имеем: $r = 1$, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{0}{1} = 0$. Для решения задачи используем формулу

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)\right].$$

Для $n = 2$.

$z_0 = \sqrt[n]{1}\left[\cos\left(\dfrac{0}{n} + \dfrac{2\pi}{n}\cdot 0\right) + i\sin\left(\dfrac{0}{n} + \dfrac{2\pi}{n}0\right)\right] = 1.$

$z_1 = \cos\left(0 + \dfrac{2\pi}{2}\cdot 1\right) + i\sin\left(0 + \dfrac{2\pi}{2}\cdot 1\right) = -1.$

Для $n = 3$.

$z_0 = 1,\quad z_1 = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2},$

$z_2 = \cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Для $n = 4$.

$z_0 = 1,\quad z_1 = \cos\dfrac{2\pi}{4} + i\sin\dfrac{2\pi}{4} = i,$

$z_2 = \cos\dfrac{4\pi}{4} + i\sin\dfrac{4\pi}{4} = -1,\quad z_3 = \cos\dfrac{6\pi}{4} + i\sin\dfrac{6\pi}{4} = -i.$

Задачи для самостоятельного решения

Привести к алгебраической форме комплексные выражения.

1. $(1 - i)^3 + (1 + i)^3$; **2**. $\dfrac{3 - i}{1 - i} + \dfrac{1 - i}{2 + i}$.

3. Найти решение уравнения $(1 + i)x + (-2 + 5i)y = -4 + 17i$.

4. Вычислить $\left(\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\right)^2$, если $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{3} + i$.

5. Доказать справедливость равенства $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

6. Доказать справедливость неравенств

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \quad \text{и} \quad |z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|.$$

Представить в показательной и тригонометрической формах комплексные числа

7. $z = 12i$ **8.** $\dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$, $z_2 = 3 - 3\sqrt{3}i$.

9. $z = \dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$. **10.** Найти все значения $\sqrt[5]{-1-i}$.

ТЕМА 9

Преобразование базисов

Вопросы

1. Какие векторы могут образовать базис в пространстве L_n?
2. Что представляет собой правый базис в пространстве L_3?
3. Какие признаки характеризуют правый базис? Каким образом можно превратить левый базис в правый.
4. При каких условиях можно осуществить взаимно однозначное преобразование одной совокупности векторов в другую?

Задачи

1. Между двумя совокупностями векторов линейного пространства L_3 $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)^T$ (условно исходный базис) и $\tilde{\boldsymbol{E}}=(\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_2, \tilde{\boldsymbol{e}}_3)^T$ существует зависимость:

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \quad \tilde{\boldsymbol{e}}_2 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \tilde{\boldsymbol{e}}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3.$$

Требуется составить матрицу S^T преобразования $\tilde{\boldsymbol{E}}=S^T\boldsymbol{E}$ и установить, можно ли $\tilde{\boldsymbol{E}}$ считать совокупностью базисных векторов. Если да, то записать преобразование, обратное к заданному.
Р е ш е н и е. Запишем в матричном виде заданное преобразование векторов:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{e}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{e}}_2 \\ \tilde{\boldsymbol{e}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix}, \quad \Longrightarrow \quad S^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную по отношению к S^T матрицу, используя преобразования Гаусса-Жордана:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)_{-N1} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)_{+N2} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -N3/2 \\ :2 \end{array} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)^{-N2} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad (S^T)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $(S^T)^{-1}$ существует, то совокупность трех векторов $\tilde{\boldsymbol{E}}$ образует базис в том же линейном пространстве L_3, что и векторы $\boldsymbol{E}$.

Найдем обратное преобразование $\boldsymbol{E} = (S^T)^{-1}\tilde{\boldsymbol{E}}$:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{e}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{e}}_2 \\ \tilde{\boldsymbol{e}}_3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = \dfrac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{e}}_1 - \tilde{\boldsymbol{e}}_2 + \tilde{\boldsymbol{e}}_3), \\[2ex] \boldsymbol{e}_2 = \dfrac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{e}}_1 + \tilde{\boldsymbol{e}}_2 - \tilde{\boldsymbol{e}}_3), \\[2ex] \boldsymbol{e}_1 = \dfrac{1}{2}(-\tilde{\boldsymbol{e}}_1 + \tilde{\boldsymbol{e}}_2 + \tilde{\boldsymbol{e}}_3). \end{cases}$$

Для проверки правильности полученных результатов достаточно подставить в них заданные соотношения между векторами $\tilde{\boldsymbol{E}}$ и $\boldsymbol{E}$. В результате придем к исходному базису. Проверка соответствует матричной записи:

$$\boldsymbol{E} = (S^T)^{-1}\tilde{\boldsymbol{E}} = (S^T)^{-1}S^T\boldsymbol{E} = I\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}.$$

2. В базисе $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3)^T$ задан вектор $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$. Представить $\boldsymbol{x}$ в базисе $\tilde{\boldsymbol{E}} = (\tilde{\boldsymbol{e}}_1\ \tilde{\boldsymbol{e}}_2\ \tilde{\boldsymbol{e}}_3)^T$, если зависимость $\tilde{\boldsymbol{E}} = S^T\boldsymbol{E}$ задана в условии задачи **1**.

Р е ш е н и е. Запишем заданное разложение вектора $\boldsymbol{x}$ в матричной форме

$$\boldsymbol{x} = X^T\boldsymbol{E} = (-1\ 2\ 1)\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу преобразования базисов и результат, полученный в задаче **1**, перейдем к базису $\tilde{\boldsymbol{E}}$:

$$\boldsymbol{x} = X^T(S^T)^{-1}\tilde{\boldsymbol{E}} = (-1\ 2\ 1)\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (0\ 2\ -1)\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = 2\tilde{\boldsymbol{e}}_2 - \tilde{\boldsymbol{e}}_3.$$

3. Вектор $\boldsymbol{E}$ задан своими координатами $E_1 = (1,\ 2)^T,\ E_2 = (2,\ 3)^T$ в базисе $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_1\ \boldsymbol{i}_2)^T$. Доказать, что $\boldsymbol{E}$ представляет базис в L_2. Вектор $\boldsymbol{x}$, заданный в базисе $\boldsymbol{I}$ матрицей $X = (-1,\ 4)$, записать в базисе $\boldsymbol{E}$.

Р е ш е н и е. По условию

$$\boldsymbol{E} = (E_1\ E_2)\begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \boldsymbol{i}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \boldsymbol{i}_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь $(E_1\ E_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = S^T$ – матрица преобразования базисов $\boldsymbol{I}$ в $\boldsymbol{E}$.

Так как $\det S^T = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -1 \neq 0$, то существует обратное к S^T преобразование с матрицей

$$(S^T)^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Представим вектор $\boldsymbol{x}$ в новом базисе:

$$\boldsymbol{x} = X^T\boldsymbol{I} = X^T(S^T)^{-1}\boldsymbol{E} = (-1\ \ 4)\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (11 \quad -6) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} = 11\boldsymbol{e}_1 - 6\boldsymbol{e}_2.$$

4. Векторы правого ортонормированного базиса $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_1\ \boldsymbol{i}_2\ \boldsymbol{i}_3)^T$ связаны с совокупностью векторов $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3)^T$ зависимостями

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i}_2, \quad \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{i}_1, \quad \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{i}_1 + 2\boldsymbol{i}_3.$$

Требуется:

а) установить, будет ли совокупность векторов $\boldsymbol{E}$ базисом в пространстве L_3; определить его ориентацию;

б) записать вектор $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{i}_1 - \boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_3$ в базисе $\boldsymbol{E}$.

Р е ш е н и е. Запишем заданное преобразование векторов в матричной форме $\boldsymbol{E} = S^T\boldsymbol{I}$:

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \boldsymbol{i}_2 \\ \boldsymbol{i}_3 \end{pmatrix}.$$

Методом элементарных преобразований найдем ранг матрицы S:

$$S^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ +N2 \end{array}. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \operatorname{rang} S^T = 3.$$

Поэтому векторы $\boldsymbol{E}$ образуют базис в линейном пространстве L_3.

Для проверки того, будет ли базис $\boldsymbol{E}$ правым, найдем смешанное произведение его векторов:

$$\boldsymbol{e_1 e_2 e_3} = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = +2.$$

Положительное значение смешанного произведения указывает на то, что базис $\boldsymbol{E}$ правый.

Найдем матрицу, обратную по ношению к S^T:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -N2 \\ \\ +N2 \end{array} \quad \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +N1 \\ \\ \end{array} \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -N2 \\ \\ :2 \end{array} \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right).$$

Таким образом получена обратная матрица

$$(S^T)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Существование обратной матрицы $(S^T)^{-1}$ указывает на то, что S^T невырожденная матрица и векторы $\boldsymbol{E}$ образуют базис в пространстве L_3.

Получим разложение вектора

$$\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{i}_1 - \boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_3 = (2\ \ -1\ \ 1)\begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \boldsymbol{i}_2 \\ \boldsymbol{i}_3 \end{pmatrix} = X^T\boldsymbol{I}$$

в этом базисе:

$$\boldsymbol{x} = X^T\boldsymbol{I} = X^T(S^T)^{-1}\boldsymbol{E} = (2\ \ -1\ \ 1)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}(-2\ \ -3\ \ 1)\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{e}_1 - \frac{3}{2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_3.$$

5. Преобразование базисов $\boldsymbol{I}$ в $\boldsymbol{E}$ линейного пространства L_2 осуществляется матрицей

$$S_{EI}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

В свою очередь базис $\boldsymbol{E}$ преобразуется в базис $\tilde{\boldsymbol{E}}$ матрицей

$$S^T_{\tilde{E}E} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $S^T_{\tilde{E}I}$ преобразования базисов $\boldsymbol{I}$ в $\tilde{\boldsymbol{E}}$.
Р е ш е н и е. Так как

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = S^T_{\tilde{E}E}\boldsymbol{E} = S^T_{\tilde{E}E}S^T_{EI}\boldsymbol{I} = S^T_{\tilde{E}I}\boldsymbol{I},$$

то

$$S^T_{\tilde{E}I} = S^T_{\tilde{E}E}S^T_{EI} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. Задана совокупность многочленов $T = (1\ t\ t^2)^T$. Показать, что она может служить базисом в линейном пространстве L_3. Представить совокупность многочленов

$$P = (p_1\ p_2\ p_3)^T = (1 - 2t,\quad t - t^2,\quad t^2)^T$$

в базисе T.

Проверить, будет ли P базисом в L_3. Если да, то представить многочлен $Q_3 = 1 + 2t - 3t^2$ в базисе P.
Р е ш е н и е. Совокупность T может быть представлена в виде канонического разложения. Действительно,

$$T = (T_1\ T_2\ T_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix}.$$

Ранг записанной таким образом матрицы равен трем — векторы-столбцы (и векторы-строки) линейно независимы.

Составим преобразование $P = S^T T$ и найдем S^T:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad S^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица преобразования S^T невырожденная. Это треугольная матрица, определитель которой равен произведению элементов главной диагонали: $\det S^T = 1 \neq 0$.

Найдем обратную к S^T матрицу методом Гаусса-Жордана:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) +N3 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{+2N2} \quad \Longrightarrow \quad (S^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратимся к многочлену Q_3:

$$Q_3 = Q^T T = Q^T (S^T)^{-1} P = (1 \;\; 2 \;\; -3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (1 \;\; 4 \;\; 1) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = p_1 + 4p_2 + p_3.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Заданы соотношения:

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \quad \tilde{\boldsymbol{e}}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \quad \tilde{\boldsymbol{e}}_3 = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3,$$

При условии, что векторы $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1 \; \boldsymbol{e}_2 \; \boldsymbol{e}_3)$ образуют базис в L_3, доказать, что $\tilde{\boldsymbol{E}} = (\tilde{\boldsymbol{e}}_1 \; \tilde{\boldsymbol{e}}_2 \; \tilde{\boldsymbol{e}}_3)$ также образуют базис в L_3. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$ в этом базисе.

2. В линейном пространстве L_4 задан ортонормированный базис $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_1 \; \boldsymbol{i}_2 \; \boldsymbol{i}_3 \; \boldsymbol{i}_4)^T$. Векторы $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1 \; \boldsymbol{e}_2 \; \boldsymbol{e}_3 \; \boldsymbol{e}_4)^T$ связаны с $\boldsymbol{I}$ зависимостями

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = 2\boldsymbol{i}_1 - \boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_3 + 2\boldsymbol{i}_4, \\ \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{i}_1 + 3\boldsymbol{i}_2 - 2\boldsymbol{i}_3 + \boldsymbol{i}_4, \\ \boldsymbol{e}_3 = 2\boldsymbol{i}_1 - 3\boldsymbol{i}_2 + 2\boldsymbol{i}_3, \\ \boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{i}_1 - 2\boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_3 - \boldsymbol{i}_4. \end{cases}$$

Установить, будут ли векторы $\boldsymbol{E}$ образовывать базис в рассматриваемом пространстве.

3. В линейном пространстве L_3 с ортонормированным базисом $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_1 \; \boldsymbol{i}_2 \; \boldsymbol{i}_3)^T$ заданы две матрицы S^T_{1I} и S^T_{2I} преобразования базиса $\boldsymbol{I}$ в базисы $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$: $\boldsymbol{E}_1 = S_{1I}^T \boldsymbol{I}$ и $\boldsymbol{E}_2 = S_{2I}^T \boldsymbol{I}$. Найти матрицу S_{12}^T, обеспечивающую преобразование $\boldsymbol{E}_1 = S_{12}^T \boldsymbol{E}_2$, если

$$S_{1I}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad S_{2I}^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Доказать, что система многочленов $T = (1+t^2,\ 2t-t^2,\ 1+t)^T$ образует базис в пространстве L_3. Представить в этом базисе многочлен $1 - 2t + t^2$.

5. Вектор $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ с помощью матрицы S преобразования базисных векторов приводится к виду $\tilde{X} = (0,\ x_2-x_3,\ 2x_2)^T$. Записать выражение для матрицы S. Возможно ли обратное преобразование?

6. В линейном пространстве L_3 заданы три базиса: $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3)^T$, $\boldsymbol{E}' = (\boldsymbol{e}_1'\ \boldsymbol{e}_2'\ \boldsymbol{e}_3')^T$, $\boldsymbol{E}'' = (\boldsymbol{e}_1''\ \boldsymbol{e}_2''\ \boldsymbol{e}_3'')^T$, которые связаны соотношениями

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1' = 8\boldsymbol{e}_1 - 6\boldsymbol{e}_2 + 7\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}_2' = 16\boldsymbol{e}_1 + 7\boldsymbol{e}_2 - 13\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}_3' = 9\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 + 7\boldsymbol{e}_3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \boldsymbol{e}_1'' = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}_2'' = 3\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}_3'' = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3. \end{cases}$$

Найти матрицу A оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{E}''$, если его матрица в базисе $\boldsymbol{E}'$ имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

7. Векторы старого $\boldsymbol{I}$ и нового $\tilde{\boldsymbol{I}}$ базисов связаны соотношениями:

$$\tilde{\boldsymbol{i}}_1 = \frac{1}{3}(2\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_2 + 2\boldsymbol{i}_3), \quad \tilde{\boldsymbol{i}}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{i}_1 - \boldsymbol{i}_3), \quad \tilde{\boldsymbol{i}}_3 = \frac{\sqrt{2}}{6}(-\boldsymbol{i}_1 + 4\boldsymbol{i}_2 - \boldsymbol{i}_3).$$

Считая базис $\boldsymbol{I}$ правым ортонормированным, показать, что базис $\tilde{\boldsymbol{I}}$ также ортонормированный. Определить ориентацию базиса $\tilde{\boldsymbol{I}}$. Найти матрицу преобразования базисов. Показать, что она ортогональна. Выразить векторы старого базиса через векторы нового.

8. В ортонормированном базисе задан вектор $\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i}_1 + 3\boldsymbol{i}_2 + 5\boldsymbol{i}_3$. Представить этот вектор в базисе, повернутом относительно $\boldsymbol{i}_3$ на угол $\pi/4$.

Т Е М А 10

Разложение матриц

Вопросы

1. Дайте характеристики матриц, входящих в LU-представление матрицы A.
2. Какой смысл LU представления матриц при решении систем уравнений?
3. Получите формулы, определяющие преобразования векторов и матриц при известном преобразовании матриц.
4. Что представляет собой ортогональная матрица? В чем состоит особенность использования ортогональных матриц в задачах преобразования векторов?
5. Поясните, в чем заключается метод Шмидта ортогонализации столбцов матриц. Метод элементарных преобразований?
6. Какими способами можно осуществить ортогонализацию строк матриц?
7. Перечислите основные характерные свойства матриц с ортогональными строками (столбцами).

Задачи

1. Матрицу $A = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ представить в виде суммы симметричной и обратносимметричной матриц.

Р е ш е н и е.

$$S = \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\Omega = \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Задана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Требуется:

1) разложить матрицу на сумму симметричной S и обратносимметричной Ω матриц;

Представить симметричную матрицу S в виде произведений:

2) слева матрицы с ортогональными столбцами на верхнюю треугольную матрицу с единичной главной диагональю.

3) справа матрицы с ортогональными строками на нижнюю треугольную матрицу с единичной главной диагональю.

Ортогонализацию строк и столбцов матрицы произвести двумя способами: методом Шмидта и с помощью элементарных преобразований.

4). Выделить из матриц, полученных в пунктах 2 и 3 ортогональные матрицы.

Р е ш е н и е.

1) Выделим из матрицы A симметричную и обратносимметричную матрицы:

$$S = \frac{1}{2}[A + A^T] = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\Omega = \frac{1}{2}[A - A^T] = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Осуществим ортогонализацию столбцов и строк симметричной матрицы S методом Шмидта. Согласно этому методу матрицу

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2),$$

где $\boldsymbol{s}_1 = (1, 2)^T$, $\boldsymbol{s}_2 = (2, 3)^T$, следует представить в виде произведения $S = QU$, где

$$Q = (\boldsymbol{q}_1 \;\; \boldsymbol{q}_2) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}; \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2) = 0.$$

Примем, согласно методу Шмидта, $\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Обращаясь к формуле (**??**), найдем

$$u_{12} = \frac{(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{s}_2)}{q_1^2} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3}{1^2 + 2^2} = \frac{8}{5}.$$

Это единственный требующий определения элемент треугольной матрицы. Поэтому

$$U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее определяем

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -8/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$Q = SU^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -8/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/5 \\ 2 & -1/5 \end{pmatrix}.$$

Осуществим процесс ортогонализации столбцов путем элементарных преобразований, а именно, используем возможность прибавления к одному столбцу элементов другого столбца, умноженных на произвольный множитель (в данном случае λ_{12}):

$$\lambda_{12} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{2} s_{i2}^0 s_{i1}^0}{\sum\limits_{i=1}^{2} (s_{i1}^0)^2} = \frac{s_{12}s_{11} + s_{22}s_{21}}{s_{11}^2 + s_{21}^2} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2}{1 + 2^2} = \frac{8}{5}.$$

Верхний индекс «0» у элементов s_{ij}^0 матриц указывает на то, что рассматривается решение на исходном, «нулевом» шаге (в данной задаче единственном в преобразовании матрицы).

Осуществим описанные преобразования со вторым столбцом матрицы S. В результате получим матрицу с ортогональными столбцами:

$$Q = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} - \lambda_{12}s_{11} \\ s_{21} & s_{22} - \lambda_{12}s_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 - 8/5 \cdot 1 \\ 2 & 3 - 8/5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/5 \\ 2 & -1/5 \end{pmatrix}.$$

Матрица совпадает с такой же матрицей, полученной в результате ортогонализации столбцов методом Шмидта.

3) Осуществим ортогонализацию строк матрицы S методом Шмидта. Для этого представим матрицу в виде совокупности векторов-строк $S = (\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2)^T$, где $\boldsymbol{s}_1 = (1, 2)$, $\boldsymbol{s}_2 = (2, 3)$.

Примем, согласно методу Шмидта $\boldsymbol{s}_1 = \boldsymbol{p}_1 = (s_{11}, s_{12}) = (1, 2)$, $\boldsymbol{s}_2 = l_{21}\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$.

Для определения l_{21} умножим последний вектор скалярно на $\boldsymbol{p}_1$ и учтем условие ортогональности векторов $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$:

$$(\boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{p}_1) = l_{21}\boldsymbol{p}_1^2 + (\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1) = l_{21}p_1^2.$$

Отсюда найдем

$$l_{21} = \frac{(\boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{p}_1)}{p_1^2} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2}{1^2 + 2^2} = \frac{8}{5}.$$

Составим левую (нижнюю) треугольную матрицу L с единичной главной диагональю и найдем обратную по отношению к ней матрицу L^{-1}:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8/5 & 1 \end{pmatrix}; \qquad L^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8/5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Искомая матрица с ортогональными строками

$$P = L^{-1}S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8/5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}.$$

Осуществим ортогонализацию строк матрицы путем добавления к элементам второй строки соответствующих элементов первой строки, умноженных на

$$\nu_{21} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{2} s_{2j}^0 s_{1j}^0}{\sum\limits_{j=1}^{2} (s_{1j}^0)^2} = \frac{s_{21}s_{11} + s_{22}s_{12}}{s_{11}^2 + s_{12}^2} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2}{1 + 2^2} = \frac{8}{5}.$$

В результате получим матрицу с ортогональными строками:

$$P = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} - \nu_{21}s_{11} & s_{22} - \nu_{21}s_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 - 8/5 \cdot 1 & 3 - 8/5 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}.$$

Матрица совпадает с такой же матрицей, полученной в результате ортогонализации строк методом Шмидта.

4) Полученные в пунктах 2 и 3 матрицы с ортогональными строками и столбцами оказываются, как в том нетрудно убедиться, ортогональными одновременно и по строкам и по столбцам. Отметим, что это не закономерность.

Следующий шаг в решении задачи — выделение диагональных и ортогональных матриц.

Начнем с матрицы с ортогональными столбцами.

Следуя формуле (**??**)

$$D_Q^2 = Q^T Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2/5 \\ 2 & -1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$D_Q = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Аналогичные вычисления с левой ортогональной матрицей приводят к тому же результату, т.е.

$$D_P^2 = PP^T = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix} = D_Q^2.$$

Ортогональные матрицы

$$\Im_P = D_P^{-1} P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = Q D_Q^{-1} = \Im_Q.$$

Матрицы $\Im_Q$ и $\Im_P$ ортогональны, так как $\Im_Q^T \Im_Q = \Im_P^T \Im_P = I$.

3. Убедиться в том, что матрица $S = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ ортогональная.

Р е ш е н и е. Для ортогональных матриц справедливо соотношение $S^T = S^{-1}$. Поэтому для установления принадлежности матрицы к ортогональным следует найти транспонированную матрицу S^T и убедиться в том, что $SS^T = I$.

Последовательно найдем: $S^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$,

$$S^T S = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Результат указывает на то, что S — ортогональная матрица.

Задачи для самостоятельного решения

1. В линейном пространстве L_3 заданы три базиса: $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3)^T$, $\boldsymbol{E}' = (\boldsymbol{e}_1'\ \boldsymbol{e}_2'\ \boldsymbol{e}_3')^T$, $\boldsymbol{E}'' = (\boldsymbol{e}_1''\ \boldsymbol{e}_2''\ \boldsymbol{e}_3'')^T$, которые связаны соотношениями

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1' = 8\boldsymbol{e}_1 - 6\boldsymbol{e}_2 + 7\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}_2' = 16\boldsymbol{e}_1 + 7\boldsymbol{e}_2 - 13\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}_3' = 9\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 + 7\boldsymbol{e}_3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \boldsymbol{e}_1'' = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}_2'' = 3\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}_3'' = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3. \end{cases}$$

Найти матрицу A оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{E}''$, если его матрица в базисе $\boldsymbol{E}'$ имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

2. Матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ представить в виде произведений LP и QU, где L и U — нижняя и верхняя треугольные матрицы; P и Q — матрицы с ортогональными строками и столбцами. Найти диагональные матрицы d_P и d_Q а также ортогональные матрицы $\Im_P$ и $\Im_Q$.

3. Матрицу $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ представить в виде суммы симметричной и обратносимметричной матриц.

ТЕМА 11

Собственные значения и векторы матриц

Вопросы

1. Как можно найти главные инварианты матриц?

2. Что такое собственные значения матрицы? собственные векторы?

3. Запишите систему уравнений для определения собственных значений и собственных векторов матрицы.

4. Перечислите основные свойства собственных векторов и собственных значений произвольных квадратных матриц. Симметричных матриц.

5. Какие матрицы называют подобными? Перечислите основные свойства подобных матриц.

6. Что такое билинейная форма матриц? Квадратичная форма? Как выглядят эти формы для симметричных матриц?

7. Как представить квадратичную форму в виде матричного произведения?

Задачи

1. Найти собственные значения и собственные векторы оператора проектирования $\boldsymbol{P}_{12}$ произвольного вектора пространства L_3

$$\boldsymbol{x} = X^T \boldsymbol{I} = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \boldsymbol{i}_2 \\ \boldsymbol{i}_3 \end{pmatrix} = x_1 \boldsymbol{i}_1 + x_2 \boldsymbol{i}_2 + x_3 \boldsymbol{i}_3$$

на плоскость базисных векторов $(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2)$.
Р е ш е н и е. По условию результатом действия оператора $\boldsymbol{P}$ на любой вектор является вектор, лежащий в плоскости $(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2)$. Составляющая вектора на направление вектора $\boldsymbol{i}_3$ равна нулю.

Матрица P оператора $\boldsymbol{P}_{12}$ в ортонормированном базисе $\boldsymbol{I}$ имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\det\,(P - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 = 0.$$

Собственные значения матрицы P: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (два одинаковых корня) и $\lambda_3 = 0$.

Для определения собственных векторов имеем систему однородных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-\lambda)x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 0, \\ 0\cdot x_1 + (1-\lambda)x_2 + 0\cdot x_3 = 0, \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + (0-\lambda)x_3 = 0; \end{array} \right. \qquad \text{или} \qquad \left\{ \begin{array}{l} (1-\lambda)x_1 = 0, \\ (1-\lambda)x_2 = 0, \\ -\lambda x_3 = 0. \end{array} \right.$$

Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Для этого собственного значения первые два уравнения последней системы обращаются в тождества при любых x_1^1 (x_1^2) и x_2^1 (x_2^2). Из третьего уравнения получим $x_3^1 = x_3^2 = 0$.

Зададимся частными значениями переменных $x_1^1 = k_1^1$, $x_2^1 = k_2^1$ и $x_1^2 = k_1^2$, $x_2^2 = k_2^2$. Собственные векторы, соответствующий первым двум (равным) собственным значениям матрицы:

$$\boldsymbol{x}^1 = k_1^1\boldsymbol{i}_1 + k_2^1\boldsymbol{i}_2, \qquad \boldsymbol{x}^2 = k_1^2\boldsymbol{i}_1 + k_2^2\boldsymbol{i}_2 \quad -$$

произвольные векторы, лежащие в плоскости базисных векторов. Матрицы-столбцы этих векторов состоят из совокупностей координат: $X^1 = (k_1^1, k_2^1, 0)^T$ и $X^2 = (k_1^2, k_2^2, 0)^T$.

При имеющейся произвольности в выборе двух собственных векторов удобно выбирать их взаимно ортогональными и единичными. В этом случае на выбор координат двух собственных векторов накладываются ограничения:

$$k_1^1k_1^2 + k_2^1k_2^2 = 0, \quad (k_1^1)^2 + (k_2^1)^2 = 1, \quad (k_1^2)^2 + (k_2^2)^2 = 1,$$

уменьшающие до единицы «степени свободы» в произволе выбора координат k_i^j собственных векторов X^1 и X^2. То есть, для однозначного определения k_i^j достаточно задать значение одного из них.

Один из вариантов задания этих векторов: $X^1 = (1,0,0)$, $X^2 = (0,1,0)$.

Для $\lambda_3 = 0$ из системы уравнений получим $x_1^3 = x_2^3 = 0$, $x_3^3 = k_3$ — произвольное число. Поэтому

$$\boldsymbol{x}^3 = k_3 \boldsymbol{i}_3 \qquad \text{или} \qquad X^3 = (0,0,k_3)^T.$$

В частном случае $X^3 = (0,0,1)$. Вместе с $X^1 = (1,0,0)$ и $X^2 = (0,1,0)$ в этом случае собственные векторы образуют ортонормированный базис.

Проверим ориентацию полученного базиса нормированных векторов. Для этого найдем их смешанное произведение:

$$X^1 X^2 X^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Положительное значение смешанного произведения указывает на то, что полученный базис собственных векторов матрицы P правый.

2. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. Составим характеристическое уравнение и найдем его решение.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 6 \\ 7 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 36 = 0.$$

Уравнение имеет два корня: $\lambda_1 = -4$ и $\lambda_2 = 9$.

Будем считать, что А является матрицей оператора, преобразующего вектор $\boldsymbol{x}$ в параллельный ему вектор $\lambda\boldsymbol{x}$. При этом считаем, что операция преобразования осуществляется в ортонормированном базисе $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_1\ \boldsymbol{i}_2)^T$. В этом случае искомый вектор

$$\boldsymbol{x} = X^T \boldsymbol{I} = (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \boldsymbol{i}_2 \end{pmatrix}.$$

Матрицы-столбцы собственных векторов найдем из системы линейно зависимых однородных уравнений:

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 6x_2 = 0, \\ 7x_1 + (3-\lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

Для вектора, соответствующего собственному значению $\lambda_1 = -4$:

$$\begin{cases} (2+4)x_1^1 + 6x_2^1 = 0, \\ 7x_1^1 + (3+4)x_2^1 = 0. \end{cases}$$

Из двух уравнений только одно линейно независимое. Его решение

$$x_1^1 = -x_2^1.$$

С точностью до множителя k_1 матрицу первого собственного вектора можно представить в виде

$$X^1 = k_1(1,\ -1)^T.$$

Для $\lambda_2 = 9$:

$$\begin{cases} (2-9)x_1^2 + 6x_2^2 = 0, \\ 7x_1^2 + (3-9)x_2^2 = 0. \end{cases}$$

В системе уравнений одно независимое. Его решение приводит к матрице второго вектора:

$$X^2 = k_2(6,\ 7)^T.$$

Направление первого вектора совпадает с биссектрисой второго координатного угла (между положительным направлением одного из базисных векторов и отрицательным направлением второго). Второй собственный вектор располагается между положительными (отрицательными) направлениями базисных векторов и имеет проекции на их направления $6k_2$ на $\boldsymbol{i}_1$ и $7k_2$ на $\boldsymbol{i}_2$.

Собственные векторы матрицы A не ортогональны. Этого следовало ожидать: матрица A — несимметричная.

3. Задана матрица оператора

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти ее собственные значения и собственные векторы.

Р е ш е н и е. Составим характеристическое уравнение и найдем его решение.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0.$$

Слева в уравнении стоит отрицательное значение куба суммы λ и 1. То есть, характеристическое уравнение приводится к виду

$$(\lambda + 1)^3 = 0$$

и имеет три одинаковых корня, соответствующих единственному собственному значению $\lambda = -1$.

Координаты единственного собственного вектора матрицы A найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} (2+1)x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 + (-3+1)x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + (-2+1)x_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем решение системы уравнений методом Гаусса-Жордана (последнее уравнение умножим на -1).

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3N3 \\ -5N3 \\ \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Отсюда получаем решение $x_1 = x_2 = -x_3 = k$ (k произвольное число). Этому решению соответствует собственный вектор:

$$X = k(1,\ 1,\ -1)^T.$$

Поделив X на его модуль $|X| = k\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}k$ получим один из трех нормированных собственных векторов:

$$\overline{X}^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1).$$

Два других собственных вектора получим, выбирая в качестве k переменные $-x_1$ и $-x_2$:

$$\overline{X}^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1), \qquad \overline{X}^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1).$$

Векторы $\overline{X}^1$, $\overline{X}^2$ и $\overline{X}^3$ нормированные, но они не ортогональные (исходная матрица несимметричная). Найдем смешанное произведение полученных собственных векторов:

$$\overline{X}^1\overline{X}^2\overline{X}^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = +\frac{4}{3\sqrt{3}} > 0.$$

Положительное значение смешанного произведения указывает на то, что собственные векторы матрицы A образуют правый базис.

4. В правом ортонормированном базисе задана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Требуется.

1. Составить характеристическое уравнение. Найти собственные значения матрицы. Определить главные инварианты, выразив их через главные значения матрицы и через заданные значения элементов матрицы.

2. Определить собственные векторы матрицы. Нормализовать эти векторы. обеспечить их правую ориентацию. Проверить, будут ли эти векторы попарно ортогональными.

3. Составить матрицу S преобразования исходного ортонормированного базиса в базис собственных векторов матрицы. Убедиться в том, что эта матрица ортогональная.

4. С помощью матрицы S преобразовать матрицу A в диагональную матрицу ее собственных значений.

Р е ш е н и е.

1. Составим характеристическое уравнение для матрицы A и найдем его решение:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Для формирования характеристического полинома

$$\lambda^3 - \sigma_1\lambda^2 + \sigma_2\lambda - \sigma_3 = 0$$

найдем главные инварианты σ_k $(k = \overline{1,3})$ матрицы A:

$$\sigma_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 3 + 0 + 0 = 3,$$

$$\sigma_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 - 4 - 1 = -6,$$

$$\sigma_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -8.$$

Подставляя полученные значения в характеристическое уравнение, получим кубическое уравнение:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0.$$

Уравнение имеет три различные действительные корня:

$$\lambda_1 = -2, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 4.$$

В качестве проверки правильности определения главных значений матрицы найдем согласно теореме Вьета главные инварианты матрицы A:

$$\sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -2 + 1 + 4 = 3;$$

$$\sigma_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = -2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 4 \cdot (-2) = -6;$$

$$\sigma_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2 \cdot 1 \cdot 4 = -8.$$

Значения совпадают с найденными выше значениями главных инвариантов.

2. Для определения собственных векторов матрицы A составим систему однородных уравнений:

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - \lambda x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - \lambda x_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем решения этой линейно зависимой системы при различных собственных значениях.

<u>Для $\lambda = \lambda_1 = -2$.</u>

$$\begin{cases} (3+2)x_1^1 + x_2^1 + x_3^1 = 0, \\ x_1^1 + 2x_2^1 + 2x_3^1 = 0, \\ x_1^1 + 2x_2^1 + 2x_3^1 = 0. \end{cases}$$

Образуем матрицу коэффициентов при неизвестных и преобразуем ее методом Гаусса-Жордана:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \implies \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \implies$$

$$\boldsymbol{x}^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

<u>Для $\lambda = \lambda_2 = 1$.</u>

$$\begin{cases} (3-1)x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \\ x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 = 0, \\ x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 = 0. \end{cases}$$

Составим матрицу коэффициентов и преобразуем ее методом Гаусса-Жордана:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \implies \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \implies$$

$$\boldsymbol{x}^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Для $\lambda = \lambda_3 = 4$.</u>

$$\begin{cases} (3-4)x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0, \\ x_1^3 - 4x_2^3 + 2x_3^3 = 0, \\ x_1^3 + 2x_2^3 - 4x_3^3 = 0. \end{cases}$$

Составим матрицу коэффициентов и преобразуем ее методом Гаусса-Жордана:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \implies \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \implies$$

$$\boldsymbol{x}^3 = \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \\ x_3^3 \end{pmatrix} = k_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим, будут ли собственные векторы попарно ортогональными. Для этого найдем их скалярные произведения:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2) &= 0 + 1 - 1 = 0 \text{ (!)},\\
(\boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{x}^3) &= -2 + 1 + 1 = 0 \text{ (!)},\\
(\boldsymbol{x}^3, \boldsymbol{x}^1) &= 0 + 1 - 1 = 0 \text{ (!)}.
\end{aligned}
$$

Векторы попарно ортогональны. Нормируем их и запишем в виде разложения по векторам исходного базиса:

$$
\begin{cases}
\tilde{\boldsymbol{i}}_1 = \dfrac{\boldsymbol{x}^1}{x^1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i}_2 - \boldsymbol{i}_3),\\
\tilde{\boldsymbol{i}}_2 = \dfrac{\boldsymbol{x}^2}{x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_3),\\
\tilde{\boldsymbol{i}}_3 = \dfrac{\boldsymbol{x}^3}{x^3} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_3).
\end{cases}
$$

Проверим ориентацию векторов, определив их смешанное произведение:

$$
\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +1.
$$

Векторы образуют правый базис.

3. Запишем матрицу преобразования $\tilde{\boldsymbol{I}} = S^T \boldsymbol{I}$ исходного базиса в ортонормированный базис собственных векторов матрицы A:

$$
S^T = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Матрица S^T должна быть ортогональной, так как преобразует ортонормированный базис в ортонормированный. Проверим это:

$$
S^T S = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = I \quad \text{(!)}.
$$

4. Используя матрицу S путем преобразования найдем диагональную матрицу собственных значений матрицы A:

$$
\Lambda = S^T A S = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times
$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

На главной диагонали полученной матрицы стоят главные значения матрицы A.

5. В ортонормированном базисе $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2)^T$ задана квадратичная форма

$K = x_1^2 + 1{,}2x_1x_2 + x_2^2$.

Требуется:

а) привести K к виду $\tilde{K} = \lambda_1\tilde{x}_1^2 + \lambda_2\tilde{x}_2^2$;

б) записать матрицу преобразования исходного базиса в базис переменных квадратичной формы $\tilde{K}$.

Р е ш е н и е. Заданную квадратичную форму представим в матричном виде:

$$K = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 1 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X^TQX.$$

Здесь $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица квадратичной формы.

Составим характеристическое уравнение для определения собственных значений матрицы Q:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda^2 - 2\lambda + 0{,}64 = 0.$$

Решения характеристического уравнения: $\lambda_1 = 0{,}4$ и $\lambda_2 = 1{,}6$.

Найдем собственные векторы матрицы Q, соответствующие найденным собственным значениям.

Для $\lambda_1 = 0{,}4$:

$$\begin{cases} (1-0{,}4)x_1^1 + 0{,}6x_2^1 = 0 \\ 0{,}6x_1^1 + (1-0{,}4)x_2^1 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{X}^1 = k_1(1,-1)^T$$

Нормализованный вектор: $\tilde{E}_1 = \dfrac{\tilde{X}^1}{|\tilde{X}^1|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,-1)^T$.

Для $\lambda_2 = 1{,}6$:

$$\begin{cases} (1-1{,}6)x_1^2 + 0{,}6x_2^2 = 0 \\ 0{,}6x_1^2 + (1-1{,}6)x_2^2 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{X}^2 = k_2(1,1)^T$$

Нормализованный вектор: $\tilde{E}_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,1)^T$.

Матрицы-столбцы $\tilde{E}_1$ и $\tilde{E}_2$ связывают базис собственных векторов $\boldsymbol{E} = (\tilde{\boldsymbol{E}}_1, \tilde{\boldsymbol{E}}_2)^T$ с исходным базисом $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2)^T$ зависимостями

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_1 = \tilde{E}_1^T \boldsymbol{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1\ \ -1)\begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \boldsymbol{i}_2 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_2 = \tilde{E}_2^T \boldsymbol{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1\ 1)\begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \boldsymbol{i}_2 \end{pmatrix}.$$

Выписанные соотношения позволяют записать преобразование исходного базиса $\boldsymbol{I}$ в новый $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{E}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{E}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{E}_1^T \\ \tilde{E}_2^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \boldsymbol{i}_2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 \\ \boldsymbol{i}_2 \end{pmatrix} = S^T\boldsymbol{I}.$$

Получено преобразование, соответствующее (**??**). Отсюда получаем выражение для матрицы преобразования исходного базиса в базис нормированных ортогональных собственных векторов матрицы квадратичной формы

$$S^T = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица ортогональная, так как $S^TS = S^{-1}S = I$.

Преобразуем матрицу Q к базису ее собственных значений:

$$\tilde{Q} = S^{-1}QS = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 1 \end{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0 \\ 0 & 1{,}6 \end{pmatrix}.$$

Запишем квадратичную форму в базисе собственных векторов матрицы Q:

$$\tilde{K} = \tilde{X}^T\tilde{Q}\tilde{X} = (\tilde{x}_1\ \ \tilde{x}_2)\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0 \\ 0 & 1{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = 0{,}4\tilde{x}_1^2 + 1{,}6\tilde{x}_2^2.$$

Имея в виду зависимость (**??**) $\tilde{X} = S^{-1}X$, преобразуем квадратичную форму к исходному базису:

$$\tilde{K} = \tilde{X}^T\tilde{Q}\tilde{X} = X^TSS^{-1}QSS^{-1}X = X^TQX = K.$$

Таким образом, квадратичная форма инвариантна по отношению к выбору базиса.

Задачи для самостоятельного решения

В ортонормированном базисе заданы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}. \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Базис, в котором задана матрица B, правый.
Требуется.

1. Составить характеристические уравнения.

2. Найти собственные значения матриц. Определить главные инварианты, выразив их через главные значения матриц и через заданные значения элементов матриц.

3. Определить собственные векторы матриц. Нормализовать эти векторы. Проверить, будут ли векторы попарно ортогональными. Обеспечить правую ориентацию базиса, построенного на собственных векторах матрицы B.

4. Составить матрицы S преобразования исходных ортонормированных базисов в базисы собственных векторов матриц. Убедиться в том, что эти матрицы ортогональные.

5. С помощью матриц S преобразовать матрицы A и B в диагональные матрицы их собственных значений.

Квадратичную форму $31x_1^2 + 10x_1x_2 + 21x_2^2$, заданную в ортонормированном базисе:

6. Привести к виду $\lambda_1\tilde{x}_1^2 + \lambda_2\tilde{x}_2^2$;

7. Записать матрицу преобразования исходного базиса в базис собственных значений матрицы квадратичной формы.

Задание на расчетную работу. Часть 3: «Преобразование матриц»

Задана матрица в ортонормированном базисе

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 4 & k & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Требуется выполнить следующие действия.

1. Найти матрицу, обратную по отношению к A.

Представить A в следующих видах.

2. LU-разложения, где L — нижняя треугольная матрица с единичной главной диагональю; U — верхняя треугольная матрица.

3. LP-разложения, где P — матрица с ортогональными строками.

4. QU-разложения, где Q — матрица с ортогональными столбцами.

Задания пунктов 3 и 4 выполнить двумя способами: методом Шмидта и путем элементарных преобразований.

5. Убедиться в том, что векторы-строки (векторы-столбцы) в полученных матрицах ортогональны. Нормализовать эти векторы.

5. Получить ортогональные матрицы $\Im_P$ и $\Im_Q$ по найденным в пунктах 3 и 4 матрицам P и Q. Убедиться в том, что полученные матрицы ортогональные.

6. Представить матрицу A в виде суммы симметричной Q и обратносимметричной Ω матриц.

Для симметричной матрицы Q, полученной в пункте 6, найти

7 главные инварианты и собственные числа;

8 главные векторы и нормализовать их. Обеспечить правую ориентацию базисных векторов.

9. Считая исходный базис, в котором задана матрица Q, ортонормированным, найти матрицу S его преобразования в базис собственных векторов матрицы Q.

10. С помощью матрицы S привести матрицу Q к диагональному виду.

Осуществить все возможные проверки полученных результатов.

ТИПОВЫЕ БИЛЕТЫ
контрольных работ

Билет по теории
(на 15 минут)

1. Поставьте в соответствие номера ответов (правая колонка) в порядке следования номеров вопросов (левая колонка), касающихся комплексных чисел $z = x + iy$ и комплексных векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. В местах отсутствия правильных ответов поставьте 0.

1. Формула Эйлера	1. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\overline{\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}})$,
2. Формула Муавра	2. $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$,
3. Эрмитова симметри́я	3. $z = re^{i\varphi}$,
4. Модуль z	4. $\sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Перечислите номера правильных утверждений, относящихся к разложению $A = LU$, где $A = (a_{kr})$, $U = (u_{kr})$, $L = (\mu_{kr})$ $(k, r = \overline{1, n})$.

1. $u_{kr} = 0$ при $k < r$;
2. $\mu_{kr} = 0$ при $k < r$;
3. U — матрица с единичной главной диагональю;
4. L — диагональная матрица;
5. Среди утверждений 1–4 нет правильных.

3. Заданы векторы двух базисов $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i}_k)^T$, $\tilde{\boldsymbol{I}} = (\tilde{\boldsymbol{i}}_r)^T$ и преобразование $S = (s_{kr})$, в котором $s_{kr} = (\boldsymbol{i}_k, \tilde{\boldsymbol{i}}_r)$. Перечислите номера правильных соотношений.

1. $\boldsymbol{i}_k = \cos(\boldsymbol{i}_k \hat{,} \tilde{\boldsymbol{i}}_r)\tilde{\boldsymbol{i}}_r$; 2. $s_{kr} = \delta_{kr}$;

3. $s_{km}s_{mr} = \delta_{kr}$; 4. $S^{-1} = S^T$;

5. Среди соотношений 1–4 нет правильных.

4. Какие утверждения и соотношения справедливы для равенства $AX^m = \lambda_m X^m$, где $A = (a_{kr})$, $X^m = (x_k^m)^T$ $(k, r, m = \overline{1, n})$.

1. Хотя бы одна из координат x_k^m векторов X^m может быть представлен в виде линейной комбинации координат x_k^m;

2. X_m, соответствующие различным значениям λ_m, линейно независимы;

3. Если матрицы имеют одинаковые собственные значения и собственные векторы, то они подобны;

4. Матрицы подобны, если они представлены в одном базисе;

5. Среди утверждений 1–4 нет правильных.

5. Перечислите номера правильных утверждений.

1. Если все собственные значения матрицы различны, то ее собственные векторы образуют ортогональный базис;

2. Если матрица A симметрична, то $(AX, Y) = (X, AY)$;

3. Если среди собственных значений симметричной действительной матрицы имеется комплексное число λ_k, то среди них имеется и комплексно сопряженное число $\overline{\lambda}_k$.

4. Матрица положительно определена, если для ее главных миноров справедливо условие $\operatorname{sign} M_k = (-1)^k$;

5. Среди утверждений 1–4 нет правильных.

Билет по практике

(на 75 минут)

1. Найти все значения $\sqrt[3]{-1-\sqrt{3}i}$.

Задана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Выделить из A симметричную матрицу Σ. Представить Σ в виде LU произведения (в других вариантах могут быть другие задания представления Σ: методом Шмидта или путем элементарных преобразований LU, QU).

3. Выделить из матрицы Σ ортогональную матрицу $\Im_Q$ ($\Im_P$). Убедиться в том, что полученная матрица ортогональная.

4. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $B = \begin{pmatrix} 3 & 4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$.

5. В предположении, что матрица B пункта 4 задана в ортонормированном базисе, найти матрицу преобразования S исходного базиса в базис собственных векторов B. С помощью матрицы S преобразовать матрицу B в диагональную матрицу ее собственных значений.

ТЕМА 12
Прямая на плоскости
Вопросы

1. Запишите в векторном виде уравнение прямой на плоскости. Поясните запись рисунком.

2. Что с геометрической точки зрения представляет собой совокупность коэффициентов, стоящих при переменных в общем уравнении прямой?

3. Запишите уравнение прямой в отрезках. Поясните смысл коэффициентов этого уравнения.

4. Запишите уравнение прямой с угловым коэффициентом. Поясните смысл коэффициентов.

5. Запишите уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

6. Как найти угол наклона к осям координат вектора нормали к прямой?

7. Как найти угол между прямыми (через косинусы и тангенсы)? Запишите условие параллельности прямых и их перпендикулярности.

8. Как найти расстояние от точки до прямой?

9. Запишите уравнение прямой в нормальном виде. Что представляет собой свободный член (p) в этом уравнении?

Задачи

1. Изобразить на плоскости прямые, задаваемые уравнениями:
а) $x = y$; б) $x - 3 = 0$; в) $y = 1$.
Р е ш е н и е:

а) прямая проходит через начало координат (в уравнении отсутствует свободный член) и равнонаклонена к координатным осям (множители при переменных равны и $\mathrm{tg}(\widehat{l, x}) = 1$);

б) прямая параллельна оси ординат и отсекает на оси абсцисс отрезок, равный 3;

в) прямая параллельна оси абсцисс и отсекает на оси ординат отрезок, равный 1.

Графическое изображение решений показано на левом рисунке 0.3.

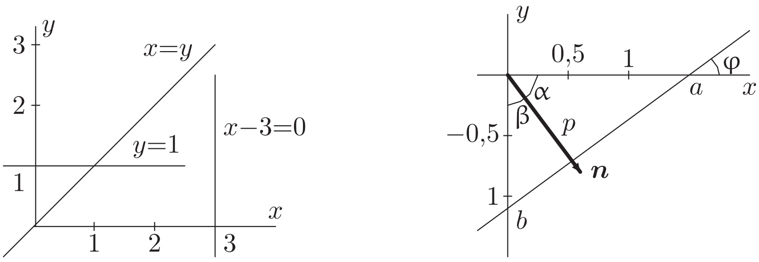


Рис. 0.3. Задачи 1 и 2

2. Уравнение $6x - 8y = 9$ записать: а) в общем виде; б) в отрезках; в) в нормальном виде; г) в виде уравнения с угловым коэффициентом.

Изобразить прямую и пояснить значения коэффициентов уравнений.

Р е ш е н и е. Перенося все слагаемые исходного уравнения в его левую часть, придем к уравнению прямой в общем виде $(Ax + By + C = 0)$:

$$6x - 8y - 9 = 0,$$

где $A = 6$, $B = -8$, $C = -9$. Так что вектор нормали к прямой представляется через его координаты: $\boldsymbol{N} = (A; B) = (6; -8)$.

Для записи уравнения прямой в отрезках $\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1\right)$ следует исходное уравнение поделить на отрицательное значение свободного члена и в числителях его левой части записать переменные с множителями $+1$:

$$\frac{x}{3/2} + \frac{y}{-9/8} = 1.$$

Так что отрезки, отсекаемые прямой на координатных осях x и y, соответственно: $a = \dfrac{3}{2}$; $\quad b = -\dfrac{9}{8}$ (правый рисунок 0.**??**).

Для записи уравнения в нормальном виде определим модуль вектора нормали к прямой: $N = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10$. Поделив на N уравнение прямой в общем виде, приходим к уравнению прямой в нормальном виде $(x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0)$:

$$0{,}6x - 0{,}8y - 0{,}9 = 0.$$

Отсюда определяем значения косинусов углов α и β наклона нормали к осям координат. Эти величины являются координатами единичного вектора нормали к прямой:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{N}}{N} = (n_x; n_y) = (\cos\alpha; \cos\beta) = (0{,}6; -0{,}8).$$

Расстояние от начала координат до прямой: $p = 0{,}9$.

Для записи уравнения прямой с угловым коэффициентом ($y = kx+b$) достаточно из любого вида ее представления выразить в явном виде переменную y:

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{8}.$$

Здесь $k = \dfrac{3}{4}$ — тангенс угла φ наклона прямой к оси x.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точки с заданными координатами $M_1(1; 2{,}5)$ и $M_2(3, 1)$: 1) в общем виде; 2) в отрезках; 3) в нормальном виде; 4) в виде уравнения с угловым коэффициентом.

Пояснить на рисунке смысл коэффициентов уравнений. Определить расстояние от начала координат и от точки $A(1, 0)$ до прямой. Найти углы между нормалью к прямой и осями координат и угол наклона прямой к оси x.

Р е ш е н и е (рис. 0.4). Через две заданные точки проводим вектор $\boldsymbol{l} = \overline{M_1M_2} = (3-1; 1-2{,}5) = (2; -1{,}5) = (m; n)$.

Воспользовавшись уравнением прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n},$$

запишем:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2{,}5}{-1{,}5}.$$

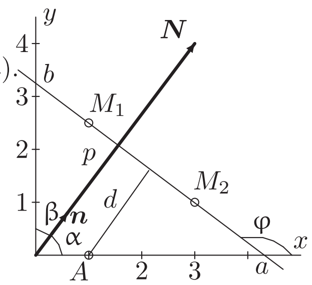


Рис. 0.4. Задача 3

Умножив это уравнение на 6 и перенося все слагаемые в левую часть, получим уравнение прямой в общем виде:

$$3x + 4y - 13 = 0.$$

Множители при x и y в этом уравнении являются координатами вектора нормали к прямой $\boldsymbol{N} = (3; 4)$ с модулем $N = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Поделив уравнение прямой в общем виде на N, приходим к нормальному уравнению прямой:

$$0{,}6x + 0{,}8y - 2{,}6 = 0.$$

Отсюда выписываем значения направляющих косинусов:

$$\cos\alpha = 0{,}6; \qquad \cos\beta = 0{,}8$$

и расстояние до прямой от начала координат: $p = 2{,}6$.

Приводя общее уравнение к уравнению прямой в отрезках (делим общее уравнение на свободный член $C = 13$):

$$\frac{x}{13/3} + \frac{y}{13/4} = 1,$$

выписываем значения отрезков, отсекаемых прямой на осях координат:

$$a = \frac{13}{3}; \qquad b = \frac{13}{4}.$$

Угол наклона прямой к оси x можно найти, определив его тангенс из уравнения прямой с угловым коэффициентом (из уравнения прямой выделяем в явном виде переменную y):

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}.$$

Отсюда $\operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{3}{4} = -0{,}75$.

Для определения расстояния от точки $A(1;0)$ до прямой воспользуемся формулой $d = \dfrac{1}{N}|Ax_0 + By_0 + C|$:

$$d = \frac{1}{5}|3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 - 13| = 2.$$

4. Записать в общем виде уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;-3)$ и:

а) параллельной вектору $\boldsymbol{a} = (m;n) = (4;-5)$;

б) перпендикулярной этому вектору.

Р е ш е н и е. Запишем уравнения пучка прямых, проходящих через точку $\big(A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0\big)$:

$$A(x-2) + B(y+3) = 0;$$

а) так как вектор $\boldsymbol{N} = (A; B)$ перпендикулярен прямой, то он перпендикулярен и вектору $\boldsymbol{a}$. Из условия перпендикулярности двух векторов $(mA + nB = 0)$ получим

$$4A - 5B = 0, \quad \text{или} \quad B = 0{,}8A.$$

Подставим полученное выражение для B в уравнение пучка прямых:

$$A(x - 2) + 0{,}8A(y + 3) = 0.$$

После умножения всех слагаемых уравнения на $5/A$, раскрытия скобок и приведения подобных получим искомое уравнение:

$$5x + 4y + 2 = 0;$$

б) векторы $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{a}$ параллельны. Для определения постоянных A и B воспользуемся условием параллельности векторов $\left(\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n}\right)$:

$$\frac{A}{4} = \frac{B}{-5}. \quad \text{Отсюда} \quad A = -0{,}8B.$$

Подставим полученное выражение в уравнение пучка прямых:

$$-0{,}8B(x - 2) + B(y + 3) = 0.$$

После умножения всех слагаемых уравнения на $5/B$, раскрытия скобок и приведения подобных получим искомое уравнение:

$$4x - 5y - 23 = 0.$$

Для проверки правильности полученных уравнений достаточно использовать исходные данные.

Так, для задачи а):

— прохождение прямой через точку $M(2; -3)$: $5{\cdot}2{+}4{\cdot}(-3){+}2{=}0$ (!);

— $\boldsymbol{N} \perp \boldsymbol{a}$: $mA + nB = 4 \cdot 5 + 5 \cdot (-4) = 0$ (!).

Для задачи б):

— прохождение прямой через точку $M(2; -3)$: $4{\cdot}2{+}5{\cdot}(-3){+}7{=}0$ (!);

— $\boldsymbol{N} \| \boldsymbol{a}$: $\dfrac{4}{4} = \dfrac{-5}{-5}$ (!)

5. Заданы координаты вершин треугольника: $A(-2; 1)$, $B(2; 2)$, $C(0; -2)$. Записать и представить в общем виде уравнение прямой, проходящей через:

а) точки A и B;

б) медиану, выходящую из вершины A;

в) точку C параллельно медиане;

г) точку C перпендикулярно медиане.

Р е ш е н и е.

а) воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две фиксированные точки $\left(\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}\right)$ A и B:

$$\frac{x+2}{2+2}=\frac{y-1}{2-1}, \quad \text{или} \quad \frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{1}.$$

Умножая обе части уравнения на 4, раскрывая скобки и приводя подобные, получим

$$x-4y+6=0;$$

б) найдем координаты точки $D=\left(\dfrac{x_B+x_C}{2};\dfrac{y_B+y_C}{2}\right)$, делящей сторону BC пополам:

$$D=\left(\frac{2+0}{2};\frac{2+(-2)}{2}\right)=(1;0).$$

Точки A и D медианы принадлежат искомой прямой, поэтому для записи ее воспользуемся тем же уравнением, что и в пункте а):

$$\frac{x+2}{1+2}=\frac{y-1}{0-1}, \quad \text{или} \quad \frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-1}.$$

Умножая обе части уравнения на 3, раскрывая скобки и приводя подобные, получим

$$x+3y-1=0;$$

в) уравнение пучка прямых, проходящих через точку $C(0,-2)$:

$$\frac{x-0}{m}=\frac{y+2}{n}.$$

Так как искомая прямая параллельна медиане AD, то в качестве ее направляющего вектора можно выбрать $\boldsymbol{s}_{\text{в}}=(m_{\text{в}};n_{\text{в}})=\boldsymbol{s}_{\text{б}}=(3;-1)$. Тогда уравнение прямой:

$$\frac{x}{3}=\frac{y+2}{-1}.$$

Приводя уравнение к общему знаменателю, раскрывая скобки и приведя подобные, получим

$$x + 3y + 6 = 0.$$

Это уравнение, как и следовало ожидать, отличается от уравнения параллельной прямой пункта в) только свободным членом, ответственным за расстояние до прямой от начала координат;

г) прямая проходит через ту же точку C, что и прямая пункта в), поэтому ее уравнение отличается от уравнения пучка прямых, записанного в этом пункте, только значениями знаменателей:

$$\frac{x-0}{m_г} = \frac{y+2}{n_г}.$$

Из условия ортогональности направляющих векторов ($\boldsymbol{s}_г \perp \boldsymbol{s}_в$) следует

$$m_в m_г + n_в n_г = 0, \quad \text{или} \quad 3m_г - n_г = 0.$$

Отсюда находим $n_г = 3m_г$.

Подставляя это выражение в начальное уравнение, умножая на $3m_г$, раскрывая скобки и приводя подобные, получим

$$3x - y - 2 = 0.$$

6. Найти угол между прямыми и координату точки их пересечения, если прямые заданы уравнениями:

а) $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ \ x + 2y - 2 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 4y + 1 = 0, \\ -x + 2y - 3 = 0. \end{cases}$

Р е ш е н и е. В случае представления уравнений прямых в общем виде угол между ними удобно определить, находя косинус угла между векторами нормалей к прямым:

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2)}{N_1 N_2} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}};$$

а) $\cos\theta_а = \dfrac{2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}\sqrt{1^2 + 2^2}} = \dfrac{0}{\sqrt{5}} = 0.$

Поэтому прямые ортогональны и $\theta = \pi/2$. Об ортогональности прямых говорит равенство нулю числителя — скалярного произведения векторов нормалей.

Координаты точки пересечения двух прямых определим, решая систему двух уравнений, описывающих эти прямые:

$$\begin{cases} 2x - \ y + 1 = 0, \\ \ x + 2y - 2 = 0; \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

Таким образом точка $M(0;1)$ является точкой пересечения прямых. Ее координаты, в чем можно убедиться, удовлетворяют обоим уравнениям пункта а);

б) $\cos\theta_б = \dfrac{2\cdot(-1)+(-4)\cdot 2}{\sqrt{2^2+(-4)^2}\sqrt{(-1)^2+2^2}} = \dfrac{-10}{\sqrt{20}\sqrt{5}} = -1.$

Отсюда $\theta_б = \pi$, т.е. прямые параллельны. В этом убеждает и пропорциональность коэффициентов при переменных.

Задачи для самостоятельного решения

Правильность решения задач этой и других тем главы проверить, подставляя в полученные уравнения исходные данные заданий.

1. Провести прямую через точки $A(1;-2)$ и $B(3,0)$. Записать полученное уравнение:

а) в общем виде;

б) в отрезках;

в) в виде уравнения с угловым коэффициентом.

Найти углы наклона:

г) прямой с осью x;

д) нормали к прямой с осями координат.

2. Записать в общем виде уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2;1)$ и

а) параллельной вектору $\boldsymbol{a} = (3;-2)$;

б) перпендикулярной вектору $\boldsymbol{b} = (1;-3)$.

3. Найти косинус и тангенс угла между прямыми $2x - y + 3 = 0$ и $x + y - 2 = 0$.

4. Заданы точка $M(3;1)$ и уравнение прямой $\ell : 2x - y + 2 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M:

а) параллельной ℓ;

б) перпендикулярной ℓ.

5. Заданы координаты трех точек: $A(-3;2)$, $B(2;1)$, $C(1;-1)$. Требуется

а) записать и представить в общем виде уравнение прямой, проходящей через точки A и C;

б) считая AC диагональю параллелограмма, средствами аналитической геометрии найти координаты его недостающей вершины D;

в) найти угол между диагоналями AC и BD параллелограмма и координаты точки E их пересечения;

г) найти расстояние между сторонами AB и CD.

ТЕМА 13
Плоскость
Вопросы

1. Запишите в векторном виде уравнение плоскости. Поясните запись рисунком.

2. Что с геометрической точки зрения представляет собой совокупность коэффициентов, стоящих при переменных в общем уравнении плоскости?

3. Запишите уравнение плоскости в отрезках. Поясните смысл коэффициентов этого уравнения.

4. Запишите уравнение плоскости, проходящей через три точки. На основе каких предположений оно получено?

5. Как найти углы наклона к осям координат вектора нормали к плоскости?

6. Что такое гиперплоскость?

7. Как найти угол между плоскостями? Запишите условие параллельности плоскостей. Условие перпендикулярности.

8. Запишите уравнение плоскости в нормальном виде. Что представляет собой свободный член в этом уравнении? Как найти расстояние от точки до плоскости?

Задачи

В задачах 1–3 по заданным уравнениям изобразить на декартовых ортогональных координатах соответствующие плоскости.

1. $Ax + By + Cz = 0.$
Р е ш е н и е. Плоскость проходит через начало координат. Если $A = B = C = 1$, то плоскость одинаково наклонена ко всем координатам. Вектор
нормали к плоскости $\boldsymbol{N} = (1; 1; 1)$ совпадает с биссектрисой первого координатного угла.

2. $By + Cz + D = 0$.
Р е ш е н и е. Плоскость параллельна оси x (рис. 0.5,а). При $B = 0$ ($A \neq 0$, $C \neq 0$) плоскость параллельна оси y. При $C = 0$ — оси z.

3. $Ax + D = 0$;
Р е ш е н и е. Плоскость перпендикулярна оси x (параллельна осям y и z) (рис. 0.5,б).

Если в общем уравнении плоскости $A = 0$ и $B = 0$ ($C \neq 0$), то плоскость перпендикулярна оси z; при $A = 0$ и $C = 0$ — оси y. Уравнения $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ представляют координатные плоскости, перпендикулярные координатам, равным нулю.

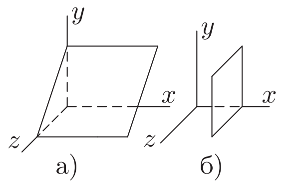


Рис. 0.5. Задачи 2 и 3

4. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3;-2;0)$ и ортогональной вектору $\boldsymbol{a} = (4;3;-1)$:
а) в общем виде;
б) в нормальном виде;
в) в отрезках.

Определить:
г) направляющие косинусы нормали к плоскости;
д) расстояние от начала координат до плоскости;
е) отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат.
Р е ш е н и е. В уравнении плоскости $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, проходящей через фиксированную точку, согласно условию задачи координаты точки: $x_0 = 3$, $y_0 = -2$, $z_0 = 0$; координаты вектора, нормального к плоскости: $A = 4$, $B = 3$, $C = -1$.

Поэтому искомое уравнение представляется в виде

$$4(x-3) + 3(y+2) - (z-0) = 0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных придем к уравнению плоскости в общем виде ($Ax + By + Cz + D = 0$):

$$4x + 3y - z - 6 = 0.$$

Координаты вектора нормали к этой плоскости равны множителям при переменных $\boldsymbol{N} = (4;3;-1) = \boldsymbol{a}$, но могут отличаться от координат вектора $\boldsymbol{a}$ на постоянный множитель. В частности, вектор нормали может быть единичным:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{N}}{N} = \frac{(4;3;-1)}{\sqrt{4^2+3^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{26}}(4;3;-1).$$

Чтобы получить уравнение плоскости в нормальном виде ($x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$), необходимо умножить ее общее уравнение на нормирующий множитель $\mu = \dfrac{\mathrm{sign}D}{N}$:

$$\frac{4}{\sqrt{26}}x + \frac{3}{\sqrt{26}}y - \frac{1}{\sqrt{26}}z - \frac{6}{\sqrt{26}} = 0.$$

Множители при переменных этого уравнения являются направляющими косинусами вектора нормали к плоскости:

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{26}}; \quad \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{26}}; \quad \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{26}},$$

а расстояние от начала координат до плоскости определяет отрицательное значение свободного члена нормального уравнения: $p = \dfrac{6}{\sqrt{26}}$.

Чтобы получить уравнение плоскости в отрезках $\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1\right)$, достаточно перенести свободный член общего уравнения $C = -6$ в его правую часть и поделить полученное выражение на $-C = 6$ (в правой части уравнения должна стоять положительная единица, а множители при переменных в числителях должны равняться единицам):

$$\frac{x}{3/2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-6} = 1.$$

Отсюда получаем значения отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях:

$$a = 1{,}5; \quad b = 2; \quad c = -6.$$

5. Записать в общем виде уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(3;-2;0)$, $M_2(1;-1;4)$ и параллельной вектору $\boldsymbol{a} = (1;2;-2)$.
Р е ш е н и е. Уравнение плоскости, проходящей через точку M_1:

$$A(x-3) + B(y+2) + C(z-0) = 0. \tag{4}$$

Так как искомая плоскость должна проходить через точку M_2, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению искомой плоскости:

$$A(1-3)+B(-1+2)+C(4-0)=0 \quad \Longrightarrow \quad 2A-B-4C=0. \qquad (5)$$

Это первое уравнение, ограничивающее выбор коэффициентов уравнения (4).

Вектор $\boldsymbol{N}=(A;B;C)$ ортогонален плоскости, а заданный в условии задачи вектор $\boldsymbol{a}=(1;2;-2)$ параллелен ей. Следовательно $\boldsymbol{N}\perp\boldsymbol{a}$. Из условия ортогональности векторов получим второе уравнение для определения коэффициентов (равенство нулю скалярного произведения векторов):

$$A+2B-2C=0. \qquad (6)$$

В результате имеем систему двух уравнений (5) и (6) с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} -2A+\ \ B+4C=0,\\ \ \ \ A+2B-2C=0. \end{cases} \qquad (7)$$

Решая систему, выразим две ее неизвестные через третью (в качестве основных неизвестных могут быть выбраны любые две из трех): $A=2C$, $B=0$. Подставим эти выражения в уравнение (4). После деления на C, раскрытия скобок и приведения подобных получим

$$2x+z-6=0.$$

Проверим его адекватность. Уравнение должно удовлетворять трем условиям ($\wp$ — обозначение плоскости):

$$\begin{aligned} M_1\in\wp: &\quad 2\cdot 3+0\cdot(-2)+0-6=0\ (!),\\ M_2\in\wp: &\quad 2\cdot 1+0\cdot(-1)+4-6=0\ (!),\\ \boldsymbol{a}\perp\wp: &\quad 2\cdot 1+0\cdot 2+1\cdot(-2)=0\ (!). \end{aligned}$$

Замечания.

1. Вектор нормали к искомой плоскости можно определить как векторное произведение $\overline{M_1M_2}\times\boldsymbol{a}$.

2. Если векторы $\overline{M_1M_2}$ и $\boldsymbol{a}$ параллельны, то задача будет иметь бесчисленное множество решений.

6. Записать в общем виде уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;0;2)$, параллельной вектору $\boldsymbol{a}=(2;0;-2)$ и оси z.
Р е ш е н и е. Уравнение плоскости, проходящей через точку M:

$$A(x-3)+By+C(z-2)=0. \qquad (8)$$

Так как искомая плоскость параллельна векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{k} = (0;0;1)$ (базисный вектор, определяющий направление оси z), то нормаль к плоскости $\boldsymbol{N} = (A, B, C)$ будет ортогональна этим векторам. Условия ортогональности — равенство вектора $\boldsymbol{N}$ векторному произведению векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2j = (0, 2, 0) = (A, B, C).$$

Подставляя полученные значения координат вектора $\boldsymbol{N}$ вместо соответствующих коэффициентов в уравнение (8) получим

$$2y = 0, \qquad \text{или} \qquad y = 0.$$

Искомая плоскость — координатная плоскость, ортогональная оси y. При проверке правильности решения этой задачи надо иметь в виду, что $A = B = 0$.

7. Записать в общем виде уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_0(1;0;-2)$, $M_1(2;1;3)$ и $M_2(1;-1;0)$.
Р е ш е н и е. Воспользуемся уравнением:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставим заданные координаты точек в уравнение:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 0 & z + 2 \\ 2 - 1 & 1 - 0 & 3 + 2 \\ 1 - 1 & -1 - 0 & 0 + 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Longrightarrow \quad \begin{vmatrix} x - 1 & y & z + 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по элементам первой строки:

$$(x-1)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (z+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определители, скобки и приводя подобные, приходим к искомому уравнению:

$$7x - 2y - z - 9 = 0.$$

Проверим правильность полученного уравнения, подставляя в него координаты заданных точек:

$$\begin{array}{ll} M_1: & 7\cdot 1 - 2\cdot 0 - 1\cdot(-2) = 0 \ (!); \\ M_2: & 7\cdot 2 - 2\cdot 1 - 1\cdot 3 = 0 \ (!); \\ M_3: & 7\cdot 1 - 2\cdot(-1) - 1\cdot 0 = 0 \ (!). \end{array}$$

8. Записать в общем виде уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;1;-3)$ и параллельную плоскости $3x-y+2z-4=0$. Найти расстояние между плоскостями.
Р е ш е н и е. Следуя первому условию запишем уравнение плоскости, проходящей через точку M:

$$A(x-2)+B(y-1)+C(z+3)=0. \tag{9}$$

Для определения коэффициентов уравнения используем условие параллельности плоскостей (параллельны нормальные векторы):

$$\frac{A}{3}=\frac{B}{-1}=\frac{C}{2}(=\lambda).$$

Число λ может быть любым, но отличным от нуля. Удобнее всего считать $\lambda=1$. Тогда $A=3$, $B=-1$, $C=2$.

Подставляя эти значения в (9), раскрывая скобки и приводя подобные, получим

$$3x-y+2z+1=0.$$

Для определения расстояния между плоскостями достаточно выбрать на одной из них произвольную точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и воспользоваться формулой $d=\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,|Ax_0+By_0+Cz_0+D|$.

Так как точка $M(2;1;-3)$ принадлежит искомой плоскости, то требуемое расстояние можно найти, определив его как расстояние от M до заданной в условии задачи плоскости:

$$d=\frac{1}{\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}}|3\cdot 2+(-1)\cdot 1+2\cdot(-3)-4|=\frac{5}{\sqrt{14}}.$$

9. Записать в общем виде уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0;-1;3)$ и перпендикулярной плоскостям $\rho_1:\ x-2y+3z-1=$

0 и $\rho_2: \ 2x - y + 3z + 2 = 0$.
Р е ш е н и е. Уравнение плоскости, проходящей через точку M:

$$Ax + B(y+1) + C(z-3) = 0. \tag{10}$$

При известных координатах векторов нормалей к заданным плоскостям $\boldsymbol{N}_1 = (1, -2, 3)$ и $\boldsymbol{N}_2 = (2, -1, 3)$ определим вектор нормали к этим векторам:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k} = -3(1, -1, -1).$$

Принимаем за вектор нормали к искомой плоскости вектор $\boldsymbol{N} = (A, B, C) = (1, -1, -1)$.

Подставим эти значения в (10). После приведения подобных приходим к искомому уравнению:

$$x - y - z + 2 = 0.$$

Заданные условия задачи выполняются, в чем можно убедиться соответствующими проверками.

10. Найти косинус угла между плоскостями

$$3x - 2y + z + 5 = 0 \quad \text{и} \quad x + 2y - 3z - 1 = 0.$$

Р е ш е н и е. Угол между плоскостями равен углу между нормалями $\boldsymbol{N}_1 = (3; -2; 1)$ и $\boldsymbol{N}_2 = (1; 2; -3)$ к этим плоскостям. Найдем косинус угла между векторами:

$$\cos\theta = \frac{3 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot (-3)}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = -\frac{4}{14} = -\frac{2}{7}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Заданы своими координатами в декартовой ортогональной системе координат точка $A(1; 2; -3)$ и вектор в связанном с координатами ортонормированном базисе $\boldsymbol{a} = (3; 3; 1)$.

1. Записать в общем виде уравнение плоскости $\wp$, проходящей через точку A и перпендикулярной вектору $\boldsymbol{a}$.

2. Найти отрезки, отсекаемые плоскостью $\wp$ на осях координат.

3. Определить косинусы углов между нормалью к плоскости $\wp$ и осями координат.

4. Записать уравнение плоскости, проходящей через след пересечения $\wp$ с координатной плоскостью xy и параллельной оси z.

5. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку пересечения $\wp$ с осью y и перпендикулярной этой оси.

6. Найти косинус угла между плоскостями $2x + 3y - z + 3 = 0$ и $x - y + z - 1 = 0$.

7. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; -1; 3)$ и параллельной плоскости $2x - y + 3z - 2 = 0$.

8. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3; 0; -1)$ и перпендикулярной плоскостям $3x - y + 2z - 1 = 0$ и $x + y - 3z + 3 = 0$.

9. Записать уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(-1; 1; 0)$; $M_2(1; 2; -3)$; $M_3(-1; 3; 1)$.

10. Дана плоскость $\wp$: $2x + 3y - 6z + 14 = 0$.

Найти расстояние от $\wp$: а) до точки $A(3; -21; 1)$; б) до начала координат.

Т Е М А 14
Прямая и плоскость
Вопросы

1. Запишите уравнение прямой в $\Re_3$ в векторном виде. Получите уравнения прямой в $\Re_3$ в параметрическом и каноническом видах. Что определяет параметр t в записанных в параметрическом виде уравнениях прямой?

2. Запишите уравнение прямой в $\Re_3$, проходящей через заданную точку.

3. Как найти угол между прямыми в пространстве? Запишите условия параллельности и ортогональности прямых в $\Re_3$.

4. Как найти угол между прямой и плоскостью? Запишите условия параллельности и ортогональности прямой и плоскости.

Задачи

1. Прямая проходит через две точки $M_1(1;-2;-1)$ и $M_2(4;-2;3)$. Записать ее канонические и параметрические уравнения. Определить направляющие косинусы прямой.
Р е ш е н и е. Для составления искомых уравнений воспользуемся уравнениями прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}.$$

Подставляя в них координаты заданных точек, получим

$$\frac{x-1}{4-1}=\frac{y+2}{-2+2}=\frac{z+1}{3+1}, \quad \text{или} \quad \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{0}=\frac{z+1}{4}. \qquad (11)$$

В знаменателях этих представленных в каноническом виде уравнений стоят координаты вектора, сонаправленного прямой: $\boldsymbol{s}=(3;0;4)$.

Направляющие косинусы прямой совпадают с направляющими косинусами вектора $\boldsymbol{s}$, которые равны координатам единичного вектора:

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{s}}{s}=\frac{(3;0;4)}{\sqrt{3^2+0^2+4^2}}=(0{,}6;0;0{,}8).$$

Отсюда следует: $\cos\alpha = 0{,}6$; $\quad \cos\beta = 0$; $\quad \cos\gamma = 0{,}8$.

Обозначая равенства (11) через t и выражая из них переменные в явном виде, придем к уравнениям прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = -2; \\ z = -1 + 4t. \end{cases}$$

2. Найти косинус угла между прямыми

$$\frac{x-1}{12} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4} \quad \text{и} \quad \frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{-8} = \frac{z+4}{6}.$$

Р е ш е н и е. Знаменатели уравнений представляют собой направляющие векторы прямых $\boldsymbol{s}_1 = (12; 3; -4)$ и $\boldsymbol{s}_2 = (0; -8; 6)$.

По формуле $\cos\theta = \dfrac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$ находим

$$\cos\theta = \frac{12\cdot 0 + 3\cdot(-8) - 4\cdot 6}{\sqrt{12^2 + 3^2 + (-4)^2}\sqrt{0^2 + (-8)^2 + 6^2}} = \frac{-48}{13\cdot 10} = -\frac{24}{65}.$$

3. Доказать, что ортогональны прямые:

$$\frac{x-1}{12} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4} \quad \text{и} \quad \frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{8} = \frac{z+4}{6}.$$

Р е ш е н и е. Повторяем действия предыдущей задачи:

$$\cos\theta = \frac{12\cdot 0 + 3\cdot 8 - 4\cdot 6}{\sqrt{12^2 + 3^2 + (-4)^2}\sqrt{0^2 + (-8)^2 + 6^2}} = \frac{0}{13\cdot 10} = 0.$$

Равенство нулю косинуса говорит об ортогональности прямых.

4. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; -2; 3)$ и перпендикулярной прямым:

$$\begin{cases} x = 4 + 3t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 2 - 3t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 5 + t, \\ y = -3 + 2t, \\ z = -t. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Запишем уравнение прямой, проходящей через заданную точку A:

$$\frac{x-2}{m} = \frac{y+2}{n} = \frac{z-3}{p}.$$

Вектор $\boldsymbol{s} = (m, n, p)$, определяющий направление прямой, параллелен векторному произведению векторов $\boldsymbol{s}_1 = (3, 2, -3)$ и $\boldsymbol{s}_2 = (1, 2, -1)$:

$$\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{k} = 4(1,0,1).$$

В качестве вектора $\boldsymbol{s}$ принимаем вектор, параллельный найденному: $\boldsymbol{s} = (m,n,p) = (1,0,1)$.

Искомые уравнения в каноническом виде:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-3}{1}.$$

Перепишем полученные уравнения в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 2 + t; \\ y = -2; \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

Для проверки правильности решения следует убедиться в том, что полученное уравнение удовлетворяет условиям задачи.

5. Найти координаты точки пересечения прямой

$$\begin{cases} x = 2 + 3t; \\ y = -2t; \\ z = t \end{cases}$$

с плоскостью $3x + y - 2z - 1 = 0$ и угол между ними.
Р е ш е н и е. Для определения параметра $t = t_*$, соответствующего точке пересечения прямой и плоскости, подставим переменные, определяемые параметрическими уравнениями прямой, в уравнение плоскости. Из полученного уравнения с неизвестным t определяем этот параметр:

$$t_* = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp} = -\frac{3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 - 1}{3 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1} = -1.$$

Подставляя это значение параметра t в уравнение прямой, получаем искомые координаты:

$$\begin{cases} x_* = 2 + 3 \cdot (-1) = -1; \\ y_* = -2 \cdot (-1) = 2; \\ z_* = -1. \end{cases}$$

Итак, координаты точки пересечения найдены: $M(-1;2;-1)$.

Косинус угла между направляющим вектором прямой $\boldsymbol{s} = (3; -2; 1)$ и нормальным к плоскости вектором $\boldsymbol{N} = (3; 1; -2)$ равен синусу угла между прямой и плоскостью. Поэтому

$$\sin\theta = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}} =$$

$$= \frac{3\cdot 3 + 1\cdot(-2) - 2\cdot 1}{\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{5}{14}.$$

Отсюда $\theta = \arcsin\dfrac{5}{14}$.

Значение параметра $t_* = -1$ говорит о том, что точку $A(2; 0; 0)$, через которую проходит прямая, и точку $M(-1; 2; -1)$ пересечения прямой и плоскости соединяет вектор $t_*\boldsymbol{s} = (-1)\cdot(3; -2; 1) = (-3; 2; -1)$. Этот вектор (если он найден правильно) должен совпадать с вектором $\overline{AM} = (-1-2; 2-0; -1-0) = (-3; 2; -1)$. Что и подтверждается.

6. Найти проекцию точки $M_0(5; 3; 1)$ на плоскость $3y+4z+12 = 0$ и координаты точки, симметричной точке M_0 относительно плоскости. Р е ш е н и е задачи будем искать следующим образом. Сначала проведем прямую (составим уравнения прямой), проходящую через точку M_0 и перпендикулярную плоскости. Затем найдем параметр t_1, соответствующий расстоянию от точки M_0 до плоскости. По этому параметру найдем координаты точки M_1 — проекции точки на плоскость. Удваивая параметр t_1, по нему найдем координаты точки M_2, расположенной от точки M_0 на расстоянии, в 2 раза превышающем расстояние до плоскости. Это и будет точка, симметричная M_0.

Составим уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(5; 3; 1)$ и перпендикулярной плоскости ($\boldsymbol{N}$=(A;B;C)=(0;3;4)=(m;n;p)=$\boldsymbol{s}$):

$$\begin{cases} x = 5; \\ y = 3 + 3t; \\ z = 1 + 4t. \end{cases}$$

Совместное решение полученных уравнений прямой и заданного уравнения плоскости позволяет найти параметр $t = t_1$, соответствующий точке пересечения прямой и плоскости:

$$t_1 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp} = -\frac{0\cdot 5 + 3\cdot 3 + 4\cdot 1 + 12}{0\cdot 0 + 3\cdot 3 + 4\cdot 4} = -1.$$

Подставляя значения этого параметра в уравнения прямой, определим координаты точки M_1 — проекции точки M_0 на плоскость:

$$\begin{cases} x_1 = 5; \\ y_1 = 3 + 3 \cdot (-1) = 0; \\ z_1 = 1 + 4 \cdot (-1) = -3. \end{cases}$$

Таким образом, $Pr_P M_0 = M_1(5; 0; -3)$.

Удвоим параметр t ($t_2 = 2t_1 = -2$) и по уравнениям прямой найдем соответствующие ему координаты точки M_2, симметричной M_0 относительно плоскости:

$$\begin{cases} x_2 = 5; \\ y_2 = 3 + 3 \cdot (-2) = -3; \\ z_2 = 1 + 4 \cdot (-2) = -7. \end{cases}$$

Таким образом, $M_2(5; -3; -7)$.

Для проверки правильности определения координат точки найдем векторы $\overline{M_0M_2} = (5 - 5; -3 - 3; -7 - 1) = (0; -6; -8)$ и $-t_2\boldsymbol{s} = -2(0; 3; 4) = (0; -6; -8)$. Векторы равны.

Убедимся в том, что точка M_1 делит отрезок M_0M_2 пополам. Координаты точки M_1 должны равняться полусуммам соответствующих координат точек M_0 и M_2:

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_2+x_0)=\frac{1}{2}(5+5) = 5\ (!),\ \ y_1 = \frac{1}{2}(3-3) = 0\ (!),\ \ z_1 = \frac{1}{2}(1-7) = -3\ (!).$$

7. Записать параметрическое уравнение прямой, заданной в виде пары пересекающихся плоскостей:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 4 = 0; \\ -x + y - z - 2 = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Выберем на линии пересечения плоскостей произвольную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Для этого достаточно пересечь пару плоскостей третьей, непараллельной им плоскостью, например, плоскостью $x = x_0$. В качестве x_0 может быть выбрано любое число, в том числе нуль (во многих случаях нуль оказывается наиболее удобным числом). Оставшиеся две координаты точки M_0 определятся из решения двух уравнений плоскостей, в которых после задания одной координаты (x_0) останутся неизвестными две координаты y_0 и z_0.

Итак, пусть $x = x_0 = 0$. Тогда уравнения плоскостей преобразуются к виду

$$\begin{cases} -y_0 + 2z_0 - 4 = 0; \\ \ \ y_0 - \ \ z_0 - 2 = 0. \end{cases}$$

Решая эти уравнения, получим $y_0 = 8$, $z_0 = 6$. Таким образом на линии пересечения плоскостей задана точка $M_0(0; 8; 6)$.

Аналогично можно получить координаты еще одной точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ на линии пересечения плоскостей. Пусть, например, $z_1 = 0$. Перепишем уравнения двух плоскостей с учетом этого предположения:

$$\begin{cases} 3x_1 - y_1 - 4 = 0; \\ -x_1 + y_1 - 2 = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, найдем: $x_1 = 3$, $y_1 = 5$. Таким образом вторая точка на линии пересечения плоскостей: $M_1(3; 5; 0)$.

В качестве направляющего вектора $\boldsymbol{s} = (m; n; p)$ искомой прямой выбираем вектор, соосный $\overline{M_0M_1} = (3 - 0; 5 - 8; 0 - 6) = (3; -3; -6) = 3(1; -1; -2)$. Пусть $\boldsymbol{s} = \dfrac{1}{3}\overline{M_0M_1} = (1; -1; -2)$.

Для записи искомых уравнений воспользуемся параметрическими уравнениями прямой, проходящей через точку M_0 и имеющей направление вектора $\boldsymbol{s}$:

$$\begin{cases} x = t; \\ y = 8 - t; \\ z = 6 - 2t. \end{cases}$$

Каноническая форма уравнений:

$$\frac{x}{1} = \frac{y - 8}{-1} = \frac{z - 6}{-2}.$$

Эти уравнения прямой l удовлетворяют трем условиям сформулированной задачи:

$$\begin{aligned} M_0 \in l: &\quad \frac{0}{1} = \frac{8 - 8}{-1} = \frac{6 - 6}{-2} \ (!), \\ l \perp \boldsymbol{N}_0: &\quad 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 = 0 \ (!), \\ l \perp \boldsymbol{N}_1: &\quad 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) = 0 \ (!). \end{aligned}$$

Замечание. Вместо определения координат второй точки для записи уравнения прямой можно было определить вектор $\boldsymbol{s}$ из условия его ортогональности векторам нормалей двух плоскостей (условие использовано при проверке правильности решения задачи).

Одним из способов определения вектора $\boldsymbol{s}$ в этом случае является приравнивание его векторному произведению векторов нормалей к заданным плоскостям.

8. Найти расстояние от точки $M(3;1;-5)$ до прямой:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-1}.$$

Р е ш е н и е. Проведем через точку M плоскость, ортогональную заданной прямой. Вектор нормали к этой плоскости $\boldsymbol{N} = (A;B;C)$ приравняем вектору $\boldsymbol{s} = (m;n;p) = (2;3;-1)$, определяющему направление прямой. Уравнение плоскости:

$$2(x-3)+3(y-1)-(z+5)=0, \quad \text{или} \quad 2x+3y-z-14=0.$$

Найдем параметр t_*, определяющий количество векторов $\boldsymbol{s}$, укладывающихся в расстояние от точки $A(x_0;y_0;z_0) = A(1;-2;3)$, находящейся на прямой, до плоскости:

$$t_* = -\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp} = -\frac{2{\cdot}1+2{\cdot}3-1{\cdot}3-14}{2{\cdot}2+3{\cdot}3+(-1)\cdot(-1)} = -\frac{-21}{14} = 1{,}5.$$

По найденному параметру из уравнений прямой, представленных в параметрическом виде, находим координаты точки M_* пересечения прямой и плоскости:

$$\begin{cases} x_* = 1+2t_* = 1+2\cdot 1{,}5 = 4; \\ y_* = -2+3t_* = -2+3\cdot 1{,}5 = 2{,}5; \\ z_* = 3-t_* = 3-1{,}5 = 1{,}5. \end{cases}$$

Итак, координаты точки пересечения: $M_*(4;2{,}5;1{,}5)$.

Определим вектор $\overline{MM}_* = (4-3;2{,}5-1;1{,}5+5) = (1;1{,}5;6{,}5)$. Модуль этого вектора является расстоянием от точки M до заданной прямой:

$$d = |\overline{MM}_*| = \sqrt{1^2+(1{,}5)^2+(6{,}5)^2} = \sqrt{45{,}5}.$$

9. Найти проекцию точки $M(x_m,y_m,z_m) = M(2;1;-1)$ на плоскость $Ax+By+Cz=0$: $3x+2y-z+5=0$ и координаты точки $S(x_s,y_s,z_s)$, симметричной точке M относительно плоскости.
Р е ш е н и е.

Запишем уравнение прямой, проходящей через точку M и перпендикулярной заданной плоскости. В этом случае в качестве вектора, сонаправленного прямой, можно выбрать вектор $\boldsymbol{N} = (A,B,C)$

$= (3, 2, -1)$, нормальный к плоскости. Представим искомое уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x_m + At = 2 + 3t; \\ y = y_m + Bt = 1 + 2t; \\ z = z_m + Ct = -1 - t. \end{cases}$$

Найдем параметр t_p, соответствующий точке P пересечения прямой и плоскости:

$$t_p = -\frac{Ax_m + By_m + Cz_n + D}{A \cdot A + B \cdot B + C \cdot C} = -\frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 5}{3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1} = -1.$$

По известному параметру t_p находим координаты точки P пересечения найденной прямой и плоскости:

$$\begin{cases} x_p = x_m + At_p = 2 + 3 \cdot (-1) = -1; \\ y_p == y_m + Bt_p = 1 + 2 \cdot (-1) = -1; \\ z_p = z_m + Ct_p = -1 - 1 \cdot (-1) = 0. \end{cases}$$

Найденные координаты точки $P(-1, -1, 0)$ — это координаты проекции точки M на заданную плоскость.

Для определения координат точки S достаточно в параметрическое уравнение найденной рямой подставить удвоенное значение параметра t_p: $t_s = 2t_p = 2 \cdot (-1) = -2$:

$$\begin{cases} x_s = x_m + At_s = 2 + 3 \cdot (-2) = -4; \\ y_s = y_m + Bt_s = 1 + 2 \cdot (-2) = -3; \\ z_s = z_m + Ct_s = -1 - 1 \cdot (-2) = 1. \end{cases}$$

Таким образом $S(-4, -3, 1)$.

Заметим, что координаты точки S можно было найти по формулам деления отрезка пополам. Действительно, можно убедиться в том, что координаты точки P равны полусуммам соответствующих координат точек M и S.

10. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2:

$$l_1 : \begin{cases} x = 4t; \\ y = 1 - 2t; \\ z = 3 + t. \end{cases}; \qquad l_2 : \begin{cases} x = 3 + 2t; \\ y = -2 + t; \\ z = 5 - t. \end{cases}.$$

Р е ш е н и е. Прямая l_1 проходит через точку $M_1(0, 1, 3)$, l_2 — через точку $M_2(3, -2, 5)$. Векторы, определяющие направления этих прямых: $\boldsymbol{s}_1 = (4, -2, 1)$, $\boldsymbol{s}_2 = (2, 1, -1)$.

Вектор $\boldsymbol{N} = (A, B, C)$ ортогонален одновременно векторам $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$ и может быть сопоставлен векторному произведению

$$\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k} = (1, 6, 8).$$

Принимаем $\boldsymbol{N} = (A, B, C) = (1, 6, 8)$,

Расстояние между прямыми l_1 и l_2 равно расстоянию между параллельными плоскостями, содержащими эти прямые и имеющими общую нормаль $\boldsymbol{N}$. Поэтому искомое расстояние равно модулю проекции вектора $\overline{M_1M_2} = (3-0, -2-1, 5-3) = (3, -3, 2)$ на направление вектора $\boldsymbol{N}$:

$$d = \left| Pr_{\boldsymbol{N}} \overline{M_1M_2} \right| = \frac{|1 \cdot 3 - 6 \cdot 3 + 8 \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + 6^2 + 8^2}} = \frac{1}{\sqrt{101}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Записать в каноническом и параметрическом видах уравнения прямой, проходящей через точку $A(1;-1;2)$ и:
а) точку $B(0;-3;1)$;
б) параллельной прямой ℓ: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+3}{0}$;
в) перпендикулярной плоскости $\wp$: $2x-y+3z-1=0$.

Найти:
г) синус угла между ℓ и $\wp$;
д) координаты точки M пересечения ℓ и $\wp$;
е) координаты точки M_*, симметричной A относительно точки M.

2. Заданы координаты вершин треугольника $A(1;2;-1)$, $B(1;0;3)$, $C(3;2;-1)$. Записать уравнения прямых, выходящих из точки A:
а) медианы;
б) параллельной BC;
в) перпендикулярной плоскости треугольника ABC.

3. Заданы уравнения двух плоскостей:

$$\wp_1\colon\ 2x-3y+z+2=0 \quad \text{и} \quad \wp_2\colon\ -x+y-z=0.$$

Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(3;-2;0)$:
а) параллельную плоскостям $\wp_1$ и $\wp_2$;
б) перпендикулярную плоскости $\wp_1$.

4. Найти координаты точки M_*, являющейся проекцией M предыдущей задачи на плоскость $\wp_1$.

5. Составить уравнение прямой, являющейся геометрическим местом точек пересечения плоскостей $\wp_1$ и $\wp_2$ задачи 3.

ТЕМА 15
Кривые второго порядка
Вопросы

1. Запишите общее уравнение кривых второго порядка на плоскости.

2. По какой формуле и как по значениям коэффициентов общего уравнения кривой второго порядка определить вид кривой?

3. Перечислите все возможные виды кривых второго порядка на плоскости. Запишите их канонические уравнения.

4. Изобразите эллипс. Поясните на рисунке значения параметров, определяющих эллипс.

5. Изобразите гиперболу. Поясните на рисунке значения параметров и характеристик, определяющих гиперболу.

6. Что определяет эксцентриситет в уравнениях кривых второго порядка? В каких пределах он изменяется для эллипса и гиперболы?

7. Изобразите параболу. Поясните на рисунке значение параметра, определяющего параболу. В чем состоит оптическое свойство параболы?

Задачи

Заданные в пунктах 1–3 уравнения второго порядка привести к каноническому виду. Определить характеристики кривых (эксцентриситет, полуоси, асимптоты, координаты фокусов и вершин, уравнение директрисы).

1. $4x^2 + y^2 + 16x - 2y + 1 = 0$.
Р е ш е н и е. Сравнивая заданное уравнение с общим уравнением кривой второго порядка $Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, определяем входящие в определитель $\Delta = AC - B^2$ коэффициенты: $A = 4$, $B = 0$, $C = 1$.

Значение определителя заданной кривой $\Delta = 4 \cdot 1 - 0^2 = 4 > 0$ говорит о том, что уравнение описывает эллипс.

Приведем уравнение к каноническому виду. Для этого сгруппируем слагаемые с одинаковыми переменными и выделим в них полные квадраты суммы или разности:

$$4(x^2 + 4x + 4) - 16 + (y^2 - 2y + 1) - 1 + 1 = 0.$$

Следует обратить внимание на следующее. Множитель, стоящий при квадрате переменной, выносится за скобку трехчлена; добавленное в скобках слагаемое, умноженное на вынесенный за скобку коэффициент, вычитается из уравнения.

Свернем выражения в скобках и перенесем свободный член в правую часть уравнения:

$$4(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16.$$

Поделив на 16, получим каноническое уравнение эллипса, центр которого находится в точке $O(x_0; y_0) = O(-2; 1)$:

$$\frac{(x + 2)^2}{4} + \frac{(y - 1)^2}{16} = 1.$$

Введем новые координаты $\mathrm{x}= x + 2$, $\mathrm{y}= y - 1$, получаемые параллельным переносом исходной системы координат. Так что начало координат исходной системы $O(0; 0)$ в новой системе (xy) имеет координаты $O(2; -1)$.

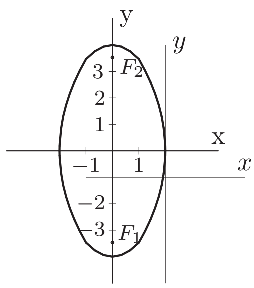


Рис. 0.6. Задача 1

В новых координатах, являющихся собственными координатами эллипса, уравнение примет вид:

$$\frac{\mathrm{x}^2}{4} + \frac{\mathrm{y}^2}{16} = 1.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением

$$\frac{\mathrm{x}^2}{a^2} + \frac{\mathrm{y}^2}{b^2} = 1,$$

получаем значение полуосей эллипса: $a = 2$; $b = 4$. Полуось b — большая; a — малая.

Расстояние между фокусами эллипса $2c$, где

$$c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}.$$

Эксцентриситет: $e = \dfrac{c}{b} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1.$

Координаты фокусов: $F_1(0; -c) = F_1(0; -2\sqrt{3})$; $F_2(0; c) = F_2(0; 2\sqrt{3})$.

Координаты вершин $(\pm a; 0)$ и $(0; \pm b)$:

$$(\pm 2; 0) \quad \text{и} \quad (0; \pm 4).$$

2. $x^2 - 4x - 6y - 14 = 0$.

Р е ш е н и е. По коэффициентам этого уравнения: $A = 1$, $B = C = 0$ находим $\Delta = AC - B^2 = 1 \cdot 0 - 0^2 = 0$. Равенство нулю определителя указывает на то, что уравнение описывает параболу.

Сгруппируем слагаемые при переменной x с целью выделения квадрата разности:

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 - 6y - 14 = 0.$$

Преобразуем уравнение:

$$(x - 2)^2 = 6(y + 3).$$

Осуществим параллельный перенос осей координат:

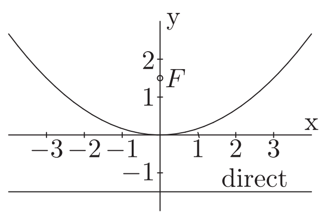


Рис. 0.7. Задача 2

$$\mathrm{x} = x - 2; \qquad \mathrm{y} = y + 3$$

и приведем уравнение к виду:

$$\mathrm{x}^2 = 2p\mathrm{y} = 2{\cdot}3\mathrm{y} \quad \rightarrow \quad \mathrm{x}^2 = 6\mathrm{y}.$$

Отсюда $p = 3$.

Парабола симметрична относительно оси y. Уравнение ее директрисы:

$$\mathrm{y} = -\frac{p}{2} = \frac{-3}{2} = -1{,}5.$$

Фокус: $F(0; p/2) = F(0; 1{,}5)$.

3. $2xy = 1$.

Р е ш е н и е. В этом уравнении $A = C = 0$, $2B = 2$, $B = 1$. Определитель $\Delta = AC - B^2 = 0 \cdot 0 - 1^2 = -1 < 0$. Отрицательное значение определителя характерно для гиперболы.

Исходное уравнение содержит произведение переменных. Чтобы избавиться от произведения, необходимо осуществить поворот координат на угол α, определяемый из соотношения

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{2B} = \frac{0 - 0}{2} = 0.$$

Отсюда $2\alpha = \pm\dfrac{\pi}{2}, \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \pm\dfrac{\pi}{4}.$

Для определенности выбираем положительное значение α. Для него $\sin\alpha = \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 2\alpha = 1$.

Для определения новых коэффициентов уравнения используем формулы:

$$\tilde{A} = A\cos^2\alpha + B\sin 2\alpha + C\sin^2\alpha = 1,$$

$$\tilde{C} = A\sin^2\alpha - B\sin 2\alpha + C\cos^2\alpha = -1,$$

$$\tilde{D} = D\cos\alpha + E\sin\alpha = 0; \qquad \tilde{E} = E\cos\alpha - D\sin\alpha = 0.$$

Подставляя эти значения в уравнение кривой, полученное после поворота системы координат ($\tilde{D} = 0$):

$$\tilde{A}\mathrm{x}^2 + \tilde{C}\mathrm{y}^2 + \tilde{D}\mathrm{x} + \tilde{E}\mathrm{y} + \tilde{F} = 0,$$

получим

$$\mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2 = 1.$$

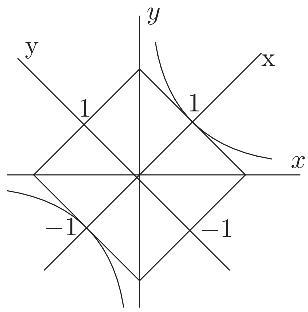


Рис. 0.8. Задача 3

Это каноническое уравнение гиперболы, из которого определяем параметры:

$$a = b = 1; \quad c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2};$$

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{2} > 1.$$

Уравнения асимптот:

$$\mathrm{y} = \pm\frac{b}{a}\mathrm{x}, \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{y} = \pm\mathrm{x}.$$

Координаты вершин: $(\pm 1; 0)$.

4. Записать каноническое уравнение кривой второго порядка, если известны координаты двух ее точек $M_1(\sqrt{5}; 4/3)$ и $M_2(3/2; \sqrt{3})$ в собственной системе координат.

Р е ш е н и е. Предварительно установим, какой кривой принадлежат точки. Для этого сравним заданные координаты точек:

$$x_1 = \sqrt{5}; \quad y_1 = 4/3;$$
$$x_2 = 1{,}5; \quad y_2 = \sqrt{3}.$$

Так как большему значению координаты x ($x_1 > x_2$) соответствует меньшее значение координаты y ($y_1 < y_2$), то искомая функция — убывающая в первой координатной четверти. Из трех существующих кривых второго порядка этим свойством обладает только эллипс. Поэтому параметры кривой (a и b) входят в уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Введем обозначения $A = \dfrac{1}{a^2}$, $B = \dfrac{1}{b^2}$. После подстановки координат точек в уравнение эллипса придем к системе двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} A(\sqrt{5})^2 + B\left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = 1, \\ A\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + B(\sqrt{3})^2 = 1, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 45A + 16B = 9, \\ 9A + 12B = 4. \end{cases}$$

Решая систему, получим $A = \dfrac{1}{9}$; $B = \dfrac{1}{4}$.
Уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

5. Записать в собственной системе координат каноническое уравнение кривой второго порядка, если известно, что ее эксцентриситет $e = 0{,}8$, расстояние между фокусами $2c = 16$.
Р е ш е н и е. Эксцентриситет $e < 1$ указывает на то, что кривая — эллипс. Его каноническое уравнение в собственной системе координат:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Предположим, что a — большая полуось эллипса. Тогда для определения параметров эллипса имеем два соотношения:

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{и} \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Из этих формул при $c = 8$ следует:

$$a = \frac{c}{e} = \frac{8}{0{,}8} = 10, \qquad b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6.$$

Подставляя найденные параметры в каноническое уравнение, записываем его в виде

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

6. Записать в собственной системе координат каноническое уравнение кривой второго порядка, модуль разности расстояний от каждой точки которой до двух фиксированных точек равен 6. Кроме того, известно, что кривая проходит через точку $M(6; 2\sqrt{3})$. Определить параметры кривой.

Р е ш е н и е. По определению эта кривая — гипербола. В собственной системе координат ее уравнение имеет канонический вид с двумя вариантами написания:

$$1)\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \text{или} \qquad 2)\ -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

При этом в первом варианте оси гиперболы: x — действительная; y — мнимая; во втором варианте — наоборот.

Рассмотрим первый вариант уравнения.

Определив из условий задачи параметр $a = \dfrac{6}{2} = 3$, перепишем каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Это уравнение с одним неизвестным параметром (b). Для его определения подставим в уравнение координаты точки M:

$$\frac{6^2}{9} - \frac{(2\sqrt{3})^2}{b^2} = 1.$$

Решая уравнение, находим $b^2 = 4$ и записываем уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Найдем параметры, характеризующие гиперболу.

Расстояние от начала координат до фокусов:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

Эксцентриситет: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{13}}{3}.$

Уравнения асимптот: $y = \pm\frac{b}{a}x \quad \Longrightarrow \quad y = \pm\frac{2}{3}x$.

Проведение аналогичных преобразований для второго варианта записи уравнения параболы приводит к результату:

$$-\frac{x^2}{108} + \frac{y^2}{9} = 1; \quad e = \frac{\sqrt{117}}{3}; \quad y = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}x.$$

7. Записать в собственной системе координат каноническое уравнение кривой второго порядка, расстояние от каждой точки которой до некоторой фиксированной точки равно расстоянию до фиксированной прямой, причем расстояние между фиксированными точкой и прямой равно 4.

Р е ш е н и е. По определению эта кривая — парабола. Предполагая, что фокус кривой находится на оси x собственной системы координат параболы, воспользуемся уравнением

$$y^2 = 2px.$$

По определению расстояние от фокуса параболы до ее директрисы определяет параметр $p = 4$.

Каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 8x.$$

Уравнение директрисы ($x = -p/2$): $x = -2$;
координаты фокуса $F(\frac{p}{2}; 0)$: $F(2; 0)$.

8. Определить, будут ли пересекать эллипс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ прямые:
а) $x + 2y = 4$; б) $2x - 3y = 12$.

Р е ш е н и е.

а) Выразим из уравнения прямой переменную $y/2$, возведем полученное выражение в квадрат $\frac{y^2}{4} = \frac{x^2}{16} - \frac{x}{2} + 1$ и подставим в уравнение эллипса. После преобразования придем к квадратному уравнению относительно переменной x:

$$x\left[\left(\frac{25x}{72} - 1\right)\right] = 0.$$

Решениями уравнения являются два корня $x_1 = 0$, $x_2 = 2{,}88$. Определяя из уравнения прямой (или эллипса) соответствующие значения y, запишем координаты двух точек пересечения эллипса с прямой: $M_1(0;2)$ и $M_2(2{,}88;0{,}56)$.

б) Подстановка найденного из второго уравнения прямой значения $\frac{x}{3} = 2 + \frac{y}{2}$ в уравнение эллипса приводит к квадратному уравнению $y^2 + 4y + 6 = 0$, которое не имеет действительных корней, так как дискриминант уравнения $D = 4^2 - 4 \cdot 6 = -8$ — величина отрицательная. Результат указывает на то, что прямая не пересекает эллипса (не имеет с эллипсом общих точек).

Если совместное решение уравнения прямой и эллипса дает только одну пару координат x и y, то прямая касается эллипса в одной точке. Например, прямая, описываемая уравнением $y = 2$, имеет только одну общую точку с эллипсом — это вершина эллипса с координатами (0;2).

9. Что определяет геометрическое место точек пересечения однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ плоскостью $z = c$?

Р е ш е н и е. Подставляя в уравнение поверхности вместо z значение этой переменной, соответствующее уравнению плоскости, приходим к квадратному уравнению на плоскости $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$.

Извлекая квадратный корень из обеих частей полученного уравнения, получаем

$$\frac{x}{a} = \pm\frac{y}{b}.$$

Это уравнения пары прямых. Аналогичный результат можно получить, рассекая заданную поверхность плоскостью $x = a$, параллельной оси y и касающейся эллипса: $-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$.

Отсюда следует заключение: однополостный гиперболоид может быть образован семейством прямых (например, телевизионная башня в Шаболовке, спроектированная архитектором В.Г. Шуховым).

Задачи для самостоятельного решения

1. Установить, какая кривая определена уравнением $4x^2 - y^2 + 16x + 2y + 6 = 0$ и записать ее каноническое уравнение. Изобразить на одном графике с кривой исходную и ее собственную системы координат.

2. Записать уравнение кривой второго порядка, если в ее собственной системе координат известны координаты двух расположенных на кривой точек $A(5;0)$ и $B(0;-4)$. Найти координаты фокусов и эксцентриситет.

3. Записать уравнение кривой второго порядка, сумма расстояний от которых до двух точек $F_1(-3;1)$ и $F_2(1;1)$ равна $2\sqrt{5}$. Найти эксцентриситет.

4. Записать уравнение кривой второго порядка, если известно, что она проходит через точку $M(5;2{,}25)$ (в собственной системе координат) и имеет эксцентриситет $e = 1{,}25$.

5. Записать уравнение параболы, если известно, что расстояние от ее вершины до фокуса равно 3.

6. Установить, какие типы кривых второго порядка (эллипс, гипербола, парабола) получаются в сечениях эллиптического конуса

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

(конических сечениях) плоскостями а) $y = h$; б) $y = kx+d$ $(d \neq b/a)$; в) $y = \dfrac{b}{a}(x-e)$; г) $x = g$. В задании b, c, d, e, g, h - постоянные величины.

7. Методом сечений построить поверхность

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = py.$$

Задание на расчетную работу. Часть 4 «Аналитическая геометрия»

1. Заданы координаты четырех вершин тетраэдра (повторяются задание части 1 расчетной работы):

$$A(3, 5, -2), \quad B(-1, 3, 2), \quad C(k, -4, 3), \quad D(3, -4, -k).$$

В декартовой ортогональной системе координат изобразить тетраэдр.

Средствами аналитической геометрии записать следующие уравнения.

1. Стороны CD (как прямой, проходящей через две точки).

2. Медианы, выходящей из точки C треугольника CBD.

3. Высоты, опущенной из точки C на сторону BD.

4. Плоскостей треугольников ABC и BCD.

5. Стороны CD (как геометрического места точек пересечения двух плоскостей).

6. Нормали, опущенной из точки A на плоскость BCD.

Определить следующие характеристики.

7. Проекцию точки A на плоскость BCD.

8. Координаты точки E, симметричной точке A относительно плоскости BCD.

9. Расстояние от точки A до плоскости BCD.

10. Угол между диагоналями четырехугольника, построенного на сторонах BC и CD.

11. Найти расстояние от точки E до прямой BC.

12. Записать уравнение прямой, проходящей через точку E и параллельной плоскостям ABC и ABD.

2 Задано уравнение второго порядка

$$3x^2 - 2xy + 2(-1)^n ky^2 + kx + y - 2N = 0.$$

Требуется

1. Определить тип кривой, описываемой заданным уравнением.

Привести квадратичную форму уравнения к каноническому виду:

2 преобразованием поворота векторов исходного ортонормированного базиса (определением угла поворота α);

3 переходя к собственным значениям, определенным из характеристического уравнения.

4. Привести квадратное уравнение к каноническому виду, осуществив параллельный перенос осей координат.

5. Построить кривую в удобном масштабе с изображением исходной, промежуточной и собственной систем координат.

6. Найти параметры кривой (координаты вершин, фокусов, уравнения асимптот) во всех координатных системах. Определить эксцентриситет.

По возможности, выполнить проверку правильности полученных результатов (убедиться в выполнении заданий или получив результаты другими методами).

Т И П О В Ы Е Б И Л Е Т Ы
контрольных работ

БИЛЕТ ПО ТЕОРИИ (на 15 мин)

Во всех пяти вопросах билета требуется расставить номера ответов (правые колонки) в порядке следования номеров вопросов (левые колонки). В местах отсутствия соответствия поставить цифру 5.

1. *Прямая на плоскости*

1. В общем виде	1. $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$;
2. В отрезках	2. $y = kx + b$;
3. С угловым коэффициентом	3. $Ax + By + C = 0$;
4. В нормальном виде	4. $x/a + y/b = 1$.

2. *Плоскость*

1. Перпендикулярна оси z	1. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$;
2. В векторном виде	2. $x\cos\alpha + y\cos\beta + x\cos\gamma - p = 0$;
3. В нормальном виде	3. $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$;
4. Проходящей через точку	4. $Ax + By + C = 0$.

3. *Прямая (ℓ) и плоскость (ρ)*

1. Условие параллельности ℓ и ρ	1. $\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$;
2. Условие перпендикулярности ℓ и ρ	2. $Am + Bn + Cp = 0$;
3. Синус угла между ℓ и ρ	3. $-\dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}$;
4. Параметр t^*, соответствующий точке пересечения ℓ и ρ	4. $\dfrac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$.

4. *Кривые второго порядка*

1.	Сумма расстояний от точек до фокусов постоянна	1. Эллипс;
2.	Модуль разности расстояний от точек до фокусов постоянна	2. Гипербола;
3.	Фокусы совпадают	3. Парабола;
4.	Расстояния от точек до фокуса равны расстояниям до директрисы	4. Окружность.

5. *Общие уравнения*

1. Уравнение плоскости	1. $NX = C$;
2. Уравнение поверхности	2. $AX = \lambda X$;
3. Характеристическое уравнение	3. $\lvert A - \lambda I\rvert = 0$;
4. Свойство собственного вектора	4. $X^T AX + X^T B = C$.

БИЛЕТ ПО ПРАКТИКЕ (на 75 мин)

1. Найти координаты точки пересечения двух прямых $2x + y = 1$ и $4x - 3y = 2$ и угол между ними.

2. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2, -1, 4)$, перпендикулярной плоскости $2x - 3y + 6z = 1$ и параллельной прямой $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{1}$.

3. Найти проекцию точки $M(2; -1; 1)$ на плоскость $4x-2y+z-8=0$.

4. Записать уравнение кривой второго порядка, если известно, что ее эксцентриситет 0,6, а расстояние между фокусами 6.

5. Привести уравнение $4x^2 + 2xy + 4y^2 = 1$ к каноническому виду. Установить тип кривой. Найти полуоси и координаты правого фокуса в собственной и исходной системах координат.

ТЕМА 16
Неравенства

Вопросы

1. Что собой представляет область допустимых решений?
2. Как определить, будет ли множество допустимых решений выпуклым?
3. Как определить множество решений одного неравенства с двумя переменными?
4. Что такое пробная точка?
5. Что представляет собой система неравенств на плоскости?
6. Как определить угловые точки на множестве решений неравенств с двумя переменными? с тремя переменными?
7. Что собой представляют границы множеств решений системы неравенств в пространстве $\Re_n$?
8. Как в формуле изменить знак неравенства на противоположный?

Задачи

Определить, принадлежат ли пробные точки, в частности начало координат, полуплоскостям (полугиперплоскостям), задаваемым неравенствами.

1. $2x_1 + x_2 - 1 > 0$.
Р е ш е н и е. Подставим координаты точки $O(0,0)$ в левую часть неравенства: $2 \cdot 0 + 0 - 1 < 0$. Изменение знака исходного неравенства на противоположное говорит о том, что начало координат не принадлежит полуплоскости, описываемой заданным неравенством.

2. $3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 0$.
Р е ш е н и е. В левую часть неравенства подставим координаты точки $O(0,0,0,0)$: $3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 0 = 0$. Точка O удовлетворяет

исходному неравенству и потому принадлежит полугиперплоскости, определяемой этим неравенством.

Начало координат принадлежит границе области, задаваемой однородной функцией и определяемой нестрогим неравенством, так как нулевые координаты обращают неравенство в равенство.

Определить и изобразить на графиках области допустимых значений систем неравенств.

3. $\begin{cases} 2x + \ y \leq 4, \\ 2x + 5y < 10. \end{cases}$

Р е ш е н и е. На координатной плоскости строим прямые $2x{+}y{=}4$ и $2x{+}5y{=}10$.

Подставим в заданные неравенства координаты пробной точки $O(0,0)$:

$$2 \cdot 0 + 0 < 4 \ (!), \qquad 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 < 10 \ (!).$$

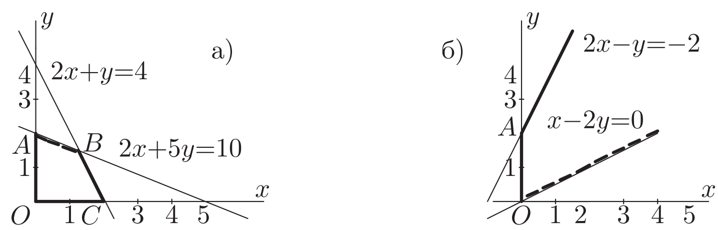


Рис. 0.9. Графики решений: а) задача 3; б) задача 4

Неравенства удовлетворяются, поэтому начало координат входит в область значений переменных, определяемую ими.

Если речь идет о *допустимых* значениях переменных, то к исходным неравенствам необходимо добавить условия их неотрицательности:

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0.$$

Проведенный анализ позволяет выделить область допустимых значений переменных. Эта область ограничена на на рис. 0.9,а жирным четырехугольником. Одна из границ (та, которая не входит в область определения переменных) помечена на рисунке пунктиром.

Координаты угловых точек построенного четырехугольника определяются в результате совместного решения уравнений, описывающих пересекающиеся прямые:

$$\begin{cases} x=0, \\ y=0 \end{cases} \to O(0;0); \qquad \begin{cases} 2x+y=4, \\ y=0 \end{cases} \to C(2;0);$$

$$\begin{cases} 2x+y=4, \\ 2x+5y=10 \end{cases} \to B(1{,}25;1{,}5); \quad \begin{cases} x=0, \\ 2x+5y=10 \end{cases} \to A(0;2).$$

4. $\begin{cases} 2x-\ y\ge -2, \\ \\ \ x-2y<\ \ 0. \end{cases}$

Р е ш е н и е. К заданным неравенствам добавляем неравенства неотрицательности переменных:

$$x \ge 0, \qquad y \ge 0.$$

Строим прямые, описываемые уравнениями:

$$2x-y=-2 \quad \text{и} \quad x-2y=0.$$

Подставим координаты начала координат в неравенства:

$$2\cdot 0-0>-2, \qquad 0-2\cdot 0=0.$$

Второе неравенство не удовлетворяется — начало координат лежит на прямой $x-2y=0$, но сама прямая не входит в область допустимых неравенствами значений переменных.

Для пробной точки $A(0;2)$ второе неравенство удовлетворяется $(0-2\cdot 2<0)$, следовательно, ОДЗ лежит выше прямой $x-2y<0$.

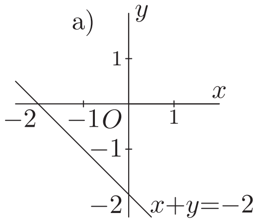
Еще одной особенностью области допустимых значений задачи является то, что эта область, ограниченная на рис. 0.9,б жирными линиями и пунктиром, не ограничена.

Угловая точка области допустимых решений — это точка $A(0,2)$ пересечения прямых $2x-y=-2$ и $x=0$ (ось ординат). Точка $O(0;\ 0)$ не входит в ОДЗ.

5. $x+y\le -2$.

Р е ш е н и е. Характерной особенностью задачи является то, что координаты точки $O(0,0)$ (рис. 0.12,а) не входят в полуплоскость, определяемую исходным неравенством: $0+0>-2$, но не ≤ -2.

Область, описываемая условиями положительности переменных ($x\ge 0$ и $y\ge 0$), не лежит в полуплоскости $x+y\le -2$. Поэтому допустимых решений исходное неравенство не имеет.



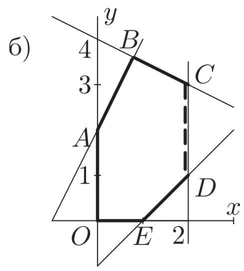


Рис. 0.10. Графики решений: а) задача 5; б) задача 6

6. $\begin{cases} 2x - \;y \;\; \geq \;\; -2, \\ x + 2y \;\; \leq \;\; 8, \\ x - \;y \;\; \leq \;\; 1, \\ \quad\;\; x \;\; < \;\; 2. \end{cases}$

Р е ш е н и е. К записанным неравенствам прибавляем условия положительности переменных: $x \geq 0, \qquad y \geq 0.$

На рис. 0.12,б изображены прямые, соответствующие уравнениям:

$$\begin{array}{llll} AB: & 2x - y = -2, & DE: & x - y = 1, \\ BC: & x + 2y = 8, & EO: & y = 0, \\ CD: & x = 2, & OA: & x = 0. \end{array}$$

Пробная точка — начало координат — позволяет определить полуплоскости для всех неравенств. Образованная область допустимых значений переменных, удовлетворяющих всем неравенствам, очерчена жирными линиями многоугольника $OABCDE$. Прямая CD, соответствующая строгому неравенству, не входит в область значений переменных и на рисунке отмечена пунктиром.

Угловые точки области, получаемые в результате совместного решения пар уравнений для пересекающихся прямых, имеют координаты:

$$A(0;2), \quad B(0{,}8;3{,}6), \quad E(1;0), \quad O(0;0).$$

К точкам $C(2;3)$ и $D(2;1)$ ОДЗ только стремится, но не включает их.

Задачи для самостоятельного решения

Найти и изобразить на координатной плоскости множество решений систем неравенств. Выделить из этих систем множества допустимых решений. Определить координаты угловых точек.

1. $x_1 < 3$; $x_2 \geq 2$. **2.** $x_1 + 2x_2 < 4$. **3.** $2x_1 + x_2 < 0$.

4. $\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 1, \\ x_1 < 3. \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6 > 0, \\ x_1 - 2x_2 \geq 0, \\ x_1 < 2. \end{cases}$

ТЕМА 17

Свойства и геометрическая интерпретация задач ЛП

Вопросы

1. Что собой представляет задача ЛП?
2. Как выглядит математическая модель задачи ЛП в общем виде? в классической постановке? в канонической форме?
3. Что такое целевая функция? ограничения? допустимые решения?
4. Как перейти от классической к канонической форме задачи ЛП?
5. Как установить факт линейной независимости системы ограничений?
6. Что такое опорное решение (план) задачи ЛП?
7. Что собой представляет базис для системы ограничений и как удобно его формировать на исходной итерации?
8. Как выглядит и какими свойствами обладает ОДЗ системы ограничений на плоскости? функция цели?
9. В каких точках ОДЗ системы ограничений следует искать экстремальные значения функции цели?
10. В каких случаях задача ЛП не имеет решения?

Задачи

1. Предприятие изготавливает два вида продукции: A и B. Для их производства используются три вида сырья: органическое (О), неорганическое (Н) и краситель (К). Данные о наличии сырья на предприятии, его нормы расхода и цены готовой продукции представлены в таблице.

Тип сырья	Расх. сырья		Запас сырья
	A	B	
О	30	25	4500
Н	40	30	3500
К	5	3	100
Цена	250	300	

Не принимая во внимание спрос, составить математическую модель задачи ЛП по определению плана выпуска продукции, приносящего предприятию максимальную прибыль.

Р е ш е н и е. Обозначим через x_1 количество выпускаемой продукции типа A; x_2 – типа B.

Целевая функция равна сумме произведений цены товара на объем ее выпуска. Эта величина должна стремиться к максимуму:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 = 250x_1 + 300x_2 \quad \Longrightarrow \quad \max .$$

Центральная часть таблицы представляет собой данные расхода сырья на единицу выпускаемой продукции. Например, на выпуск единицы продукции типа B расходуется $a_{12} = 25$ единиц органического (О) сырья. Суммарный расход сырья (О) на производство продукции типов A и B не должен превышать запасов этого сырья $b_1 = 4500$. Поэтому

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1,$$

или

$$30x_1 + 25x_2 \le 4500.$$

Аналогичные неравенства запишем для ограничений по расходу сырья (Н) и (К):

$$40x_1 + 30x_2 \le 3500,$$

$$5x_1 + 3x_2 \le 100.$$

Выписанные соотношения вместе с условиями неотрицательности количеств выпускаемой продукции

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

составляют математическую модель задачи.

2. Математическая модель задачи ЛП представлена в виде соотношений:

$$F = x_1 + x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \ge -1, \\ 2x_1 + x_2 \le 2; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Требуется:
а) записать уравнения в классическом и каноническом видах;
б) определить ранг системы ограничений;
в) записать выражения для всех возможных базисных векторов.

Р е ш е н и е.

а) Для классической формы задачи ЛП характерно то, что целевая функция стремится к максимуму (минимуму), а в системе ограничений соответственно должны стоять знаки $\leq$ $(\geq)$ или $<$ $(>)$. Если в каком-либо соотношении это требование не выполняется, то все слагаемые умножаются на -1, что приводит к смене знаков неравенств и (или) экстремумов на противоположные. Следуя сказанному, запишем задачу ЛП в классической форме:

$$F = x_1 + x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \leq 1, \\ 2x_1 + x_2 \leq 2; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Для приведения задачи ЛП к каноническому виду достаточно к неравенствам системы ограничений классической формы задачи ЛП прибавить недостающие до равенств положительные неизвестные:

$$F = x_1 + x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 2; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ \ (i = \overline{1,4}).$$

б) Сформируем матрицу коэффициентов системы ограничений:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен двум, так как она включает в себя единичную подматрицу второго порядка (два последних столбца), определитель которой отличен от нуля.

Векторы условий матрицы A:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Любые два из этих векторов (таких сочетаний 6):

$$A^1 = (A_1, A_2), \quad A^2 = (A_1, A_3), \quad A^3 = (A_1, A_4),$$

$$A^4 = (A_2, A_3), \quad A^5 = (A_2, A_4), \quad A^6 = (A_3, A_4)$$

линейно независимы, так как определители составленных из них матриц отличны от нуля:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_5 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_6 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Следовательно, любые приведенные пары векторов могут быть выбраны в качестве исходного базиса. Тем не менее удобнее всего в качестве исходного базиса выбрать $A^6 = (A_3\ A_4)$. Его матрица единичная и соответствующее этому базису опорное решение (опорный план): $X^6 = (0, 0, x_3, x_4)^T = (0, 0, 1, 2)^T$.

Ненулевые значения векторов этого опорного решения равны правым частям уравнений ограничений.

Графическим методом решить задачи ЛП

3. Для задачи пункта 2 найти максимальное и минимальное значения функции цели.

Р е ш е н и е. Построим на плоскости с декартовыми координатами x_1 и x_2 прямые, соответствующие неравенствам ограничений и описываемые уравнениями в отрезках (рис. 0.11):

$$(1)\ \frac{x_1}{1/3} + \frac{x_2}{-1} = 1, \quad (2)\ \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} = 1.$$

Используя пробную точку $O(0,0)$ и неравенства $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$, определяем ОДЗ (выделена на рисунке жирными линиями).

При фиксированном значении $F = C$ уравнение $C = x_1 + x_2$ представляет собой прямую с вектором $\boldsymbol{c} = (1, 1)$, перпендикулярным к ней. При положительных множителях при переменных вектор $\boldsymbol{c}$ направлен в сторону возрастания функции F.

Значение функции F зависит от удаленности прямой $x_1 + x_2 = C$ от начала координат в направлении вектора $\boldsymbol{c}$. Координаты x_1 и x_2, удовлетворяющие прямой $F = C$, должны принадлежать Ω, в частности, лежать на ее границе. Точкой из Ω, максимально удаленной от начала координат в направлении $\boldsymbol{c}$, является точка A с координатами (0, 2). Поэтому

$$F_{max} = F_A = 0 + 2 = 2.$$

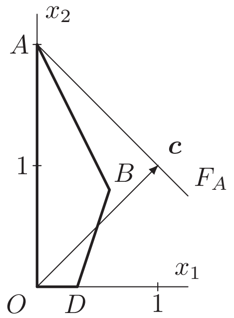


Рис. 0.11. Задача 3

Еще одна угловая точка многоугольника ОДЗ совпадает с началом координат. В этой точке функция цели имеет минимум:

$$F_{min} = F_O = 0 + 0 = 0.$$

В оставшихся угловых точках границы Ω, как, впрочем, и в любой внутренней точке ОДЗ, функция цели будет принимать промежуточные между F_{min} и F_{max} значения. Так, в угловой точке $B(0{,}6;\ 0{,}8)$: $F_B = 0{,}6 + 0{,}8 = 1{,}4$; во внутренней точке $M(0{,}5; 1)$: $F_B = 0{,}5 + 1 = 1{,}5$.

4.

$$F = 2x_1 + x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 - x_2 \le 1; \end{cases}$$

$$x_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,2}).$$

Р е ш е н и е. Построим прямые, описываемые уравнениями:

$$\frac{x_1}{-1/2} + \frac{x_2}{1} = 1, \quad \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{-1} = 1; \quad x_i = 0 \quad (i = \overline{1,2})$$

и вектор $\mathbf{c} = (2; 1)$.

На рис. 0.12,а ОДЗ, полученная методом пробных точек, выделена жирными линиями. Эта область безгранична. При неограниченном удалении от начала координат в направлении вектора $\boldsymbol{c}$ прямая $2x_1 + x_2 = const$, перпендикулярная $\boldsymbol{c}$, будет пересекать ОДЗ на бесконечности. Поэтому $F_{max} \to \infty$.

5. Найти экстремальные значения функции цели, если

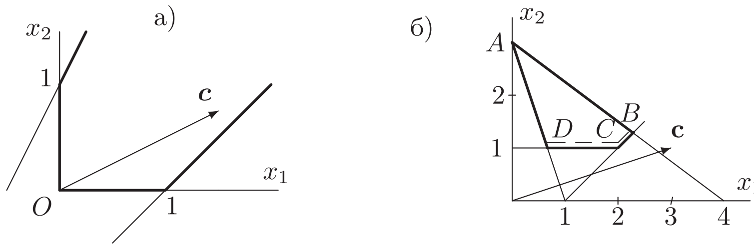


Рис. 0.12. Графики решений: а) задача 4; б) задачи 5-7

$$F = 3x_1 + x_2;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 12, \\ 3x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 - x_2 < 1; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 > 1.$$

Р е ш е н и е. Построим прямые, ограничивающие ОДЗ:

$$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{3} = 1 \ (AB); \quad \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{3} = 1 \ (AD);$$

$$x_1 - x_2 = 1 \ (CB); \quad x_2 = 1 \ (DC); \quad x_1 = 0 \ (\text{ось } x_2).$$

На рис. 0.12,б ОДЗ выделена жирными линиями.

Максимального значения функция цели достигает в точке, стремящейся к $B\left(2\frac{2}{7}; 1\frac{2}{7}\right)$, где $AB \cap BC$: $F_{max} = F_B - \varepsilon = 3 \cdot 2\frac{2}{7} + 1\frac{2}{7} - \varepsilon = 8\frac{2}{7} - \varepsilon \ \ (\varepsilon \to 0)$. Что касается минимального значения функции цели, то оно достигается в любой точке прямой AD, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{c} = (3,\ 1)$ и совпадающей с прямой $F_{AD} = 3x_1 + x_2$.

Например, в точке $D\left(\frac{2}{3};\ 1\right)$: $F_D = 3 \cdot \frac{2}{3} + 1 = 3 = F_{min}$. То же значение имеет функция цели в точке $A(0;\ 3)$: $F_A = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 3 = 3$.

6. Решить задачу пункта **5** при условии, что в математической модели знак неравенства $<$ заменен на равенство:

$$x_2 = 1.$$

Р е ш е н и е. При строгом равенстве в одном из ограничений точки ОДЗ обязательно должны лежать на соответствующей прямой.

Поэтому решение задачи необходимо искать в граничных точках отрезка DC.

В точке D значение функции найдено в задаче 5 ($F_D = F_{min} = 3$). Максимального значения функция цели достигнет в точке $C(2,1)$: $F_C = F_{max} = 3 \cdot 2 + 1 - \varepsilon = 7 - \varepsilon$ (Сама точка C не входит в ОДЗ).

7. Решить задачу пункта 5 при условии, что знаки неравенств в первом и втором ограничениях изменены на противоположные:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ 3x_1 + x_2 \leq 3. \end{cases}$$

Остальные зависимости остаются без изменения.

Р е ш е н и е. Анализ области пересечения полуплоскостей приводит к заключению, что в ОДЗ входит только точка $A(0,3)$. Поэтому

$$F_A = F_{max} = F_{min} = 3 \cdot 0 + 3 = 3.$$

Если в первом ограничении этой задачи изменить знак $\geq$ на строгое неравенство ($>$), то ОДЗ будет пустым множеством и задача станет неразрешимой.

Задачи для самостоятельного решения

Привести к каноническому виду, определить ранг системы ограничений, сформировать векторы условий, выделить базисные векторы и соответствующие им опорные решения. Геометрическим методом решить задачи или убедиться в их неразрешимости.

1. $F = x_1 - 2x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 + 2x_2 < 4; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

2. $F = 2x_1 + x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 < 2, \\ x_1 - 2x_2 \geq 2; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

3. $F = 3x_1 + 2x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 - 4x_2 > 4; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

4. $F = x_1 - x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 = 1; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

5. $F = x_1 + x_2 \to \min(\max)$;

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 - 2x_2 < 1, \\ x_1 + x_2 \le 4; \end{cases}$$

$0 \le x_1 \le 3,\ 0 \le x_2 \le 2.$

ТЕМА 18

Симплексный метод решения задач ЛП

Вопросы

1. Как с точки зрения удобства решения задач ЛП выбрать базис условий в исходном приближении?
2. Как по знакам коэффициентов функции цели определить, какую свободную переменную на очередной итерации следует перевести в основные?
3. Как определить вектор условий, который на очередной итерации следует вывести из разряда базисных? ввести в разряд базисных?
4. По каким признакам можно определить, что полученное значение целевой функции является оптимальным?
5. Что представляет собой M-метод решения задач ЛП?
6. Для решения каких задач рационально использовать метод искусственного базиса?

Задачи

Найти решения задач ЛП симплексным методом

1.

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \max; \tag{12}$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 20; \tag{13}$$

$$x_j \geq 0, \ (j = \overline{1,3}). \tag{14}$$

Р е ш е н и е. Условия, накладываемые на изменения переменных задачи, состоят из одного уравнения (13) и трех неравенств (14), указывающих на допустимость (неотрицательность) переменных.

В качестве независимой переменной в исходной итерации выбираем переменную, перед которой в целевой функции (12) стоит максимальный положительный коэффициент. Такой переменной является x_3. Выразим эту переменную в явном виде из ограничения (13):

$$x_3 = 5 - 0{,}5x_1 - 0{,}25x_2. \tag{15}$$

Так как $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$, то максимального значения x_3 достигнет при $x_1 = x_2 = 0$ (перед этими переменными в условии (15) стоят отрицательные коэффициенты). Принимая свободные переменные равными нулю, получим вектор X^1 опорного решения первой итерации:

$$X^1 = (0;\ 0;\ x_3) = (0;\ 0;\ 5).$$

Подставим выражение для x_3 (15) в целевую функцию (12):

$$F^1 = 2x_1 - 2x_2 + 3(5 - 0{,}5x_1 - 0{,}25x_2) = 15 + 0{,}5x_1 - 2{,}75x_2. \qquad (16)$$

При $x_1 = x_2 = 0$: $F^1 = 15$.

Отметим, что полученное значение F^1 может быть найдено и при непосредственной подстановке координат вектора опорного решения в выражение для целевой функции:

$$F^1 = 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 15.$$

Наличие в F^1 (16) слагаемого с положительным коэффициентом при положительной переменной говорит о том, что функция цели будет увеличиваться с ростом x_1. Из выражения (15) видно, что при $x_2 = 0$ переменная x_1 может возрастать до значения $x_2 = \dfrac{5}{0{,}5} = 10$. Такая ситуация имеет место, если постоянная величина (число 5) в правой части (15) положительна, а коэффициент при переменной (в рассматриваемом случае $-0{,}5$ перед x_1) отрицателен.

Переведем x_1 из свободных переменных в основные, а единственную основную переменную x_3 (в данной задаче выбора нет) — в свободные. Из (13) получим

$$x_1 = 10 - 0{,}5x_2 - 2x_3.$$

Вектор опорного решения для этого выбора базиса:

$$X^2 = (x_1;\ 0;\ 0)^T = (10;\ 0;\ 0)^T.$$

Используя полученное выражение для x_1, заменим эту переменную в формуле для целевой функции (16):

$$F = 15 + 0{,}5(10 - 0{,}5x_2 - 2x_3) - 2{,}75x_2 = 20 - 3x_2 - x_3.$$

При равных нулю свободных переменных $x_2 = x_3 = 0$ получаем значение целевой функции:

$$F^2 = 20.$$

Отрицательные коэффициенты при всех переменных в последнем выражении для целевой функции говорят о том, что резерв ее увеличения исчерпан. Поэтому

$$F_{max} = F^2 = 20.$$

2.

$$F = x_1 + 4x_2 \ \longrightarrow \ \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -20, \\ x_1 - 2x_2 \geq -10, \\ x_1 \leq 30; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Требуется найти такой план распределений (вектор решения), который обеспечивает максимальное значение функции цели.

Р е ш е н и е. Приведем задачу к каноническому виду, умножая первые два неравенства системы ограничений на -1 и добавляя к каждому неравенству по дополнительной положительной неизвестной (x_3, x_4 и x_5), превратив тем самым неравенства в равенства:

$$F = x_1 + 4x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 20, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 10, \\ x_1 + x_5 = 30; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Представим данные сформулированной задачи и дальнейшее решение в виде табл. 0.1–0.3.

Таблица 0.1. Исходная таблица задачи

$A_i \backslash A_j$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i	Q_i	
A_3	-1	1	1	0	0	20	20	$-N2/2$
$\leftarrow A_4$	-1	$\boxed{2}$	0	1	0	10	$\underline{5}$	:2
A_5	1	0	0	0	1	30	∞	
$-c_j$	-1	$-\underline{4}$	0	0	0	$F^0 = 0$		$+2N2$

В последней (индексной) строке стоят коэффициенты функции цели, взятые с противоположными знаками. Это сделано для того, чтобы в последней строке в столбце со свободными членами b_i стояло значение целевой функции F.

В исходном (нулевом) приближении базисными векторами условий задачи (векторами, координаты которых образуют в матрице коэффициентов единичную подматрицу) являются: $A_3 = (1;\ 0;\ 0)^T$, $A_4 = (0;\ 1;\ 0)^T$ и $A_5 = (0;\ 0;\ 1)^T$.

В этом случае опорным решением задачи в нулевом приближении будет служить вектор $X^0 = (x_1^0; x_2^0; x_3^0; x_4^0; x_5^0)^T = (0; 0; 20; 10; 30)^T$.

Этому решению соответствует значение целевой функции:

$$F^0 = c_1x_1^0 + c_2x_2^0 + 0x_3^0 + 0x_4^0 + 0x_5^0 = 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 20 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 30 = 0.$$

Так как среди весовых коэффициентов $c_j \ \ (j = \overline{1,5})$ имеются положительные (отрицательные значения индексов $-c_j$), то должно существовать большее, чем $F = 0$, значение целевой функции.

Новый базисный вектор должен соответствовать максимальному значению коэффициента c_j $(j = \overline{1,5})$. Это значение $c_2 = 4$ $(-c_2 = -4)$ соответствует вектору $A_2 = (1;\ 2;\ 0)^T$.

Для определения вектора, который необходимо удалить из базиса, найдем минимум отношений b_i/a_{i2}, то есть отношений координат вектора ограничений к координатам вектора A_2:

$$Q_i = min\left(\frac{b_1}{a_{12}}; \frac{b_2}{a_{22}}; \frac{b_3}{a_{32}}\right) = min\left(\frac{20}{1}; \frac{10}{2}; \frac{30}{0}\right) = \frac{10}{2} = \frac{b_2}{a_{22}} = Q_2.$$

Значению $a_{22} = 2$, взятому в таблице в рамку и находящемуся на второй строке матрицы коэффициентов, соответствует единичное значение находящейся на этой же строке координаты базисного вектора A_4, который и требуется удалить из числа базисных. Этот факт отмечен стрелкой $\leftarrow$ в колонке A_i, стоящей перед вектором A_4.

Далее используем преобразования Гаусса-Жордана (действия над строками указаны справа от таблицы) для преобразования нового базисного вектора к виду $A_1 = (0;\ 1;\ 0)^T$ и превращению в нуль весового коэффициента, стоящего в целевой функции перед переменной x_2.

Таблица коэффициентов матрицы условий преобразится к виду, приведенному в табл. 0.2 (первая итерация симплекс-метода).

Базисом первого приближения являются три вектора условий A_3, A_2 и A_5, в совокупности образующих единичную матрицу:

$$A^1 = (A_3\ A_2\ A_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таблица 0.2. Таблица задачи, итерация 1

$A_i \backslash A_j$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i	
A_3	$-1/2$	0	1	$-1/2$	0	15	$+N3/2$
A_2	$-1/2$	1	0	$1/2$	0	5	$+N3/2$
$\leftarrow A_5$	$\boxed{1}$	0	0	0	1	30	
$\Delta_j - c_j$	$-\underline{3}$	0	0	2	0	$F^1 = 20$	$+3N3$

Опорное решение задачи на этой итерации соответствует вектору $X^1 = (x_1^1;\ x_2^1;\ x_3^1;\ x_4^1; x_5^1)^T = (0;\ 5;\ 15;\ 0;\ 30)^T$, что позволяет определить значение целевой функции (для проверки правильности полученного в таблице значения):
$F^1 = c_1 x_1^1 + c_2 x_2^1 + 0x_3^1 + 0x_4^1 + 0x_5^1 = 1 \cdot 0 + 4 \cdot 5 + 0 \cdot 15 + 0 \cdot 0 = 20.$

Среди индексов целевой функции в результате проделанного преобразования осталось одно отрицательное значение. Оно соответствует вектору условий A_1. Сомнений по поводу того, какой вектор условий следует перевести в основные, нет. Единственный неотрицательный коэффициент из a_{i1} в столбце A_1 стоит в третьей строке, соответствующей вектору A_5. Вычислять отношения Q_i не требуется — множители при a_{11} и a_{21} отрицательные!

После преобразований, отмеченных в последнем столбце табл. 0.2, получим табл. 0.3.

Таблица 0.3. Таблица задачи, итерация 2

$A_i \backslash A_j$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i
A_3	0	0	1	$-1/2$	$1/2$	30
A_2	0	1	0	$1/2$	$1/2$	20
A_1	1	0	0	0	1	30
$\Delta_j - c_j$	0	0	0	2	3	$F^2 = 110$

Отсутствие отрицательных значений индексов (положительных коэффициентов в целевой функции) говорит о том, что дальнейшее улучшение решения невозможно.

На основании признака оптимальности делаем заключение:

$$F_{max} = F^2 = 110.$$

Опорное решение задачи, представленной в табл. 0.3, соответствует вектору $X^2 = (x_1^2; x_2^2; x_3^2; x_4^2; x_5^2)^T = (30;\ 20;\ 30;\ 0;\ 0)^T$, т.е функция цели достигает максимума при $x_1 = 30$; $x_2 = 20$. Величина $x_3 = 30$

не имеет значения — переменная x_3 не входит в функцию цели. Подставляя эти значения в исходное выражение для целевой функции, убедимся в правильности ее нахождения:

$$F = 1 \cdot 30 + 4 \cdot 20 = 110 = F_{max}.$$

Проиллюстрируем полученное решение графическими построениями
(рис. 0.13).

Решению в нулевом приближении соответствует значение функции цели в начале координат: $F^0 = F(O) = 0$; в первом приближении — точка $A(0;5)$: $F^1 = F(A) = 20$; во втором приближении — точка $D(30;20)$: $F^2 = F(D) = 110$.

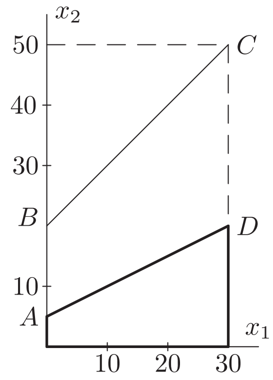


Рис. 0.13. Графическое решение

В записанной системе ограничений первое неравенство оказалось лишним, так как полуплоскость, описываемая вторым уравнением, при положительных значениях переменных принадлежит полуплоскости, описываемой первым неравенством.

Координаты точки $C(30;50)$ пересечения двух граничных прямых (первой и третьей) не удовлетворяют второму неравенству.

3. (Задача оптимального использования ресурсов) Для выпуска трех видов продукции P_1, P_2, P_3 на предприятии используются два вида сырья S_1 и S_1. Запасы сырья b_i, нормы расхода сырья a_{ij} (i-й вид сырья на единицу j-го вида продукции) и прибыль от реализации единицы готовой продукции c_i приведены в табл. 0.4.

Таблица 0.4. Исходные данные

Вид сырья	Запасы сырья	Вид продукции		
		P_1	P_2	P_3
S_1	40	4	2	3
S_2	50	3	1	2
Прибыль c_1		15	10	12

Требуется спланировать выпуск продукции таким образом, чтобы прибыль предприятия была максимальной.

Р е ш е н и е. Составим математическую модель исходной задачи, приняв за неизвестные x_j объемы выпускаемой продукции вида P_j $(j = \overline{1,3})$:

$$15x_1 + 10x_2 + 12x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 40, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 50; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,3}).$$

Перейдем к каноническому виду в системе ограничений, добавив к каждому из неравенств дополнительную переменную:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 40, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 50; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,5}).$$

Составим симплекс-таблицу исходного приближения (табл. 0.5)

Таблица 0.5. Нулевая итерация

$A_i \backslash A_j$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i	Q_i	
$\leftarrow A_4$	$\boxed{4}$	2	3	1	0	40	$\underline{10}$	$:4$
A_5	3	1	2	0	1	50	$50/3$	$-3N_1/4$
$-c_j$	$-\underline{14}$	-10	-12	0	0	$F_0 = 0$		$+14N_1/4$

Все индексы в последней строке отрицательны. Выбираем наименьший из них. Это $-c_1 = -14$ (значение подчеркнуто). Следовательно, на следующей итерации вектор A_1 вводим в число основных.

Чтобы определить, какой вектор следует вывести из числа основных (A_4 или A_5), сравним соответствующие им отношения b_i/a_{i1} и выберем наименьшее из них:

$$Q_i = min\left\{\frac{b_1}{a_{11}};\ \frac{b_2}{a_{21}}\right\} = min\left\{\frac{40}{4};\ \frac{50}{3}\right\} = \frac{b_1}{a_{11}} = Q_1 = 10.$$

Минимальному значению отношения соответствует коэффициент $a_{11} = 4$ (выделен квадратом). Так как этот коэффициент стоит на первой строке, то из базисных векторов выводим вектор условий A_4

(x_4 — из основных переменных). Перед базисным вектором A_4 этой переменной стоит знак $\leftarrow$.

Дальнейшие преобразования сводятся к тому, чтобы сделать единичным вектор A_1. Приводящие к этому действия над строками таблицы показаны в правом столбце табл. 0.5.

В результате преобразований приходим к табл. 0.6 первой итерации.

Дальнейшие преобразования указаны в таблице. Колонка с величиной Q_i отсутствует, так как выбора в коэффициенте a_{i2} нет — единственный положительный коэффициент: $a_{12} = 1/2$.

Таблица 0.6. Первая итерация

$A_i \backslash A_j$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i	
$\leftarrow A_1$	1	$\boxed{1/2}$	$3/4$	$1/4$	0	10	$\cdot 2$
A_5	0	$-1/2$	$-1/4$	$-1/4$	1	20	$+N_1$
$\Delta_j - c_j$	0	$-\underline{3}$	$-3/2$	$7/2$	0	$F^1 = 140$	$+6N_1$

После преобразований над строками приходим к табл. 0.7.

Таблица 0.7. Вторая итерация

$A_i \backslash A_j$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i
A_2	2	1	$3/2$	$1/2$	0	20
A_5	1	0	$1/2$	0	1	30
$\Delta_j - c_j$	6	0	3	5	0	$F_2 = 200$

Среди коэффициентов $-c_j$ нет отрицательных. Этот факт говорит о том, что дальнейшее улучшение плана невозможно. Поэтому

$$F_{max} = F^2 = c_2 x_2 = 10 \cdot 20 = 200.$$

Оптимальный выпуск продукции предприятия сводится к тому, что оно должно выпускать только продукцию P_2 в количестве 20 единиц.

Вытекающие из данных таблицы соотношения:

$$x_2 = 20 - 2x_1 - \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4;$$
$$x_5 = 30 - x_1 - \frac{1}{2}x_3$$

В этом случае в функцию цели

$$F = 15x_1 + 10\left(20 - 2x_1 - \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}\right) = 200 - 5x_1 - 15x_3 - 5x_4$$

входит единственная нефиктивная переменная x_1 с отрицательным коэффициентом -5.

В оптимальном решении переменные x_1, x_2 и x_4 приняты равными нулю (это свободные переменные). Если они будут возрастать, то это повлечет за собой уменьшение прибыли из-за роста переменной x_1.

4. Используя метод искусственного базиса, решить задачу ЛП:

$$F = x_1 + 3x_2 \ \rightarrow\ \min; \tag{17}$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 \geq 2, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4. \\ x_1,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Таблица 0.8. M-метод решения задачи **4**

	x_1	x_2	v_1	v_2	z_1	z_2	b_i	
$\leftarrow z_1$	-1	$\boxed{4}$	-1	0	1	0	2	$:4$
z_2	1	2	0	-1	0	1	4	$-N_1/2$
$-c_j$	–	–	–	–	M	M	$\tilde{F}=0$	$-M(N_1{+}N_2)$
$\Delta_j - c_j$	0	$\underline{-6M}$	M	M	0	0	$-6M$	$+3MN_1/2$
x_1	$-1/4$	1	$-1/4$	0	$1/4$	0	$1/2$	$+N_2/6$
$\leftarrow z_2$	$\boxed{3/2}$	0	$1/2$	-1	$-1/2$	1	3	$\cdot 2/3$
$\Delta_j - c_j$	$\underline{-3M/2}$	0	$-M/2$	M	$3M/2$	0	$-3M$	$+MN_2$
x_1	0	1	$-1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	1	
x_2	1	0	$1/3$	$-2/3$	$-1/3$	$2/3$	2	
$\Delta_j - c_j$	0	0	0	0	M	M	0	

Р е ш е н и е. Чтобы неравенства системы ограничений превратить в равенства, необходимо из каждого из них вычесть положительные переменные v_1 и v_2. Эти переменные не образуют базис векторов с единичной матрицей (коэффициенты при новых переменных — отрицательные единицы). Для образования единичной матрицы базисных векторов прибавим к каждому из полученных равенств ограничений фиктивные переменные z_1 и z_2. К функции цели переменные v_1 и v_2 добавляются с нулевыми коэффициентами, а z_1 и z_2 с множителем M настолько большим, что значением функции цели (17), по сравнению с $M(z_1 + z_2)$, можно пренебречь.

С учетом сказанного перепишем задачу ЛП:

$$\tilde{F} = Mz_1 + Mz_2 \;\to\; \min; \tag{18}$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - v_1 + z_1 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - v_2 + z_2 = 4, \\ x_j, v_j, z_j \geq 0 \;\; (j = \overline{1,2}). \end{cases}$$

Решим задачу симплекс-методом (табл. 0.8). Для наглядности в первых строке и столбце запишем не обозначения базисных векторов, а переменные, им соответствующие. В первой строке индексов первой таблицы стоят множители M при z_1 и z_2 функции $\tilde{F}$ (18), а во второй — коэффициенты, обращающие эти множители в нуль.

Из последней таблицы следует оптимальное решение:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad F_{min} = F(1,2) = 1 + 3 \cdot 2 = 7.$$

Задание на дом: выполнить часть расчетной работы, касающуюся графического и симплексного методов решения задачи линейного программирования (с. **??**).

ТЕМА 19

(§ **??–??** теории)

Двойственность в задачах ЛП

Вопросы

1. На задаче торга поясните смысл двойственности в задачах ЛП.

2. Перечислите правила формирования двойственной задачи ЛП по отношению к исходной:
   — Изменяются ли и, если да, то как знаки неравенств и экстремума?
   — Что происходит с матрицей коэффициентов?
   — Как определить число переменных в двойственной задаче? число ограничений?
   — Какую функцию в двойственных задачах выполняют свободные члены системы ограничений исходной задачи? коэффициенты при неизвестных?
   — Какова связь между ограничениями двойственной задачи и переменными исходной задачи?
   — В чем состоит соответствие переменных исходной и двойственной задач?

3. Как связаны между собой экстремальные значения целевых функций двойственной и исходной задач?

Задачи

1. Найти решение задачи ЛП:

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ x_1 - x_2 \geq -1; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Сформулировать математическую модель двойственной задачи и найти ее решение.

Сравнить результаты. Сделать выводы.

Р е ш е н и е. Задача описывается двумя переменными, поэтому ее можно решить графическим методом. Построим на плоскости область Ω (выделена жирными линиями на рис. 0.14), ограниченную прямыми:

$$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{2} = 1; \qquad \text{и} \qquad \frac{x_1}{-1} + \frac{x_2}{1} = 1.$$

На рисунке показан вектор $\boldsymbol{c} = (3;\ 2)$, ортогональный прямым $3x_1 + 2x_2 = const$.

Минимальное значение целевой функции F находится в точке границы ОДЗ, наименее удаленной от начала координат в направлении вектора $\boldsymbol{c}$. Судя по построению, такой точкой является точка B, где $AB \cap BC$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 - \ x_2 = -1; \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad B\left(\frac{2}{3};\ \frac{5}{3}\right).$$

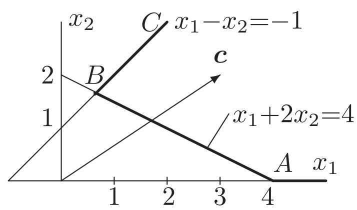


Рис. 0.14. Исходная задача

Следовательно,

$$F_{min} = F_B = 3 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{16}{3}.$$

Что касается максимального значения функции, то его не существует, ОДЗ не ограничена.

Составим двойственную задачу. Последовательно сформируем ее соотношения.

1. Количество переменных y_i двойственной задачи равно количеству ограничений исходной задачи $(i = 1,\ 2)$.

2. Коэффициентами функции цели Φ двойственной задачи служат правые части ограничений исходной задачи:

$$\Phi = b_1 y_1 + b_2 y_2 = 4y_1 - y_2.$$

3. $\Phi \to \max$, если $F \to \min$.

4. Векторы условий исходной задачи становятся коэффициентами соответствующих неравенств двойственной задачи. Знаки неравенств меняются на противоположные. В правых частях двойственной задачи стоят соответствующие коэффициенты функции цели исходной задачи:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \le 3, \\ 2y_1 - y_2 \le 2. \end{cases}$$

Матрица коэффициентов системы ограничений двойственной задачи равна транспонированной матрице коэффициентов системы ограничений исходной задачи.

5. Условия допустимости решения сохраняются и для переменных двойственной задачи:

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

Построим на плоскости прямые:

$$\frac{y_1}{3} + \frac{y_2}{3} = 1, \qquad \text{и} \qquad \frac{y_1}{1} + \frac{y_2}{-2} = 1$$

и определим по неравенствам ОДЗ (выделена на рис. 0.15 жирными линиями). На этом же рисунке показано направление вектора $\boldsymbol{b} = (4; -1)$

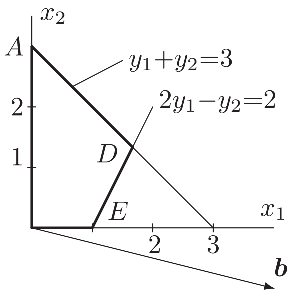


Рис. 0.15. Двойственная задача

Наиболее удаленной от начала координат в направлении вектора $\boldsymbol{b}$ (находим максимальное значение функции цели) оказывается точка D, где $AD \cap DE$. Координаты точки находим из совместного решения соответствующих уравнений:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 3, \\ 2y_1 - y_2 = 2; \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad D\left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

Подставляя координаты точки D в выражение для целевой функции, найдем ее максимальное значение:

$$\Phi_{max} = \Phi_D = 4 \cdot \frac{5}{3} - 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{3}.$$

Как следовало ожидать, согласно теореме о взаимно двойственных задачах, минимальное значение целевой функции исходной задачи равно максимальному значению целевой функции двойственной задачи:

$$F_{min} = \Phi_{max}.$$

2. Дана задача ЛП:

$$F = 2x_1 + x_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 - 2x_2 \leq 4; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0.$$

Требуется:
— решить задачу графическим и симплексным методами;
— построить двойственную задачу и решить ее симплекс-методом.

Р е ш е н и е. Построим на плоскости с декартовыми ортогональными координатами x_1 и x_2 прямые, соответствующие неравенствам записанных в условии ограничений:

$$x_1 - x_2 = 1, \quad (1) \qquad \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{5} = 1, \quad (2) \qquad \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{-2} = 1. \quad (3)$$

Положительные координаты точек пересечения выписанных прямых: $A(3;\ 2)$, $B\left(4\frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right)$.

На рис. 0.16 ОДЗ выделена жирными линиями. Там же построен вектор $\boldsymbol{c} = (2;\ 1)$.

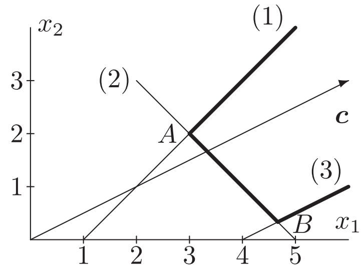


Рис. 0.16. Исходная задача 2

При определении минимального значения F имеем в виду, что оно должно находиться в точке ОДЗ, наименее удаленной от начала координат в направлении вектора $\boldsymbol{c}$. Из рисунка видно, что таковой является точка $A(3;\ 2)$. Поэтому

$$F_{min} = F_A = 2 \cdot 3 + 2 = 8.$$

Для решения задачи симплексным методом приведем исходную математическую модель к каноническому виду, пригодному для использования метода искусственного базиса:

$$\tilde{F} = Mz_1 + Mz_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - v_1 + z_1 = 1, \\ x_1 + x_2 - v_2 + z_2 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + v_3 = 4; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0.$$

Составим симплекс-таблицу исходной итерации:

Таблица 0.9. Решение задачи **2**

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	z_1	z_2	b_i	
$\leftarrow z_1$	$\boxed{1}$	-1	-1	0	0	1	0	1	
z_2	1	1	0	-1	0	0	1	5	$-N_1$
v_3	1	-2	0	0	1	0	0	4	$-N_1$
$-c_j$	–	–	–	–	–	M	M	$\tilde{F}=0$	$-M(N_1{+}N_2)$
$\Delta_j - c_j$	$-\underline{2M}$	0	M	M	0	0	0	$-6M$	$2MN_1$
x_1	1	-1	-1	0	0	1	0	1	$+N_2/2$
$\leftarrow z_2$	1	$\boxed{2}$	0	-1	0	0	1	5	$:2$
v_3	1	-2	0	0	1	0	0	4	$+N_2/2$
$\Delta_j - c_j$	0	$-\underline{2M}$	$-M$	M	0	$2M$	0	$-4M$	$+MN_2$
x_1	1	0	$-1/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$1/2$	3	
x_2	0	1	$1/2$	$-1/2$	0	$-1/2$	$1/2$	2	
v_3	0	0	$3/2$	$-1/2$	1	$-3/2$	$1/2$	5	
$\Delta_j - c_j$	0	0	0	0	0	M	M	0	

В итоге представленных в табл. 0.9 преобразований по методу искусственного базиса получено решение, совпадающее с графическим:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2; \quad F = 2 \cdot 3 + 2 = 8 = F_{min}.$$

Вектор переменных, соответствующий оптимальному решению:

$$X^* = (x_1^*; x_2^*; v_1^*; v_2^*; v_3^*)^T = (3; 2; 0; 0; 5)^T.$$

Система уравнений, в которой основные неизвестные (x_1; x_2; v_3) выражаются через свободные (v_1; v_2):

$$x_1 = 3 + \frac{1}{2}(v_1 + v_2); \qquad x_2 = 2 + \frac{1}{2}(-v_1 + v_2);$$

$$v_3 = 5 + \frac{1}{2}(-3v_1 + v_2),$$

обращает в тождество исходную систему ограничений, представленную в каноническом виде. Проверим, будет ли выполняться это утверждение ($z_1 = z_2 = 0$):

$$(1)\colon 3 + \frac{1}{2}(v_1 + v_2) - 2 + \frac{1}{2}(v_1 - v_2) - v_1 = 1 \quad (!);$$

$$(2)\colon 3 + \frac{1}{2}(v_1 + v_2) + 2 - \frac{1}{2}(v_1 - v_2) - v_2 = 5 \quad (!);$$

$$(3)\colon 3 + \frac{1}{2}(v_1 + v_2) - 2 \cdot 2 - 2\frac{1}{2}(v_1 - v_2) + 5 + \frac{1}{2}(-3v_1 + v_2) = 4 \quad (!).$$

Переходим к составлению и решению двойственной задачи. Построим модель двойственной задачи, основываясь на соответствиях между коэффициентами:

$$\Phi = y_1 + 5y_2 - 4y_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - y_3 \le 2, \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 \le 1; \end{cases}$$

$$y_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,3}).$$

В канонической форме:

$$\Phi = y_1 + 5y_2 - 4y_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - y_3 + w_1 = 2, \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 + w_2 = 1; \end{cases}$$

$$y_i \ge 0,\ w_k \ge 0 \quad (i = \overline{1,3},\ k = \overline{1,2}).$$

Составим симплекс-таблицу нулевого приближения и далее преобразуем ее (табл. 0.10).

Вектор оптимального плана двойственной задачи:

$$Y = Y^2 = (y_1;\ y_2;\ 0;\ 0;\ 0)^T = \frac{1}{2}(1;\ 3;\ 0;\ 0;\ \ 0)^T.$$

При таких значениях координат вектора решения функция цели обращается в максимум:

$$\Phi(Y) = y_1 + 5y_2 - 4y_3 = \frac{1}{2}(1 + 5 \cdot 3) = 8 = \Phi_{max}.$$

Система уравнений, в которой основные неизвестные $(y_1;\ y_2)^T$ выражаются через свободные $(y_3;\ y_4;\ y_5)^T$:

Таблица 0.10. Решение двойственной задачи

	y_1	y_2	y_3	w_1	w_2	b_i	
w_1	1	1	-1	1	0	2	$-N_2$
$\leftarrow w_2$	-1	$\boxed{1}$	2	0	1	1	
$-c_j$	-1	$-\underline{5}$	4	0	0	$\Phi^0 = 0$	$+5N_2$
$\leftarrow w_1$	$\boxed{2}$	0	-3	1	-1	1	$\cdot 1/2$
y_2	-1	1	2	0	1	1	$+N_1/2$
$\Delta_j - c_j$	$-\underline{6}$	0	14	0	5	$\Phi^1 = 5$	$+3N_1$
y_1	1	0	$-3/2$	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	
y_2	0	1	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$3/2$	
$\Delta_j - c_j$	0	0	5	3	1	$\Phi^2 = 8$	

$$y_1 = \frac{1}{2}(1 + 3y_3 - y_4 + y_5);$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(3 - y_3 - y_4 - y_5).$$

Можно, в качестве проверки, убедиться в том, что подстановка последних соотношений обращает в тождество исходную систему ограничений двойственной задачи, представленную в каноническом виде.

Задачи для самостоятельного решения

Решить симплексным или геометрическим методом задачи ЛП. Составить двойственные задачи и решить их симплексным или геометрическим методом. Сопоставить результаты решения взаимно двойственных задач.

1. $F = x_1 + 2x_2 \ \to \ \min;$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4; \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0.$$

2. $F = x_1 + x_2 \ \to \ \max;$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq -2, \\ x_1 - 2x_2 \geq -13, \\ 3x_1 - x_2 \leq 6; \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0.$$

3. $F = 10x_1 - 3x_2 \;\to\; \min;$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 \geq 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 3; \end{cases}$$
$$x_1,\; x_2,\; x_3 \geq 0.$$

4. $F{=}4x_1{+}18x_2{+}30x_3{+}5x_4 \;\to\; \min;$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 \leq -3, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \geq 3, \\ x_j \geq 0,\; (j = \overline{1,4}). \end{cases}$$

Задание на расчетную работу. Часть 5 «Линейное программирование»

Задание. Дана математическая модель задачи ЛП:

$$F = \frac{2}{k}x_1 + kx_2 \Rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 - kx_2 \ge 1, \\ kx_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 - 2x_2 \le 4k; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Требуется Найти решение задачи:

1. графическим методом;

2. симплексным методом.

3. Свести исходную задачу к двойственной и решить двойственную задачу симплекс-методом.

4. Сравнить результаты. Сделать выводы.