МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П.КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

Ю.Ж. Пчелкина

Курс лекций по математическому анализу

Электронное учебное пособие

САМАРА
2011

УДК 517

Автор: Пчелкина Юлия Жиганшевна

Пчелкина, Ю. Ж. Курс лекций по математическому анализу [Электронный ресурс]: электрон. учеб. пособие / Ю.Ж. Пчелкина; М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т). – Электрон. текстовые и граф. дан. (1,66 Мбайт). – Самара, 2011. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

Пособие представляет собой опорный курс лекций. Основными понятиями математического анализа являются понятия производной и интеграла. Для того чтобы сформулировать понятия производной и интеграла в достаточно универсальном виде, с применениями к возможно более широкому классу функций, этим понятиям предшествуют теория вещественных чисел, теория пределов, теория непрерывных функций.

Учебное пособие предназначено для подготовки бакалавров направления 010400.62, «Прикладная математика и информатика», изучающих дисциплину «Математический анализ» в 1 и 2 семестрах.

Пособие разработано на кафедре прикладной математики.

Оглавление

Глава 1

Введение в математический анализ

§ 1.1. Некоторые понятия математической логики

Суждение представляет собой законченную мысль, выраженную средствами естественного языка, и состоит из четырех элементов: *квантор, субъект, связка, предикат*.

Пример:

	Квантор	*Субъект*	*Связка*	*Предикат*
1	Все	числа	являются	не рациональными
2	Некоторые	натуральные числа	-	четны

В последнем случае подразумевается связка “являются”. Логической связке может также соответствовать символ двоеточия. В первом случае обычно говорят также: “Все числа не являются рациональными”. Вместо термина *предикат* используют также термин *свойство*.

В традиционной логике допускаются два типа суждений, каждый из которых характеризует возможные отношения между двумя классами (классом субъектов и классом предикатов):

1) Все S являются P (каждый из S удовлетворяет свойству P)

2) Некоторые из S являются P

«Все», «каждый», «любой», «произвольный» называются *универсальным квантором* или *квантором общности*. Обозначение квантора общности: $\forall$.

«Некоторые из», «существует» - экзистенциальные кванторы $\exists$.

Таким образом, основные типы суждений можно записать в следующей форме:

1) $\forall x \in S : P$ 2) $\exists x \in S : P$

Кроме того, и предикат, и субъект в суждении могут быть и составными, в частности они сами могут оказаться суждениями. Для примера рассмотрим высказывание (суждение):

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x, |x - x_0| < \delta:\ |f(x) - 2| < \varepsilon$$

Это суждение является составным и может быть разложено на простейшие суждения следующим образом:

$\forall\varepsilon \in S_1 :\ P_1$, *где* S_1*-класс субъектов,* $S_1 = \{x \in R, x > 0\}$, P_1- предикат,

$P_1 = (\exists\delta \in S_2 :\ P_2)$, *где* $S_2 = S_1$, P_2 - предикат,

$P_2 = (\forall x \in S_3 : P_3)$, $S_3 = S_3(\delta) = \{x \in R: |x - x_0| < \delta\}$, P_3 – предикат (свойство)

$|f(x) - 2| < \varepsilon$.

Отрицание суждения строиться по следующим формальным правилам:

1. квантор $\forall$ заменяется на квантор $\exists$

2. квантор $\exists$ заменяется на квантор $\forall$

3. предикат P заменяется на свое отрицание.

Так для суждения:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x\ \ |x - x_0| < \delta:\ |f(x) - 2| < \varepsilon$$

отрицанием будет суждение:

$$\exists\ \varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x\ |x - x_{-}0\ | < \delta:\ |f(x) - 2| \geq \varepsilon$$

§ 1.2. Множества. Операции над множествами

Неопределимыми понятиями теории множеств являются:

- множества: обозначаются заглавными латинскими буквами A, B, C, . . .
- элементы множества: обозначаются малыми латинскими буквами a, b, c, ...

Неопределимыми отношениями теории множеств являются:

- принадлежность: элемент $\boldsymbol{a}$ принадлежит множеству $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$,
- не принадлежит, $\boldsymbol{a} \notin A$.

Все множества могут быть разделены на два типа:

- пустые множества,
- непустые множества.

Определение. Множество, не содержащее ни одного элемента называется пустым, $\emptyset$

В общем случае множество задается правилом или законом на основании которого можно определить принадлежит ли данный элемент данному множеству или нет. Если же множество конечно, то его можно задать перечислением элементов.

Бесконечные множества записывают при помощи характеристического свойства.

Над множествами можно выполнять элементарные операции такие, как: объединение, пересечение и разность двух множеств, а также дополнение одного множества до другого, для наглядности перечисленные операции обычно иллюстрируют при помощи диаграмм (кругов) Эйлера–Венна (см. Рис.(I.1, I.2, I.3, I.4).

Определение. Объединением двух множеств $A \cup B$ называется множество, такое, что каждый его элемент принадлежит хотя бы одному из двух
данных множеств (рис. I.1):

$$A \cup B = \{x: (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

Определение. Пересечением двух множеств $A \cap B$ называется множество, такое, что каждый его элемент принадлежит каждому из двух данных множеств (рис. I.2):

$$A \cap B = \{x: (x \in A)\&(x \in B)\}$$

Определение. Разностью двух множеств $A \backslash B$ называется множество, такое, что каждый его элемент принадлежит множеству *A*, но не принадлежит множеству *B* (рис. I.3):

$$A \backslash B = \{x: (x \in A)\&(x \notin B)\}$$

Определение. Говорят, что множество *A* содержится во множестве *B*, $A \subset B$, если любой элемент из множества *A* будет принадлежать множеству *B* (рис. I.4):

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

Определение. Пусть множество $A \subset B$, тогда дополнением множества *A* до множества *B* будет называться множество:

$$CB\,(A) = \{x: \forall x, (x \notin A)\&(x \in B)\}$$

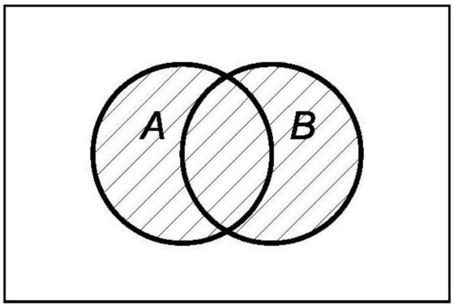


Рис. I.1 – Объединение множеств.

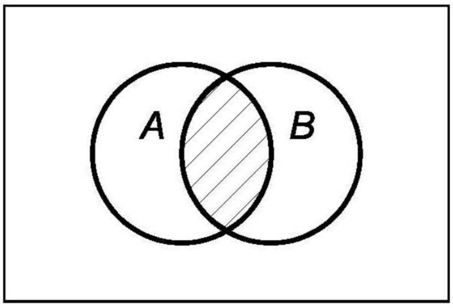


Рис. I.2 – Пересечение множеств.

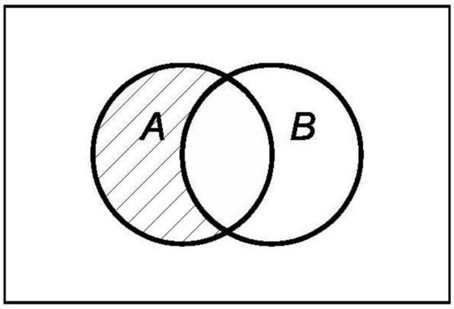


Рис. I.3 – Разность множеств.

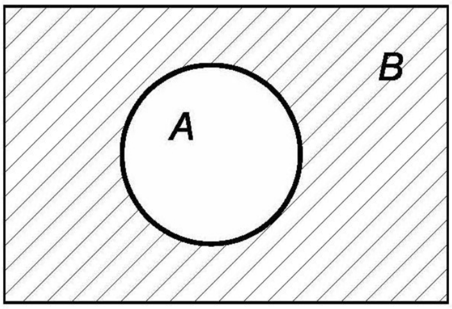


Рис. I.4 – Вложенность множеств.

§ 1.3. Множество вещественных чисел

Рассматривается множество $\mathbb{R}$, для элементов которого определены следующие свойства:

1. Свойство упорядоченности

1.1. $\forall a, b \in\mathbb{R}$ либо $a < b$, либо $a = b$, либо $a > b$

1.2. $\forall a, b, c\in\mathbb{R}$: $a < b$, $b < c \Rightarrow a < c$ (*свойство транзитивности*)

1.3. $\forall a, b\in\mathbb{R}$: $(a < b)$ или $(a = b) \Longrightarrow (a \leq b)$

2. Свойства операции сложения. Отображение из R^2 в R: $\forall a, b \to a + b$.

2.1. $\forall a, b\in\mathbb{R}$: $a + b = b + a$ (*коммутативность*)

2.2. $\forall a, b, c\in\mathbb{R}$: $a + (b + c) = (a + b) + c$ (*ассоциативность*)

2.3. $\forall a\in\mathbb{R}$, $\exists\, 0$: $a + 0 = a$

2.4. $\forall a\in\mathbb{R}$ $\exists$ *противоположный элемент* $-a$: $a + (-a) = 0$

2.5. $\forall a, b, c\in\mathbb{R}$: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

3. Свойства операций умножения. Отображение $\forall a, b \to a \cdot b$

3.1. $\forall a, b\in\mathbb{R}$: $a \cdot b = b \cdot a$ (*коммутативность*)

3.2. $\forall a, b, c\in\mathbb{R}$: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b)c$ (*ассоциативность*)

3.3. $\exists\, 1$, $\forall a\in\mathbb{R}$: $1 \cdot a = a$

3.4. $\forall a\neq 0\ \exists\ a^{-1}$ (*обратный элемент*): $a \cdot a^{-1} = 1$

3.5. $\forall a, b, c\in\mathbb{R}$: $a < b$ *и* $c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

$a < b$ *и* $c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$

4. Связь операций

4.1. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (*дистрибутивность*)

4.2. Определение: $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$

Свойства $|a + b| \leq |a| + |b|$

5. Свойство Архимеда: $\forall a\ \exists\, n\in \mathbb{N}$: $n > a$

Следствие из свойства Архимеда: $\forall a > 0\, \forall b\, \exists n \in \mathbb{N}\colon n \cdot a > b$

6. Свойство непрерывности вещественных чисел или *Принцип вложенных отрезков*.

Определение: *Отрезок* или *сегмент*: $[a, b] = \{x\colon a \le x \le b\}$, где величина $(b - a)$ – это длина отрезка.

Определение: Система отрезков $\{[a_j, b_j]\}$ называется *системой вложенных отрезков*, если $\forall k$: $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$.

Принцип вложенных отрезков: Для всякой системы вложенных отрезков существует хотя бы одно число, общее для всех отрезков.

Множество элементов, удовлетворяющее свойствам 1 - 6 называется *множеством вещественных чисел* и обозначается $\mathbb{R}$. Для вещественных чисел используется геометрическая терминология «точки».

Определение: *Система отрезков стягивается к 0,* если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\colon bn - an < \varepsilon$$

Лемма (Кантора): Для всякой системы вложенных стягивающихся к нулю отрезков $[a_k, b_k]$ существует единственное число, принадлежащее всем отрезкам данной системы.

Доказательство. Одно число существует по свойству 6. Предположим, что существуют два таких числа x , y и $x < y$. Тогда

$\forall n$: $a_n \le x < y \le b_n \Rightarrow \forall\ n$: $y - x \le b_n - a_n$.

Возьмем $\varepsilon = y - x$. Для него $\exists\ N$, $\forall n > N$: $b_n - a_n < \varepsilon$, что противоречит предыдущему неравенству.

§ 1.4. Числовая последовательность. Ограниченные и неограниченные последовательности

Определение. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана последовательность

$$x_1, x_2, \ldots, x_n = \{x_n\}$$

Общий элемент последовательности является функцией от n. $x_n = f(n)$

Таким образом последовательность может рассматриваться как функция.

Для последовательностей можно определить следующие операции:

1) Умножение последовательности на число: $m\{x_n\} = \{mx_n\}$, т.е. $mx_1, mx_2, \ldots$
2) Сложение (вычитание) последовательностей: $\{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\}$.
3) Произведение последовательностей: $\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}$.
4) Частное последовательностей: $\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ *при* $\{y_n\} \neq 0$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если существует такое число $M > 0$, что для любого n верно неравенство: $|x_n| < M$

т.е. все члены последовательности принадлежат промежутку $(-M;\ M)$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$называется ограниченной сверху, если для любого n существует такое число M, что $x_n \leq M$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной снизу, если для любого n существует такое число M, что $x_n \geq M$

Определение. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется условие: $|a - x_n| < \varepsilon$. Это записывается: $\lim x_n = a$.

В этом случае говорят, что последовательность $\{x_n\}$сходится к a при $n \to \infty$.

Свойство: Если отбросить какое- либо число членов последовательности, то получаются новые последовательности, при этом если сходится одна из них, то сходится и другая.

Теорема. Последовательность не может иметь более одного предела.

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ имеет два предела a и b, не равные друг другу. $x_n \to a;\ x_n \to b;\quad a \neq b$.

Тогда по определению существует такое число $\varepsilon > 0$, что

$$|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|b - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|a - b| = |(a - x_n) + (x_n - b)| \le |a - x_n| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

А т.к. ε - любое число, то $|a - b| = 0$, т.е. $a = b$.

Теорема доказана.

Теорема. Если $x_n \to a$, *то* $|x_n| \to |a|$.

Доказательство. Из $x_n \to a$ следует, что $|x_n - a| < \varepsilon$. В то же время:

$||x_n| - |a|| \le |x_n - a|$, т.е. $||x_n| - |a|| < \varepsilon$, т.е. $|x_n| \to |a|$.

Теорема доказана.

Теорема. Если $x_n \to a$, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

Следует отметить, что обратное утверждение неверно, т.е. из ограниченности последовательности не следует ее сходимость.

§ 1.5. Монотонные последовательности

Определение.

1) Если $x_{n+1} > x_n$ для всех n, то последовательность возрастающая.

2) Если $x_{n+1} \geq x_n$ для всех n, то последовательность неубывающая.

3) Если $x_{n+1} < x_n$ для всех n, то последовательность убывающая.

4) Если $x_{n+1} \leq x_n$ для всех n, то последовательность невозрастающая

Все эти последовательности называются монотонными. Возрастающие и убывающие последовательности называются строго монотонными.

Следует отметить, что монотонные последовательности ограничены по крайней мере с одной стороны.

Теорема. Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Доказательство. Рассмотрим монотонную неубывающую последовательность $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots$

Эта последовательность ограничена сверху: $x_n \leq M$, где M – некоторое число. Т.к. любое, ограниченное сверху, числовое множество имеет четкую верхнюю грань, то для любого $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ существует такое число $\boldsymbol{N}$, что $x_N > a - \varepsilon$, где a – некоторая верхняя грань множества. Т.к. $\{x_n\}$- неубывающая последовательность, то при $\boldsymbol{N > n}$: $a - \varepsilon < x_N \leq x_n$, $x_n > a - \varepsilon$.

Отсюда: $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$; $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $/x_n - a/ < \varepsilon$,
т.е. $\lim x_n = a$.

Для остальных монотонных последовательностей доказательство аналогично.

Теорема доказана.

§ 1.6. Число e

Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Если последовательность $\{x_n\}$ монотонная и ограниченная, то она имеет конечный предел.

По формуле бинома Ньютона:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

или, что то же самое

$$x_n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ – возрастающая. Действительно, запишем выражение x_{n+1} и сравним его с выражением x_n:

$$x_{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Каждое слагаемое в выражении x_{n+1} больше соответствующего значения x_n, и, кроме того, у x_{n+1} добавляется еще одно положительное слагаемое. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ возрастающая.

Докажем теперь, что при любом n ее члены не превосходят трех: $x_n < 3$.

$$x_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} < \underbrace{1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}}_{\text{геометр. прогрессия}} = 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

Итак, последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ - монотонно возрастающая и ограниченная сверху, т.е. имеет конечный предел. Этот предел принято обозначать буквой *e*. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Из неравенства $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ следует, что $\boldsymbol{e \le 3}$. Отбрасывая в равенстве для $\{x_n\}$ все члены, начиная с четвертого, имеем:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

переходя к пределу, получаем $e \ge 2+\frac{1}{2} = 2{,}5$

Таким образом, число е заключено между числами 2,5 и 3. Если взять большее количество членов ряда, то можно получить более точную оценку значения числа e.

Можно показать, что число е иррациональное и его значение равно 2,71828…

Аналогично можно показать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, расширив требования к x до любого действительного числа: $n \le x \le n+1$

$$\frac{1}{n} \ge \frac{1}{x} \ge \frac{1}{n+1} \qquad 1+\frac{1}{n} \ge 1+\frac{1}{x} \ge 1+\frac{1}{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e\cdot 1 = e; \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{e}{1} = e; \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Число е является основанием натурального логарифма.

$$\log_e x = \ln x = y, \quad т.е. \quad e^y = x.$$

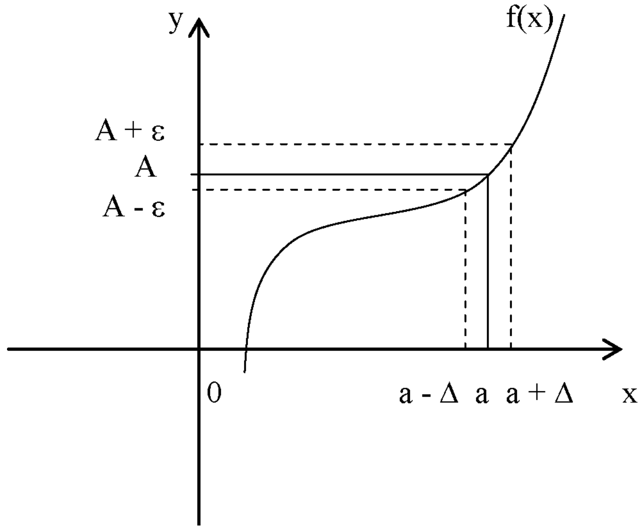
Связь натурального и десятичного логарифмов.

Пусть $x = 10^y$, тогда $\ln x = \ln 10^y$, следовательно $\ln x = y\ln 10$

$$y = \lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} = M\ln x; \qquad \ln x = \frac{1}{M}\lg x,$$

где $M = 1/\ln 10 \approx 0{,}43429\ldots$ - модуль перехода.

§ 1.7 Предел функции в точке

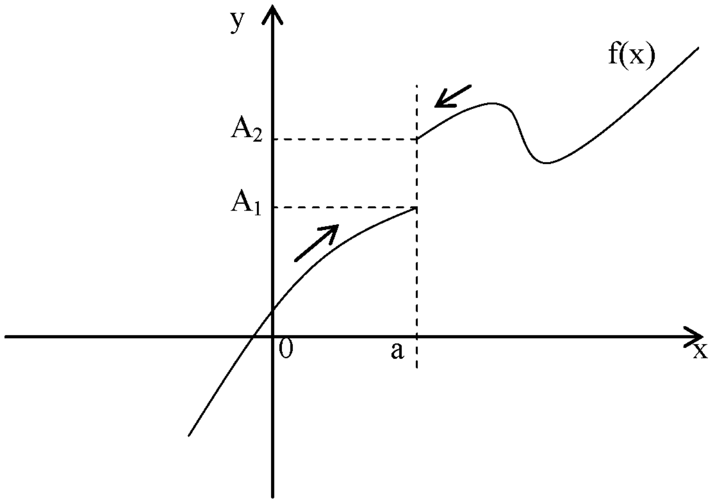


Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$ (т.е. в самой точке $x = a$ функция может быть и не определена)

Определение. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, что для всех x таких, что $0 < /x - a/ < \Delta$ верно неравенство $/f(x) - A/ < \varepsilon$.
Если $a - \Delta < x < a + \Delta$, $x \neq a$, то верно неравенство $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

Определение. Если $f(x) \to A_1$ при $x \to a$ только при $x < a$, то $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$ - называется пределом функции $f(x)$ в точке $x = a$ слева, а если $f(x) \to A2$ при $x \to a$ только при $x > a$, то $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A_2$ называется пределом функции $f(x)$ в точке $x = a$ справа.



Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция $f(x)$ не определена в самой точке $x = a$, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

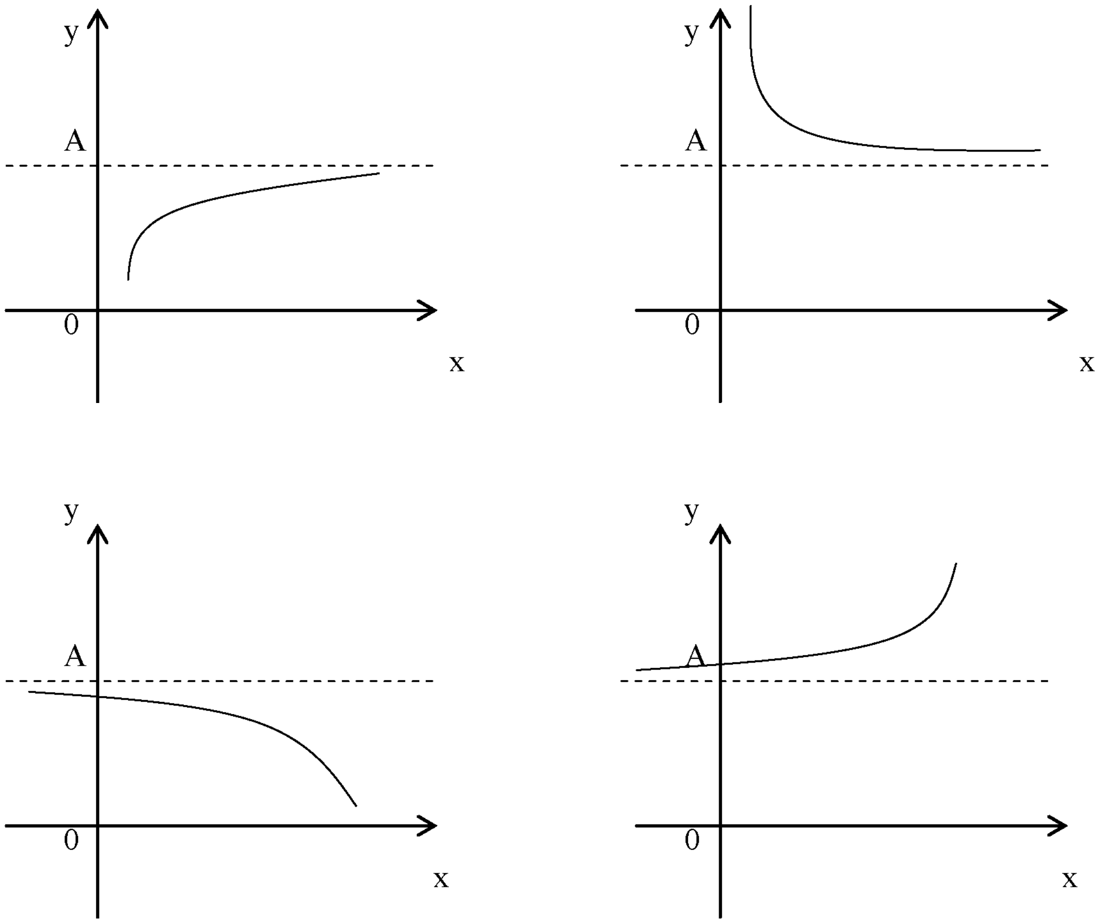
Пределы A_1 и A_2 называются также односторонними пределами функции $f(x)$ в точке $x = a$. Также говорят, что A – конечный предел функции $f(x)$.

§1.8. Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности

Определение. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что для всех x, $|x| > M$ выполняется неравенство $|A - f(x)| < \varepsilon$

При этом предполагается, что функция $f(x)$ определена в окрестности бесконечности. Записывают: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Графически можно представить:



Аналогично можно определить пределы $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ для любого $x > M$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ для любого $x < M$.

§1.9. Основные теоремы о пределах

Теорема 1. $\lim\limits_{x\to a} C = C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции *f(x)* и *g(x)* имеют конечные пределы при $x \to a$.

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Следствие. $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

Теорема 5. Если $f(x) > 0$ вблизи точки$x = a$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то $A > 0$.

Аналогично определяется знак предела при $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$.

Теорема 6. Если $g(x) \leq f(x) \leq u(x)$ вблизи точки $x = a$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} u(x) = A$, то и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Определение. Функция $f(x)$ называется ограниченной вблизи точки $x = a$, если существует такое число $M > 0$, что $/f(x)/ < M$ вблизи точки $x = a$.

Теорема 7. Если функция $f(x)$ имеет конечный предел при $x \to a$, то она ограничена вблизи точки $x = a$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, т.е. $|f(x) - A| < \varepsilon$, тогда $|f(x)| = |f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A|$ или $|f(x)| < \varepsilon + |A|$, т.е. $|f(x)| < M$, где $M = \varepsilon + /A/$

Теорема доказана.

1.10. Бесконечно малые функции. Свойства бесконечно малых функций. Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, где a может быть числом или одной из величин ∞, $+\infty$ или $-\infty$, если $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Бесконечно малой функция может быть, только если указать к какому числу стремится аргумент x. При различных значениях a функция может быть бесконечно малой или нет.

Теорема. Для того, чтобы функция $f(x)$ при $x \to a$ имела предел, равный A, необходимо и достаточно, чтобы вблизи точки $x = a$ выполнялось условие $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$ ($\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$).

1) Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ тоже бесконечно малая функция при $x \to a$.

2) Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ тоже бесконечно малая функция при $x \to a$.

3) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки $x = a$ является бесконечно малой функцией при $x \to a$.

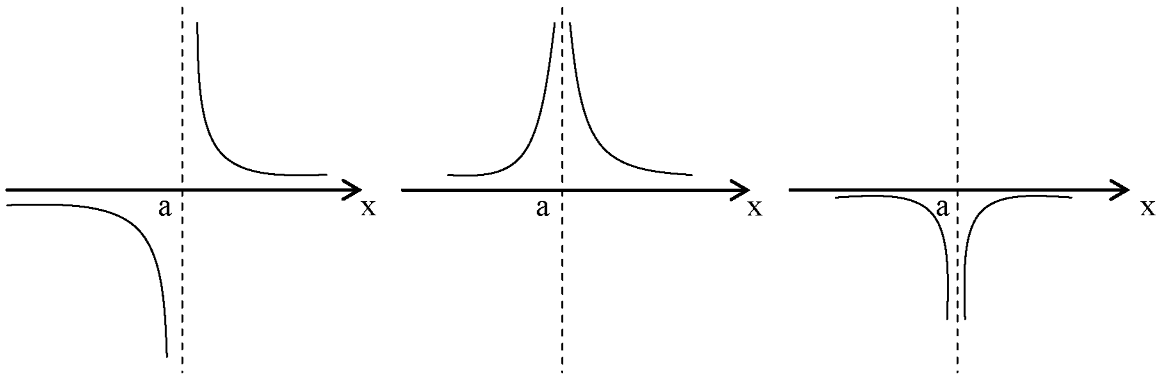
4) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть величина бесконечно малая.

Определение. Предел функции $f(x)$ при $x \to a$, где a - число, равен бесконечности, если для любого числа $M>0$ существует такое число $\Delta>0$, что неравенство $|f(x)|>M$ выполняется при всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \Delta$. Записывается $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.

Собственно, если в приведенном выше определении заменить условие $|f(x)|>M$ на $f(x)>M$, то получим: $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$,

а если заменить на $f(x)<M$, то: $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Графически приведенные выше случаи можно проиллюстрировать следующим образом:



Определение. Функция называется бесконечно большой при $x\to a$, где a – число или одна из величин ∞, $+\infty$ или $-\infty$, если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, где A – число или одна из величин ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

Теорема. Если $f(x)\to 0$ при $x\to a$ (если $x\to\infty$) и не обращается в ноль, то

$$y = \frac{1}{f(x)} \to \infty$$

§ 1.11.Сравнение бесконечно малых функций. Свойства эквивалентных бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$. Будем обозначать эти функции α, β и γ соответственно.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$, то функция α называется бесконечно малой более высокого порядка, чем функция β.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=A, \quad A\neq 0, \quad A=const$, то α и β называются бесконечно малыми одного порядка.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=1$, то функции α и β называются эквивалентными бесконечно малыми. Записывают $\alpha \sim \beta$.

Определение. Бесконечно малая функция α называется бесконечно малой порядка k относительно бесконечно малой функции β, если предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta^k}$ конечен и отличен от нуля.

Свойства эквивалентных бесконечно малых функций:

1) $\alpha \sim \alpha$, $\quad \left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\alpha}=1\right)$

2) Если $\alpha \sim \beta$ и $\beta \sim \gamma$, то $\alpha \sim \gamma$, $\quad \left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\gamma}=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{\beta}{\gamma}\right)=1\cdot 1=1\right)$

3) Если $\alpha \sim \beta$, то $\beta \sim \alpha$, $\quad \left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\dfrac{\alpha}{\beta}}=1\right)$

4) Если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\beta \sim \beta_1$ и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=k$, то и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}=k$ или $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$.

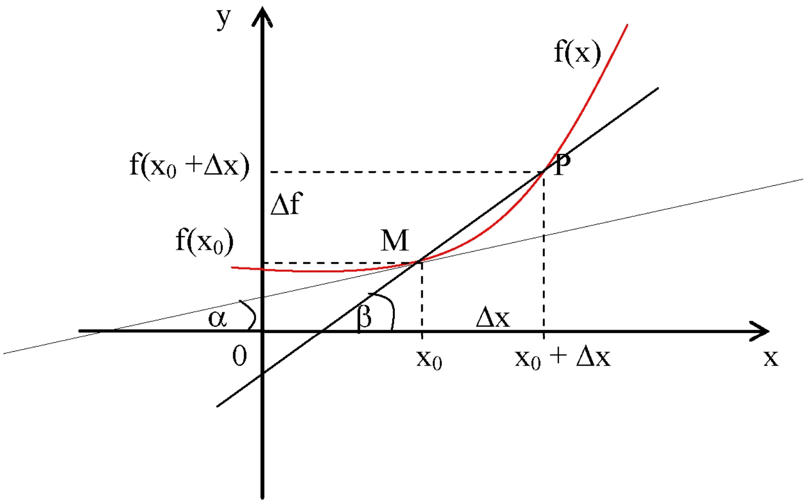
Глава 2

Дифференциальное исчисление

§ 2.1. Производная функции, ее геометрический и физический смысл

Определение. Производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Пусть $f(x)$ определена на некотором промежутке (a, b).

Тогда $tg\beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ – тангенс угла наклона секущей MP к графику функции. $\lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = tg\alpha$, где α - угол наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

Угол между кривыми может быть определен как угол между касательными, проведенными к этим кривым в какой- либо точке.

Уравнение касательной к кривой: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Уравнение нормали к кривой: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Фактически производная функции показывает как бы скорость изменения функции, как изменяется функция при изменении переменной.

Физический смысл производной функции $f(t)$, где t - время, а $f(t)$ - закон движения (изменения координат) – мгновенная скорость движения.

Соответственно, вторая производная функции - скорость изменения скорости, т.е. ускорение.

Определение. Правой (левой) производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ называется правое (левое) значение предела отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при условии, что это отношение существует.

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad\qquad f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Если функция $f(x)$ имеет производную в некоторой точке $x = x_0$, то она имеет в этой точке односторонние производные. Обратное утверждение неверно.

Теорема. (Необходимое условие существования производной) Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Это условие не является достаточным.

§ 2.2. Основные правила дифференцирования. Производные основных элементарных функций. Производная сложной функции

Обозначим $f(x) = u$, $g(x) = v$ - функции, дифференцируемые в точке x.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2) $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$

Эти правила могут быть легко доказаны на основе теорем о пределах.

Производные основных элементарных функций:

1) $C' = 0$;

2) $(x^m)' = mx^{m-1}$;

3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

4) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

5) $\left(e^x\right)' = e^x$

6) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

7) $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$

8) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

9) $\left(\sin x\right)' = \cos x$

10) $\left(\cos x\right)' = -\sin x$

11) $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

12) $\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

13) $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14) $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15) $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

16) $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Теорема. Пусть $y = f(x)$; $u = g(x)$, причем область значений функции u входит в область определения функции f. Тогда $y' = f'(u) \cdot u'$

§ 2.3. Логарифмическое дифференцирование. Производная показательно-степенной функции

Рассмотрим функцию $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & при \quad x > 0 \\ \ln(-x), & при \quad x < 0 \end{cases}.$

Тогда $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, т.к. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{x} = \frac{1}{x}$; $(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Отношение $\frac{f'(x)}{f(x)}$ называется логарифмической производной функции *f(x)*.

Способ логарифмического дифференцирования состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем производную самой функции по формуле $f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x)$

Определение. Функция называется показательной, если независимая переменная входит в показатель степени, и степенной, если переменная является основанием. Если же и основание и показатель степени зависят от переменной, то такая функция будет показательно – степенной.

Пусть $u = f(x)$ и $v = g(x)$ – функции, имеющие производные в точке x, $f(x)>0$. Найдем производную функции $y = u^v$. Логарифмируя, получим:

$\ln y = v \ln u$

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{u'}{u}$$

$$y' = u^v\left(v\frac{u'}{u} + v' \ln u\right)$$

$$(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u$$

§ 2.4. Производная обратных функций

Пусть требуется найти производную функции $y = f(x)$ при условии, что обратная ей функция $x = g(y)$ имеет производную, отличную от нуля в соответствующей точке.

Для решения этой задачи дифференцируем функцию $x = g(y)$ по x:

$$1 = g'(y)y', \text{ т.к. } g'(y) \neq 0, \text{ то } y' = \frac{1}{g'(y)} \text{ и } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

т.е. производная обратной функции обратна по величине производной данной функции.

Пример. Найти формулу для производной функции arctg.

Функция arctg является функцией, обратной функции tg, т.е. ее производная может быть найдена следующим образом:

$y = tgx;\qquad x = arctgy;$ Известно, что $y' = (tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

По приведенной выше формуле получаем:

$$y' = \frac{1}{d(arctgy)/dx};\qquad \frac{d(arctgy)}{dy} = \frac{1}{1/\cos^2 x}$$

Т.к. $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x = 1 + y^2;$ то можно записать окончательную формулу для производной арктангенса:

$$(arctgy)' = \frac{1}{1+y^2};$$

Таким образом, получены все формулы для производных арксинуса, арккосинуса и других обратных функций, приведенных в таблице производных.

§ 2.5 Понятие о дифференциале функции. Геометрический смысл дифференциала. Свойства дифференциала. Дифференциал сложной функции. Инвариантная форма записи дифференциала.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

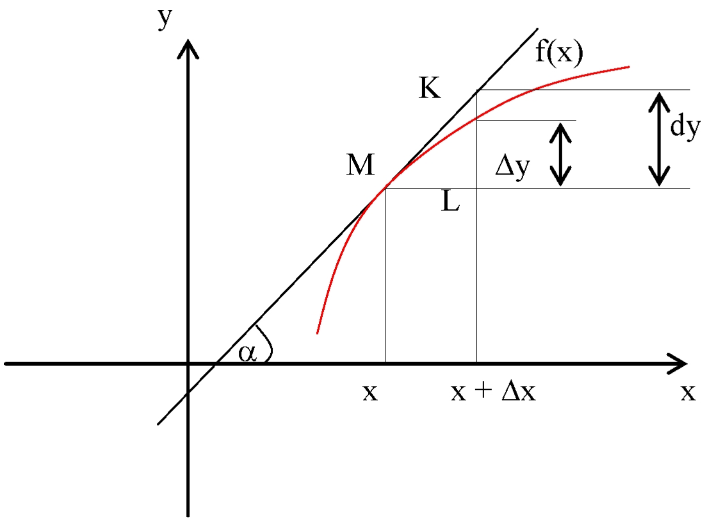
Тогда можно записать: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha\to 0$, при $\Delta x\to 0$.

Следовательно: $\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x$.

Величина $\alpha\Delta x$- бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x)\Delta x$, т.е. $f'(x)\Delta x$- главная часть приращения Δy.

Определение. Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x называется главня линейная часть приращения функции. Обозначается dy или $df(x)$.

$dy = f'(x)\Delta x$ или $dy = f'(x)dx$ или $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$



Из треугольника ΔMKL: KL = $dy = tg\alpha\cdot\Delta x = y'\cdot\Delta x$

Таким образом, дифференциал функции $f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке.

Если $u = f(x)$ и $v = g(x)$- функции, дифференцируемые в точке x, то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

1) $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$
2) $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + udv$
3) $d(Cu) = Cdu$
4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

Пусть $y = f(x)$, $x = g(t)$, т.е y- сложная функция. Тогда $dy = f'(x)g'(t)dt = f'(x)dx$. Видно, что форма записи дифференциала dy не зависит от того, будет ли x независимой переменной или функцией какой- то другой переменной, в связи с чем эта форма записи называется инвариантной формой записи дифференциала.

Однако, если x - независимая переменная, то $dx = \Delta x$, но если x зависит от t, то $\Delta x \neq dx$. Таким образом форма записи $dy = f'(x)\Delta x$ не является инвариантной.

§ 2.6. Формула Тейлора. Формула Маклорена

Теорема Тейлора.

1) Пусть функция $f(x)$ имеет в точке $x = a$ и некоторой ее окрестности производные порядка до $(n+1)$ включительно. Т.е. и все предыдущие до порядка n функции и их производные непрерывны и дифференцируемы в этой окрестности.

2) Пусть x- любое значение из этой окрестности, но $x \neq a$.

Тогда между точками x и a найдется такая точка ε, что справедлива формула:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

- это выражение называется формулой Тейлора,

а выражение $\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = R_{n+1}(x)$ называется остаточным членом в форме Лагранжа.

Доказательство. Представим функцию $f(x)$ в виде некоторого многочлена $P_n(x)$, значение которого в точке $x = a$ равно значению функции $f(x)$, а значения его производных равно значениям соответствующих производных функции в точке $x = a$.

$$P_n(a) = f(a); \quad P_n'(a) = f'(a); \quad P_n''(a) = f''(a); \quad \ldots \quad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \qquad (1)$$

Многочлен $P_n(x)$ будет близок к функции $f(x)$. Чем больше значение n, тем ближе значения многочлена к значениям функции, тем точнее он повторяет функцию.

Представим этот многочлен с неопределенными пока коэффициентами:

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \ldots + C_n(x-a)^n \qquad (2)$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов вычисляем производные многочлена в точке $x = a$ и составляем систему уравнений:

$$
\begin{cases}
P_n'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + \ldots + nC_n(x-a)^{n-1} \\
P_n''(x) = 2C_2 + 3\cdot 2C_3(x-a) + \ldots + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1C_n
\end{cases} \qquad (3)
$$

Решение этой системы при x = a не вызывает затруднений, получаем:

$$f(a) = C_0$$

$$f'(a) = C_1$$

$$f''(a) = 2\cdot 1C_2$$

$$f'''(a) = 3\cdot 2\cdot 1C_3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1C_n$$

Подставляя полученные значения C_i в формулу (2), получаем:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Как было замечено выше, многочлен не точно совпадает с функцией *f(x)*, т.е. отличается от нее на некоторую величину. Обозначим эту величину $R_{n+1}(x)$. Тогда: $f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$

Теорема доказана.

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при a = 0:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}; \qquad 0 < \theta < 1$$

§ 2.7. Теоремы о производных.

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и значения функции на концах отрезка равны $f(a) = f(b)$, то на интервале (a, b) существует точка ε, $a < \varepsilon < b$, в которой производная функция $f(x)$ равная нулю, $f'(\varepsilon) = 0$.

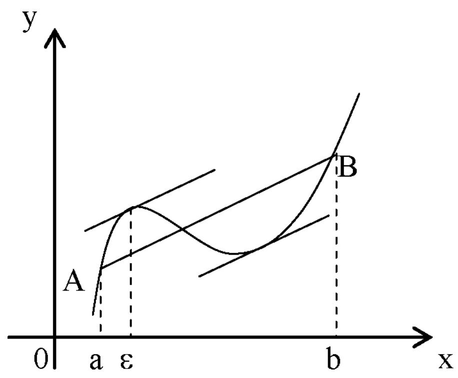
Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в том, что при выполнении условий теоремы на интервале (a, b) существует точка ε такая, что в соответствующей точке кривой $y = f(x)$ касательная параллельна оси Ox. Таких точек на интервале может быть и несколько, но теорема утверждает существование по крайней мере одной такой точки.

Следствие 1. Если функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет теореме Ролля, причем $f(a) = f(b) = 0$, то существует по крайней мере одна точка ε, $a < \varepsilon < b$, такая, что $f'(\varepsilon) = 0$. Т.е. между двумя нулями функции найдется хотя бы одна точка, в которой производная функции равна нулю.

Следствие 2. Если на рассматриваемом интервале (a, b) функция $f(x)$ имеет производную $(n\text{-}1)$- го порядка и n раз обращается в нуль, то существует по крайней мере одна точка интервала, в котором производная $(n-1)$ – го порядка равна нулю.

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), то на этом интервале найдется по крайней мере одна точка ε: $a < \varepsilon < b$, *такая, что* $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\varepsilon)$.

Отношение $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ равно угловому коэффициенту секущей АВ.



Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы, то на интервале (a, b) существует точка ε такая, что в соответствующей точке кривой $y = f(x)$ касательная параллельна секущей, соединяющей точки A и B. Таких точек может быть и несколько, но одна существует точно.

Определение. Выражение $f(a)-f(b)=f'(\varepsilon)(b-a)$ называется формулой Лагранжа или формулой конечных приращений.

Иногда формулу Лагранжа записывают в несколько другом виде: $\Delta y = f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$, где $0 < \theta < 1$, $\Delta x = b - a$, $\Delta y = f(b) - f(a)$.

Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на интервале (a, b), то существует по крайней мере одна точка ε, $a < \varepsilon < b$, такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}.$$

Следует отметить, что рассмотренная выше теорема Лагранжа является частным случаем (при $g(x) = x$) теоремы Коши.

§ 2.8. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя.

К разряду неопределенностей принято относить следующие соотношения: $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty\cdot 0; \infty^0; 1^\infty; \infty-\infty$

Теорема (правило Лопиталя). Если функции *f(x)* и *g(x)* дифференцируемы в вблизи точки *a*, непрерывны в точке а, *g′(x)* отлична от нуля вблизи а и *f(a) = g(a) = 0*, то предел отношения функций при $x \to a$ равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доказательство. Применив формулу Коши, получим:

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

где ε - точка, находящаяся между *a* и *x*. Учитывая, что *f(a) = g(a) = 0*:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

Пусть при $x \to a$ отношение $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ стремится к некоторому пределу. Т.к. точка ε лежит между точками *a* и *x*, то при $x \to a$ получим $\varepsilon \to a$, а следовательно и отношение $\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$ стремится к тому же пределу. Таким образом, можно записать:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема доказана.

§ 2.9. Производные и дифференциалы высших порядков. Общие правила нахождения производных высших порядков.

Пусть функция $f(x)$- дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную $y' = f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$

Если найти производную функции $f'(x)$, получим вторую производную функции $f(x)$. $y'' = f''(x) = \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$ т.е. $y'' = (y')'$ или $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные порядка n.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right).$$

Если функции $u = f(x)$ и $v = g(x)$ дифференцируемы, то

1) $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$;
2) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;
3) $(u \cdot v)^{(n)} = vu^{(n)} + mu^{(n-1)}v' + \dfrac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots + \dfrac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots$

$\ldots + uv^{(n)}$.

Это выражение называется формулой Лейбница.

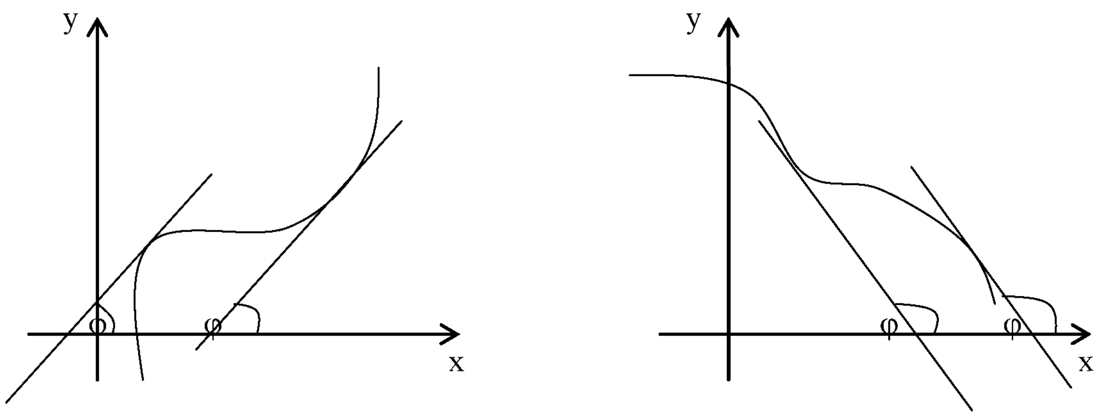
Также по формуле $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$ может быть найден дифференциал n- го порядка.

2.10. Исследование функций с помощью производной.

Теорема. 1) Если функция $f(x)$ имеет производную на отрезке $[a, b]$ и возрастает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т.е. $f'(x) \geq 0$.

2) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на промежутке (a, b), причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке $[a, b]$.

Аналогично можно сделать вывод о том, что если функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$, то $f'(x) \leq 0$ на этом отрезке. Если $f'(x) < 0$ в промежутке (a, b), то $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$.



Определение. Функция $f(x)$ имеет в точке x_1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1. Соответственно функция $f(x)$ имеет в точке x_2 минимум, если $f(x_2+\Delta x) > f(x_2)$ при любом Δx (Δx может быть и отрицательным).

Определение. Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума.

Теорема. (необходимое условие существования экстремума) Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_1$ и точка x_1 является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.

Следствие. Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум.

Определение. Критическими точками функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

Теорема. (Достаточные условия существования экстремума) Пусть функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b), который содержит критическую точку x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1). Если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции $f'(x)$ меняет знак с “+” на “-“, то в точке $x = x_1$ функция $f(x)$ имеет максимум, а если производная меняет знак с “-“ на “+”- то функция имеет минимум.

На основе вышесказанного можно выработать единый порядок действий при нахождении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:

1) Найти критические точки функции.
2) Найти значения функции в критических точках.
3) Найти значения функции на концах отрезка.
4) Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

Теорема. Пусть в точке $x = x_1$ $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_1. Если $f'(x_1) = 0$, то функция $f(x)$ в точке $x = x_1$ имеет максимум, если $f''(x_1)<0$ и минимум, если $f''(x_1)>0$.

Определение. Кривая обращена выпуклостью вверх на интервале *(a, b)*, если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется выпуклой, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется вогнутой.

Теорема. Если во всех точках интервала *(a, b)* вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, то кривая $y = f(x)$ обращена выпуклостью вверх (выпукла). Если $f''(x) > 0$ на интервале *(a, b)*, то кривая $y=f(x)$ вогнута на интервале *(a, b)*.

Определение. Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется точкой перегиба.

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает кривую.

Теорема. Пусть кривая определяется уравнением $y=f(x)$. Если вторая производная $f''(a) =0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через точку $x=a$ $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x=a$ является точкой перегиба.

Определение. Прямая называется асимптотой кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту. Асимптоты могут быть прямые и наклонные. Исследование функций на наличие асимптот имеет большое значение и позволяет более точно определить характер функции и поведение графика кривой.

Из определения асимптоты следует, что если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ – вертикальная асимптота кривой $y = f(x)$.

Предположим, что кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = kx+b$. Обозначим точку пересечения кривой и перпендикуляра к асимптоте – M, P – точка пересечения этого перпендикуляра с асимптотой. Угол между асимптотой и осью Ox обозначим φ. Перпендикуляр MQ к оси Ox пересекает асимптоту в точке N.

Тогда MQ = y – ордината точки кривой, NQ = $\bar{y}$ - ордината точки N на асимптоте.

По условию: $\lim\limits_{x\to\infty}|MP| = 0$, $\angle$NMP = φ, $|NM| = \dfrac{|MP|}{\cos\varphi}$.

Угол φ - постоянный и не равный 90^0, тогда

$$\lim_{x\to\infty}|MP| = \lim_{x\to\infty}|NM|\cos\varphi = \lim_{x\to\infty}|NM| = 0$$

$$|NM| = \big||MQ| - |QN|\big| = |y - \bar{y}| = |f(x) - (kx+b)|$$

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (kx+b)] = 0$.

Итак, прямая $y = kx + b$ – асимптота кривой. Для точного определения этой прямой необходимо найти способ вычисления коэффициентов k и b.

В полученном выражении выносим за скобки x: $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x}\right] = 0$

Т.к. $x\to\infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x}\right] = 0$, т.к. $b = const$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} k = k$.

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} - k - 0 = 0$, следовательно, $k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

Т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (kx+b)] = 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx] - \lim\limits_{x\to\infty} b = 0$, следовательно,

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx]$$

Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при k =0.

Общая схема исследования функций

1) Область существования функции.

Это понятие включает в себя и область значений и область определения функции.

2) Точки разрыва. (Если они имеются).

3) Интервалы возрастания и убывания.

4) Точки максимума и минимума.

5) Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.

6) Области выпуклости и вогнутости.

7) Точки перегиба.(Если они имеются).

8) Асимптоты.(Если они имеются).

9) Построение графика.

Глава 3
Интегрирование

§ 3.1. Первообразная и неопределённый интеграл.

Определение: Функция $F(x)$ называется первообразной функцией функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если в любой точке этого отрезка верно равенство: $F'(x) = f(x)$.

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число. $F_1(x) = F_2(x) + C$.

Определение: Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением: $F(x) + C$. Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C$;

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x)$;
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;
3. $\int dF(x) = F(x) + C$;
4. $\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx$; где u, v, w – некоторые функции от х.
5. $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx$;

§ 3.2. Таблица основных интегралов.

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

Интеграл		Значение	Интеграл		Значение
1	$\int tgx dx$	$-\ln\lvert\cos x\rvert+C$	9	$\int e^x dx$	$e^x + C$
2	$\int ctgx dx$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$	10	$\int \cos x dx$	$\sin x + C$
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a}+C$	11	$\int \sin x dx$	$-\cos x + C$
4	$\int \frac{dx}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a}+C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$tgx + C$
5	$\int \frac{dx}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert+C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-ctgx + C$
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert+C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a} + C$
7	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \alpha \neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x} dx$	$\ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert+C$
8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$	16	$\int \frac{1}{\sin x} dx$	$\ln\left\lvert tg\frac{x}{2}\right\rvert+C$

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

§ 3.3. Способ подстановки (замены переменных). Интегрирование по частям

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены $x = \varphi(t)$ и $dx = \varphi'(t)dt$ получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Способ интегрирования по частям основан на известной формуле производной произведения: $(uv)' = u'v + v'u$ где u и v – некоторые функции от переменной x.

В дифференциальной форме: $d(uv) = udv + vdu$

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int udv + \int vdu \qquad \text{или} \qquad \int udv = uv - \int vdu;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

§ 3.4. Интегрирование элементарных дробей

Определение: Элементарными называются дроби следующих четырех типов:

I. $\dfrac{1}{ax+b}$; III. $\dfrac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$;

II. $\dfrac{1}{(ax+b)^m}$; IV. $\dfrac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$

m, n – натуральные числа ($m \geq 2$, $n \geq 2$) и $b^2 - 4ac < 0$.

Первые два типа интегралов от элементарных дробей довольно просто приводятся к табличным подстановкой $t = ax + b$.

I. $$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\ln|t| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

II. $$\int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^m} = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + C = -\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C;$$

Рассмотрим метод интегрирования элементарных дробей вида III.

Интеграл дроби вида III может быть представлен в виде:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot$$

$$\cdot\, arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

Здесь в общем виде показано приведение интеграла дроби вида III к двум табличным интегралам.

Рассмотрим теперь методы интегрирования простейших дробей IV типа.

Сначала рассмотрим частный случай при $M = 0$, $N = 1$.

Тогда интеграл вида $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ можно путем выделения в знаменателе полного квадрата представить в виде $\int \frac{du}{(u^2+s)^n}$. Сделаем преобразование: $\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s}\int \frac{s+u^2-u^2}{(u^2+s)^n}du = \frac{1}{s}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s}\int \frac{u^2du}{(u^2+s)^n}$.

Второй интеграл, входящий в это равенство, будем брать по частям.

Обозначим: $\left\{\begin{array}{l} dv_1 = \dfrac{udu}{(u^2+s)^n}; \quad u_1 = u; \quad du_1 = du; \\ v_1 = \displaystyle\int \frac{udu}{(u^2+s)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(u^2+s)^{n-1}}; \end{array}\right\}$

$$\int \frac{u^2du}{(u^2+s)^n} = -\frac{u}{(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}};$$

Для исходного интеграла получаем:

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}} + \frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s(2n-2)}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}$$

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{2n-3}{s(2n-2)}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}.$$

Полученная формула называется рекуррентной. Если применить ее n-1 раз, то получится табличный интеграл $\int \frac{du}{u^2+s}$.

Вернемся теперь к интегралу от элементарной дроби вида IV в общем случае.

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}dx = (4a)^n \int \frac{Mx+N}{\left[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)\right]^n}dx = \left\{\begin{array}{l} u = 2ax+b; \quad du = 2adx; \\ x = \dfrac{u-b}{2a}; \quad s = 4ac-b^2; \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{(4a)^n}{2a}\int \frac{\frac{M(u-b)}{2a}+N}{(u^2+s)^n}du = \frac{(4a)^n}{2a}\left[\frac{M}{2a}\int \frac{udu}{(u^2+s)^n} + \frac{2aN-Mb}{2a}\int \frac{du}{(u^2+s)^n}\right]$$

В полученном равенстве первый интеграл с помощью подстановки $t=u^2+s$ приводится к табличному $\int \frac{dt}{t^n}$, а ко второму интегралу применяется рассмотренная выше рекуррентная формула.

§ 3.5. Интегрирование рациональных функций

Для того, чтобы проинтегрировать рациональную дробь необходимо разложить ее на элементарные дроби.

Теорема: Если $R(x)=\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ - правильная рациональная дробь, знаменатель $P(x)$ которой представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей (отметим, что любой многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в таком виде: $P(x) = (x - a)^{\alpha}\ldots(x - b)^{\beta}(x^2 + px + q)^{\lambda}\ldots(x^2 + rx + s)^{\mu}$), то эта дробь может быть разложена на элементарные по следующей схеме:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\ldots+\frac{B_1}{(x-b)}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$

$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}+\ldots+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2}+\ldots+\frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}$$

где A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i – некоторые постоянные величины.

При интегрировании рациональных дробей прибегают к разложению исходной дроби на элементарные. Для нахождения величин A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i применяют так называемый метод неопределенных коэффициентов, суть которого состоит в том, что для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях x.

§ 3.6. Интегрирование некоторых тригонометрических функций

Рассмотрим некоторые главнейшие типы функций, которые могут быть проинтегрированы всегда.

1. *Интеграл вида* $\int R(\sin x, \cos x)dx \cdot$

Здесь R – обозначение некоторой рациональной функции от переменных $\sin x$ и $\cos x$.

Интегралы этого вида вычисляются с помощью универсальной тригонометрической подстановки $t = tg\frac{x}{2}$. Эта подстановка позволяет преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную.

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad x = 2arctgt; \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2};$$

Таким образом: $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int r(t)dt.$

2. *Интеграл вида* $\int R(\sin x, \cos x)dx$ *если функция* R *является нечетной относительно* $\cos x$.

Подстановка $t = sinx$. $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}\cos x dx$

Функция $\frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}$ может содержать $\cos x$ только в четных степенях, а следовательно, может быть преобразована в рациональную функцию относительно $\sin x$.

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(\sin x)\cos x dx = \int r(t)dt.$$

3. *Интеграл вида* $\int R(\sin x, \cos x)dx$ *если функция R является нечетной относительно* sin*x*.

По аналогии с рассмотренным выше случаем делается подстановка *t= cosx*. Тогда $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(\cos x)\sin x dx = -\int r(t)dt$.

4. *Интеграл вида* $\int R(\sin x, \cos x)dx$, *если функция R четная относительно* sin*x и* cos*x*.

Для преобразования функции R в рациональную используется подстановка *t=tgx*. Тогда $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(t)dt$

5. *Интеграл произведения синусов и косинусов различных аргументов.*

В зависимости от типа произведения применятся одна из трех формул:

$$\int \cos mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]$$

$$\int \sin mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]$$

$$\int \sin mx \sin nx dx = \int \frac{1}{2}\left[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\sin(m+n)}{m+n} + \frac{\sin(m-n)}{m-n}\right]$$

§ 3.7. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Далеко не каждая иррациональная функция может иметь интеграл, выраженный элементарными функциями. Для нахождения интеграла от иррациональной функции следует применить подстановку, которая позволит преобразовать функцию в рациональную, интеграл от которой может быть найден как известно всегда.

Рассмотрим интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ где n- натуральное число.

С помощью подстановки $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}} = t$ функция рационализируется.

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n; \qquad x = \frac{t^n - b}{a - ct^n}; \qquad dx = \left(\frac{t^n - b}{a - ct^n}\right)' dt;$$

Тогда $\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R\left(\dfrac{t^n - b}{a - ct^n}, t\right)\left(\dfrac{t^n - b}{a - ct^n}\right)' dt = \int r(t)dt.$

Если в состав иррациональной функции входят корни различных степеней, то в качестве новой переменной рационально взять корень степени, равной наименьшему общему кратному степеней корней, входящих в выражение.

§ 3.9. Интегрирование биноминальных дифференциалов

Определение: Биноминальным дифференциалом называется выражение $x^m(a + bx^n)^p dx$, где m, n, и p – рациональные числа.

Как было доказано академиком Чебышевым П.Л. (1821-1894), интеграл от биноминального дифференциала может быть выражен через элементарные функции только в следующих трех случаях:

1) Если p – целое число, то интеграл рационализируется с помощью подстановки $t = \sqrt[\lambda]{x}$, где λ - общий знаменатель m и n.

2) Если $\dfrac{m+1}{n}$ - целое число, то интеграл рационализируется подстановкой $t = \sqrt[s]{a + bx^n}$, где s – знаменатель числа p.

3) Если $\dfrac{m+1}{n} + p$ - целое число, то используется подстановка $t = \sqrt[s]{\dfrac{a + bx^n}{x^n}}$, где s – знаменатель числа p.

Подстановки Чебышева дают возможность нахождения интегралов от биноминальных дифференциалов и имеют большое практическое применение.

Однако, наибольшее практическое значение имеют интегралы от функций, рациональных относительно аргумента и квадратного корня из квадратного трехчлена.

Рассмотрим интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx$. Существует несколько способов интегрирования такого рода функций. В зависимости от вида выражения, стоящего под знаком радикала, предпочтительно применять тот или иной способ.

Как известно, квадратный трехчлен путем выделения полного квадрата может быть приведен к виду: $\pm u^2 \pm m^2$.

Таким образом, интеграл $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ приводится к одному из трех типов:

1) $\int R(u, \sqrt{m^2 - u^2})du;$

2) $\int R(u, \sqrt{m^2 + u^2})du;$

3) $\int R(u, \sqrt{u^2 - m^2})du;$

Рассмотрим теперь некоторые способы решения таких интегралов.

1 способ. Тригонометрическая подстановка.

Теорема: Интеграл вида $\int R(u, \sqrt{m^2 - u^2})du$ подстановкой $u = m\sin t$ или $u = m\cos t$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно sin$t$ или cos$t$.

Теорема: Интеграл вида $\int R(u, \sqrt{m^2 + u^2})du$ подстановкой $u = mtgt$ или $u = mctgt$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно sint и cost.

Теорема: Интеграл вида $\int R(u, \sqrt{u^2 - m^2})du$ подстановкой $u = \frac{1}{\sin t}$ или $u = \frac{1}{\cos t}$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно sint или cost.

2 способ. Подстановки Эйлера. (1707-1783)

1) Если *a>0*, то интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$.

2) Если *a<0* и *c>0*, то интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$.

3) Если $a<0$, а подкоренное выражение раскладывается на действительные множители $a(x-x_1)(x-x_2)$, то интеграл вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$

3 способ. Метод неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим интегралы следующих трех типов:

$$I.\int\frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}};\qquad II.\int P(x)\sqrt{ax^2+bx+c}dx;\qquad III.\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

где $P(x)$ – многочлен, n – натуральное число.

Причем интегралы II и III типов могут быть легко приведены к виду интеграла I типа.

Далее делается следующее преобразование:

$$\int\frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

в этом выражении $Q(x)$- некоторый многочлен, степень которого ниже степени многочлена $P(x)$, а λ - некоторая постоянная величина.

Для нахождения неопределенных коэффициентов многочлена $Q(x)$, степень которого ниже степени многочлена $P(x)$, дифференцируют обе части полученного выражения, затем умножают на $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, определяют λ и коэффициенты многочлена $Q(x)$.

Данный метод выгодно применять, если степень многочлена $P(x)$ больше единицы. В противном случае можно успешно использовать методы интегрирования рациональных дробей, рассмотренные выше, т.к. линейная функция является производной подкоренного выражения.

§ 3.10. Несколько примеров интегралов, не выражающихся через элементарные функции

К таким интегралам относится интеграл вида $\int R(x, \sqrt{P(x)})dx$, где $P(x)$ - многочлен степени выше второй. Эти интегралы называются эллиптическими.

Если степень многочлена $P(x)$ выше четвертой, то интеграл называется ультраэллиптическим.

Если все – таки интеграл такого вида выражается через элементарные функции, то он называется псевдоэллиптическим.

Не могут быть выражены через элементарные функции следующие интегралы:

1) $\int e^{-x^2} dx$ - интеграл Пуассона (Симеон Дени Пуассон – французский математик (1781-1840))

2) $\int \sin x^2 dx$; $\int \cos x^2 dx$ - интегралы Френеля (Жан Огюстен Френель – французский ученый (1788-1827) - теория волновой оптики)

3) $\int \frac{dx}{\ln x}$ - интегральный логарифм

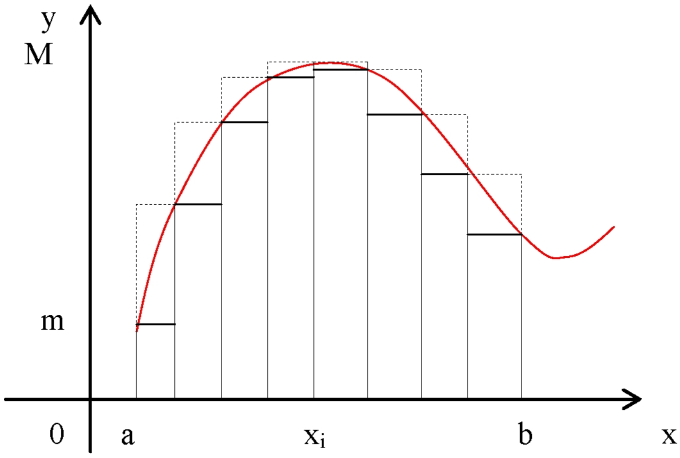
4) $\int \frac{e^x}{x} dx$ - приводится к интегральному логарифму

5) $\int \frac{\sin x}{x} dx$ - интегральный синус

6) $\int \frac{\cos x}{x} dx$ - интегральный косинус

§ 3.11. Понятие определённого интеграла.

Пусть на отрезке *[a, b]* задана непрерывная функция *f(x)*.



Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке $[a, b]$

Разобьем отрезок $[a, b]$ на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1,\ x_2 - x_1 = \Delta x_2,\ \ldots\ , x_n - x_{n-1} = \Delta x_n;$

На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$[x_0, x_1] \to m_1, M_1;\quad [x_1, x_2] \to m_2, M_2;\quad \ldots\quad [x_{n-1}, x_n] \to m_n, M_n.$

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ \ldots\ + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Сумма $\underline{S}$ называется нижней интегральной суммой, а сумма $\overline{S}$ – верхней интегральной суммой.

Т.к. $m_i \le M_i$, то $\underline{S}_n \le \overline{S}_n$, а $m(b-a) \le \underline{S}_n \le \overline{S}_n \le M(b-a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon < x_2, \ \dots \ , x_{n-1} < \varepsilon < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке [a, b].

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \dots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Тогда можно записать: $m_i\Delta x_i \le f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i$

Следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \le \sum\limits_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le \sum\limits_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$

$$\underline{S_n} \le S_n \le \overline{S_n}$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции $f(x)$ ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим $max\Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения, а $min\Delta x_i$ – наименьший. Если $max\Delta x_i \to 0$, то число отрезков разбиения отрезка [a, b] стремится к бесконечности. Если $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$, то $\lim\limits_{\max\Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S.$

Определение: Если при любых разбиениях отрезка [a, b] таких, что $max\Delta x_i \to 0$ и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, который называется определенным интегралом от $f(x)$ на отрезке [a, b].

Обозначение: $\int\limits_a^b f(x)dx.$ a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, [a, b] – отрезок интегрирования.

Определение: Если для функции f(x) существует предел $\lim\limits_{\max\Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx,$ то функция называется интегрируемой на отрезке [a, b].

Также верны утверждения: $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx$

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Теорема: Если функция *f(x)* непрерывна на отрезке [*a*, *b*], то она интегрируема на этом отрезке.

§ 3.12. Свойства определенного интеграла

1) $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx;$

2) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$

3) $\int_a^a f(x)dx = 0$

4) Если $f(x) \le \varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$ $a < b$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$

5) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

6) Теорема о среднем. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует точка ε такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$$

Доказательство: В соответствии со свойством 5:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

т.к. функция f(x) непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на этом отрезке все значения от m до M. Другими словами, существует такое число $\varepsilon \in [a, b]$, что если

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu$ и $\mu = f(\varepsilon)$, а $a \le \varepsilon \le b$, тогда $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$.

Теорема доказана.

7) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

8) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

9) Обобщенная теорема о среднем. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, и функция $\varphi(x)$ знакопостоянна на нем, то на этом отрезке существует точка ε, такая, что

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\varepsilon)\int_a^b \varphi(x)dx$$

§ 3.13 Теорема Ньютона-Лейбница

Пусть в интеграле $\int_a^b f(x)dx$ нижний предел *a = const*, а верхний предел *b* изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла.

Обозначим $\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$. Найдем производную функции *Φ(x)* по переменному верхнему пределу *x*. $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

Аналогичную теорему можно доказать для случая переменного нижнего предела.

Теорема: Для всякой функции *f(x)*, непрерывной на отрезке [*a, b*], существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция *F(x)* – какая- либо первообразная от непрерывной функции *f(x)*, то $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Доказательство: Пусть *F(x)* – первообразная функции *f(x)*. Тогда в соответствии с приведенной выше теоремой, функция $\int_a^x f(t)dt$ - первообразная функция от *f(x)*. Но т.к. функция может иметь бесконечно много первообразных, которые будут отличаться друг от друга только на какое – то постоянное число *C*, то $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$

При соответствующем выборе C это равенство справедливо для любого x, т.е.

при $x = a$: $\int_a^a f(t)dt = F(a) + C \qquad 0 = F(a) + C \qquad C = -F(a)$

Тогда $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$. А при $x = b$: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Заменив переменную t на переменную x, получаем формулу Ньютона – Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Теорема доказана.

Иногда применяют обозначение $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$.

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подинтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

§ 3.14. Замена переменных. Интегрирование по частям

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a,\ b]$. Введем новую переменную в соответствии с формулой $x = \varphi(t)$. Тогда если

1) $\varphi(\alpha) = a,\quad \varphi(\beta) = b$

2) $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha,\ \beta]$

3) $f(\varphi(t))$ определена на отрезке $[\alpha,\ \beta]$,

то $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция sin) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ непрерывны на отрезке $[a,\ b]$, а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Вывод этой формулы абсолютно аналогичен выводу формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла, который был весьма подробно рассмотрен выше, поэтому здесь приводить его нет смысла.

§ 3.15. Несобственные интегралы. Интегралы с бесконечными пределами. Интеграл от разрывной функции

Пусть функция *f(x)* определена и непрерывна на интервале [*a*, ∞). Тогда она непрерывна на любом отрезке [*a*, *b*].

Определение: Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то этот предел называется несобственным интегралом от функции *f(x)* на интервале [*a*, ∞).

Обозначение: $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^\infty f(x)dx$

Если этот предел существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл сходится.

Если предел не существует или бесконечен, то несобственный интеграл расходится.

Аналогичные рассуждения можно привести для несобственных интегралов вида:

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx \qquad \int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^c f(x)dx + \int\limits_c^\infty f(x)dx$$

Конечно, эти утверждения справедливы, если входящие в них интегралы существуют.

Теорема: Если для всех *x* ($x \geq a$) выполняется условие $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ и интеграл $\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx$ сходится, то $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ тоже сходится и $\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx$ ≥ $\int\limits_a^\infty f(x)dx$.

Теорема: Если для всех x ($x \geq a$) выполняется условие $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ и интеграл $\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$ расходится, то $\int_a^{\infty} f(x)dx$ тоже расходится.

Теорема: Если $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$. В этом случае интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся.

Утверждение: Если в точке $x = c$ функция либо неопределенна, либо разрывна, то $\int_a^{c} f(x)dx = \lim\limits_{b \to c-0} \int_a^{b} f(x)dx$

Если интеграл $\int_a^{b} f(x)dx$ существует, то интеграл $\int_a^{c} f(x)dx$ - сходится, если интеграл $\int_a^{b} f(x)dx$ не существует, то $\int_a^{c} f(x)dx$ - расходится.

Утверждение: Если в точке $x = a$ функция терпит разрыв, то $\int_a^{c} f(x)dx = \lim\limits_{b \to a+0} \int_b^{c} f(x)dx$.

Утверждение: Если функция *f(x)* имеет разрыв в точке b на промежутке [a, c], то

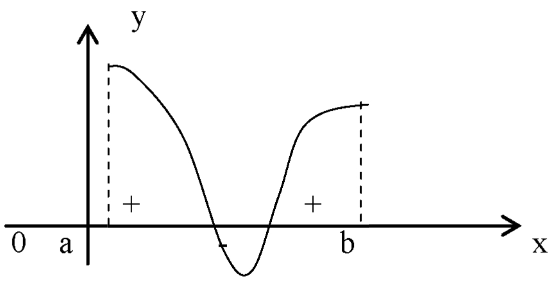
$$\int_a^{c} f(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx + \int_b^{c} f(x)dx$$

Таких точек внутри отрезка может быть несколько. Если сходятся все интегралы, входящие в сумму, то сходится и суммарный интеграл.

§ 3.16. Приложения определенного интеграла

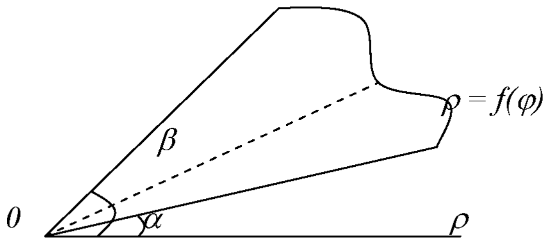
Рассмотрим решения некоторых задач геометрии и физики, с практическим применением определенного интеграла.

1. Вычисление площадей плоских фигур.



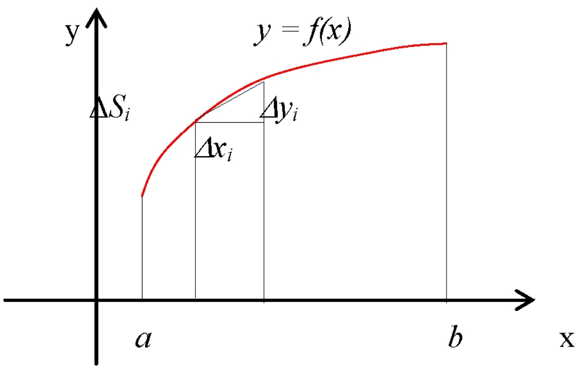
Известно, что определенный интеграл на отрезке представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции *f(x)*. Если график расположен ниже оси Ox, т.е. $f(x) < 0$, то знак “-“, если график расположен выше оси Ox, т.е. $f(x) > 0$, то площадь имеет знак “+”. Для нахождения суммарной площади используется формула $S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

2. Нахождение площади криволинейного сектора.



Для нахождения площади криволинейного сектора введем полярную систему координат. Уравнение кривой, ограничивающей сектор в этой системе координат, имеет вид $\rho = f(\varphi)$, где ρ - длина радиус – вектора, соединяющего полюс с произвольной точкой кривой, а φ - угол наклона этого радиус – вектора к полярной оси. Площадь криволинейного сектора может быть найдена по формуле $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)d\varphi$

3. Вычисление длины дуги кривой.



Длина ломаной линии, которая соответствует дуге, может быть найдена как $S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$. Тогда длина дуги равна $S = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$.

Из геометрических соображений: $\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$

В то же время $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}$ Тогда можно показать, что

$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$ Т.е. $S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

Если уравнение кривой задано параметрически, то с учетом правил вычисления производной параметрически заданной, получаем

$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$, где $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$.

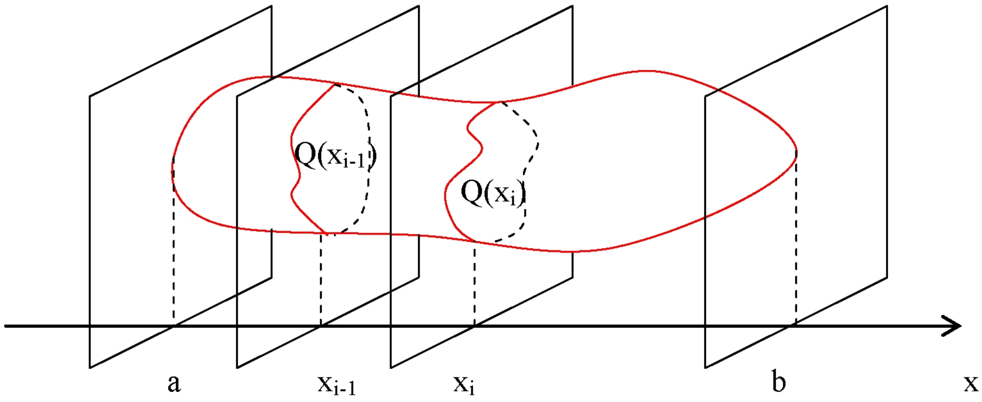
Если задана пространственная кривая, и $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и $z = Z(t)$, то

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [Z'(t)]^2} dt$$

Если кривая задана в полярных координатах, то

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\varphi, \quad \rho = f(\varphi).$$

4. Вычисление объема тела по известным площадям его параллельных сечений.



Пусть имеется тело объема V. Площадь любого поперечного сечения тела Q, известна как непрерывная функция $Q = Q(x)$. Разобьем тело на “слои” поперечными сечениями, проходящими через точки x_i разбиения отрезка [a, b]. Т.к. на каком- либо промежуточном отрезке разбиения [x_{i-1}, x_i] функция $Q(x)$ непрерывна, то принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Обозначим их соответственно M_i и m_i. Если на этих наибольшем и наименьшем сечениях построить цилиндры с образующими, параллельными оси x, то объемы этих цилиндров будут соответственно равны $M_i\Delta x_i$ и $m_i\Delta x_i$ здесь $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

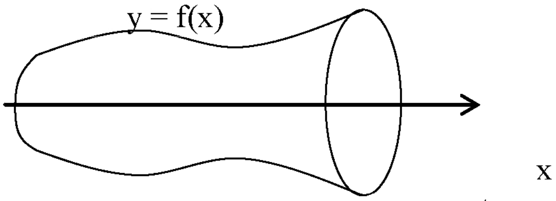
Произведя такие построения для всех отрезков разбиения, получим цилиндры, объемы которых равны соответственно $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ и $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$.

При стремлении к нулю шага разбиения λ, эти суммы имеют общий предел: $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b Q(x)dx$

Таким образом, объем тела может быть найден по формуле: $V = \int_a^b Q(x)dx$ Недостатком этой формулы является то, что для нахождения объема необходимо знать функцию $Q(x)$, что весьма проблематично для сложных тел.

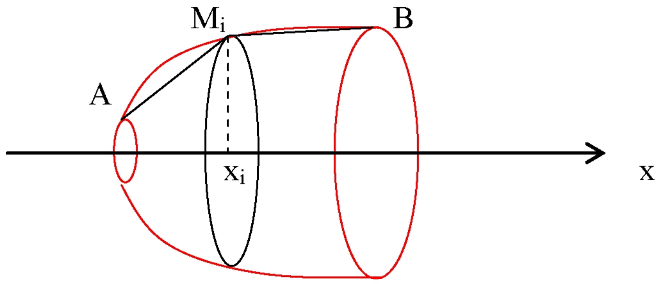
5. Объем тел вращения.

Рассмотрим кривую, заданную уравнением $y = f(x)$. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями a и b вращать вокруг оси Ox, то получим так называемое тело вращения.



Т.к. каждое сечение тела плоскостью $x = const$ представляет собой круг радиуса $R = |f(x)|$, то объем тела вращения может быть легко найден по полученной выше формуле: $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$

6. Площадь поверхности тела вращения.



Определение: Площадью поверхности вращения кривой AB вокруг данной оси называют предел, к которому стремятся площади поверхностей вращения ломаных, вписанных в кривую AB, при стремлении к нулю наибольших из длин звеньев этих ломаных.

Разобьем дугу AB на n частей точками $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$. Координаты вершин полученной ломаной имеют координаты x_i и y_i. При вращении ломаной вокруг оси получим поверхность, состоящую из боковых поверхностей усеченных конусов, площадь которых равна ΔP_i. Эта площадь может быть найдена по формуле: $\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta S_i$

Здесь ΔS_i – длина каждой хорды.

$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i$$

Применяем теорему Лагранжа (см. *Теорема Лагранжа*) к отношению $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$. Получаем: $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f(\varepsilon_i), \qquad x_{i-1} < \varepsilon < x_i$

Тогда $\Delta S_i = \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)}\,\Delta x_i \qquad\qquad \Delta P_i = 2\pi \dfrac{y_{i-1} + y_i}{2}\sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)}\,\Delta x_i$

Площадь поверхности, описанной ломаной равна:

$$P_n = \pi \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right]\sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)}\,\Delta x_i$$

Эта сумма не является интегральной, но можно показать, что

$$P = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right]\sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)}\,\Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} 2 f(\varepsilon_i)\sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)}\,\Delta x_i$$

Тогда $P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$ - формула для вычисления площади поверхности тела вращения.

Глава 4

Числовые и функциональные ряды

§ 4.1. Числовые ряды. Основные определения

Определение. Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ называется числовым рядом.

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

При этом числа $u_1, u_2, \dots$ будем называть членами ряда, а u_n – общим членом ряда.

Определение. Суммы $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n = 1, 2, \dots$

называются частными (частичными) суммами ряда.

Таким образом, возможно рассматривать последовательности частичных сумм ряда $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$

Определение. Ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется сходящимся, если сходится последовательность его частных сумм. Сумма сходящегося ряда – предел последовательности его частных сумм.

$$\lim S_n = S, \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Определение. Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется расходящимся и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

§ 4.2. Свойства числовых рядов

Рассмотрим некоторые основные свойства числовых рядов:

1) Сходимость или расходимость ряда не нарушится если изменить, отбросить или добавить конечное число членов ряда.

2) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum Cu_n$, где C – постоянное число.

Теорема. Если ряд $\sum u_n$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum Cu_n$ тоже сходится, и его сумма равна CS. ($C \neq 0$)

3) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$. Суммой или разностью этих рядов будет называться ряд $\sum (u_n \pm v_n)$, где элементы получены в результате сложения (вычитания) исходных элементов с одинаковыми номерами.

Теорема. Если ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ сходятся и их суммы равны соответственно S и σ, то ряд $\sum (u_n \pm v_n)$ тоже сходится и его сумма равна $S+\sigma$. $\sum (u_n + v_n) = \sum u_n + \sum v_n = S + \sigma$

Разность двух сходящихся рядов также будет сходящимся рядом.

4) Сумма сходящегося и расходящегося рядов будет расходящимся рядом.

О сумме двух расходящихся рядов общего утверждения сделать нельзя.

При изучении рядов решают в основном две задачи: исследование на сходимость и нахождение суммы ряда.

§ 4.3. Критерий Коши. Сходимость рядов с неотрицательными членами

Теорема (необходимые и достаточные условия сходимости ряда): Для того, чтобы последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N, что при $n>N$ и любом $p > 0$, где p – целое число, выполнялось бы неравенство:

$$\left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon .$$

Доказательство. (необходимость)

Пусть $a_n \to a$, тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что неравенство

$\left|a - a_n\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ выполняется при $n>N$. При $n>N$ и любом целом $p>0$ выполняется также неравенство $\left|a - a_{n+p}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Учитывая оба неравенства, получаем:

$$\left|a_{n+p} - a_n\right| = \left|(a_{n+p} - a) + (a - a_n)\right| \le \left|a_{n+p} - a\right| + \left|a - a_n\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Необходимость доказана.

Доказательство достаточности рассматривать не будем.

Теорема (критерий Коши для ряда): Для того, чтобы ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ был сходящимся необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал номер N такой, что при $n>N$ и любом $p>0$ выполнялось бы неравенство $\left|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}\right| < \varepsilon$.

Однако, на практике использовать непосредственно критерий Коши не очень удобно. Поэтому, как правило, используются более простые признаки сходимости:

1) Если ряд $\sum u_n$ сходится, то необходимо, чтобы общий член u_n стремился к нулю. Однако, это условие не является достаточным. Можно говорить только о том, что если общий член не стремится к нулю, то ряд точно расходится. Например, так называемый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ является расходящимся, хотя его общий член и стремится к нулю.

2) Если ряд сходится, то последовательность его частных сумм ограничена.

Однако, этот признак также не является достаточным.

При изучении знакопостоянных рядов ограничимся рассмотрением рядов с неотрицательными членами, т.к. при простом умножении на (–1) из этих рядов можно получить ряды с отрицательными членами.

Теорема. Для сходимости ряда $\sum u_n$ с неотрицательными членами необходимо и достаточно, чтобы частные суммы ряда были ограничены.

В следующих параграфах рассмотрим некоторые основные признаки, используемые при исследовании рядов на сходимость.

§4.4. Признак сравнения числовых рядов с неотрицательными членами

Пусть даны два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$ при u_n, $v_n \geq 0$.

Теорема. Если $u_n \leq v_n$ при любом n, то из сходимости ряда $\sum v_n$ следует сходимость ряда $\sum u_n$, а из расходимости ряда $\sum u_n$ следует расходимость ряда $\sum v_n$.

Доказательство. Обозначим через S_n и σ_n частные суммы рядов $\sum u_n$ и $\sum v_n$. Т.к. по условию теоремы ряд $\sum v_n$ сходится, то его частные суммы ограничены, т.е. при всех n $\sigma_n < M$, где M – некоторое число. Но т.к. $u_n \leq v_n$, то $S_n \leq \sigma_n$ то частные суммы ряда $\sum u_n$ тоже ограничены, а этого достаточно для сходимости.

Теорема доказана.

Определение: Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ называется общегармоническим рядом. сходится при $\alpha > 1$ и расходится $\alpha \leq 1$. Данный ряд удобно использовать в качестве эталонного ряда.

Также используется следующий признак сходимости:

Теорема. Если $u_n > 0,\quad v_n > 0$ и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = h$, где h – число, отличное от нуля, то ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ ведут одинаково в смысле сходимости.

§ 4.5. Признак Даламбера. Предельный признак Даламбера

(Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783) – французский математик)

Теорема (Признак Даламбера). Если для ряда $\sum u_n$ с положительными членами существует такое число $q<1$, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le q$, то ряд $\sum u_n$ сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется условие $\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1$, то ряд $\sum u_n$ расходится.

Следствием из приведенного выше признака Даламбера является Предельный признак Даламбера.

Теорема. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд сходится, а при $\rho > 1$ – расходится. Если $\rho = 1$, то на вопрос о сходимости ответить нельзя.

§ 4.6. Радикальный и интегральный признаки Коши

Теорема (радикальный признак Коши) Если для ряда $\sum u_n$ с неотрицательными членами существует такое число $q<1$, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} \le q$, то ряд $\sum u_n$ сходится,

если же для всех достаточно больших n выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} \ge 1$, то ряд $\sum u_n$ расходится.

Следствие. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, то при $\rho<1$ ряд сходится, а при $\rho>1$ ряд расходится.

Теорема (интегральный признак Коши): Если $\varphi(x)$ – непрерывная положительная функция, убывающая на промежутке $[1;\infty)$, то ряд $\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n) + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(n)$ и несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} \varphi(x)dx$ одинаковы в смысле сходимости.

Следствие. Если *f(x)* и $\varphi(x)$ – непрерывные функции на интервале (a, b] и $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = h, \quad h \ne 0,$ то интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ ведут себя одинаково в смысле сходимости.

§ 4.6. Знакопеременные числовые ряды. Признаки сходимости. Свойства абсолютно сходящихся числовых рядов.

Знакочередующийся ряд можно записать в виде:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots$$

где $u_n > 0, \quad n = 1,2,3,\ldots$

Теорема (Признак Лейбница): Если у знакочередующегося ряда

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots$$

абсолютные величины u_i убывают $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$ и общий член стремится к нулю $u_n \to 0$, то ряд сходится.

Рассмотрим некоторый знакопеременный ряд (с членами произвольных знаков)

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

и ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1):

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \qquad (2)$$

Теорема. Из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).

Доказательство. Ряд (2) является рядом с неотрицательными членами. Если ряд (2) сходится, то по критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ существует число N, такое, что при $n > N$ и любом целом p>0 верно неравенство:

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| < \varepsilon$$

По свойству абсолютных величин:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| \le |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| < \varepsilon$$

$$\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}\right|<\varepsilon$$

Т. е. по критерию Коши из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1). Теорема доказана.

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum |u_n|$.

Очевидно, что для знакопостоянных рядов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд $\sum |u_n|$ расходится.

Теорема (Признак Даламбера сходимости знакопеременного ряда). Пусть $\sum u_n$ - знакопеременный ряд. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\rho$, то

при $\rho<1$ ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при $\rho>1$ ряд будет расходящимся;

при $\rho=1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Теорема (Признак Коши сходимости знакопеременного ряда). Пусть $\sum u_n$ - знакопеременный ряд. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\rho$, то

при $\rho<1$ ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при $\rho>1$ ряд будет расходящимся;

при $\rho=1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Рассмотрим некоторые основные свойства абсолютно сходящихся числовых рядов:

1) *Теорема*. Для абсолютной сходимости ряда $\sum u_n$ необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде разности двух сходящихся рядов с неотрицательными членами.

Следствие. Условно сходящийся ряд является разностью двух расходящихся рядов с неотрицательными стремящимися к нулю членами.

2) В сходящемся ряде любая группировка членов ряда, не изменяющая их порядка, сохраняет сходимость и величину ряда.

3) Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Перестановкой членов условно сходящегося ряда можно получить условно сходящийся ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, и даже расходящийся ряд.

4) *Теорема*. При любой группировке членов абсолютно сходящегося ряда (при этом число групп может быть как конечным, так и бесконечным и число членов в группе может быть как конечным, так и бесконечным) получается сходящийся ряд, сумма которого равна сумме исходного ряда.

5) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно и их суммы равны соответственно S и σ, то ряд, составленный из всех произведений вида $u_i v_k$, $i,k = 1,2,\ldots$ взятых в каком угодно порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна $S\cdot\sigma$ - произведению сумм перемножаемых рядов.

Если же производить перемножение условно сходящихся рядов, то в результате можно получить расходящийся ряд.

§ 4.7. Функциональные последовательности

Определение. Если членами ряда будут не числа, а функции от x, то ряд называется функциональным.

Исследование на сходимость функциональных рядов сложнее исследования числовых рядов. Один и тот же функциональный ряд может при одних значениях переменной x сходиться, а при других – расходиться. Поэтому вопрос сходимости функциональных рядов сводится к определению тех значений переменной x, при которых ряд сходится.

Совокупность таких значений называется областью сходимости.

Так как пределом каждой функции, входящей в область сходимости ряда, является некоторое число, то пределом функциональной последовательности будет являться некоторая функция: $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

Определение. Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если для любого числа $\varepsilon>0$ и любой точки x из рассматриваемого отрезка существует номер $N = N(\varepsilon, x)$, такой, что неравенство $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ выполняется при $n>N$.

При выбранном значении $\varepsilon>0$ каждой точке отрезка $[a,b]$ соответствует свой номер и, следовательно, номеров, соответствующих всем точкам отрезка $[a,b]$, будет бесчисленное множество. Если выбрать из всех этих номеров наибольший, то этот номер будет годиться для всех точек отрезка $[a,b]$, т.е. будет общим для всех точек.

Определение. Последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что неравенство $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ выполняется при $n>N$ для всех точек отрезка $[a,b]$.

§4.8. Функциональные ряды

Определение. Частными (частичными) суммами функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называются функции $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad n = 1,2,\ldots$

Определение. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется сходящимся в точке ($x=x_0$), если в этой точке сходится последовательность его частных сумм. Предел последовательности $\{S_n(x_0)\}$ называется суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в точке x_0.

Определение. Совокупность всех значений x, для которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется областью сходимости ряда.

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется равномерно сходящимся на отрезке $[a,b]$, если равномерно сходится на этом отрезке последовательность частных сумм этого ряда.

Теорема. (критерий Коши равномерной сходимости ряда). Для равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon>0$ существовал такой номер $N(\varepsilon)$, что при $n>N$ и любом целом $p>0$ неравенство $\left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon$ выполнялось бы для всех x на отрезке $[a,b]$.

Теорема (признак равномерной сходимости Вейерштрасса). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно и притом абсолютно на отрезке $[a,b]$, если модули его членов на том же отрезке не превосходят соответствующих членов сходящегося числового ряда с положительными членами: $M_1 + M_2 + ... + M_n + ...$ т.е. имеет место неравенство: $|u_n(x)| \le M_n$.

Еще говорят, что в этом случае функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ мажорируется числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{M}_n$.

§ 4.9. Свойства равномерно сходящихся рядов

Теорема (о непрерывности суммы ряда). Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции и ряд сходится равномерно, то и его сумма $S(x)$ есть непрерывная функция на отрезке $[a,b]$.

Теорема (о почленном интегрировании ряда). Равномерно сходящийся на отрезке $[a,b]$ ряд с непрерывными членами можно почленно интегрировать на этом отрезке, т.е. ряд, составленный из интегралов от его членов по отрезку $[a,b]$, сходится к интегралу от суммы ряда по этому отрезку.

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} u_n(x)dx; \quad \alpha, \beta \in [a,b]$$

Теорема (о почленном дифференцировании ряда). Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходящегося на отрезке $[a,b]$ представляют собой непрерывные функции, имеющие непрерывные производные, и ряд, составленный из этих производных $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ сходится на этом отрезке равномерно, то и данный ряд сходится равномерно и его можно дифференцировать почленно.

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{du_n(x)}{dx}$$

На основе того, что сумма ряда является некоторой функцией от переменной x, можно производить операцию представления какой – либо функции в виде ряда (разложения функции в ряд), что имеет широкое применение при интегрировании, дифференцировании и других действиях с функциями.

§ 4.10. Понятие степенного ряда

На практике часто применяется разложение функций в степенной ряд.

Определение. Степенным рядом называется ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ .$$

Для исследования на сходимость степенных рядов удобно использовать признак Даламбера.

Действия со степенными рядами:

1) Интегрирование степенных рядов.

Если некоторая функция *f(x)* определяется степенным рядом: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, то интеграл от этой функции можно записать в виде ряда:

$$\int f(x)dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C$$

2) Дифференцирование степенных рядов.

Производная функции, которая определяется степенным рядом, находится по формуле:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (a_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

3) Сложение и вычитание степенных рядов.

Сложение и вычитание степенных рядов сводится к соответствующим операциям с их членами:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

4) Умножение степенных рядов.

Произведение двух степенных рядов выражается формулой:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Коэффициенты c_i находятся по формуле:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

5) Деление двух степенных рядов выражается формулой:

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

Для определения коэффициентов q_n рассматриваем произведение $\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, полученное из записанного выше равенства и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_0 = q_0 b_0 \\ a_1 = q_0 b_1 + q_1 b_0 \\ a_2 = q_0 b_2 + q_1 b_1 + q_2 b_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = q_0 b_n + q_1 b_{n-1} + \ldots + q_n b_0 \end{cases}$$

§ 4.11. Теоремы Абеля

Теорема 1. Если степенной ряд $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ сходится при $x = x_1$, то он сходится и притом абсолютно для всех $|x| > |x_1|$.

Доказательство. По условию теоремы, так как члены ряда ограничены, то $\left|a_n x_1^n\right| \le k$, где k- некоторое постоянное число.

Справедливо следующее неравенство:

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_1^n\right| \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \le k \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$$

Из этого неравенства видно, что при $x<x_1$ численные величины членов нашего ряда будут меньше (во всяком случае не больше) соответствующих членов ряда правой части записанного выше неравенства, которые образуют геометрическую прогрессию. Знаменатель этой прогрессии $\left|\frac{x}{x_1}\right|$ по условию теоремы меньше единицы, следовательно, эта прогрессия представляет собой сходящийся ряд.

Поэтому на основании признака сравнения делаем вывод, что ряд $\sum \left|a_n x^n\right|$ сходится, а значит ряд $\sum a_n x^n$ сходится абсолютно.

Теорема доказана.

Таким образом, если степенной ряд $\sum a_n x^n$ сходится в точке x_1, то он абсолютно сходится в любой точке интервала длины $2\left|x_1\right|$ с центром в точке $x = 0$.

Следствие. Если при $x = x_1$ ряд расходится, то он расходится для всех $|x| > |x_1|$.

Таким образом, для каждого степенного ряда существует такое положительное число R, что при всех x таких, что $|x| < R$ ряд абсолютно сходится, а при всех $|x| > R$ ряд расходится. При этом число R называется радиусом сходимости. Интервал (-R, R) называется интервалом сходимости.

Отметим, что этот интервал может быть как замкнутым с одной или двух сторон, так и не замкнутым.

Радиус сходимости может быть найден по формуле:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|$$

Теорема 2. Если степенной ряд $\sum a_n x^n$ сходится для положительного значения $x=x_1$, то он сходится равномерно в любом промежутке внутри $(-|x_1|; |x_1|)$.

§ 4.12. Разложение функций в степенные ряды

Разложение функций в степенной ряд имеет большое значение для решения различных задач исследования функций, дифференцирования, интегрирования, решения дифференциальных уравнений, вычисления пределов, вычисления приближенных значений функции.

Возможны различные способы разложения функции в степенной ряд. Такие способы как разложение при помощи рядов Тейлора и Маклорена были рассмотрены ранее. (См. *Формула Тейлора*).

Применение формулы Тейлора для разложения функций в степенной ряд широко используется и имеет огромное значение при проведении различных математических расчетов. Непосредственное вычисление интегралов некоторых функций может быть сопряжено со значительными трудностями, а замена функции степенным рядом позволяет значительно упростить задачу. Нахождение значений тригонометрических, обратных тригонометрических, логарифмических функций также может быть сведено к нахождению значений соответствующих многочленов.

Если при разложении в ряд взять достаточное количество слагаемых, то значение функции может быть найдено с любой наперед заданной точностью. Практически можно сказать, что для нахождения значения любой функции с разумной степенью точности (предполагается, что точность, превышающая 10 – 20 знаков после десятичной точки, необходима очень редко) достаточно 4-10 членов разложения в ряд.

Применение принципа разложения в ряд позволяет производить вычисления на ЭВМ в режиме реального времени, что немаловажно при решении конкретных технических задач.

Рассмотри разложение в ряд некоторых элементарных функций.

1) Функция $f(x) = e^x$.

Находим:

$f(x) = e^x, \quad f(0) = 1$

$f'(x) = e^x, \quad f'(0) = 1$

… … … … … … … … …

$f^{(n)}(x) = e^x, \ f^{(n)}(0) = 1$

Тогда: $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \qquad 0 < \theta < 1$

Пример: Найдем значение числа e.

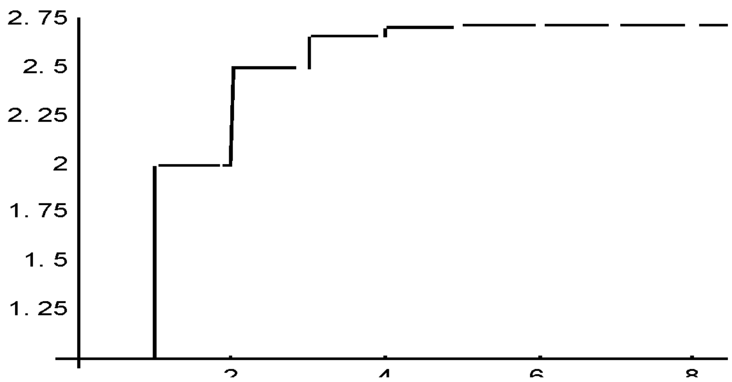
В полученной выше формуле положим $x = 1$.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{(n+1)!} e^{\theta}$$

Для 8 членов разложения: $e = 2{,}71827876984127003$

Для 10 членов разложения: $e = 2{,}71828180114638451$

Для 100 членов разложения: $e = 2{,}71828182845904553$



На графике показаны значения числа e с точностью в зависимости от числа членов разложения в ряд Тейлора.

Как видно, для достижения точности, достаточной для решения большинства практических задач, можно ограничиться 6-7 – ю членами ряда.

2) Функция $f(x) = sinx$.

Получаем

$f(x) = sinx;\ f(0) = 0$

$f'(x) = cosx = sin(x + \pi/2);\ f'(0) = 1;$

$f''(x) = -sinx = sin(x + 2\pi/2); f''(0) = 0;$

$f'''(x) = -cosx = sin(x + 3\pi/2); f'''(0)=-1;$

… … … … … … … … … … … … … … … … …

$f^{(n)}(x) = sin(x + \pi n/2);$ $\qquad f^{(n)}(0) = sin(\pi n/2);$

$f^{(n+1)}(x) = sin(x + (n + 1)\pi/2);$ $\qquad f^{(n+1)}(\varepsilon) = sin(\varepsilon + (n + 1)\pi/2);$

Итого:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x)$$

$$R_{2n}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\varepsilon)}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \pm\frac{\cos\varepsilon}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

На приведенных ниже графиках представлено сравнение точного значения функции и значения разложения в ряд Тейлора при различном количестве членов разложения.

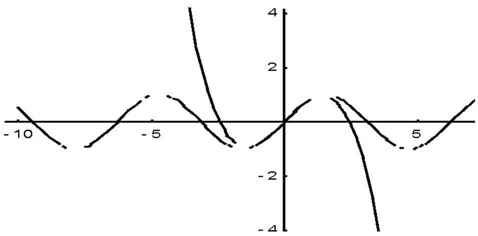


Рис. 1. Два члена разложения

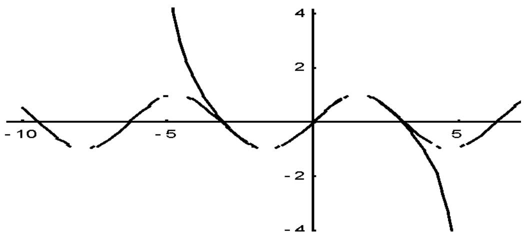


Рис. 2. Четыре члена разложения

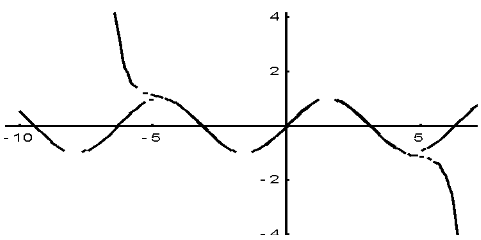


Рис. 3. Шесть членов разложения

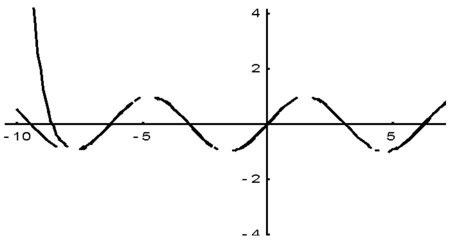


Рис. 4. Десять членов разложения

Чтобы получить наиболее точное значение функции при наименьшем количестве членов разложения надо в формуле Тейлора в качестве параметра *a* выбрать такое число, которое достаточно близко к значению *x*, и значение функции от этого числа легко вычисляется.

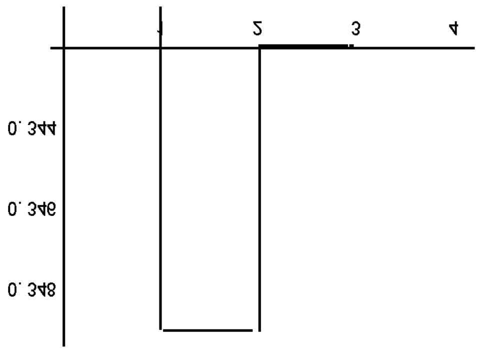
Для примера вычислим значение $\sin 20^0$.

Предварительно переведем угол 20^0 в радианы: $20^0 = \pi/9$.

Применим разложение в ряд Тейлора, ограничившись тремя первыми членами разложения:

$$\sin 20^0 = \sin\frac{\pi}{9} \cong \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^5 = 0{,}348889 - 0{,}007078 + 0{,}000043 = 0{,}341854$$

В четырехзначных таблицах Брадиса для синуса этого угла указано значение 0,3420.



На графике показано изменение значений разложения в ряд Тейлора в зависимости от количества членов разложения. Как видно, если ограничиться тремя членами разложения, то достигается точность до 0,0002.

3) Функция $f(x) = \cos x$.

Для функции $\cos x$, применив аналогичные преобразования, получим:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x)$$

$$R_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\varepsilon)}{(2n+2)!} x^{2n+2} = \pm \frac{\cos\varepsilon}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

4) Функция $f(x) = (1 + x)^{\alpha}$ (где α - действительное число)

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}; \quad f'(0) = \alpha;$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}; \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1);$$

………………………………………………………….

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}; \quad f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)$$

Тогда: $(1+x)^{\alpha} = 1 + \dfrac{\alpha}{1}x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2\cdot 1}x^2 + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}; \qquad 0 < \theta < 1$$

Если в принять $\alpha = n$, где n- натуральное число и $f^{(n+1)}(x)=0$, то $R_{n+1}=0$, тогда

$(1+x)^n = 1 + \dfrac{n}{1!}x + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^n$ (бином Ньютона).

5) Функция $f(x) = ln(1 + x)$.

$f(x) = ln(1 + x);$ $\qquad f(0) = 0;$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x};$ $\qquad f'(0) = 1;$

$f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2};$ $\qquad f''(0) = -1;$

$f'''(x) = \dfrac{-1\cdot(-2)}{(1+x)^3};$ $\qquad f'''(0) = 2;$

…………………………………………

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n};$ $\qquad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!;$

Итого: $\ln(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1\cdot 2}{3!}x^3 - \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n + R_{n+1}(x);$

$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_{n+1}(x)$ где $R_{n+1}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(n+1)!}\left(\dfrac{x}{1+\varepsilon}\right)^{n+1};$

Библиографический список

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А. Лекции по математическому анализу //М.: Дрофа, 2004. – 640 с.

2. Ильин В.А., Садовничий В.А. Математический анализ. Часть 1 //М.: Издательство Проспект, 2007. – 660 с.

3. Ильин В.А., Садовничий В.А. Математический анализ. Часть 2 //М.: Издательство Проспект, 2004. – 357 с.

4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть 1 //М.: Физматлит, 2005. – 645 с.

5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть 2 //М.: Физматлит, 2006. – 464 с.

6. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа // М.: Наука, 1985. – 384с.

7. Райков Д.А. Одномерный математический анализ //М.: Высшая школа, 1982. –416 с.

8. Райков Д.А. Многомерный математический анализ //М.: Высшая школа, 1989. –272 с.